



HAL
open science

Stabilité des états d'équilibre en présence de contact et de frottement

Stéphanie Basseville, Patrick Ballard, Alain Léger

► **To cite this version:**

Stéphanie Basseville, Patrick Ballard, Alain Léger. Stabilité des états d'équilibre en présence de contact et de frottement. 17e Congrès Français de Mécanique, Apr 2005, Troyes, France. hal-04213028

HAL Id: hal-04213028

<https://hal.science/hal-04213028>

Submitted on 21 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilité des états d'équilibre en présence de contact et de frottement

Stéphanie Basseville, Patrick Ballard & Alain Léger

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique - CNRS
31, Chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille cedex 20- FRANCE
bassevil@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé :

L'objectif de ce travail est d'étudier la stabilité des états d'équilibre d'un système dynamique simple en présence de contact et de frottement de Coulomb. L'application des théorèmes classiques de stabilité n'étant pas possible pour ce type de problème, on revient à la définition de la stabilité en étudiant l'évolution en temps de la distance entre une solution d'équilibre et la trajectoire solution d'un problème de Cauchy avec des données hors d'équilibre. Sachant que la dynamique est bien posée pour des données analytiques, on présente l'étude de la stabilité des états d'équilibre sous une force constante.

Abstract :

This work aims at studying the stability of equilibrium states for a mechanical system involving unilateral contact with Coulomb friction. The assumptions of classical stability theorems are not satisfied for this class of systems so that we come back to basic definitions of stability by studying the evolution in time of the distance between a given equilibrium and the solution of a Cauchy problem whose initial conditions belong to a neighbourhood of the equilibrium. The dynamic problem being well-posed for analytical data, we study the stability of the equilibrium states under a constant force.

Mots-clefs :

Dynamique discrète, Contact unilatéral, Frottement de Coulomb, Système de Klarbring, Stabilité

1 Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier la stabilité des états d'équilibre d'un système dynamique simple, présenté par Klarbring dans [1], en présence de contact et de frottement de Coulomb en revenant aux définitions de stabilité. Afin de discuter sans ambiguïté la stabilité d'états d'équilibre, les questions d'existence et d'unicité sont d'abord abordées. L'existence de solutions du système de Klarbring pour une force extérieure dans L^1 est établie par la convergence d'une discrétisation en temps. Ce résultat est présenté dans [2] et a été obtenu en adaptant légèrement une preuve donnée par Monteiro-Marques [3]. Se pose alors la question de l'unicité. En reprenant une construction proche de celle proposée par M. Schatzman [4] puis par P. Ballard [5], on montre que l'on ne peut espérer l'unicité même avec une force extérieure C^∞ [2]. Cela est obtenu grâce à un contre-exemple. En revanche, on montre dans [6] que l'on a unicité si le chargement extérieur est analytique.

La première partie de ce papier décrit l'ensemble des solutions d'équilibre en fonction des données du problème. L'obtention de ce résultat est présentée dans [7]. Il est cependant intéressant d'observer que, en fonction des données, un système discret même dans \mathbb{R}^2 , avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, peut posséder un seul état d'équilibre, ou deux, ou une infinité ; d'observer d'autre part que même dans le cas d'unicité, l'état d'équilibre peut être

en contact ou décollé ; qu'un état d'équilibre décollé peut coexister avec un état en contact ; que l'on peut avoir une infinité de solutions toutes en glissement imminent ; que plusieurs types d'infinités d'états d'équilibre en contact bloqué peuvent être obtenues. Et il est également intéressant d'observer que, les forces extérieures étant données, on passe de l'une à l'autre de ces situations lorsque varie le coefficient de frottement ou les paramètres de rigidité.

La seconde partie concerne l'analyse de la stabilité de ces états d'équilibre. Le chargement étant choisi constant, ceci assure le caractère bien posé de la dynamique. L'étude proposée ici ne se base que sur une intégration directe de la dynamique à partir de données voisines de l'équilibre. On obtient ainsi des résultats de stabilité pour tous les états d'équilibre possibles, l'état d'équilibre étant perturbé dans un espace de phases habituel.

2 Description du problème

On considère une particule ponctuelle, de masse m , évoluant dans un potentiel élastique quadratique, défini par une matrice de rigidité $\underline{K} = \begin{pmatrix} K_N & W \\ W & K_T \end{pmatrix}$ symétrique définie positive. Cette particule subit, également, l'action d'une force extérieure \underline{F} constante. De plus, la particule est contrainte à rester dans un demi-espace, et elle est soumise aux lois de contact et de frottement. Soit $\underline{X} \in \mathbb{R}^2$, on note par X_N la composante normale et par X_T la composante tangentielle. On note par $MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ (mouvement à accélération mesure) l'espace vectoriel

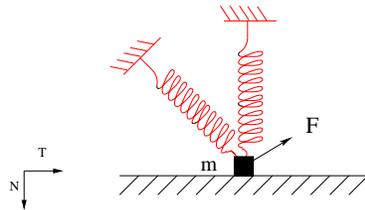


FIG. 1 – Système de Klarbring

des distributions dont la dérivée seconde est une mesure. Il s'agit des primitives de fonctions à variations bornées. Les fonctions \underline{U} dans MMA sont des fonctions continues et admettent des dérivées à gauche $\dot{\underline{U}}^-$ et à droite $\dot{\underline{U}}^+$ au sens classique. On note par \mathcal{M} l'ensemble des mesures. L'évolution de ce système est décrite par les relations :

Problème \mathcal{P}_u : Trouver $\underline{U} \in MMA([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ et $\underline{R} \in \mathcal{M}([0, \hat{T}]; \mathbb{R}^2)$ tels que :

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_0, \quad \dot{\underline{U}}^+(0) = \underline{V}_0, \quad (\text{condition initiale}) \quad (1)$$

$$m\ddot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F} + \underline{R} \quad (\text{équation du mouvement}) \quad (2)$$

$$U_N \leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0 \quad (\text{contact unilatéral}) \quad (3)$$

$$\forall V \in \mathcal{C}^0([0, \hat{T}]; \mathbb{R}), \quad \int_{[0, \hat{T}]} \langle R_T, V - \dot{U}_T^+ \rangle - \mu R_N (|V| - |\dot{U}_T^+|) \geq 0 \quad (4)$$

$$(\text{frottement de Coulomb}) \quad (5)$$

$$U_N(t) = 0 \implies \dot{U}_N^+(t) = 0 \quad (\text{loi d'impact complètement inélastique}) \quad (6)$$

où μ est le coefficient de frottement et où la condition initiale est supposée compatible avec la liaison unilatérale.

3 Ensemble des états d'équilibre

Afin de déterminer l'ensemble des états d'équilibre du problème \mathcal{P}_u , on résoud le problème statique \mathcal{P}_s associé :

Problème \mathcal{P}_s : Trouver $(\underline{U}, \underline{R}) \in (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tels que :

$$\begin{aligned} \underline{K} \underline{U} &= \underline{F} + \underline{R}, \\ U_N &\leq 0, \quad R_N \leq 0, \quad U_N R_N = 0, \\ |R_T| &\leq \mu |R_N|. \end{aligned} \quad (7)$$

(8)

On observe tout d'abord que puisque le système est constitué d'un seul point et que l'on cherche des états d'équilibre sous force constante, on peut étudier séparément l'existence de solutions avec contact ou sans contact. On obtient tout d'abord une condition d'existence de solutions sans contact. De telles solutions n'existent que si les données sont telles que $A \equiv K_T F_N - W F_T$ est strictement négatif. Les états d'équilibre en contact avec l'obstacle sont déterminés dans le plan $\{R_T, R_N\}$ comme l'intersection de la droite $R_T = \frac{A}{W} + \frac{K_T}{W} R_N$ et du cône de Coulomb donné par $|R_T| \leq \mu |R_N|$.

La dépendance de l'ensemble des équilibres en fonction des paramètres de rigidité, du coefficient de frottement et du chargement extérieur est résumée dans le tableau 1.

	$A < 0$	$A = 0$	$A > 0$
$\mu < \frac{K_T}{W}$	1 solution décollée	1 solution en contact affleurant	2 solutions en glissement imminent positif et négatif + une infinité de solutions en contact bloqué
$\mu = \frac{K_T}{W}$	1 solution décollée	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en glissement imminent positif	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué
$\mu > \frac{K_T}{W}$	1 solution décollée + 1 solution en glissement imminent positif	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en contact bloqué	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué

TAB. 1 – Ensemble des états d'équilibre.

4 Stabilité des états d'équilibre

4.1 Introduction

A présent, on s'intéresse à la stabilité des états d'équilibre. On étudie l'écart entre la position d'équilibre et la dynamique issue de données initiales voisines de cet état d'équilibre. Si on montre qu'il existe une donnée initiale perturbant l'équilibre, telle qu'après un temps fini ou asymptotiquement en temps, la dynamique diverge de l'équilibre, on conclut que l'équilibre est *instable*. Si on montre au contraire qu'aucune perturbation ne peut conduire à une divergence, on conclut à la stabilité, qui sera *Lyapunov* ou *asymptotique*. Si l'on considère le système dynamique discrétisé en temps associé au problème continu on remarque successivement qu'une perturbation en déplacement correspond au second itéré d'une perturbation en vitesse et qu'une perturbation en vitesse ayant une composante normale et une composante tangentielle correspond au second itéré d'une perturbation dans une seule de ces directions. On pourra donc se limiter à des perturbations en vitesse normale ou tangentielle. Afin de simplifier l'exposé, des lemmes concernant des phases particulières de la dynamique sont établis. Tous les résultats de stabilité s'obtiennent en suivant un raisonnement similaire. Par conséquent, dans ce qui suit, on détaille uniquement l'obtention du résultat de stabilité pour un état d'équilibre particulier à savoir l'état d'équilibre en contact affleurant caractérisé par $A = 0$ et $\mu = K_T/W$. L'obtention des autres résultats est détaillée dans [2].

4.2 Cas particulier : état d'équilibre en contact affleurant $A = 0$ et $\mu = K_T/W$

Le résultat de stabilité présenté nécessite l'introduction de deux lemmes préliminaires concernant des phases particulières de la dynamique.

Lemme 1 : $\left\| \begin{array}{l} \text{Supposons que dans une phase quelconque d'évolution, il existe un instant pour} \\ \text{lequel la solution se trouve à la pointe du cône de Coulomb avec une vitesse} \\ \text{tangentielle positive. Alors cet instant est suivi d'une phase de mouvement sans} \\ \text{contact, elle même suivie d'un instant d'impact } t^{imp}. \end{array} \right.$

Lemme 2 : $\left\| \begin{array}{l} \text{S'il existe } \hat{t} > 0 \text{ tel que } \dot{U}_T(\hat{t}) = 0 \text{ avec } U_N(\hat{t}) = 0. \text{ S'il existe un état d'équilibre} \\ (\underline{\tilde{U}}^{eq}, \underline{\tilde{R}}^{eq}) \text{ tel que } R_N(\hat{t}) = \underline{\tilde{R}}^{eq}, \text{ alors } \forall t > \hat{t}, \dot{U}_T(t) \equiv 0 \text{ et } \dot{U}_N(t) \equiv 0. \end{array} \right.$

On est ainsi en mesure d'établir le théorème suivant :

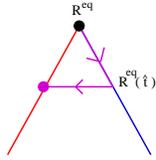
Théorème : $\left\| \begin{array}{l} \text{L'état d'équilibre en contact affleurant } \underline{U}^{eq} = (0, F_N/W), \underline{R}^{eq} = 0 \text{ caractérisé par} \\ A = 0 \text{ et } \mu = K_T/W \text{ est stable au sens de Lyapunov.} \end{array} \right.$

Preuve :

Conformément à la remarque précédente, le théorème sera démontré si l'on établit la relation suivante pour chaque type de perturbation

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \|\underline{V}_0\| < \eta \implies \|\underline{U}(t) - \underline{U}^{eq}\| < \varepsilon. \quad (9)$$

- Considérons tout d’abord une perturbation $V_{0T} < 0$.



Suite à une telle perturbation, il existe une phase de glissement négatif puis un instant \hat{t} tel que la vitesse s’annule. Cet instant est tel qu’il existe un état d’équilibre $(\tilde{U}^{eq}, \tilde{R}^{eq})$ tel que $R_N(\hat{t}) = \tilde{R}_N^{eq}$. D’après le lemme 2, la vitesse est identiquement nulle pour tout $t > \hat{t}$. Ainsi la relation 9 est satisfaite.

- Considérons une perturbation $V_{0T} > 0$.

D’après le lemme 1, il existe une phase de mouvement sans contact suivie d’un instant d’impact t_1^{imp} . L’évolution de la particule à partir de l’instant t_1^{imp} dépend du signe de la vitesse tangentielle $\dot{U}_T(t_1^{imp})$ au moment de l’impact. Deux situations sont envisageables :

Si $\dot{U}_T(t_1^{imp}) < 0$, il suffit de mener un raisonnement analogue au cas de la perturbation $V_{0T} < 0$ pour conclure ;

Si $\dot{U}_T(t_1^{imp}) > 0$, la masse glisse dans le sens positif avec une vitesse constante et atteint la pointe du cône. D’après le lemme 1, il existe une phase de mouvement sans contact puis un instant d’impact t_2^{imp} . On poursuit alors le raisonnement et on montre qu’il existe un instant t_l^{imp} tel que $\dot{U}_T(t_{l-1}^{imp}) > 0$ et $\dot{U}_T(t_l^{imp}) < 0$. On mène ensuite un raisonnement similaire au cas $\dot{U}_T(t_1^{imp}) < 0$ permettant de conclure. La relation 9 est ainsi vérifiée.

- Enfin, considérons une perturbation $V_{0N} < 0$.

Un raisonnement analogue au précédent permet d’obtenir la conclusion.

On a ainsi montré que la position d’équilibre en contact affleurant caractérisée par $A = 0$ et $\mu = K_T/W$ est *stable au sens de Lyapunov*. \square

4.3 Résultats de stabilité

Le tableau 2 résume tous les résultats de stabilité obtenus : stabilité au sens de Lyapunov, *stabilité asymptotique*, **instabilité**. Ces résultats ont été obtenus en menant un raisonnement dans le même état d’esprit que celui que nous venons de présenter et ont nécessité l’introduction de lemmes préliminaires supplémentaires. Ces travaux sont présentés dans [2].

5 Conclusions

L’approche présentée a l’originalité de n’étudier la stabilité qu’après avoir établi les conditions sous lesquelles le problème dynamique est bien posé. L’application des théorèmes classiques de stabilité n’étant pas possible pour ce type de problème, on est revenu à la définition de la stabilité en étudiant l’évolution en temps de la distance entre une solution d’équilibre et la trajectoire solution d’un problème de Cauchy avec des données hors d’équilibre.

On souhaite insister sur trois résultats obtenus ici. Le premier est que les positions d’équilibre en glissement imminent avec une réaction non nulle sont soit *stables au sens de Lyapunov* soit *instables*, ceci dépend des paramètres du système. Le second est que l’état d’équilibre en contact affleurant, qui semble être le moins régulier, est le seul possédant la stabilité la plus forte. En effet, lorsque cet état d’équilibre est unique, il est *asymptotiquement stable*. En revanche, s’il coexiste avec d’autres états d’équilibres il est *stable au sens de Lyapunov*. Enfin, les états d’équilibre en contact bloqué sont tous *stables au sens de Lyapunov*.

	$A < 0$	$A = 0$	$A > 0$
$\mu < \frac{K_T}{W}$	1 solution décollée	1 solution en contact affleurant	2 solutions en glissement imminent positif et négatif + une infinité de solutions en contact bloqué
$\mu = \frac{K_T}{W}$	1 solution décollée	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en glissement imminent positif	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué
$\mu > \frac{K_T}{W}$	1 solution décollée + 1 solution en glissement imminent positif	1 solution en contact affleurant + une infinité de solutions en contact bloqué	1 solution en glissement imminent négatif + une infinité de solutions en contact bloqué

TAB. 2 – Stabilité des états d'équilibre.

Références

- [1] A. Klarbring. Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction. *Ing.Arch*, 60 :529–541, 1990.
- [2] S. Basseville. *Dynamique et stabilité d'un système discret en présence de contact et de frottement*. Thèse de Mécanique, Université de la Méditerranée, 2004.
- [3] M.D.P Monteiro-Marques. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Shocks and Dry Friction*. Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1993.
- [4] M. Schatzman. Uniqueness and continuous dependence on data for a one dimensional impact problems. *Mathematical and Computational Modelling*, 28,4-8 :1–18, 1998.
- [5] P. Ballard. The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Arch. Rational. Mech. Anal*, 154 :199–274, 2000.
- [6] P. Ballard and S. Basseville. Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with coulomb friction : A model problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, à paraître, 2004.
- [7] S. Basseville, A. Léger, and E. Pratt. Investigation of the equilibrium states and of their stability for a simple model with unilateral contact and coulomb friction. *Archive of Applied Mechanics*, 73 :409–420, 2003.