



HAL
open science

La modélisation mathématique comme domaine de recherche : avancées dans l'analyse écologique

Berta Barquero

► **To cite this version:**

Berta Barquero. La modélisation mathématique comme domaine de recherche : avancées dans l'analyse écologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2024, Synthèses et perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques (Numéro spécial), pp.111-134. 10.46298/rdm.12908 . hal-04212975v2

HAL Id: hal-04212975

<https://hal.science/hal-04212975v2>

Submitted on 17 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

La modélisation mathématique comme domaine de recherche : avancées dans l'analyse écologique

Berta Barquero

Facultat d'Educació
Universitat de Barcelona

Cet article s'intéresse à l'évolution récente du domaine de recherche sur la modélisation mathématique et la manière dont différentes questions de recherche ont été formulées et abordées par des cadres théoriques internationaux. Ce travail se focalise plus particulièrement sur les dimensions « épistémologique », « économique » et « écologique » de ces différentes approches théoriques de la modélisation mathématique. Nous verrons que la problématique écologique est encore en grande partie absente de nombreuses approches. Ceci permettra, dans un second temps, de montrer certains outils de la théorie anthropologique du didactique (TAD) comme les parcours d'étude et de recherche (PER) que nous avons proposés pour faciliter la conception, la mise en œuvre et l'analyse des pratiques de modélisation dans différents niveaux scolaires et dans la formation des enseignants.

Mots-clés : modélisation mathématique ; problématique recherche ; dimension épistémologique ; dimension écologique ; parcours d'étude et de recherche

Mathematical modelling as a field of research: advances in the ecological analysis

This paper focuses on the recent evolution of the field of mathematical modelling research and how different research questions have been formulated and addressed by international theoretical frameworks. This paper focuses on the “epistemological”, “economic” and “ecological” dimensions of these different theoretical approaches to mathematical modelling. We will see that the ecological issue is still largely absent from many approaches. This will allow us, in a second step, to show some tools of the anthropological theory of the didactic (ATD) such as the study and research paths (SRP) that we have been proposed to facilitate the design, implementation and analysis of modelling practices in different school levels and in teacher education.

Keywords: mathematical modelling; research problems; epistemological dimension; ecological dimension; study and research paths

La modelización matemática como campo de investigación: avances en el análisis ecológico

Este artículo se centra en la evolución reciente del campo de la investigación en modelización matemática y en cómo se han formulado y abordado diferentes problemas de investigación en los distintos enfoques teóricos en el ámbito internacional. Nos centramos más concretamente en cómo los distintos enfoques teóricos a la modelización matemática abordan las dimensiones “epistemológica”, “económica” y “ecológica”. Mostraremos cómo la problemática ecológica sigue estando bastante ausente en muchos de estos enfoques. Esto nos permitirá, en la segunda parte, mostrar algunas herramientas de la teoría antropológico de lo didáctico (TAD), como los recorridos de estudio e investigación (REI) que han sido propuestos para facilitar el diseño, implementación y análisis de prácticas de modelización en distintos niveles escolares y en la formación de profesores.

Palabras clave: modelización matemática; problemas de investigación; dimensión epistemológica; dimensión ecológica; recorridos de estudio e investigación

Travail réalisé avec le support du projet de recherche RTI2018-101153-A-C22 du *Programa Estatal de I+D+i orientado a los Retos de la Sociedad* (MCIU/AEI/FEDER, UE) et PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE) de l’Espagne.

I. La modélisation mathématique comme domaine de recherche

Dans les dernières décennies, le champ de recherche connu comme « Applications et modélisation » a pris de l’ampleur dans la communauté internationale de recherche en didactique des mathématiques et a été soutenu par différentes réformes curriculaires. Les études sur l’enseignement et l’apprentissage de la modélisation mathématique ont fait essor, souvent liés à la justification et à la motivation de l’apprentissage des mathématiques (Blum et Niss, 1991 ; Blum *et al.*, 2007).

Les origines de ce domaine de recherche sur la modélisation mathématique peuvent se situer dans les travaux de Freudenthal (1968) et Pollak (1968), qui ont participé au symposium “Why to teach mathematics so as to be useful”. Cette origine est suivie par la constitution des ICTMA Conférences – *International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* – depuis 1983, ainsi que par la création de groupes de travail dans les conférences de didactique des mathématiques : dans le congrès international ICME avec le groupe de travail TSG22 *Mathematical applications and modelling in mathematics education* ou dans les congrès CERME de la société européenne avec le groupe TWG6 *Applications and Modelling*. Différents travaux décrivent l’origine et l’évolution de ce domaine de recherche, ainsi que son impact dans différentes directions (Kaiser et Sriraman, 2006 ; Blum, 2015 ; Schukajlow *et al.*, 2018).

Concernant l’évolution de ce domaine de recherche, on doit signaler la riche interaction transpositive avec des institutions « noosphériques ». Dans le langage des compétences (bien dominante actuellement dans de nombreuses réformes curriculaires en Europe), selon Niss et ses collègues (Niss, 2003), les compétences en matière de modélisation jouent un rôle décisif, ce qui montre que l’importance de la modélisation mathématique est reconnue à un large niveau international. Cette compétence

de modélisation a été inscrite parmi différentes compétences associées à la discipline mathématique à partir de l'approche proposée par le projet danois KOM.

D'autres outils construits par la recherche se sont aussi intégrés dans l'approche par compétences. Par exemple, une version du « cycle de modélisation » (Figure 1) est considérée comme la base conceptuelle du programme PISA pour la « culture mathématique » à promouvoir (voir, par exemple, OECD, 2019, p. 75-76) :

Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. [...] The modelling cycle (formulate, employ, interpret, and evaluate) is a central aspect of the PISA conception of mathematically literate students; however, it is often not necessary to engage in every stage of the modelling cycle, especially in the context of an assessment. (Blum, Galbraith et Niss, 2007, p. 3-32)

Ou, dans le *Common Core Standards* aux États-Unis (CCSS, 2022, p. 57-72) :

Modeling is best interpreted not as a collection of isolated topics but in relation to other standards. Making mathematical models is a Standard for Mathematical Practice [...] Modeling links classroom mathematics and statistics to everyday life, work, and decision-making. Modeling is the process of choosing and using appropriate mathematics and statistics to analyze empirical situations, to understand them better, and to improve decisions.

Outre les efforts pour faire de la modélisation une activité bien établie dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique mettent en évidence l'existence de fortes contraintes institutionnelles sur la diffusion généralisée et à long terme des mathématiques comme outil de modélisation dans les systèmes d'enseignement actuels. En rapport avec cet état des choses, Burkhardt (2008) souligne l'existence de deux réalités : d'une part, les progrès et les résultats encourageants de la recherche en matière de modélisation et d'applications pédagogiques ; d'autre part, les difficultés de sa diffusion à grande échelle dans les classes :

We know how to teach modelling, have shown how to develop the support necessary to enable typical teachers to handle it, and it is happening in many classrooms around the world. The bad news? 'Many' is compared with one; the proportion of classrooms where modelling happens is close to zero [...].
(*ibid.*, 2008, p. 2091)

Nous allons maintenant nous concentrer sur l'existence de différentes approches de recherche théorique dans le domaine de la modélisation mathématique (MoMa), ce qui nous permettra dans la section suivante d'approfondir leur caractérisation et leurs différentes propositions pour faire progresser l'enseignement et l'apprentissage de la MoMa.

2. Points de divergence et de rencontré dans le domaine de recherche sur la modélisation mathématique

Plusieurs tentatives ont été faites dans la communauté de recherche sur la modélisation et les applications pour analyser les diverses approches théoriques et connecter divers cadres pour concevoir et analyser les activités de modélisation mathématique (Kaiser et Sriraman, 2006 ; Cai *et al.*, 2014). Lorsque des

difficultés associées à l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation deviennent un objet d'étude, l'on voit apparaître différentes conceptions sur la modélisation mathématique. Aussi, la manière d'interpréter ces difficultés, les types d'entités qui sont pris en compte et le domaine empirique qui est considéré comme unité minimale d'analyse peuvent varier significativement selon le cadre de recherche choisi. Autrement dit, le choix des éléments de l'unité d'analyse peut conduire à des problèmes de recherche totalement différents et donner lieu à des résultats différents, voire incommensurables. Dans le cas que nous traitons dans ce chapitre, nous allons considérer trois cadres théoriques : l'approche du « cycle de modélisation » ; celle des *models and modeling perspective* ; et, finalement, la théorie anthropologique du didactique (TAD), qui va être plus largement développé.

Nous allons partir du travail de Barquero *et al.* (2019a) qui regarde comment différents cadres de recherche transforment un problème d'enseignement en un problème de recherche. Dans ce travail, les auteurs montrent la prise en compte de deux dimensions, la dimension *épistémologique* et la dimension *écologique*. Sa considération permet de comparer la manière dont les différentes théories abordent un problème d'enseignement sur la modélisation et le transforment comme une problématique de recherche, les éléments de la réalité éducative qu'elles questionnent et la manière dont elles délimitent leurs unités d'analyse. Cela permet d'expliquer des présupposés de la recherche qui restent d'habitude implicites et, donc, difficiles à comparer.

Dans un premier temps, nous allons considérer la *dimension épistémologique* sur la modélisation dans les trois approches choisies, liée à la manière spécifique de considérer la modélisation en relation à l'activité mathématique. Quelles sont les conceptions sur la modélisation mathématique qui prévalent dans chaque approche ? Quelles sont leurs principales caractéristiques et limites ? Ce sont de questions qui peuvent aider à expliciter les hypothèses de recherche sur lesquelles une approche théorique base le « modèle épistémologique de référence » considéré. D'après Bosch et Gascón (2006), les modèles épistémologiques de référence apparaissent comme des descriptions alternatives des connaissances que l'on se propose d'enseigner et d'apprendre. Ils sont élaborés par les chercheurs en utilisant des notions et des relations épistémologiques spécifiques en fonction de leur cadre de recherche. Par exemple, dans le cas de l'enseignement de la modélisation, les chercheurs élaborent leur conception de ce qu'est la modélisation en relation avec les mathématiques, et peuvent ensuite l'opposer à la conception implicite de l'institution d'enseignement.

Un élargissement important de cette première délimitation de l'unité d'analyse apparaît lorsque les *dimensions économique* et *écologique* sont prises en charge. La *dimension économique* nous fait questionner, depuis une certaine approche théorique, dans quelles conditions institutionnelles les activités de MoMa sont planifiées et mises en œuvre. La *dimension écologique* se focalise sur l'étude des conditions et contraintes qui favorisent ou qui entravent l'existence et évolution des activités de MoMa.

La différente intégration de ces trois dimensions *épistémologique*, *économique* et *écologique* conduit à la formulation de différentes questions de recherche dans le domaine de la modélisation et des applications et fournit de nouveaux outils pour y répondre de manière systématique. Nous développons, tout de suite, les premiers deux cas : l'approche du « cycle de modélisation » et du *models and modeling perspective*, pour montrer dans la prochaine section la spécificité du côté de la TAD.

2.1. Cas I : approche du « cycle de modélisation »

Dans le domaine de recherche de la modélisation et des applications (Blum, 2002 ; Blum *et al.*, 2007), ce qui semble prévaloir est l'interprétation de la modélisation en termes du « cycle de modélisation ». Des différents cycles de modélisation sont introduits dans la littérature avec des approches variées (voir Borromeo Ferri, 2006 pour une révision). Ces cycles renforcent la caractérisation de la « compétence de modélisation » comme étant la capacité à construire et à utiliser des modèles mathématiques en suivant des étapes appropriées (Blomhøj et Højgaard Jensen, 2003 ; Blum *et al.*, 2007).

Le cycle de modélisation (avec ses variations) semble particulièrement utile en tant que modèle épistémologique de référence pour analyser les processus cognitifs suivis par les élèves et les enseignants (Borromeo Ferri, 2007 ; Blum, 2015). Par exemple, plusieurs études se concentrent sur les blocages potentiels qui apparaissent généralement à chaque étape du processus de modélisation (Galbraith et Stillman, 2006) ; d'autres utilisent le cycle de modélisation pour analyser les « trajectoires de modélisation individuelles » ou les chemins cognitifs suivis par les élèves :

If modelling is considered under a cognitive perspective, the focus lies on the individual thinking processes, which are expressed mainly through certain verbal actions during modelling activities [...]. a special kind of modeling cycle has an important role as an instrument for analyzing both the modeling tasks used in my study and individual modeling processes. This kind of cycle was chosen because it is sufficiently detailed and thus a suitable instrument for analyzing cognitive processes. (Borromeo Ferri, 2010, p. 102-104)

On peut observer que les notions de « cycle de modélisation » et de « compétence de modélisation » fournissent des outils méthodologiques pour analyser les spécificités des activités de modélisation qu'une approche plus conceptualiste a des difficultés à décrire. Par exemple, ces cycles peuvent décrire ce que les élèves et les enseignants font lorsqu'ils traitent des activités de modélisation, quels types de blocages apparaissent et quelles actions et stratégies semblent plus utiles pour les aider à mener à bien un processus de modélisation complet.

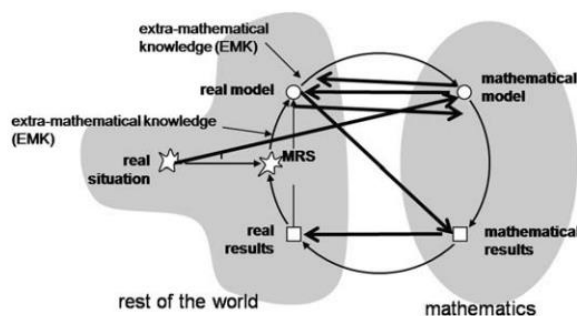


Figure 1. – Modeling route of Max (*ibid.*, p. 113)

Les activités de modélisation conçues dans cette approche sont généralement des processus d'enseignement courts (quelques séances) permettant d'observer les processus d'apprentissage et d'enseignement des élèves et des enseignants. Dans le cas présenté par Borromeo Ferri (2010, p. 100), la question de recherche est présentée comme « Comment les élèves de Seconde résolvent-ils les tâches de modélisation et quelles sont les influences des styles de pensée mathématique des apprenants sur les processus de modélisation dans les cours de mathématiques ? ». L'échantillon était composé de 64 élèves

et trois enseignants, dans trois classes de différents lycées allemands. Les élèves ont reçu trois tâches de modélisation différentes, une par séance de classe (90 minutes). Les tâches de modélisation utilisées sont de tâches bien connues, initialement développées dans des projets précédents (reprises du projet DISUM, Blum, 2011) sur le « phare » :

“Lighthouse”: In the bay of Bremen, directly on the coast, a lighthouse called “Roter Sand” was built in 1884, measuring 30.7 m in height. Its beacon was meant to warn ships that they were approaching the coast. How far, approximately, was a ship from the coast when it saw the lighthouse for the first time? Explain your solution. (Borromeo Ferri, 2010, p. 109)

Comme le justifie l’auteur, le choix visait à prendre en compte les différents styles de pensée mathématique des élèves. L’objectif n’était pas d’analyser un groupe au cours des trois leçons, mais d’impliquer le plus grand nombre possible d’étudiants dans des processus de modélisation individuels. Dans ce cas, l’unité d’analyse comprend de nouvelles façons de décrire les processus des élèves et des enseignants lorsqu’ils résolvent des activités de modélisation.

En dehors du cas qui nous a intéressé ici, il existe de nombreuses études allant dans le même sens et qui abordent des questions de recherche centrées sur les processus cognitifs des élèves ou enseignantes. Par exemple, Kaiser et Maaß (2007, p. 100) mettent l’accent sur « Dans quelle mesure les croyances mathématiques des élèves changent lorsque des problèmes de modélisation sont inclus dans l’enseignement ? » ou Galbraith et Stillman (2006) analysent quels types de « blocages » peuvent être détectés quand des étudiants avancent tout au long du cycle de modélisation.

2.2. Cas 2 : *models and modeling perspective*

Un autre modèle épistémologique de référence sur les activités de modélisation que nous allons considérer est celui proposé par la « perspective des modèles et de la modélisation » (*models and modelling perspective*, MMP, dans les termes originaux). Elle considère que les activités de modélisation sont particulièrement adaptées pour promouvoir l’engagement des élèves dans des activités de haut niveau et pour leur potentiel à soutenir les enseignants et les élèves dans l’enseignement et l’apprentissage des pratiques de modélisation (Carlson *et al.*, 2003 ; Doerr et English, 2006 ; Lesh *et al.*, 2003).

Doerr et English (2006) expliquent que la conception de tâches de modélisation favorise l’engagement des élèves dans des problèmes réalistes, révèle les multiples façons dont les élèves pensent aux tâches et les incite à évaluer l’utilité de leurs solutions.

We chose a sequence of mathematical modeling tasks because of their known potential for promoting student engagement with a realistic problem, for their potential in revealing the multiple ways students might think about the task, and for their capacity to engage students in evaluating the usefulness of their solutions. (*ibid.*, 2006, p. 6)

Les élèves participent dans des multiples activités au cours desquelles des constructions mathématiques importantes sont développées, explorées, étendues et appliquées, le tout aboutissant à un modèle réutilisable dans un large éventail de contextes. La modélisation mathématique est décrite ici en termes des « séquences de développement des modèles » impliquant différents types d’activités (Figure 2) :

élaboration de modèles (*model-eliciting*), exploration de modèles (*model exploration*) et adaptation de modèles (*model adaptation*) (Lesh *et al.*, 2003).

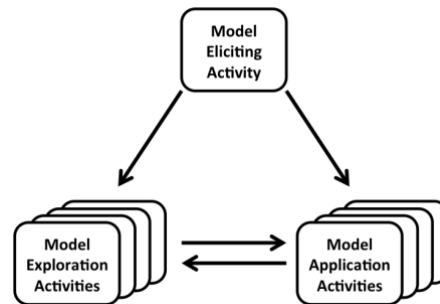


Figure 2. – Représentation des MMP activités (Lesh *et al.*, 2003 ; Doerr et English, 2006)

La modélisation est conçue comme une activité continue comprenant une chaîne de modèles, de séquences des modèles, sa construction et son raffinement. Les activités de modélisation sont pensées dans la mesure où elles peuvent aider élèves et enseignants à progresser dans une séquence de modèles : « susciter », « explorer », « appliquer » et « développer » des modèles. Les activités de modélisation sont reliées par un processus dynamique et adaptatif de création et de manipulation de structures conceptuelles qui aident un individu ou un groupe à résoudre des problèmes authentiques ou du monde réel.

Cette manière particulière de comprendre la modélisation mathématique conduit certains auteurs à proposer des manières alternatives de décrire des contenus mathématiques et des savoirs scolaires. Par exemple, dans la recherche de Carlson *et al.* (2003), les auteurs décrivent l’activité de modélisation en termes de « raisonnement sur le changement », le « raisonnement covariationnel » ou l’étude des « événements dynamiques », plutôt que sur les concepts de taux de variation ou de dérivée. En particulier, ils se sont intéressés à :

QR: Can research related to functions (Carlson, 1998) and co-variation (Carlson *et al.*, 2001) inform the design and use of model-eliciting activities? What effect does the use of model eliciting activities have on the development of undergraduate students’ covariational reasoning abilities? How can the models and modeling perspective inform the refinement of the Co-variation Framework? (Carlson *et al.*, 2003, p. 466)

La tâche de modélisation est présentée dans le contexte du dessin des bouteilles, annoncé comme : « Imaginez qu’une certaine bouteille se remplisse d’eau. Tracez un graphique de la hauteur en fonction de la quantité d’eau contenue dans la bouteille ».

Le cadre de covariation (Figure 3) décrit six catégories d’actions mentales qui ont été observées chez les élèves lorsqu’ils appliquent le raisonnement covariationnel dans le contexte de la représentation et de l’interprétation d’un modèle graphique d’un événement de fonction dynamique (Carlson, 1998). Les résultats de ces recherches ont révélé que le raisonnement covariationnel n’implique pas nécessairement les six actions mentales, qu’il ne consiste pas en une progression séquentielle de MA1 à MA6 et que les experts ne commencent pas toujours leur raisonnement à MA6 (Fig. 25.1). Le raisonnement covariationnel sophistiqué est caractérisé par la capacité d’analyser une situation en utilisant MA6, ainsi que la capacité de décortiquer cette action mentale en utilisant MA1 à MA5. Il y a là une évolution de la

description conceptuelle des mathématiques à une description plus phénoménologique, basée sur des « activités de modélisation » et un « cadre de co-variation ».

Covariation Framework	
Categories of Mental Actions (MA)	
MA1)	An image of two variables changing simultaneously;
MA2)	A loosely coordinated image of how the variables are changing with respect to each other (e.g., increasing, decreasing);
MA3)	An image of an amount of change of the output variable while considering changes in fixed amounts of the function's domain;
MA4)	An image of rate/slope for contiguous intervals of the function's domain;
MA5)	An image of continuously changing rate over the entire domain;
MA6)	An image of increasing and decreasing rate over the entire domain.

Figure 3. – Description du « cadre de covariation » (Carlson *et al.*, 2003, p. 467)

L'unité d'analyse considérée ici est plus large que la précédente puisqu'elle inclut des séquences plus longues d'activités de modélisation et des réorganisations des contenus mathématiques utilisés. La modélisation est conçue comme une activité continue comprenant une chaîne de modèles, de séquences, de construction et de raffinement. En outre, si l'on aborde la dimension *économique*, on peut dire que cette approche se concentre sur la conception des tâches et la généralisation des critères de conception pour évaluer les tâches proposées, en utilisant « six principes pour rédiger des activités de modélisation efficaces » (Hamilton *et al.*, 2008, p. 7). Parmi ces principes, il y a certaines considérations épistémologiques sur la façon dont la modélisation est comprise, et d'autres sur les nouveaux rôles et responsabilités des élèves et des enseignants (nous y reviendrons dans la section suivante). Les chercheurs s'étant attachés à concevoir des activités qui aident les élèves et les enseignants à progresser dans une séquence de développement de modèles, les activités prévues peuvent prendre plusieurs semaines.

En ce qui concerne la dimension *écologique*, bien que cette approche ne l'aborde pas directement, elle la relie au problème de la gestion des activités de modélisation (dimension *économique*) en reliant leur « viabilité » à la concrétisation de « six principes » de base pour leur conception : *model construction, reality, self-assessment, model documentation, generalizability, effective prototype* (Lesh *et al.*, 2003).

3. La modélisation mathématique dans la théorie anthropologique du didactique

Dans le cas de la théorie anthropologique du didactique (TAD), la modélisation mathématique est liée à la notion d'activité mathématique depuis les premiers développements du cadre théorique, en supposant que l'activité mathématique consiste principalement à produire, transformer, interpréter et développer des modèles mathématiques (Chevallard, 1989 ; Chevallard *et al.*, 1997).

Aborder des problèmes de recherche sur la modélisation dans la TAD implique de reformuler les processus de modélisation afin de les interpréter dans le cadre d'un modèle général de la construction et diffusion institutionnelles des savoirs mathématiques (et autres).

Comme bien l'indique Wozniak (2012), pour ne pas limiter la modélisation à l'étude mathématique d'un système non-mathématique, Chevallard (1989) propose un schéma simplifié du processus de modélisation qui articule un système (mathématique ou extra mathématique) et un modèle (mathématique) de celui-ci selon trois étapes avec la définition du système à étudier, la construction du modèle, et le travail dans le modèle. Plus concrètement Chevallard (1989, p. 53) :

1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. Nous désignerons ces variables par les lettres x, y, z, a, b, c , etc., nous réservant de revenir sur la question – majeure - que soulève cet usage un peu plus loin.
2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, $IR, IR', IR \llcorner$, etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.
3. On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

Les deux principaux éléments sont les notions de « système » et de « modèle » qui représentent davantage une fonction qu'une entité. Concernant la première entité, un système mathématiquement modélisable est considéré comme un domaine de la réalité, sans aucune limitation, qui peut être isolé du reste – même si ce n'est que de manière hypothétique. La notion de système inclut les systèmes extra mathématiques et les (intra) mathématiques.

Du côté des modèles, Chevallard (1989) distingue « travailler le modèle » et « travailler sur le modèle ». Travailler le modèle consiste à produire des connaissances relatives au système étudié. C'est-à-dire, l'intérêt ou la fécondité d'un modèle réside dans sa capacité à produire des connaissances sur le système modélisé qu'une autre voie ne nous donnerait pas aussi facilement. Travailler sur le modèle peut s'interpréter comme la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude » (*ibid.*, p. 57). La problématique de l'adaptation du modèle au système est une tâche qui doit être au cœur du processus de modélisation.

Ces conceptions sur les systèmes et modèles ont des conséquences sur la conception du processus de modélisation. Celui-ci n'est pas un processus linéaire, une réversibilité de la relation de modélisation est toujours possible :

Le rapport du système au modèle peut en effet s'inverser ; le système peut apparaître, à rebours, comme un modèle de son modèle. (*ibid.*, p. 56)

Et, en plus, le travail sur le modèle peut comporter la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude, et qui impliquent une redéfinition des systèmes à modéliser donc les systèmes, modèles et connaissances générées font partie des nouveaux systèmes à considérer.

Dans l'interaction entre définition du système et la construction du modèle, ou dialectique systèmes-modèle, la *réversibilité de la relation* système-modèle et la *réurrence* du processus de modélisation sont deux propriétés clés pour comprendre la conceptualisation de la modélisation proposée dans ce cadre théorique.

La relation entre la modélisation mathématique et la construction des connaissances mathématiques ou extra mathématiques est abordée à travers la notion de *praxéologie* (\mathcal{P}), qui est le principal outil proposé par la TAD pour décrire les connaissances et les activités dans les contextes institutionnels (Chevallard, 1999). Une praxéologie est une entité formée par la combinaison de la *praxis* – le savoir-faire ou les manières de faire – et du *logos* – un discours organisé sur la praxis. Le bloc praxis contient des *types de tâches* et des ensembles de *techniques* pour réaliser ces tâches, tandis que le bloc logos comprend une *technologie* (un discours sur les techniques) et une *théorie* pour justifier la technologie. Ce quatuor $\mathcal{P} = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta]$ offre une vision unitaire des activités humaines sans dissocier le « faire » du « penser et raconter sur le faire ».

La notion de praxéologie relie l’aspect conceptuel et procédural des activités humaines en incluant, comme entités inséparables, la *praxis* faite de types de tâches et de techniques pour les résoudre, et le *logos* fait de discours et d’outils théoriques pour décrire, expliquer, justifier et nourrir la praxis. Modéliser une situation donnée pour obtenir de nouvelles informations ou connaissances à son sujet peut être décrit en termes de praxéologies : nous partons d’une tâche que nous voulons résoudre, nous utilisons une technique pour produire un modèle de la situation ou du système qui sous-tend la tâche, nous soutenons cette praxis par des notions, des outils et des justifications fournis par la théorie (ou logos). De plus, une fois qu’un système donné a été modélisé, une nouvelle praxéologie peut être développée en intégrant le modèle produit dans de nouvelles techniques pour résoudre de nouvelles tâches au sein d’un logos plus développé.

Par conséquent, dans la TAD, la modélisation peut être conçue comme un *processus de construction et articulation d’une séquence de praxéologies mathématiques qui deviennent progressivement plus larges et plus complexes* afin des répondre à certaines questions problématiques qui ont été soulevées dans un domaine des mathématiques ou de la réalité extra-mathématique (García *et al.*, 2006 ; Barquero, 2009).

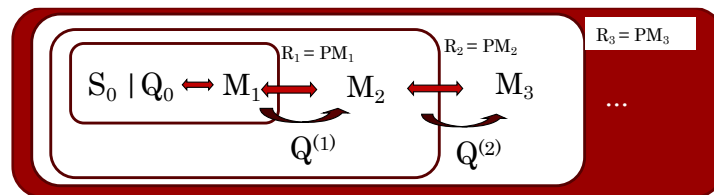


Figure 4. – Représentation simplifiée du processus de modélisation mathématique en termes d’articulation des praxéologies mathématiques (PM)

Il s’agit également d’un processus *récuratif* puisque chaque modèle (ou praxéologie) proposé peut, à son tour, être remis en question et devenir un système pour un nouveau processus de modélisation. Cela permet de connecter et de coordonner ce dialectique *systèmes et modèles mathématiques* (ou les praxéologies mathématiques) dans des organisations de connaissances plus larges et plus complètes.

Les caractéristiques que nous avons commentées ici sur le modèle épistémologique de référence de la MoMa depuis la TAD, seront précisées et exemplifiées dans la section suivante dans deux exemples concrets.

Ces exemples ont été choisis afin, d’une part, d’illustrer certaines des caractéristiques principales discutées à propos de ce modèle épistémologique de référence et, d’autre part, de montrer comment il nous permet

de repenser les mathématiques en termes de modélisation mathématique, soit de thèmes concrets (comme la « combinatoire »), soit de la relation de la discipline mathématiques avec d'autres disciplines (comme le cas des mathématiques pour des études de science expérimentaux). Ces exemples illustreront un aspect de la dimension *économique* du problème de la gestion des activités de modélisation que l'on peut aborder dans la TAD en termes de *parcours d'étude et de recherche* (Chevallard, 2006 et 2015 ; Bosch, 2018). Nous indiquerons uniquement ici que les PER apparaissent, dans le cadre de la TAD, comme des dispositifs d'enseignement pour surmonter divers phénomènes didactiques liés au paradigme de la « visite des œuvres ». Ils permettent de créer et étudier les conditions qui favorisent et les contraintes qui empêchent la mise en œuvre, l'intégration et la diffusion des pratiques de modélisation mathématique.

La dimension écologique au cœur de la TAD

La perspective institutionnelle qui est au cœur de la TAD semble particulièrement productive pour intégrer explicitement la *dimension écologique* des activités de modélisation. L'origine peut être située dans l'étude du processus de transposition didactique au cœur de l'étude des phénomènes de création, transformation et diffusion des savoirs (Chevallard, 1985 ; Chevallard et Bosch, 2014). Dans cette perspective, il n'est pas possible d'interpréter les mathématiques scolaires de manière précise sans tenir compte des autres institutions impliquées dans la reconstruction des connaissances mathématiques, depuis le moment où celles-ci sont produites jusqu'à celui où elles sont enseignées et apprises (Bosch et Gascón, 2006, p. 55-56).

Le fait de se donner une définition propre de l'activité de modélisation mathématique (MoMa), toujours en évolution, permet de repérer, décrire et analyser les différentes conceptions ou modèles dominants de la MoMa qui existent dans les différentes institutions qui interviennent dans les processus de transposition didactique. En d'autres termes, étudier les phénomènes didactiques liés aux problématiques sur l'enseignement et apprentissage de la MoMa implique prendre en compte l'ensemble des *conditions* et des *contraintes* qui émergent des modèles épistémologiques et didactiques existant dans les différentes institutions du processus de transposition didactique.

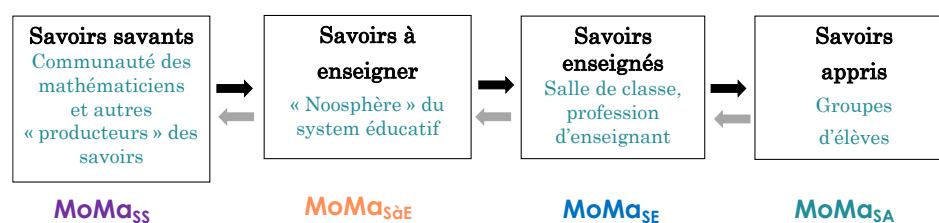


Figure 5. – Processus de transposition didactique

Dans la première étape du processus, la question porte sur la manière dont les mathématiques et la modélisation mathématique sont conçues dans les institutions « productrices des savoirs » (MoMa_{SS}). Dans la deuxième étape, on se demande quelles activités liées à la modélisation sont sélectionnées et quelles décisions sont prises par les institutions « noosphériques » pour élaborer les savoirs à enseigner (MoMa_{SàE}). Enfin, dans les deux dernières étapes, on retrouve les questions les plus habituelles, sur comment la MoMa est pris comme savoir à enseigner (MoMa_{SE}) est finalement enseignées et apprises

(MoMa_{SA}) comme un savoir à enseigner dans une salle de classe et group d'élèves ou individus particuliers (voir Figure 5).

Par conséquent, l'unité d'analyse considérée dans la TAD comprend des données empiriques qui apparaissent tout au long des étapes et institutions impliquées dans le processus de transposition didactique de la MoMa afin d'analyser ce qui est (et ce qui n'est pas) finalement considéré et transposé dans un contexte d'enseignement et apprentissage particulier, et pourquoi. Pour développer plus en détail cette analyse écologique, Chevallard (2002) a introduit une échelle de *niveaux de codétermination didactique* (voir Figure 6) comme cadre pour identifier les différents types de conditions et de contraintes de nature très différent et qui affectent à la fois les processus de transposition et la diffusion des pratiques d'enseignement et d'apprentissage de la MoMa.

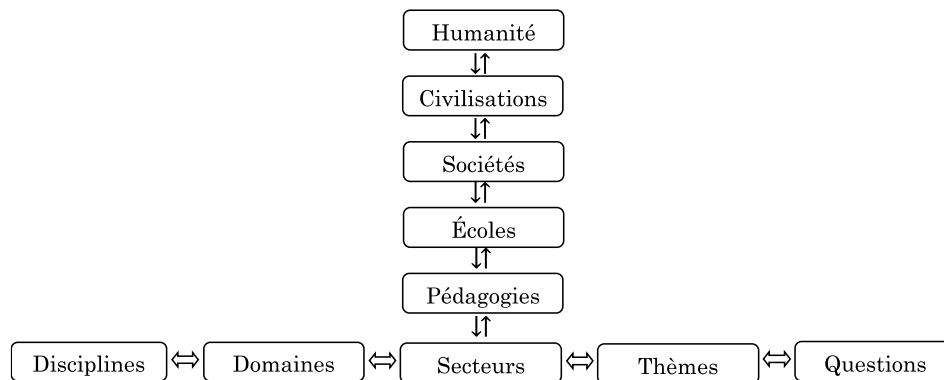


Figure 6. – Échelle des niveaux de codétermination didactique

Cette échelle va du *niveaux supérieurs ou plus génériques*, de l'humanité et les civilisations, au niveau le plus *spécifiques de la discipline* (en particulier mathématique), des thèmes ou les questions spécifiques considérées. Les niveaux spécifiques font référence à la manière dont une discipline est organisée (en domaines, secteurs, thèmes et questions) dans un processus d'enseignement et d'apprentissage donné, et cela varie en fonction de la discipline et aussi de l'institution et niveau d'enseignement considérée. Les niveaux supérieurs ou génériques de codétermination se réfèrent aux conditions et contraintes plus générales provenant de la manière dont nos civilisations et sociétés, à travers les écoles (l'école secondaire ou l'université, par exemple), organisent des conditions pédagogiques pour d'enseignement des savoirs disciplinaires. Ce cadre général, auquel différentes approches peuvent contribuer, permet de détecter les contraintes qui apparaissent à différents niveaux, englobant les contraintes spécifiques liées à la manière dont les contenus mathématiques sont proposés pour être enseignés et appris dans les institutions scolaires, les contraintes générales concernant l'organisation générale des activités scolaires, et le rôle assigné aux écoles dans nos sociétés.

La stratégie méthodologique de la TAD pour aborder des problématiques de recherche sur la MoMa, est celle de considérer le questionnement écologique comme dimension centrale de la recherche, et aborder des questions de recherche sur : Quelles sont les conditions requises et les contraintes qui empêchent l'enseignement, l'apprentissage, l'étude et l'utilisation de la mathématique comme outil de modélisation (au sens de de la TAD) dans l'enseignement des mathématiques ? Auquel niveau de l'échelle de codétermination didactique ces contraintes apparaissent-ils, quelles sont leurs portées et comment peuvent-ils être modifiées ?

4. Des exemples d'activités et dispositifs d'enseignement pour la modélisation mathématique dans la TAD

4.1. La combinatoire dans une perspective de modélisation mathématique

Vásquez *et al.* (2021) abordent des questions sur comment cette perspective de modélisation peut aider à concevoir, mettre en œuvre et analyser une proposition d'enseignement de la combinatoire à l'école secondaire. Cette activité de modélisation s'inscrit dans un PER qui part de la considération de certains types particuliers de cadenas (Figure 7) et la question génératrice Q_0 sur « Quel cadenas est le plus sûr ? ». Dans le travail de Vásquez *et al.* (2021), les auteurs se concentrent sur deux implémentations consécutives de ce PER avec des élèves de 2^e (15-16 ans) dans une école catalane ayant une longue expérience d'innovation éducative pendant 2 mois, en 2019/20 et 2020/21. La soixantaine des élèves de 2^e ont été distribués en 2-3 groupes classe, avec trois enseignants qui changent de groupe-classe à chaque séance. Les élèves travaillent en petits groupes de 5-6 et doivent fournir après chaque séance un « bilan d'étape » par écrit chaque jour, une présentation à la fin du parcours, passer un examen et répondre à un questionnaire individuel. La responsable du cours est une professeure avec expérience qui fait une thèse en didactique des mathématiques, les deux autres professeurs ne sont pas formés en didactique.

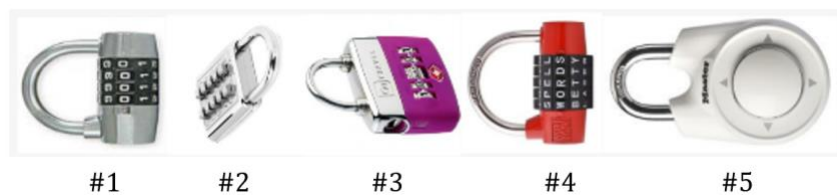


Figure 7. – Types particuliers de cadenas

Dans un premier temps, les étudiants travaillent avec des différents cadenas en se focalisant sur la question dérivée Q_1 « Combien de « codes » peut-on former avec chaque cadenas ? Quelles stratégies peut-on utiliser pour les dénombrer ? » Ces cadenas constituent le *système initial* (S_1). Dans une première phase, les étudiants peuvent proposer des modèles initiaux (voir Figures 8 et 9 avec type de *Modèle 1*, M_1 et *Modèle 2*, M_2) pour bien décrire le répertoire des combinaisons possibles. Ils obtiennent ainsi un premier modèle à partir de, par exemple, la liste des codes ou combinaisons possibles pour chaque cadenas (en les écrivant manuellement ou en utilisant Excel) (*Modèle 1*) ou, en préparant une liste initiale de codes possibles et des calculs arithmétiques pour faciliter le comptage total (*Modèle 2*¹).

¹ Il faut tenir compte que ce *Modèle 2* (M_2) peut être considéré comme une nouvelle étape de modélisation, qui part d'un système enrichi, par rapport à S plus le travail dans le *Modèle 1* (M_1), c'est-à-dire que le système de départ S et les réponses générées par le M_1 , avec les listes de symboles pour le comptage, vont former le nouveau système S_2 à partir duquel commence la construction du *Modèle 2* prend du sens.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"012"	102	201	301	401	501	601	701	801	901
"013"	103	203	302	402	502	602	702	802	902
"014"	104	204	304	403	503	603	703	803	903
"015"	105	205	305	405	504	604	704	804	904
"016"	106	206	306	406	506	605	705	805	905
"017"	107	207	307	407	507	607	706	806	906
"018"	108	208	308	408	508	608	708	807	907
"019"	109	209	309	409	509	609	709	809	908
"021"	120	210	310	410	510	610	710	810	910
"023"	123	213	312	412	512	612	712	812	912
"024"	124	214	314	413	513	613	713	813	913
"025"	125	215	315	415	514	614	714	814	914
"026"	126	216	316	416	516	615	715	815	915
"027"	127	217	317	417	517	617	716	816	916
"028"	128	218	318	418	518	618	718	817	917

Figure 8. – Type de Modèle 1 avec le répertoire des combinaisons possibles pour chaque cadenas

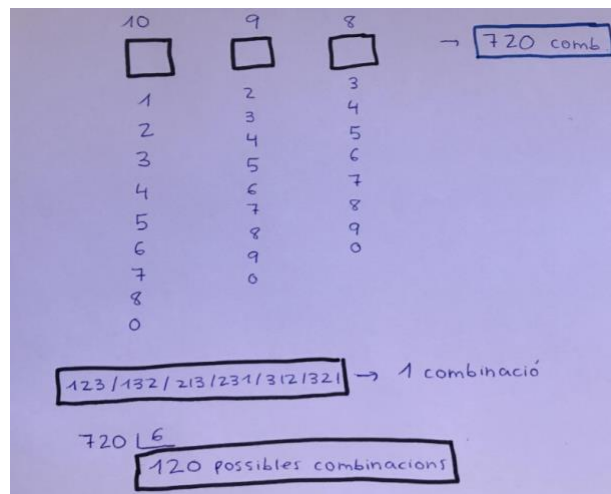


Figure 9. – Type de Modèle 2 avec les calculs arithmétiques pour le dénombrement du total

Dans cette première phase, il est important que, une fois que les étudiants ont prédit le nombre total de codes, ils puissent expliquer les modèles utilisés, justifier leur utilisation et la réponse qui en résulte. Il apparaît une limitation importante relative aux validations des résultats finals, Espagne : *Comment savoir si on les a tous comptés ?* Si bien, la *dimension expérimentale* est cruciale et les élèves peuvent vérifier manuellement en utilisant les cadenas pour simuler toutes les combinaisons possibles, ils ne disposent pas de techniques pour calculer le total sans avoir à écrire la liste entière. À ce stade, il faut que les étudiants puissent identifier et débattre des variables critiques du système initial à modéliser et il faut accorder une terminologie spécifique pour décrire les éléments à compter et déterminer leurs caractéristiques. En particulier, des questions dérivées importantes sont : Comment nommer les cellules ou positions du cadenas et les autres éléments (chiffres, lettres, symboles, etc.) ? Combien de symboles peut-on avoir dans une cellule ou position ? Les éléments peuvent-ils être (ou non) répétés ? L'ordre dans lequel on saisit chaque élément est-il important ? Ce sont quelques-unes des questions dérivées qu'il est possible de se poser dans cette première phase.

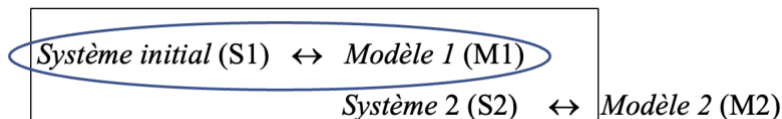


Figure 10. – Dialectique système-modèle, première évolution (voir Figure 5)

Dans une deuxième phase, les enseignants apportent quatre nouveaux cadenas avec quelques variations par rapport aux cinq initiaux. Avec cette variation, ils introduisent de nouvelles conditions sur la composition du mot de passe des cadenas. La question principale Q_2 à traiter est : « Peut-on utiliser le même type de techniques de comptage pour trouver le nombre total de codes de sécurité pour n’importe lequel de ces nouveaux cadenas ? » L’objectif principal de cette étape est de tester la validité des techniques de modélisation et des modèles résultants (M1 et M2) considérés dans la situation précédente et de comprendre les changements que les nouveaux cadenas introduisent dans le système. On pourrait dire que cette deuxième phase vise à renforcer la praxéologie de la modélisation, en faisant la partie *logos* plus explicite (ce qu’ils ont fait, ce qui fonctionne et ne fonctionne pas maintenant, pourquoi, etc.). De plus, c’est un moyen de discuter de la portée des techniques et des modèles en proposant aux étudiants un système élargi.

Une fois que les étudiants ont effectué tous les calculs pour les neuf cadenas différents (cinq avec de nouvelles restrictions et quatre nouveaux), nous nous attendons à ce que les questions suivantes apparaissent « Q_3 : Est-ce qu’il existe une formule qui pourrait simplifier le comptage total des combinaisons ? Ces formules sont-elles spécifiques du type de cadenas que nous voulons comprendre ? » Nous nous attendons alors la considération des modèles (*Modèle 3*, M3 ; voir Figure 11) basés sur les formules numériques associés à la classification (bien que provisoire) des cadenas.

Classification of all padlocks according to the resolution method

Name of the group of padlocks	Padlocks in the group	Calculation of the number of combinations of each padlock	Proposed formula
The raised padlocks	1	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ combinations	n^m
	3*	$4 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 10 = 48.000$ combinations	$n =$ number of cell elements $m =$ number of cells
	4	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$ combinations	*unless the number of cell elements is different, we use the multiplication of the number of cell elements (as in padlock 3)
	5	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ combinations	
The dividing padlocks	2	$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 / 6 = 120$ combinations	$n!$ is the number of cell elements multiplied by the next number in descending order.
	7	$10 \cdot 9 / 1 \cdot 2 + 10 \cdot 9 \cdot 8 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots = 1.013$ combinations	$m!$ is the number of cells multiplied by the next number in descending order. $\frac{n!}{m!(n-m)!}$
The factorial padlocks	6	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ combinations	$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots$
	8*	$4 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9 = 38.880$ combinations	$n =$ number of cell elements
	9	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ combinations	*unless the number of cell elements does not change (as in padlock 8)

Figure 11. – Travail dans le Modèle 3 avec les formules numériques sujet aux classification provisoire des cadenas

La troisième phase arrive avec une extension importante de la situation initiale, allant au-delà de la problématique du cadenas présentée initialement. Dans ce sens, tout le travail construit dans les phases précédentes fait maintenant partie du système à modéliser. La question à aborder avec les étudiants est Q_4 : « Comment élaborer une technique générale pour trouver le nombre de combinaisons pour chaque cadenas ? » Cette phase implique que des informations « externes » soient ajoutées à l'étude, par exemple des formules algébriques (*Modèle 4, M4*) pour le calcul du nombre total de combinaisons possibles sont considérés. Cette introduction peut être faite par l'enseignant ou résulter de la recherche et la proposition du côté des élèves.

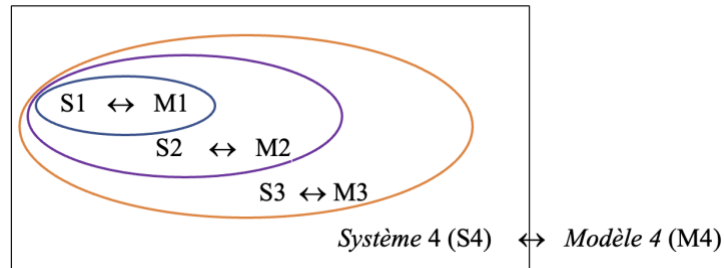


Figure 12. – Dialectique système-modèle, résumé de l'enjeu S-M

Il convient de souligner la nature *réursive* du processus de modélisation et la *dialectique cruciale entre les systèmes* qui les définissent *et les modèles* qui permettent de les étudier (résumé dans la Figure 12). Le système à modéliser n'est pas unique, il évolue et s'enrichit des travaux sur les différents modèles et des nouvelles questions qui surgissent dans ces travaux. C'est dans ce travail que les praxéologies de modélisation (questions traitées, techniques et technologies de modélisation et théorie soutenant le travail pratique de modélisation de la situation de dénombrement) évoluent et que des structures de plus en plus complètes et complexes sont créées dans les systèmes, modèles et questions abordées.

Le dernier aspect important à mentionner est que, une fois que les élèves ont utilisé les différents modèles pour déterminer le nombre de combinaisons possibles pour chaque cadenas, ils ont commencé à utiliser les cadenas comme modèles pour étudier une variété de nouvelles situations de problèmes de comptage (nouveaux systèmes) proposées par les enseignants. À ce stade, les enseignants prévoient de présenter une liste d'autres contextes, avec des exemples de situations comprenant différentes combinaisons d'éléments à compter. Les élèves analysent alors les nouveaux systèmes proposés et prennent des décisions sur la valeur des variables qui caractérisent les situations combinatoires, ainsi que sur le modèle à utiliser. Ce travail requiert d'associer les praxéologies de modélisation développées dans les étapes précédentes (associés aux cadenas) aux nouvelles situations ou systèmes à modéliser. Cette utilisation des cadenas permet de caractériser la collection pour ensuite associer une formule algébrique de comptage de ses éléments. Dans ce deuxième type de situations, les cadenas apparaissent comme ce qu'on peut appeler des *modèles intermédiaires* entre le système (collection d'éléments à compter) et la formule algébrique (voir Figure 13).

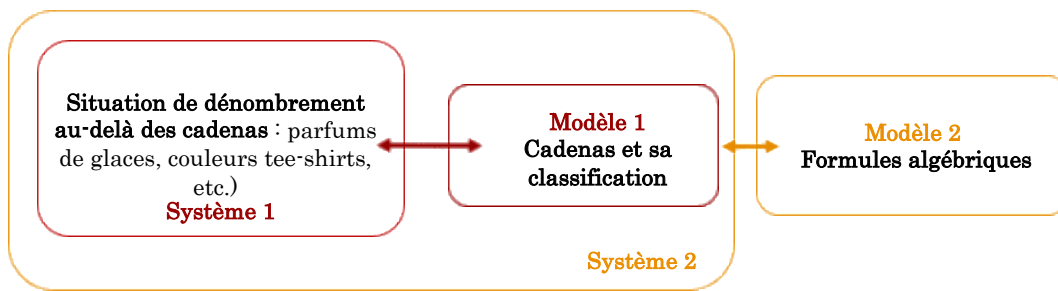


Figure 13. – Réversibilité du rôle de système-modèle

4.2. Reconstruction du programme des mathématiques à l'université dans une perspective de MoMa

Barquero *et al.* (2013) présentent l'un des premiers parcours d'étude et de recherche (PER) expérimentés au niveau universitaire. La conception et la mise en œuvre de ce PER visaient à résoudre le problème de l'enseignement de la modélisation au niveau universitaire et à traiter le phénomène didactique généralisé consistant à réduire l'activité de modélisation à la simple « application » de certains modèles et contenus préétablis.

Les chercheurs ont conçu ce PER en accordant une attention particulière au processus de modélisation à développer avec les étudiants et à la façon comme ce travail de modélisation était capable de donner de fonctionnalité et articulation aux contenus mathématiques du cours de mathématiques (1^{re} année, science expérimentaux). La conception *a priori* de ce PER comprenait une délimitation minutieuse des questions génératrices et dérivées qui pourraient être posées ainsi que des modèles mathématiques et des connaissances qui semblaient apporter des réponses. Ce PER sur « Comment prévoir l'évolution de la taille des populations ? » a été mis en œuvre pour tester son potentiel pour l'enseignement de la modélisation mathématique.

Ce PER a été mis en œuvre le long d'un cours annuel sur les « Fondements mathématiques pour l'ingénierie » pendant cinq années consécutives, de 2005/06 au 2009/10) avec des étudiants de génie chimique industriel, dans un « Atelier de modélisation mathématique » qui a été créé uniquement pour développer le PER et qui a été mis en route en parallèle des séances de cours et de travaux dirigés. Ces trois dispositifs pédagogiques universitaires ont été facilement coordonnés car il n'y avait qu'un groupe d'environ 35 étudiants et 2 enseignants, l'un responsable des séances théoriques et l'autre (auteur de ce chapitre) qui a guidé les séances de travaux dirigés et l'atelier. Bien qu'il y ait un programme d'études à accomplir, les enseignants-chercheurs avaient la liberté de le mener de la manière la plus pratique.

La question génératrice Q_0 de ce PER peut se formuler ainsi : « Comment pouvons-nous prédire le comportement à long terme de la taille d'une population, compte tenu de sa taille lors des périodes précédentes ? Quelles hypothèses doivent être faites sur la population et son environnement ? Comment prévoir l'évolution de la taille de la population et comment tester sa validité ? ».

Sous la direction des enseignants du cours, les étudiants ont avancé sur la construction des différents modèles mathématiques en fonction des hypothèses faites sur le temps (quantité discrète ou continue, prédiction à court ou long terme), la relation entre les générations de la population (générations

indépendantes ou mixtes) ou la variation de la taille de la population (constante, croissante, décroissante, etc.) (voir Barquero *et al.*, 2008 et 2013, pour plus de détails).

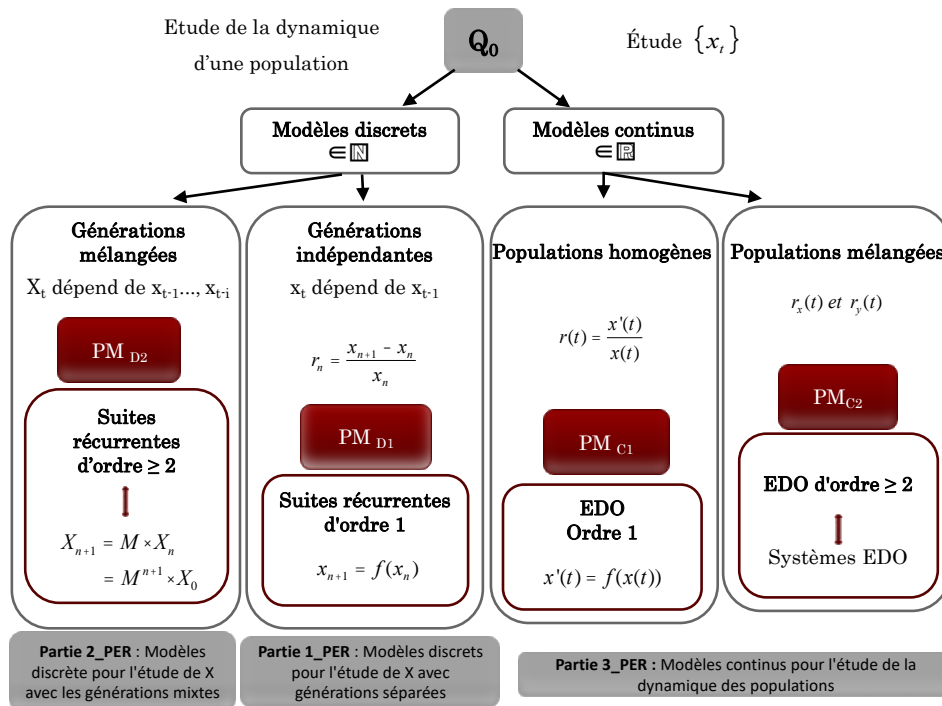


Figure 14. – Réversibilité du rôle de système-modèle

Le produit final était une séquence de praxéologies liées entre elles qui s'élargissait et se complexifiait et qui couvrait finalement la plupart des contenus mathématiques traditionnels, plus quelques ajouts. Certains de ces ajouts concernaient la prise en compte de modèles basés sur des séquences récurrentes et les questions liées à leur convergence ou l'étude de la manière dont les hypothèses formulées sur les modèles du monde discret sont (ou non) équivalentes à celles formulées dans le monde continu lorsque le temps est considéré comme une quantité continue.

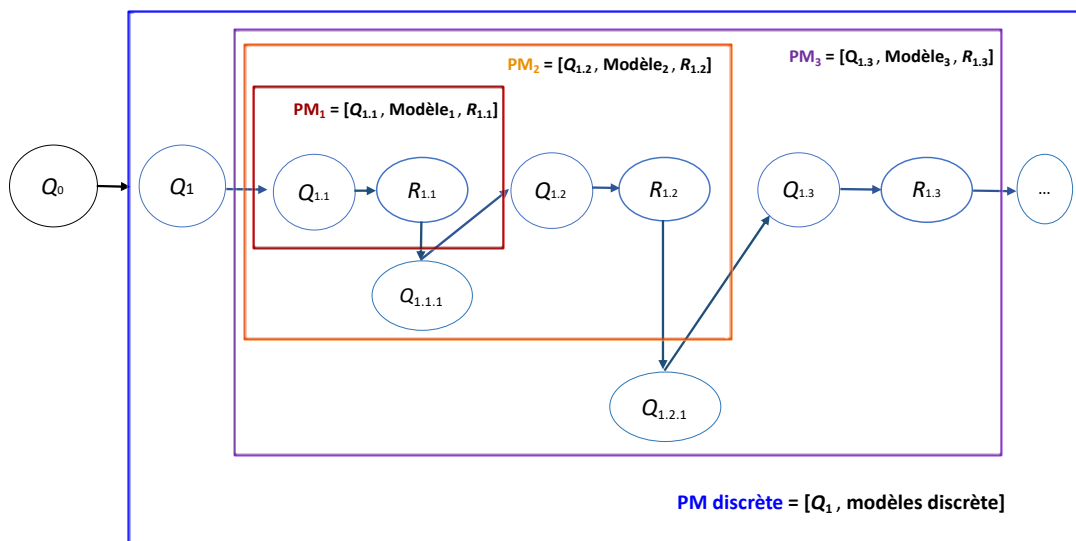


Figure 15. – Description d'un processus de modélisation mathématique dérivé de Q_0 – Partie 1

La figure 15 montre le développement de la première partie du processus de modélisation mathématique, qui propose la première délimitation du système, en considérant le temps comme une grandeur discrète, $\{x_n\}$ variable numérique discrète, et la population avec des générations indépendantes (x_n dépendant de x_{n-1}). Les questions suivantes apparaissent alors :

Q_1 : Si l'on considère le temps comme valeur discrète, quelles hypothèses sur le taux de croissance de X peut-on formuler ? Quels modèles mathématiques peut-on envisager ?

$Q_{1.1}$: En supposant que le taux relatif de variation est constant (p) comment évolue la population étudiée ?

$R_{1.1}$ – Modèle₁ : Construction du modèle Malthusien discrète : $x_{n+1} = (1 + p) x_n$, en donnant des réponses en fonction du paramètre p .

$Q_{1.1.1}$: Si $p \geq 1$, comment peut-on mettre une limite la croissance de la population ? [Paradoxe malthusien]

$Q_{1.2}$: Si nous supposons que le taux relatif de variation décroît linéairement et que K est la taille maximale de la population, comment évolue la population au cours du temps ?

$R_{1.2}$ – Modèle₂ : Construction et étude du modèle logistique discrète, en donnant des réponses en fonction des paramètres p et K .

$Q_{1.2.1}$: En fonction de la valeur des paramètres définissant les simulations de modèles logistiques discrets, on trouve des comportements difficiles d'analyser. Qu'est-ce qui se passe ? Pour quelles valeurs des paramètres cela arrive ?

$Q_{1.3}$: Comment pouvons-nous repenser et développer les hypothèses dans lesquelles nous travaillons si l'on considère les modèles définis comme $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f une fonction de classe C^1 ?

$R_{1.3}$: Techniques de simulation graphique, avec f une fonction C^1

Remarquons la structure praxéologique des modèles et des systèmes qui interviennent. Par exemple, le modèle malthusien (Modèle 1) ne doit pas être réduit à l'équation $x_{n+1} = (1 + p) x_n$, mais comprend les types de problèmes qui lui sont associés (calculer x_n pour différentes valeurs de p et x_0 ; déterminer n pour obtenir une population donnée $x_n = a$; comparer la vitesse de convergence de deux populations ; etc.), les techniques utilisées pour les aborder (calculs simples, utilisation du logiciel ou d'Excel, manipulations algébriques, représentations graphiques, etc.).

La figure 15 illustre la structure arborescente des questions et des réponses, qui aide à bien comprendre la nature récursive des modèles. On peut voir comment le premier processus de modélisation synthétisé en tant que PM1 à l'aide de la construction du modèle malthusien devient le système de l'étape de modélisation suivante, PM2, lorsqu'une nouvelle question $Q_{1.1.1}$ sur le paradoxe malthusien apparaît. À son tour, PM2 agit comme nouveau système dans la dernière étape avec la construction de MP3 face à des questions intra-mathématiques telles que $Q_{1.2.1}$ sur la convergence des suites. $Q_{1.2.1}$ nécessite un nouveau processus de modélisation intra-mathématique et le changement conséquent des modèles et des techniques associées, des simulations numériques aux simulations graphiques et de la simulation numérique des séquences à son analyse fonctionnelle.

Deuxièmement, elle montre comment le processus de modélisation articule ces praxéologies mathématiques dans l'ensemble du corpus $PM1 \rightarrow PM2 \rightarrow PM3$. En effet, le modèle malthusien discret (Modèle 1) est un cas particulier du modèle logistique (Modèle 2) si l'on ne considère aucune limitation de la capacité de charge. De même, ces modèles sont inclus dans le troisième modèle général considéré où $f(x)$ est une fonction linéaire (Modèle 1) ou une fonction quadratique (Modèle 2).

On voit ici que le processus de modélisation est dirigé par des questions qui se posent dans les différents systèmes et modèles considérés. L'étude de ces questions peut couvrir un large domaine des mathématiques, incluant des notions et des concepts qui ne sont pas toujours situés dans les mêmes « thèmes » mathématiques (séquences, limites, fonctions, dérivées, etc.). Si l'on veut que le processus de modélisation s'approche du temps continu ou des générations mixtes, les praxéologies impliquées incluraient également l'utilisation de matrices (de transition ou de Leslie) et leur diagonalisation, les dérivées et les équations différentielles, soulevant ainsi le besoin de la plupart du contenu curriculaire d'un cours de mathématiques de première année universitaire.

Il convient aussi de remarquer que l'une des premières nécessités vécues par l'enseignant qui dirigeait l'atelier de modélisation était de partager et d'institutionnaliser un nouveau discours afin de pouvoir décrire l'activité mathématique que les étudiants avaient développée. À cette occasion, l'essentiel du discours nécessaire portait sur la modélisation, qui était assez nouveau pour les étudiants. Introduire des termes faisant référence à des systèmes et des modèles, à la formulation d'hypothèses, aux actions de validation des modèles ou à leurs limites étaient pour l'enseignant-chercheur des tâches tout à fait nouvelles, ainsi que la co-production de nouveaux logos pour que les élèves afin décrivent, organisent, justifient et rapportent les activités mises en place.

Un deuxième aspect mis en évidence par Barquero *et al.* (2013) est la nécessité de créer des nouveaux dispositifs didactiques afin de transférer les nouvelles responsabilités aux étudiants qui devaient « produire leur propre réponse [...] compte tenu des (sous)-questions intermédiaires et, écrire et défendre un rapport pour chaque équipe d'étudiants [...] avec leurs réponses, provisoires » (Barquero *et al.*, 2013, p. 326). Les principaux dispositifs didactiques pour gérer la mise en Espagne du PER et institutionnaliser les activités de modélisation étaient les rapports hebdomadaires que les étudiants présentaient. Depuis la deuxième année, ces rapports étaient basés sur une structure fixe explicite, y compris une description des questions qui avaient été posées, les modèles mathématiques construits, les réponses obtenues, et les nouvelles questions dérivées. De plus, chaque équipe devait désigner son propre « secrétaire », un étudiant chargé d'expliquer et de défendre le rapport de l'équipe au début de chaque nouvelle séance. Une mise en commun suivant ces présentations, afin d'énoncer les principaux progrès et de s'accorder sur la manière de poursuivre l'enquête. À la fin du PER, chaque élève devait individuellement rédiger un rapport final de toute l'étude et analyser l'ensemble du processus de modélisation suivi (Barquero *et al.*, 2013, p. 327).

En ce qui concerne l'écologie de ce PER, un événement surprenant – mais sans doute aussi prévisible – a marqué la « fin » de l'activité. Lorsque, lors d'un stage postdoctoral à l'étranger, l'auteure de ce texte et professeure du PER fût remplacée par un nouvel enseignant (chercheur en mathématiques), la durée du PER, qui occupait jusqu'alors l'année entière, se « comprima » en un seul mois ! Il est facile d'imaginer que le contrat didactique reprit sa forme la plus traditionnelle et que les activités de modélisations tombèrent directement sous la responsabilité du professeur, celle des élèves se limitant à exécuter les tâches que celui-ci leur proposa.

5. Réflexions finales sur l'écologie de la modélisation mathématique

L'ensemble des recherches sur la modélisation mathématique développées par notre équipe nous a permis de mettre en évidence de nombreuses contraintes écologiques comme celle que nous venons de mentionner à propos du contrat didactique. Nous allons les présenter en utilisant les niveaux de l'échelle de codétermination didactique (Figure 6). Si nous commençons par les niveaux les plus génériques, des Civilisations et Sociétés, nous pouvons mentionner les contraintes émanant du paradigme de la visite des œuvres (Chevallard, 2015) et la définition des programmes d'études en termes de savoirs à apprendre, c'est-à-dire de modèles cristallisés, au lieu de questions à étudier – incluant des systèmes à modéliser. Ce paradigme entraîne au niveau de l'École et des Pédagogies une épistémologie dominante des savoirs que nous avons caractérisé de « applicationniste », où l'on apprend d'avoir les œuvres pour les « appliquer » ensuite à la résolution de problèmes souvent très stéréotypés. Cela conduit à une organisation de l'étude divisé par disciplines – ou ensembles d'œuvres à visiter –, structuré en séances courtes, fondées sur un travail et évaluation individuels et une forme de transmission directive (Barquero *et al.*, 2013 et 2018).

Au niveau des Pédagogies, nous pouvons mettre en rapport la fragilité de l'écologie de la modélisation mathématique avec celle des PER. Il existe un effet un manque de routines et dispositifs didactiques pour implémenter et gérer dans les classes des activités liées à l'étude de questions ouvertes dont on ne connaît pas la réponse a priori, à aider les étudiants à soulever des questions dérivées (et y répondre), à chercher des réponses et des données dans des sources fiables, tester les informations obtenues, partager les résultats et faire un tri sur les voies à suivre, organiser le travail en équipe, planifier les démarches d'investigation, élaborer des réponses finales et les défendre, etc.

Lorsque l'on se situe aux niveaux spécifiques de la discipline mathématique, l'on retrouve une version concrète de l'« applicationnisme » où les outils mathématiques sont généralement introduits avant leur besoin et sous une organisation conceptuelle relativement rigide. En conséquence, on peut parler d'un important *déficit transpositif* en ce qui concerne les outils de la modélisation mathématique. Les notions de « construction d'un modèle », « délimitation d'un système », « rapport du modèle au système », « variables du modèle », « hypothèse sur le système », etc. ne font pas partie des savoirs mathématiques institutionnalisés comme le sont les notions de « définition », « propriété », « démonstration », « concept », etc., pour ne pas parler de celles plus spécifiques de « fonction », « équation », « variable d'une fonction », etc.

L'étude des contraintes qui expliquent les difficultés pour diffuser à l'école des activités de modélisation mathématiques requiert, comme on vient de le voir, la délimitation d'une unité d'analyse qui permette d'inclure les institutions qui participent des processus transpositifs et des niveaux de codétermination didactique. Lorsque l'on conçoit l'activité de recherche en didactique aussi comme une activité de modélisation (Chevallard, 1991 et 1992), il devient crucial de s'interroger sur la délimitation du système que l'on se donne comme outil d'étude, les questions de recherche que l'on se pose à son propos, la nature et puissances des modèles construits pour étudier le système, les méthodes de travail avec ces modèles et leur conséquence dans la pertinence des résultats obtenus. La « transposition » de ces processus de modélisation didactique dans la formation des enseignants est un tout autre problème que nous commençons à aborder et que nous invitons les lecteurs à découvrir dans le travail de Wozniak *et al.* (voir Vandebrouck *et al.*, 2023) et Barquero *et al.* (2018 et 2019b).

Références

- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* [Thèse doctorale. Universitat Autònoma de Barcelona]. <http://hdl.handle.net/10803/3110>
- Barquero, B., Bosch, M. et Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(3), 307–338. <https://revue-rdm.com/2013/the-ecological-dimension-in-the/>
- Barquero, B., Bosch, M. et Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 31–43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Barquero, B., Bosch, M. et Gascón, J. (2019a). The unit of analysis in the formulation of research problems: the case of mathematical modelling at university level. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 314–330. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1624602>
- Barquero, B., Bosch, M. et Wozniak, F. (2019b). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen et M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1144–1151). Utrecht University and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02408705>
- Blomhøj, M. et Hojgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education –Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 149–171. <https://doi.org/10.1023/A:1022435827400>
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. Dans G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri et G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (p. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? Dans S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (p. 73-96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Blum, W. et Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. et Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – Mathematics Education*, 38, 86–95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modeling from a cognitive perspective: Individual modeling routes of pupils. Dans C. Haines, P. Galbraith, W. Blum et S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering and economics* (p. 260-270). Horwood.
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99–118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Bosch, M. et Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51–65.
- Bosch, M. (2018). Study and research paths: A model for inquiry. Dans B. Sirakov, P. N. de Souza et M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians (Vol. 3, p. 4001-4022)*. World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210
- Burkhardt, H. (2008). Making mathematical literacy a reality in classrooms. Dans D. Pitta-Pantazi et G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2090-2100). University of Cyprus et ERME.
- Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J.A., Borromeo Ferri, R., Borba, B., Geiger, V., Stillman, G., English, L.D., Wake, G., Kaiser, G. et Kwon, O. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. Dans P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle et D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (p. 145-172). IGPME.

- Carlson, M., Larsen, S. et Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. Dans R. A. Lesh et H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (p. 465-478). Lawrence Erlbaum Associates.
- CCSS (2022). *Common Core State Standards for Mathematics*. Common Core State Standards initiative. Preparing America's students for College & Career. https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/Math_Standards1.pdf
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1991). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *V^e école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 160-163). Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–112. <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–266. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie & régulation [Organizing the study 3. Ecology & regulation]. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot et R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Dans M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 21-30). FUNDEMI-IQS et ERME.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Dans S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (p. 173-187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13
- Chevallard, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori.
- Chevallard, Y. et Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. Dans S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 170-174). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_48
- Doerr, H. M. et English, L. (2006). Middle grade teachers' learning through student's engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 5–32. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9004-x>
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 3–8. <https://www.jstor.org/stable/3481973>
- Garcia, F.J., Gascón, J., Ruiz-higuera, L. et Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 38(3), 226–246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>
- Galbraith, P. et Stillman, G. A. (2006). Framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM – Mathematics Education*, 38, 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Kaiser, G. et Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 38, 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, G. et Maaß, K. (2007). Modelling in Lower Secondary Mathematics Classroom — Problems and Opportunities. Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, HW. et Niss, M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Study Series. Springer.
- Lesh, R. A., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. et Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. Dans R. A. Lesh et H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, teaching and learning* (p. 35-58). Lawrence Erlbaum Associates.
- Niss, M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. Dans B. L. Madison et L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: why numeracy matters for schools and colleges* (p. 215-220). National Council on Education and the Disciplines.
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>

- Pollack, H.O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 24–30.
- Schukajlow, S., Kaiser, G. et Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM – Mathematics Education*, 50, 5–18. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5>
- Vandebrouck, F., Emprin, F., Ouvrier-Bufferet, C. et Vivier, L. (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Volume des ateliers des actes de l'école d'été 21*. IREM de Paris.
- Vásquez, S., Barquero, B. et Bosch, M. (2021). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante*, 30(2), 200–219. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23878>
- Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(1), 7–55. <https://revue-rdm.com/2012/des-professeurs-des-ecoles-face-a/>