



HAL
open science

Une stratégie d'identification pour des mesures corrompues en dynamique : formulation et traitement basés sur l'équation de Riccati

Hong Minh Nguyen, Olivier Allix, Pierre Feissel

► To cite this version:

Hong Minh Nguyen, Olivier Allix, Pierre Feissel. Une stratégie d'identification pour des mesures corrompues en dynamique : formulation et traitement basés sur l'équation de Riccati. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04209417

HAL Id: hal-04209417

<https://hal.science/hal-04209417>

Submitted on 17 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une stratégie d'identification pour des mesures corrompues en dynamique : formulation et traitement basée sur l'équation de Riccati

Hong-Minh NGUYEN, Olivier ALLIX & Pierre FEISSEL

*Ecole Normale Supérieure de Cachan
Laboratoire de Mécanique et Technologie
61 av du Pt Wilson, 94235 Cachan, France
nguyen@lmt.ens-cachan.fr*

Résumé :

L'objectif de ce papier est de discuter quelques aspects de base concernant une méthode d'identification pour des mesures fortement corrompues. Une formulation assez robuste pour de forts niveaux de perturbation a été proposée dans l'étude précédente [1]. L'efficacité de la méthode est illustrée sur un exemple 1D simple en dynamique transitoire. Les difficultés numériques associées à cette méthode sont discutées. Pour les résoudre, l'approche basée sur l'équation différentielle et sur l'équation algébrique de Riccati a été développée.

Abstract :

The objective of this paper is to discuss some basic aspects of identification methods in the presence of extensively corrupted measurements. A quite robust formulation with respect to the extent of corruption was proposed in a previous study [1]. The effectiveness of the method was illustrated on simple 1D examples in transient dynamics. The numerical difficulties associated with this method is discussed. In the order to solve this problem, the approach based on the Riccati differential equation and on the algebraic Riccati equation is developed.

Mots-clefs :

problème inverse ; identification ; robuste ; dynamique transitoire ; mesures perturbés.

1 Introduction

Ce travail est motivé par l'identification des paramètres de modèle d'endommagement pour la conception d'absorbeurs de choc en composite. Dans les essais à rupture effectués, les mesures réalisées étaient particulièrement chahutées et inexploitable par des approches classiques. Les particularités liés à l'exploitation de ces essais sont principalement :

- le caractère hétérogène et dynamique de l'essai ;
- la présence de mesures dispersées et peu fiables.

Afin de résoudre le premier problème, une approche inverse variationnelle est envisagée. Ce type d'approche peut se schématiser en deux étapes. Dans la première étape, on confronte les données expérimentales au modèle et à ses paramètres. Elle est souvent menée par un calcul. Dans la deuxième étape, grâce aux résultats du calcul précédent, on évalue une fonction coût caractérisant la qualité des paramètres du modèle, qui doivent être identifiés. La solution du problème d'identification est fournie par la minimisation de cette fonction coût par rapport aux paramètres du modèle. Pour le second point, un grand nombre de méthodes tenant compte des perturbations de mesures sont proposées dans la littérature. Elles ont souvent besoins de connaissances *a priori* sur le niveau de perturbation. Parmi ces méthodes, citons les méthodes de régularisation de Tikhonov [2] ou les techniques de filtre de Kalman [3]. Dans notre contexte, il n'y a aucune information *a priori* sur le niveau et la nature des perturbations. C'est pourquoi,

nous proposons une autre méthode basée sur le concept d'Erreur en Relation de Comportement (ERdC) [4] qui s'est montré très efficace dans le cas du recalage en vibration [5] et du contrôle des structures [6]. Cette méthode est étendue ici au domaine de la dynamique transitoire. Dans une première partie, un exemple, qui sert pour illustrer le problème et les différentes méthodes, est présenté. La stratégie d'identification proposée est ensuite décrite. Le problème associé demande de résoudre un problème couplé de propagation d'onde possédant des conditions initiales et finales. Une première technique basée sur la prédiction des conditions initiales manquantes a été développée [1]. Elle est cependant limitée aux temps d'étude courts à cause de la présence d'exponentielles croissantes non contrôlées par les conditions finales. On développe donc dans ce papier une approche basée sur l'équation différentielle de Riccati permettant de traiter le problème pour des temps d'étude courts et assez longs. Cependant, elle pose des problèmes de coût de calcul et de mémoire occupée. C'est la raison pour laquelle, dans un second temps, la combinaison de cette approche avec l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati a été étudiée afin d'être capables de traiter des essais dynamiques de durée quelconque et rencontrés dans les problèmes industriels.

2 Vers une stratégie d'identification robuste : formulation

2.1 Description du problème d'identification

Afin de décrire la stratégie d'identification et les techniques de résolution, nous nous plaçons dans le cadre de l'identification des propriétés élastiques d'une barre soumise à un chargement dynamique. Ce choix permet un traitement relativement simple, mais cette méthode peut être appliquée à des cas plus complexes, tels que celui des mesures de champs.

Dans ce contexte, les mesures sont les déplacements et les forces appliqués aux deux extrémités de la barre sur un intervalle de temps $[0, T]$:

- déplacements mesurés : $\tilde{u}_{d0}(t), \tilde{u}_{dL}(t)$ où $t \in [0, T]$;
- forces mesurés : $\tilde{f}_{d0}(t), \tilde{f}_{dL}(t)$.

Le modèle se base sur l'équation d'équilibre en dynamique : $\rho \cdot \ddot{u} - \sigma_{,x} = 0$ et la relation de comportement : $\sigma = E \cdot u_{,x}$, où E est l'inconnue du problème.

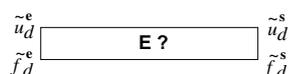


FIG. 1 – Problème 1D d'identification à partir de conditions aux limites redondantes

Cette méthode est testée sur un exemple numérique. Un premier calcul est donc effectué avec une force appliquée et un module d'Young de référence E_0 que l'on cherchera à identifier par la suite, afin de créer les mesures expérimentales. Pour cela, les efforts et les déplacements aux bords sont utilisés comme conditions aux limites du problème d'identification.

Afin de tester la robustesse de la méthode, une perturbation sur les conditions aux limites en effort et en déplacement peut être ajoutée.

2.2 Formulation de la stratégie d'identification proposée

La démarche présentée ici étend le principe de l'erreur en relation de comportement [4], déjà utilisée pour le recalage de modèle en vibration [5] et pour le contrôle des structures [6].

L'idée est de diviser les quantités expérimentales et théoriques en deux groupes : les quantités considérées comme fiables et les quantités non fiables sur lesquelles on fait porter le doute. La vérification des quantités fiables est imposée dans tout le processus d'identification, alors que les quantités non fiables sont relâchées et vérifiées au mieux par la minimisation de l'erreur en relation de comportement modifiée [4]. Dans le cas de l'élasticité, la séparation des équations est la suivante :

Fiable	Non fiable
Equilibre : $\rho.\ddot{u} - \text{div}\sigma = 0$	Relation de comportement : $\sigma = E.\epsilon$
Conditions initiales : $u(0, x)$ et $\dot{u}(0, x)$	Conditions aux limites : \tilde{u}_d et \tilde{f}_d

TAB. 1 – Quantités fiables et non fiables dans le cas de l'élasticité

La première étape de la stratégie d'identification consiste à confronter modèle et mesures pour un module E fixé. Ceci définit le problème de base revenant à trouver les champs solution minimisant une fonction qui est la somme des termes d'erreur du modèle et de distance aux mesures :

Trouver $u(E), \sigma(E), u_d(E), f_d(E)$, *minimisant* :

$$J(\sigma, u, u_d, f_d) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \int_0^L E^{-1} \cdot (\sigma - E \cdot u_{,x})^2 dx + \frac{A}{2} \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L + \frac{B}{2} \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L \right] dt$$

sous les contraintes :

$$u \text{ CA à } u_d, \sigma \text{ DA à } f_d, u(0, x) = u_0, \dot{u}(0, x) = \dot{u}_0, \rho.\ddot{u} - \text{div}\sigma = 0 \quad (1)$$

Une fois le problème de base déterminé, il reste à définir une fonction coût pour évaluer la qualité des paramètres matériau. Ici la même fonctionnelle est choisie. Le problème d'identification devient :

$$E = \text{Arg min } g(E) \quad \text{avec : } g(E) = J(\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E), E) \quad (2)$$

où : $\sigma(E), u(E), u_d(E), f_d(E)$ sont les champs solution du problème de base (1).

2.3 Résolution du problème de base par l'approche basée sur l'équation de Riccati

Afin d'être capable de résoudre le problème de base pour des temps d'étude quelconques, nous avons cherché à mettre en œuvre une méthode basée sur la résolution de l'équation différentielle de Riccati qui est pertinente pour les temps d'étude courts et longs. Sa limitation et la proposition d'amélioration de cette méthode seront abordées dans la dernière partie de cette section.

Pour appliquer l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati, le problème (1) est projeté d'abord dans un espace éléments finis où les déplacements sont décrits par le vecteur des inconnues nodales U , puis écrit à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \min_{q, e} \quad & \frac{1}{2} e^T \cdot R \cdot e + \frac{1}{2} (\tilde{U}_d - C \cdot q)^T \cdot Q \cdot (\tilde{U}_d - C \cdot q) \quad (3) \\ \dot{q} = & A \cdot q + G \cdot e + B \cdot \tilde{F}_d \\ q(0) = & q_0 \end{aligned}$$

où les inconnues q et e sont définies par : $q = \begin{bmatrix} U \\ \dot{U} \end{bmatrix}$; $e = \begin{bmatrix} V - U \\ \Pi_f F - \tilde{F}_d \end{bmatrix}$;

V : vecteur de degrés de liberté du champs v tel que : $\sigma = E.v,x.$

\tilde{U}_d, \tilde{F}_d correspondent aux mesures de déplacement et d'efforts.

Cette minimisation sous contraintes se traite en introduisant un multiplicateur de Lagrange Λ . La stationnarité de la fonction Lagrangienne ainsi introduite conduit à un système différentiel en temps :

$$\begin{cases} e = R^{-1}G^T \Lambda \\ \dot{q} = Aq + GR^{-1}G^T \Lambda + B\tilde{F}_d \\ \dot{\Lambda} = C^T Q C q - A^T \Lambda - C^T Q \tilde{U}_d \end{cases}, \text{ avec : } \begin{cases} q(0) = 0 \\ \Lambda(T) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

L'idée de la méthode de Riccati est d'introduire deux nouvelles inconnues $K(t)$ et $d(t)$ pour découpler les problèmes direct et adjoint. En posant $\Lambda(t) = K(t).q(t) + d(t)$, le problème devient :

$$\begin{cases} \dot{q} - [A + GR^{-1}G^T K]q - GR^{-1}G^T d - B\tilde{F}_d = 0 \\ \dot{d} + [KGR^{-1}G^T + A^T]d + KB\tilde{F}_d + C^T Q \tilde{U}_d = 0 \\ \dot{K} + KA + A^T K + KGR^{-1}G^T K - C^T Q C = 0 \end{cases}, \text{ avec : } \begin{cases} q(0) = 0 \\ d(T) = 0 \\ K(T) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

La difficulté posée ici est de résoudre la dernière équation, appelée équation différentielle de Riccati. Une fois cela fait, les solutions de q et d vont être successivement obtenues par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

La résolution de l'équation différentielle de Riccati a fait l'objet de nombreux travaux. La plupart d'entre eux se base sur la séparation du système (4) en deux parties : la partie stable étant associée à des solutions exponentielles décroissantes et la partie instable étant associée à des solutions exponentielles croissantes ; puis la première partie est traitée de façon directe et la deuxième de façon rétrograde [7]. Cependant la non-diagonalisabilité du système (4) empêche l'application simple de cette méthode. Afin de contourner cette difficulté, deux solutions sont proposées. L'une se base sur la résolution de façon numérique [8] qui nécessite une discrétisation temporelle assez fine car la solution a une forme exponentielle. L'autre exprime la solution de l'équation différentielle de Riccati en fonction de celle de son équation algébrique [9]. La première approche est beaucoup plus coûteuse. C'est pourquoi, la deuxième a été choisie pour résoudre l'équation différentielle de Riccati. La matrice de Riccati s'écrit alors sous la forme :

$$K(t) = K_c + \{X_c - e^{F(t-T)}. (K_c^{-1} - X_c). e^{F^T(t-T)}\}^{-1} \quad (6)$$

avec : $F = A - GR^{-1}G^T K_c$

et K_c, X_c sont les solutions des équations :

$$\begin{cases} K_c A + A^T K_c - K_c G R^{-1} G^T K_c + C^T Q C = 0 \\ F X_c + X_c F^T - G R^{-1} G^T = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Les équations (7) sont résolues par des méthodes classiques ; la première, appelée l'équation algébrique de Riccati, par la méthode *LQR* (Linear Quadratic Regulator) [9] et la deuxième, appelée l'équation de Lyapunov, par la méthode de Bartels [10]. Ces méthodes sont intégrées dans Matlab sous la forme de fonctions appelées *LQR* et *LYAP*.

La forme analytique de la matrice de Riccati $K(t)$ (6) se compose de deux parties : une partie constante correspondant à la période stationnaire et une partie exponentielle correspondante à

la période transitoire du système. Dans ce cas, les valeurs propres de la matrice F sont négatives, la matrice $K(t)$ converge donc assez vite vers K_c .

Contrairement à l'approche de matrice de transition [1] qui ne fonctionne que pour des temps d'étude courts, l'approche basée seulement sur l'équation différentielle de Riccati est pertinente pour des temps d'étude courts et assez longs. Cependant, elle est trop coûteuse à la fois en place mémoire et en temps de calcul pour être applicable dans des problèmes industriels. L'alternative proposée est de coupler cette méthode avec l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati, c'est à dire, la matrice $K(t)$ n'est calculée que pour la dernière période de temps d'étude. En pratique, elle est considérée égale à K_c jusqu'au moment où la différence de leur norme est supérieure à 10^{-2} . Il faut noter que l'intervalle de temps où K n'est pas constante, dépend des valeurs propres du système (4). Il est donc indépendant du temps d'étude.

La comparaison de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati et sa combinaison avec l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati est présentée (tableau 2). Il est clair que l'approche hybride a un coût de calcul raisonnable et sa précision est presque égale à celle de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati.

Approche	basée sur l'équation différentielle de Riccati	hybride
Temps de résolution du problème de base	38min.CPU	8min.CPU
Mémoire occupée	1500MB	350MB
Valeur de fonction coût à $E = E_0$, mesures exactes	$1.5 * 10^{-8}$	$1.67 * 10^{-8}$

TAB. 2 – Coût de calcul et la précision de différentes méthodes

3 Illustration de la méthode d'identification

La méthode d'identification proposée est appliquée à l'exemple présenté dans la section 2.1 avec différents niveaux de bruit afin d'illustrer sa robustesse. Les courbes d'identification pour les temps d'étude courts et longs sont présentées dans la figure 2.

On trouve que la présence de perturbations modérées n'a que très peu d'influence sur l'aspect de la courbe d'identification. De plus, lorsque les perturbations sont importantes (jusqu'à 40%), la méthode permet encore d'identifier correctement le module d'Young. Ainsi, la méthode démontre une grande robustesse face aux perturbations de mesure.

4 Conclusions

Nous avons cherché une solution au problème de l'identification des paramètres matériau à partir d'essais dynamiques aux conditions aux limites fortement perturbées. La réponse proposée est basée sur le principe d'erreur en relation de comportement pour les problèmes d'identification en dynamique transitoire. Le respect strict des idées de base, à savoir la séparation entre quantités fiables et non fiables nous a conduit à traiter un problème dynamique non classique. Les techniques de résolution ont donc été étudiées en se basant sur la résolution des équations différentielle et algébrique de Riccati. La stratégie d'identification proposée peut être appliquée pour des temps d'étude quelconques et démontre une grande robustesse face à des mesures perturbées, au moins sur les exemples que l'on considère. Les étapes suivantes consisteront à étendre cette méthode au cas de l'endommagement, puis à des structures plus complexes.

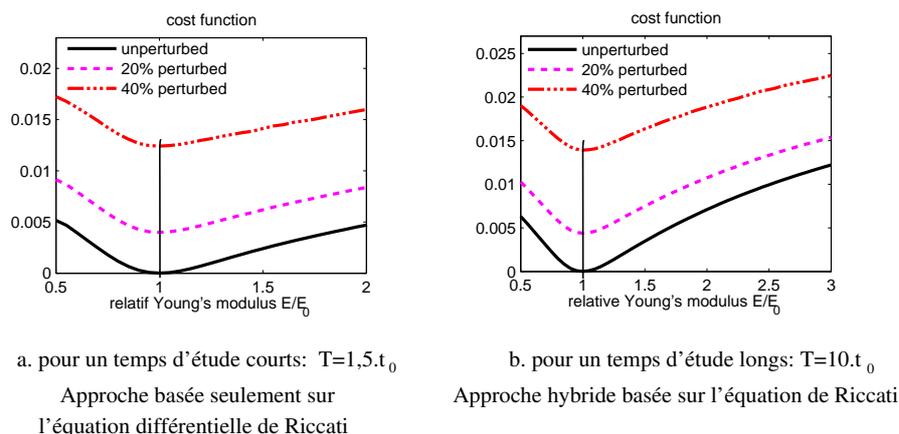


FIG. 2 – Fonction coût de la méthode proposée pour différents niveaux des perturbations.

Références

- [1] O. Allix, P. Feissel and P. Thévenet. A delay-damage meso modeling of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, Vol. 81, 12, 1177-1191, 2003.
- [2] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. Solutions of Ill-Posed Problems. *Winston and Sons*, 1977.
- [3] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME J. Basic Engrg*, 82, 35–45, 1960.
- [4] P. Ladevèze. A modelling error estimator for dynamical structural model updating *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Elsevier, 1998.
- [5] A. Deraemaeker, P. Ladevèze and Ph. Leconte. Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, **191**, 2427-2444, 2002.
- [6] F. Formosa, H. Abou-Kandil and M. Reynier. Updating of smart structures models using piezoelectric materials. *3rd World Conference on Structural Control IASC*, April, 2002).
- [7] D.R. Vaughan. A negative exponential solution for the matrix Riccati equation. *IEEE Tran. on Automatic Control*, 1 :72-75, 1969.
- [8] F. Dubois and A. Saidi. Unconditionally stable scheme for Riccati equation. *ESAIM : Proceedings*, 8 :39-52, 2000.
- [9] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. Linear optimal control. *Prentice-Hall*, 1971.
- [10] R.H. Bartels and G.W. Stewart. Solution of the matrix equation $A.X + X.B = C$. *Com. of the ACM*, 15 :820 - 826, 1972.