



**HAL**  
open science

# Modèle à taux de croissance limité pour la prévision de la rupture ductile de structures en grandes déformations

Germain Court, Olivier Allix, Michel Mahé

## ► To cite this version:

Germain Court, Olivier Allix, Michel Mahé. Modèle à taux de croissance limité pour la prévision de la rupture ductile de structures en grandes déformations. 17e Congrès français de mécanique, 2005, Troyes, France. hal-04209416

**HAL Id: hal-04209416**

**<https://hal.science/hal-04209416>**

Submitted on 21 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle à taux de croissance limité pour la prévision de la rupture ductile de structures en grandes déformations

Germain Court, Olivier Allix, Michel Mahé\*

LMT - Cachan, 61 Avenue du Président Wilson 94 235 Cachan  
court@lmt.ens-cachan.fr; allix@lmt.ens-cachan.fr

\* AIRBUS France, 316 route de Bayonne 31 060 Toulouse cedex 03  
michel.mahe@airbus.com

## Résumé :

*La prévision de la rupture a fait l'objet de nombreux travaux visant à éviter les problèmes de dépendance pathologique au maillage. L'objectif du présent travail est de dégager des différentes propositions une stratégie fiable et facilement implantable dans les codes industriels classiques. Les travaux en cours portent sur l'extension en grandes déformations des modèles à taux d'endommagement limité. La structure étudiée ici est un barreau au comportement élastoplastique endommageable soumis à un chargement dynamique.*

## Abstract :

*A lot of work to prevent mesh dependency for failure prediction has already been developed. The aim of the present work is to propose a reliable approach derived from those existing, which is well adapted to the implementation in a finite-element industrial code. This paper focuses on the extension of the existing small displacements limited damage rate model to finite transformations. As a first study, we consider a damage elasto-plastic beam submitted to a dynamic load.*

## Mots-clefs :

**Rupture, localisation, striction, plasticité, endommagement**

## 1 Introduction

Depuis une quinzaine d'années les développements des codes de calcul explicites et de l'outil informatique ont permis à l'industrie aéronautique de réaliser des simulations dans le domaine du crash de plus en plus nombreuses et pertinentes. Il est ainsi aujourd'hui possible de mener des calculs avec suffisamment de conservatisme pour garantir l'intégrité d'une structure soumise à un impact. En revanche, une éventuelle amorce de rupture est un phénomène encore difficile à estimer numériquement avec précision, ce qui peut conduire à surdimensionner des pièces en phase de conception, ou rendre difficile la simulation d'un scénario d'accident [? ]. L'un des principaux obstacles au développement des simulations éléments finis pour la prévision de la rupture réside dans la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage [1]. Pour éviter de telles difficultés, différentes techniques de régularisation, habituellement regroupées sous le terme de limiteurs de localisation [2], sont proposées dans la littérature. Les approches les plus usitées consistent à introduire une longueur caractéristique dans le modèle afin de pouvoir suivre objectivement la solution post-pic [2, 3, 4, 5].

Une voie suivie à Cachan repose sur la notion d'endommagement à taux limité. Ce modèle présente l'avantage d'être très simple et facilement identifiable, mais n'a jusqu'alors été utilisé que dans le cadre des petites déformations [6] ou sans apparition d'instabilité géométrique [7].

Le phénomène que l'on cherche à décrire et à reproduire numériquement est celui d'une structure métallique sollicitée jusqu'à rupture. Une telle structure voit en général apparaître juste avant sa ruine irréversible une zone de faible taille dans laquelle se localisent l'endommagement et les déformations plastiques. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de sollicitations en traction, où les déformations plastiques et l'endommagement se concentrent dans la zone de striction.

Dans cette première étude le problème modèle choisi est celui d'un barreau 1D en grandes déformations, exemple très simple mais pertinent pour dégager les principales propriétés d'un modèle vis-à-vis de la localisation et de la rupture (figure 1).

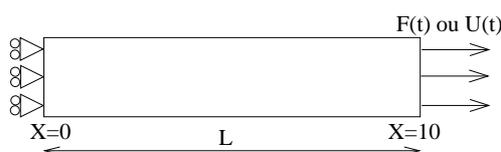


FIG. 1 – Structure étudiée.

## 2 Le problème de base étudié

Afin de pouvoir simuler la striction, l'étude est menée dans le cadre des grandes déformations. Les inconnues du problème sont la contrainte de Cauchy  $\sigma_{xx}$  (ou contrainte de Kirchhoff  $\tau_{xx}$ ) et les déplacements  $U_x$ , quand à la variation de section, elle est évaluée en tenant compte de la relation de comportement pour la partie élastique des déformations et de l'incompressibilité plastique.

La formulation retenue repose sur :

- Une relation contrainte-déformation élastique :  $\tau = E(1-d)\varepsilon_e$  avec  $\varepsilon_e(T) = \int_0^T D_e(t).dt$
- La décomposition additive du taux des déformations :  $D = D_e + D_p$  et  $\langle D_p \rangle_+ = \dot{p}$ .

Compte tenu de l'absence de rotations dans notre problème, cette formulation est analogue à celle de Jaumann [8] (ou corotationnelle [9]) présente dans RADIOSS ou ABAQUS par exemple ou à la formulation de Green Naghdi [10], utilisée dans SAMCEF par exemple.

Le problème étudié est résolu en dynamique à l'aide d'un schéma d'intégration en temps explicite (schéma de Newmark avec  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 0$  : schéma des différences centrées).

La discrétisation spatiale est une formulation éléments finis avec des éléments linéaires.

Dans les paragraphes suivants, on étudie successivement l'influence d'une loi

- élastoplastique endommageable "classique",
- élastoplastique avec taux d'endommagement limité,
- élastoplastique avec endommagement couplé à la plasticité et taux de plasticité limité.

## 3 Le premier modèle

On s'intéresse ici à un comportement élastoplastique endommageable. Ce premier modèle est caractérisé par :

- Loi d'écoulement :  $f = \frac{\tau}{1-d} - R(p) = 0$  avec ici  $R(p) = \tau_0 + b.p$
- Loi d'évolution de l'endommagement :  $d = d_{stat} = \sup_{(t)} \left\langle \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_{e0}}{\varepsilon_{ec} - \varepsilon_{e0}} \right\rangle_+$ .

Il est possible de montrer dans le cas d'un chargement quasi statique (c'est-à-dire homogène), que l'effort maximum est obtenu pour une déformation limite  $\varepsilon_{lim}$ , avec  $\varepsilon_{lim} = \frac{b(2+\varepsilon_{ec})+E\varepsilon_{ec}-2\tau_0}{2b} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{E}{2b} + \frac{E^2}{4b^2}\right)\varepsilon_{ec}^2}$ .

De plus, lorsque ce maximum d'effort est atteint, les équations d'ondes changent de nature : elles passent d'un caractère hyperbolique à un caractère elliptique. Le problème devient alors mal-posé et il existe une infinité de solutions pour la phase post-pic (c'est à dire au-delà de  $\varepsilon_{lim}$ ). Dans le cadre d'une résolution par éléments finis, la zone de localisation se réduit alors à un seul élément (quelle que soit sa taille) et la solution ne converge pas avec la diminution de la taille de maille.

Exemple : Avec  $E=58000$  (Mpa),  $\tau_0=332$  (Mpa),  $b=2600$  (Mpa),  $\varepsilon_{e0} = 0.72\%$ ,  $\varepsilon_{ec} = 3.1\%$ , on trouve  $\varepsilon_{lim} = 17.03\%$  et  $p_{lim} = 15.75\%$ , ce qui est tout à fait conforme avec les résultats de la figure 2.

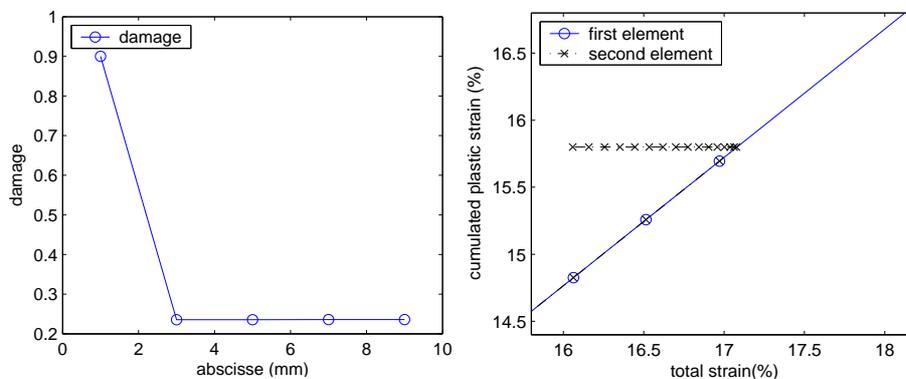


FIG. 2 – Comportement Elastoplastique endommageable non régularisé.

Afin de tenter de limiter cette localisation spatiale, entraînant des gradients de déformation particulièrement important, il est possible d'utiliser des modèles non locaux (moyenne spatiale [3] - gradient du second ordre [2]) ou des modèles reposant sur la théorie du second gradient [4, 5]. Mais ces modèles rendent délicate la gestion des conditions aux limites, augmentent considérablement le temps de résolution d'un problème et restent difficiles à identifier.

Il est possible de proposer d'autres solutions en s'appuyant sur une vision de la rupture comme un phénomène dynamique. En effet, même dans le cas d'un chargement global quasi statique, la rupture s'accompagne très généralement de phénomènes dynamiques locaux (figure 3). Ainsi il peut être intéressant de tenter de modifier, non plus les variations spatiales, mais les variations temporelles de certaines quantité d'intérêts.

#### 4 Le modèle d'endommagement à taux d'endommagement limité

Sans précautions particulières, lorsqu'une simulation devient dépendante du maillage les déformations se concentrent dans un seul élément et les variations temporelles de certaines quantités d'intérêt peuvent augmenter sans être bornées lorsque la taille de maille diminue. Le modèle à taux d'endommagement limité a ainsi été développé au LMT afin de remédier à ce constat [11, 6].

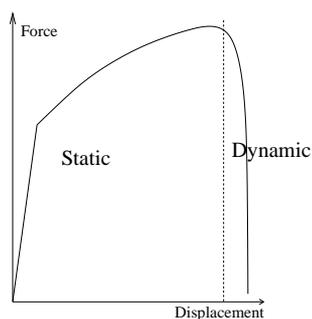


FIG. 3 – Régime dynamique de la rupture

L'idée physique sous jacente est que, l'endommagement étant la traduction de l'homogénéisation de fissures à une échelle plus fine, le fait qu'une fissure ait une vitesse de propagation finie le taux d'endommagement doit également rester fini.

Il a été proposé de borner le taux d'endommagement :  $\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \cdot \exp(-a[d_{stat} - d])$  [6].

Dans ce cas, la valeur de l'endommagement  $d$  est égale à celle de  $d_{stat}$  lors de faibles vitesses de sollicitations (soit  $\dot{d} = \dot{d}_{stat}$ ), en revanche  $\dot{d}$  est limité à  $\frac{1}{\tau_c}$  lorsque la nature des sollicitations est fortement dynamique.

Ce modèle n'a jusqu'alors été utilisé que dans le cadre des petites déformations [6] ou sans apparition d'instabilité géométrique [7].

## 5 Une première tentative qui échoue

La première idée pour garantir l'objectivité des simulations a été de modifier la loi d'évolution de l'endommagement à l'aide du modèle à taux d'endommagement limité. Le comportement est alors décrit par les relations :

– Loi d'écoulement :  $f = \frac{\tau}{1-d} - R(p) = 0$  avec ici  $R(p) = \tau_0 + b \cdot p$

– Loi d'évolution de l'endommagement :  $\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \cdot \exp(-a[d_{stat} - d])$  avec  $d_{stat} = \sup_{(t)} \left\langle \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_{e0}}{\varepsilon_{ec} - \varepsilon_{e0}} \right\rangle_+$ .

Deux phénomènes sont sources d'instabilité :

- l'un géométrique (striction, liée à la plasticité  $p$ )
- l'autre "matériau" (l'endommagement  $d$  modifie le module tangent)

Ici la modification régularise l'influence de l'endommagement sans toutefois garantir un comportement acceptable de la plasticité. Par conséquent, la plasticité et l'endommagement n'étant pas ici suffisamment couplés, on constate que l'objectivité des simulations vis-à-vis du maillage n'est pas assurée (rien ne limite la valeur du taux de plasticité).

## 6 Le modèle d'endommagement couplé à la plasticité et à taux de plasticité limité

Les deux sources d'instabilité sont ici la striction (liée à la plasticité cumulée  $p$ ) et l'endommagement  $d$ . L'endommagement apparaît avec des valeurs importantes de la plasticité. L'idée est ici de piloter l'endommagement  $d$  par la plasticité cumulée  $p$  et de limiter le taux de plasticité cumulée  $\dot{p}$ . Le modèle proposé est le suivant :

– Loi d'écoulement :  $f = \frac{\tau}{1-d} - [R(p) + R_0 \cdot \frac{1}{a} \text{Ln}(\frac{1}{1-\tau_c \dot{p}})] = 0$

$$\text{soit } \dot{p} = \frac{1}{\tau_c} [1 - \exp(-a \frac{\tau - d - R(p)}{R_0})]$$

$$\text{– Loi d'évolution de l'endommagement : } d = \sup_{(t)} \left\langle \frac{p - p_0}{p_c - p_0} \right\rangle_+$$

Le taux de plasticité est ici limité à  $\frac{1}{\tau_c}$ . Comme dans le cas précédent, cette correction n'interviendra que lors d'un chargement très fortement dynamique. Comme on peut le constater sur les figures 4 et 5 les simulations avec ce modèle sont indépendantes de la taille de maille (dès que le maillage est suffisamment fin) et les déformations et l'endommagement ne se concentrent pas dans un unique élément.

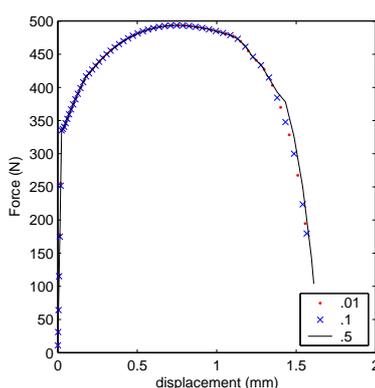


FIG. 4 – Modèle à taux de plasticité limité.

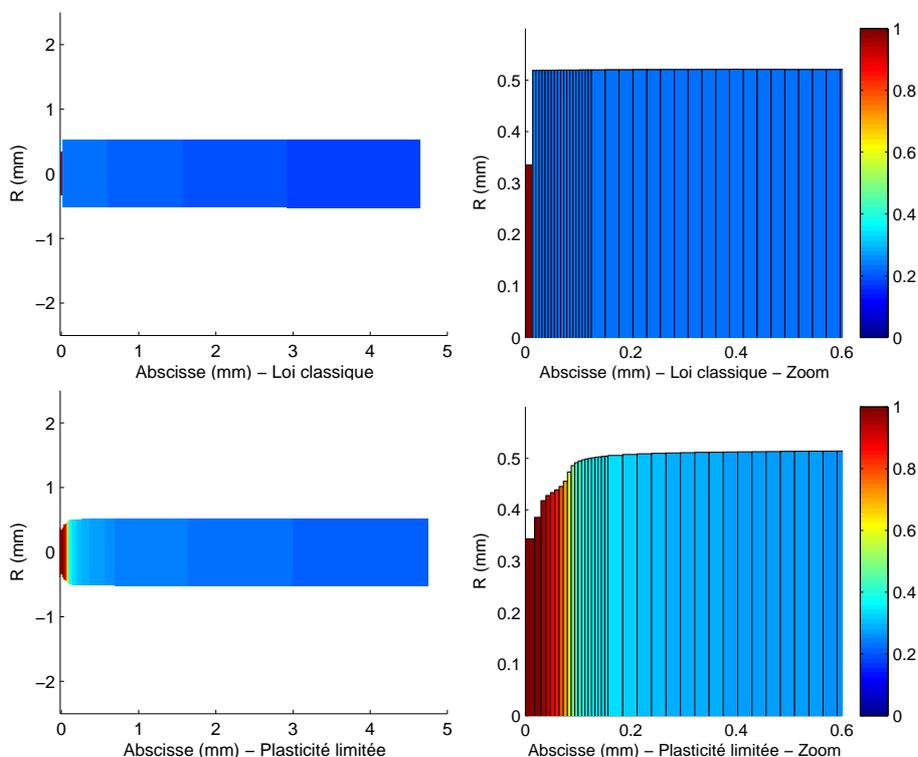


FIG. 5 – Endommagement en fin de chargement.

## 7 Conclusions

Ce travail repose sur une extension en grandes déformations du modèle à taux d'endommagement limité initialement proposé dans le cadre d'applications composites. Il a conduit à proposer un modèle d'endommagement couplé à la plasticité et à taux de plasticité limité garantissant la simulation objective de la rupture d'une structure ductile endommageable.

## Références

- [1] Z.P. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *Journal of engineering mechanics*, 102 :331–344, 1976.
- [2] D. Lasry and T. Belytschko. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6) :581–597, 1988.
- [3] G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bazant. Dynamic stability analysis with nonlocal damage. *Computers & Structures*, 29(3) :503–507, 1988.
- [4] P. Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : première partie : théorie du second gradient. *journal de mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- [5] E. Cosserat and F. Cosserat. Théorie des corps déformables. *Hermann et fils*, 16 :155–177, 1909.
- [6] O. Allix and J.F. Deü. Delay damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *engineering transactions*, 45 :29–46, 1997.
- [7] A. Suffis. *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [8] G. Jaumann. Geschlossenes system physikalischer und chemischer differentialgesetze sitzber. *akad. Wiss. Wien*, 120 :385–530, 1911.
- [9] P. Ladevèze. Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations. Technical Report 9, LMT-Cachan, 1980.
- [10] A.E. Green and P.M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. of rat. Mech. Analysis*, 18 :251–281, 1965.
- [11] P. Ladevèze. About a damage mechanics approach. *Mechanics and Mechanisms of damage in composites and multi-materials*, eds Baptiste D.(London) :119–141, 1991.