



HAL
open science

La Geometría de la Teoría de los Conjuntos (Pitch-Class Set)

Josué Alexis Lugos Abarca

► **To cite this version:**

Josué Alexis Lugos Abarca. La Geometría de la Teoría de los Conjuntos (Pitch-Class Set). 2023.
hal-04209081

HAL Id: hal-04209081

<https://hal.science/hal-04209081>

Preprint submitted on 16 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

La Geometría de la Teoría de los Conjuntos (Pitch-Class Set)

The Geometry of Pitch-Class Set

Por Josué Alexis Lugos Abarca

Centro Universitario de Música Fermatta

josuealexis22@gmail.com

Resumen

En el presente artículo, se formalizará aún más la teoría de los conjuntos (mejor conocida como *pitch class set*) a un lenguaje matemático más claro y ordenado. De esa misma manera, se desarrolla la teoría de los conjuntos a un contexto geométrico, concluyendo que dos notas musicales corresponden a un punto en el plano cartesiano y que considerando el movimiento melódico, los puntos se pueden relacionar mediante vectores formando una trayectoria melódica. Por último, se presenta una ecuación que calcula el área de un polígono formado por un conjunto empleando únicamente las notas que pertenecen a dicho conjunto.

Palabras clave: teoría de conjuntos; puntos en el plano cartesiano; vectores; polígonos; área.

Abstract

In the present article, pitch class set theory is further formalized into a clearer and more orderly mathematical language. In the same way, set theory is developed to a geometrical context, concluding that two musical notes correspond to a point in the Cartesian plane and that considering the melodic motion, the points can be related by vectors forming a melodic trajectory. Finally, an equation is presented that calculates the area of a polygon formed by a set using only the notes that belong to that set.

Keywords: pitch class set; points in the cartesian plane; vectors; polygons; area.

1. Introducción

La teoría de los conjuntos (*pitch class set*) se considera un lenguaje musical construido con el propósito de sistematizar la composición atonal ante el serialismo (Perle, 1972), desde sus principios este lenguaje musical estuvo bastante relacionado con las matemáticas, en específico, en la teoría de conjuntos, las notas musicales pasaron a ser comprendidas como números y a ser operadas mediante el algebra de conjuntos como la unión, la intersección, etc. (Suppes, 1972), (Vázquez, 2006). Esta nueva perspectiva inspiró a investigadores a desarrollar aún más la teoría musical junto con la matemática, llegando a concluir que la geometría es el mejor campo matemático que puede encajar con la música, en evidencia a esto, tenemos por ejemplo: los ejes axiales de Bartok, los *Coltrane's Changes* (Porter et al., 2013), la teoría geométrica de los acordes de Tymoczko (Tymoczko, 2006), etc. Todos estos trabajos se basan y aplican dentro del sistema tonal, sin embargo, existe la misma naturaleza geométrica musical en la teoría de los conjuntos, la cual fue mostrada en la investigación de Roeder (Roeder, 1987).

Tales investigaciones buscan mediante la geometría construir nuevos lenguajes y procesos de composición que generen nuevas sonoridades o propiedades creativas entorno a la música tonal o atonal, no obstante, el enfoque de este artículo no es el de proponer una geometría que nos dé una nueva manera de composición atonal, más bien, daremos la vuelta a este pensamiento e indagaremos si la teoría de los conjuntos musicales manifiesta una relación con la geometría más allá de una cuestión creativa sino una relación que se puede considerar como matemática-musical pura.

2. Preliminares

Primero, vamos a formalizar el lenguaje matemático de los conceptos de la teoría *pitch class set* que usaremos dentro de este artículo.

Forma original (FO): Se define como cualquier conjunto de notas cuyo cardinal $|\pi_0^0|$ no es mayor a seis notas ni menor a tres notas.

$$\pi_0^0 = (n_0, n_1, n_2 \dots n_5) \quad (2.1)$$

Donde n_i es la nota musical representada numéricamente de acuerdo con los valores establecidos en la teoría de los conjuntos (Vázquez, 2006).

Forma original ordenada (FOO): Es el conjunto de la forma original (FO) ordenado numéricamente, el operador que representa esta acción es ∂^o .

$$\pi_0^0 \xrightarrow{\partial^o} \widetilde{\pi}_0^0 \quad (2.2)$$

Veamos cómo funciona. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\pi_0^0 = (11, 4, 7) \quad (2.3)$$

Al aplicar el operador ∂^o , tenemos que:

$$\pi_0^0 = (11, 4, 7) \xrightarrow{\partial^o} \widetilde{\pi}_0^0 = (4, 7, 11) \quad (2.4)$$

Forma ideal original (FIO): El conjunto de la forma original ordenada cuyos elementos tenga la menor distancia intervállica entre ellos.

La fórmula es (Vázquez, 2006):

$$\langle x, y \rangle = y - x \quad (2.5)$$

La metodología de resolución de esta fórmula se puede generalizar de esta manera:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (n_0, n_1, n_2), \quad \aleph_0^0 = (n_1 - n_0) + \aleph_0^1 = (n_2 - n_1) = d_0 \quad (2.6)$$

$$\widetilde{\pi}_1^0 = (n_1, n_2, n_0), \quad \aleph_1^0 = (n_2 - n_1) + \aleph_1^1 = (n_0 - n_2) = d_1$$

$$\widetilde{\pi}_2^0 = (n_2, n_0, n_1), \quad \aleph_2^0 = (n_0 - n_2) + \aleph_2^1 = (n_1 - n_0) = d_2$$

Tal que d_i es la distancia intervállica de cada conjunto, por otro lado, las resoluciones de \aleph_j^i puede darnos como resultado un número negativo, al ser así, debe de sumarse doce para respetar el círculo de quintas, de modo que, para satisfacer esta condición intervállica construimos la siguiente función que será aplicada a las resoluciones de 2.6.

$$\begin{cases} \text{si } \aleph_j^i \in \mathbb{N}^- \rightarrow \aleph_j^i + 12 \\ \text{si } \aleph_j^i \in \mathbb{N}^+ \rightarrow \aleph_j^i + 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Resolviendo el proceso de 2.6 para el conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$ de 2.4 obtenemos:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11), \quad [\aleph_0^0 = (7 - 4) = 3 + \aleph_0^1 = (11 - 7) = 4] = 7 \quad (2.8)$$

$$\widetilde{\pi}_1^0 = (7,11,4), \quad [\aleph_1^0 = (11 - 7) = 4 + \aleph_1^1 = (4 - 11) = 5] = 9$$

$$\widetilde{\pi}_2^0 = (11,4,7), \quad [\aleph_2^0 = (4 - 11) = 5 + \aleph_2^1 = (7 - 4) = 3] = 8$$

Entonces, el conjunto de la forma ideal original es:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11) \quad (2.9)$$

Forma invertida de la forma ideal (FIFI): Es el conjunto invertido del conjunto de la forma ideal original, su operador es:

$$\partial^I = f_{(n)} = 12 - n_i \quad (2.10)$$

Por tanto:

$$\widetilde{\pi}_0^0 \xrightarrow{\partial^I} \overline{\pi}_0^0 \quad (2.11)$$

Por ejemplo, retomemos el conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$ de 2.9 y apliquémosle el operador ∂^I .

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11) \xrightarrow{\partial^I} (12 - 4), (12 - 7), (12 - 11) = (8,5,1) \therefore \overline{\pi}_0^0 = (8,5,1) \quad (2.12)$$

Forma ideal invertida (FII): El conjunto de la forma invertida de la forma ideal cuyos elementos tenga la menor distancia intervállica.

Misma metodología que en 2.6, pero ahora solo hacemos distinción en la notación para las notas del conjunto de la forma invertida.

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_0^0 &= (n_0, n_1, n_2) \rightarrow \mathfrak{N}_0^0 = (n_1 - n_0) + \mathfrak{N}_0^1 = (n_2 - n_1) = \mathfrak{d}_0 \\ \widetilde{\pi}_1^0 &= (n_1, n_2, n_0) \rightarrow \mathfrak{N}_1^0 = (n_2 - n_1) + \mathfrak{N}_1^1 = (n_0 - n_2) = \mathfrak{d}_1 \\ \widetilde{\pi}_2^0 &= (n_2, n_0, n_1) \rightarrow \mathfrak{N}_2^0 = (n_0 - n_2) + \mathfrak{N}_2^1 = (n_1 - n_0) = \mathfrak{d}_2\end{aligned}\quad (2.13)$$

Cuya función es:

$$\begin{cases} \text{si } \mathfrak{N}_j^i \in \mathbb{N}^- \rightarrow \mathfrak{N}_j^i + 12 \\ \text{si } \mathfrak{N}_j^i \in \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathfrak{N}_j^i + 0 \end{cases}\quad (2.14)$$

Resolviendo para el conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$ de 2.12, vemos que:

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_0^0 &= (1,5,8), [\mathfrak{N}_0^0 = (5 - 1) = 4 + \mathfrak{N}_0^1 = (8 - 5) = 3] = 7 \\ \widetilde{\pi}_1^0 &= (5,8,1), [\mathfrak{N}_1^0 = (8 - 5) = 3 + \mathfrak{N}_1^1 = (1 - 8) = 5] = 8 \\ \widetilde{\pi}_2^0 &= (8,1,5), [\mathfrak{N}_2^0 = (1 - 8) = 5 + \mathfrak{N}_2^1 = (5 - 1) = 4] = 9\end{aligned}\quad (2.15)$$

Por ende, el conjunto de la forma ideal invertida es:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (1,5,8)\quad (2.16)$$

Forma normal (FN): Es el conjunto con la menor distancia interválica entre la forma ideal original y la forma ideal invertida, el desarrollo de resolución es similar a 2.8 y 2.15. Para la forma normal tenemos que:

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_0^0 &= (n_0, n_1, n_2), \mathfrak{D}_0^0 = (n_2 - n_0), \mathfrak{D}_0^1 = (n_1 - n_0) \\ \widetilde{\pi}_0^0 &= (n_0, n_1, n_2), \mathfrak{D}_0^0 = (n_2 - n_0), \mathfrak{D}_0^1 = (n_1 - n_0)\end{aligned}\quad (2.17)$$

Donde \mathfrak{D}_j^i es la distancia interválica de cada conjunto. Se busca mediante 2.17 saber cuál de los conjuntos $\widetilde{\pi}_0^0$ y $\widetilde{\pi}_0^0$ tiene la menor distancia interválica dentro de sus elementos, por tanto, construimos la siguiente función que cumple con esta condición:

$$\begin{cases} \text{Si } \mathfrak{D}_0^0 < \mathfrak{D}_0^1 \rightarrow \widetilde{\pi}_0^0 = \text{FN} \\ \text{Si } \mathfrak{D}_0^0 > \mathfrak{D}_0^1 \rightarrow \widetilde{\pi}_0^0 = \text{FN} \\ \text{Si } \mathfrak{D}_0^1 < \mathfrak{D}_0^1 \rightarrow \widetilde{\pi}_0^0 = \text{FN} \\ \text{Si } \mathfrak{D}_0^1 > \mathfrak{D}_0^1 \rightarrow \widetilde{\pi}_0^0 = \text{FN} \end{cases}\quad (2.18)$$

Tomemos en cuenta los conjuntos:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11), \widetilde{\pi}_0^0 = (1,5,8)\quad (2.19)$$

Calculemos la forma normal de acuerdo con 2.17:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11), \mathfrak{D}_0^0 = (11 - 4) = 7, \mathfrak{D}_0^1 = (7 - 4) = 3\quad (2.20)$$

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (1,5,8), \quad \mathfrak{z}_0^0 = (8 - 1) = 7, \quad \mathfrak{z}_0^1 = (5 - 1) = 4$$

Por lo tanto, el conjunto de la forma normal es:

$${}^n\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11) \quad (2.21)$$

Forma primaria (FP): Es el conjunto cuyo primer elemento es transportado a cero del conjunto de la forma normal. Su operador es:

$$\partial^T = f_{(n)} = (n_0 - n_0), (n_1 - n_0), (n_2 - n_0) \quad (2.22)$$

Por ende:

$${}^n\widetilde{\pi}_0^0 \xrightarrow{\partial^T} = {}^1\widetilde{\pi}_0^0 \quad (2.23)$$

Resolvamos la forma primaria para el conjunto ${}^n\widetilde{\pi}_0^0$ de 2.21.

$${}^n\widetilde{\pi}_0^0 = (4,7,11) \xrightarrow{\partial^T} [(4 - 4) =, (7 - 4) =, (11 - 4) =] = (0,3,7) \quad (2.24)$$

Entonces la forma primaria de ${}^n\widetilde{\pi}_0^0$ es:

$${}^1\widetilde{\pi}_0^0 = (0,3,7) \quad (2.25)$$

Redefinidos matemáticamente estos conceptos musicales de la teoría *pitch class set*, tenemos el marco teórico suficiente para el desarrollo del artículo.

3. El Movimiento Melódico Como Un Vector

Enfoquémonos en el proceso para calcular el conjunto de la forma ideal original en 2.6. Resulta peculiar que la forma de la ecuación \mathfrak{N}_j^i se parece bastante a la fórmula de distancia entre dos puntos del espacio euclídeo (de Oteyza, 2005), la cual es:

$$d^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.1)$$

Podemos describir la fórmula de la distancia interválica de 2.6 de esta manera:

$$d_0 = (n_1 - n_0) + (n_2 - n_1) \quad (3.2)$$

Comparando 3.1 y 3.2, se nota más la similitud entre ambas expresiones, por tanto, basta con elevar al cuadrado los términos $(n_1 - n_0)$ y $(n_2 - n_1)$ para conseguir una ecuación análoga a 3.1.

$$d_0 = \sqrt{(n_1 - n_0)^2 + (n_2 - n_1)^2} \quad (3.3)$$

En consecuencia a 3.3, cabe la interpretación de que las notas musicales n_i sean la representación de puntos en el plano cartesiano, es decir, a partir del conjunto:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (n_0, n_1, n_2) \quad (3.4)$$

Que de acuerdo con 3.3 se forman los siguientes puntos:

$$\widetilde{\pi}_0^1 = (n_0, n_1), \quad \widetilde{\pi}_0^2 = (n_1, n_2) \quad (3.5)$$

Tal que para el punto: $\widetilde{\pi}_0^1, n_0 = x_1, n_1 = y_1$ y para el punto: $\widetilde{\pi}_0^2, n_1 = x_2, n_2 = y_2$.

La interpretación de que dos notas musicales sean un punto en el plano cartesiano coincide con el trabajo de Tymoczko (Tymoczko, 2011), la diferencia es que Tymoczko solo usa la notación musical americana, mientras que, en este artículo aprovechamos la representación numérica de la teoría de los conjuntos. Esto nos da una mejor aproximación a valores reales dentro del plano cartesiano.

Podemos involucrar a este contexto el movimiento melódico, que para un conjunto de notas musicales se visualiza como:

$$n_0 \rightarrow n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow n_0 \quad (3.6)$$

De ese modo, tendríamos tres puntos en lugar de dos, los cuales serían:

$$\widetilde{\pi}_0^0 = (n_0, n_1, n_2); \quad \widetilde{\pi}_0^1 = (n_0, n_1), \quad \widetilde{\pi}_0^2 = (n_1, n_2), \quad \widetilde{\pi}_0^3 = (n_2, n_0) \quad (3.7)$$

Entonces, considerando el movimiento melódico podemos formar los siguientes vectores:

$$\vec{V}_a = \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, \quad \vec{V}_b = \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, \quad \vec{V}_c = \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1 \quad (3.8)$$

Si $n_0 = 11, n_1 = 4, n_2 = 7$, con ayuda de *GeoGebra* tenemos la siguiente representación visual:

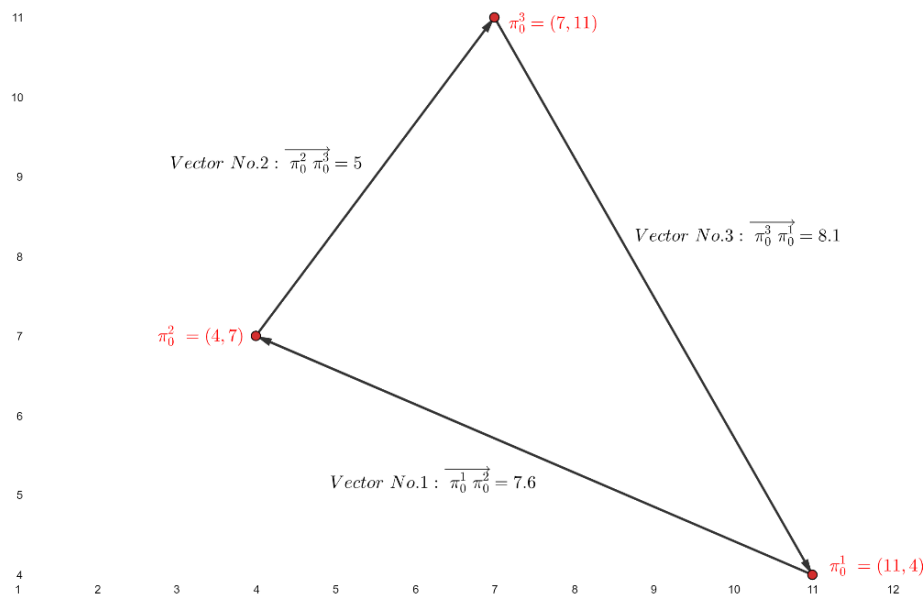


Figura 3.1: Puntos y vectores del conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$.

Este concepto, respecto a los puntos en el plano cartesiano que se obtienen de los conjuntos de notas musicales puede ser extendida al conjunto de la forma ideal invertida,

como también del conjunto retrogrado de la forma ideal original $\widetilde{r\pi}_0^0$ y el conjunto retrogrado de la forma ideal invertida $\widetilde{r\pi}_0^0$.

Por ejemplo, los puntos y vectores del conjunto de la forma ideal original son:

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_0^0 &= (n_0, n_1, n_2), & \widetilde{\pi}_0^1 &= (n_0, n_1), & \widetilde{\pi}_0^2 &= (n_1, n_2), & \widetilde{\pi}_0^3 &= (n_2, n_0) & (3.9) \\ \vec{V}_a &= \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_b &= \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_c &= \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1 \end{aligned}$$

Mientras que, los puntos y vectores del conjunto retrogrado de la forma ideal original son:

$$\begin{aligned} \widetilde{r\pi}_0^0 &= (n_2, n_1, n_0), & \widetilde{r\pi}_0^1 &= (n_2, n_1), & \widetilde{r\pi}_0^2 &= (n_1, n_0), & \widetilde{r\pi}_0^3 &= (n_0, n_2) & (3.10) \\ \vec{V}_d &= \widetilde{r\pi}_0^1 \widetilde{r\pi}_0^2, & \vec{V}_e &= \widetilde{r\pi}_0^2 \widetilde{r\pi}_0^3, & \vec{V}_f &= \widetilde{r\pi}_0^3 \widetilde{r\pi}_0^1 \end{aligned}$$

Puntos y vectores del conjunto de la forma ideal invertida:

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_0^0 &= (\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2), & \widetilde{\pi}_0^1 &= (\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1), & \widetilde{\pi}_0^2 &= (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2), & \widetilde{\pi}_0^3 &= (\mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_0) & (3.11) \\ \vec{V}_g &= \widetilde{\pi}_0^1 \widetilde{\pi}_0^2, & \vec{V}_h &= \widetilde{\pi}_0^2 \widetilde{\pi}_0^3, & \vec{V}_i &= \widetilde{\pi}_0^3 \widetilde{\pi}_0^1 \end{aligned}$$

Puntos y vectores del conjunto retrogrado de la forma ideal invertida:

$$\begin{aligned} \widetilde{r\pi}_0^0 &= (\mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_0), & \widetilde{r\pi}_0^1 &= (\mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_1), & \widetilde{r\pi}_0^2 &= (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_0), & \widetilde{r\pi}_0^3 &= (\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_2) & (3.12) \\ \vec{V}_j &= \widetilde{r\pi}_0^1 \widetilde{r\pi}_0^2, & \vec{V}_k &= \widetilde{r\pi}_0^2 \widetilde{r\pi}_0^3, & \vec{V}_l &= \widetilde{r\pi}_0^3 \widetilde{r\pi}_0^1 \end{aligned}$$

Bajo este contexto, la ecuación 3.3 describe la trayectoria de distancia del movimiento melódico J de un conjunto de notas musicales, que se describe de esta manera: (3.13)

$$J = [(n_1 - n_0)^2 + (n_2 - n_1)^2] + [(n_2 - n_1)^2 + (n_0 - n_2)^2] + [(n_0 - n_2)^2 + (n_1 - n_0)^2]$$

4. Polígonos de la Teoría de los Conjuntos

Regresemos a la representación visual de la trayectoria J en la figura 3.1, otra manera de estudiarlo es trazar entre los puntos un polígono, de modo que obtenemos:

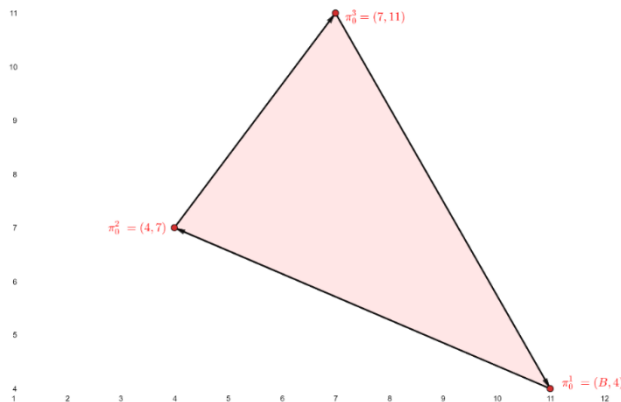


Figura 4.1: Polígono formado por los puntos del conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$.

A continuación, graficamos el resto de los puntos de los conjuntos $\widetilde{r\pi}_0^0$, $\widetilde{\pi}_0^0$ y $\widetilde{r\#}_0^0$, obteniéndose las siguientes figuras:

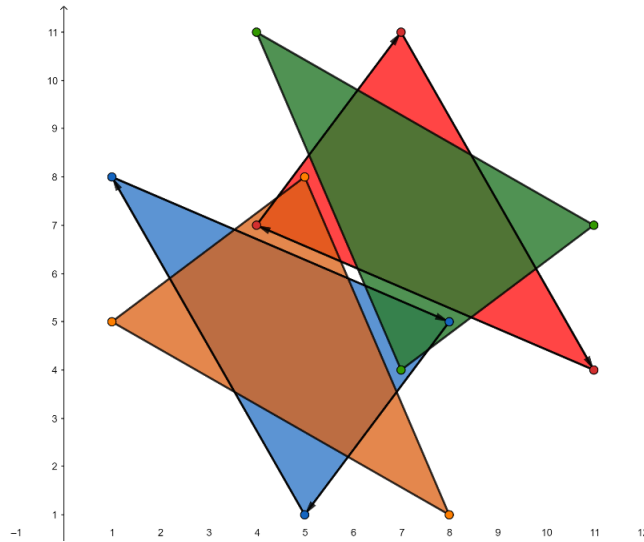


Figura 4.2: Polígonos formados por los puntos del conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$, $\widetilde{\#}_0^0$, $\widetilde{r\pi}_0^0$ y $\widetilde{r\#}_0^0$.

Donde el polígono rojo está formado por los puntos del conjunto $\widetilde{\pi}_0^0$, el polígono azul está formado por los puntos del conjunto $\widetilde{\#}_0^0$, el polígono verde está formado por los puntos del conjunto $\widetilde{r\pi}_0^0$ y el polígono naranja está formado por los puntos del conjunto $\widetilde{r\#}_0^0$.

Algunas propiedades que comparten estos polígonos, es que para los cuatro polígonos tenemos el mismo valor de las áreas y de los ángulos. Véase en la figura 4.3:

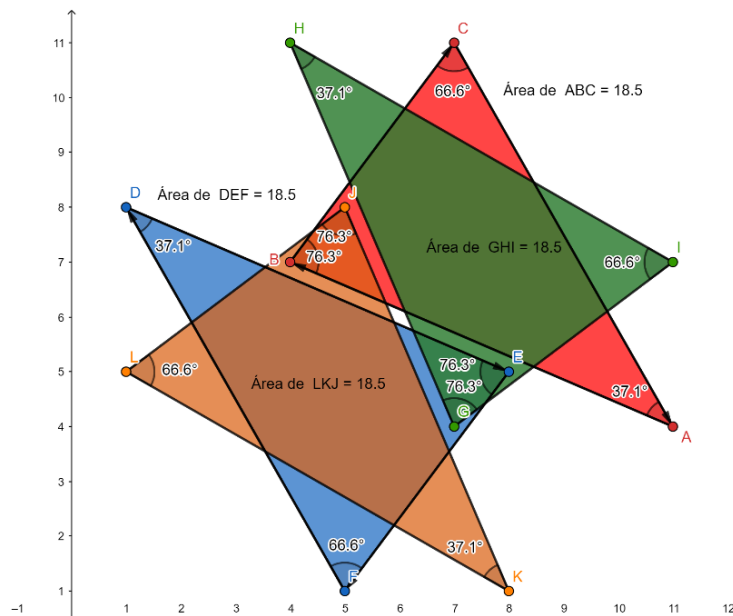


Figura 4.3: Áreas y ángulos de cada polígono.

El área que se forma por los polígonos de los conjuntos se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2] - [n_0n_2 + n_1n_0 + n_2n_1] \quad (4.1)$$

Esta expresión funciona si $|\pi_0^0| = 3$.

A continuación, presentamos las fórmulas para calcular el área cuando los conjuntos tiene diferentes números cardinales.

Si $|\pi_0^0| = 4$

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2] - [n_0n_2 + n_1n_3 + n_2n_0 + n_3n_1] \quad (4.2)$$

Si $|\pi_0^0| = 5$

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2] - [n_0n_2 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_0 + n_4n_1] \quad (4.3)$$

Si $|\pi_0^0| = 6$

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 + (n_5)^2] - [n_0n_1 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_0 + n_5n_1] \quad (4.4)$$

Si $|\pi_0^0| = 7$

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 + (n_5)^2 + (n_6)^2] - [n_0n_1 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_6 + n_5n_1 + n_6n_1] \quad (4.5)$$

Si $|\pi_0^0| = 8$

$$A = \frac{1}{2} [(n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 + (n_4)^2 + (n_5)^2 + (n_6)^2 + (n_7)^2] - [n_0n_1 + n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_6 + n_5n_7 + n_6n_0 + n_7n_1] \quad (4.6)$$

Para terminar este apartado, presentamos la siguiente igualdad que se descubrió mientras se investigaba la ecuación 4.1.

“Sea π_0^0 el conjunto de la forma ideal original / $|\pi_0^0| = 3$ y π_0^0 el conjunto de la forma invertida de la forma ideal / $|\pi_0^0| = 3$, la suma de los elementos de π_0^0 y π_0^0 es igual al producto de $|\pi_0^0| \bmod 12$ ”.

$$(n_0 + n_1 + n_2) + (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = |\pi_0^0| \bmod 12 \quad (4.7)$$

5. Conclusión

Este trabajo se puede dividir en dos partes principales: la primera es la formalización de algunos de los conceptos de la teoría *pitch class set*, cuyo orden matemático podría permitir que la enseñanza de este lenguaje musical sea más práctico de entender y de divulgar, por otro lado, a partir de la fórmula de distancia interválica proponemos que los conjuntos de notas musicales realmente representan puntos en el plano cartesiano y que cierta geometría es capaz de ser formada mediante polígonos, además, esta geometría manifiesta propiedades simétricas con los conjuntos de la forma ideal invertida como de sus retrógrados en referencia a valores como el área y los ángulos. Con todos estos resultados, podemos considerar en formato de conjetura la idea de que las ecuaciones 4.1 a 4.6 representan la estrecha relación entre la matemática pura y la teoría musical (en este caso en el campo atonal), más allá de ser una herramienta de composición musical, es claro que existe una posible relación en un sentido abstracto y no creativo.

El paso siguiente es estudiar si las propiedades geométricas tienen alguna representación musical, es decir, si el área o los ángulos de la figura 4.3 representan algo en el contexto musical que se adentren dentro del campo de la teoría o el de la interpretación musical. Todas estas hipótesis se desarrollarán en futuros trabajos.

6. Referencias

Coxeter, H. (1969). *Introduction to Geometry*. Nashville, TN: John Wiley & Sons.

de Oteyza, E. (2005). *Geometría analítica*. México: Pearson Educacion.

Demaine, E. D., Gomez-Martin, F., Meijer, H., Rappaport, D., Taslakian, P., Toussaint, G. T., ... & Wood, D. R. (2009). The distance geometry of music. *Computational geometry*, 42 (5), 429-454.

Perle, G. (1972). *Serial composition and atonality: an introduction to the music of Schoenberg, Berg, and Webern*. Univ of California Press.

Porter, L., DeVito, C., Wild, D., Fujioka, Y., & Schmalzer, W. (2013). *The John Coltrane reference*. London, England: Routledge.

Roeder, J. (1987). A geometric representation of pitch-class series. *Perspectives of New Music*, 25 (1), 362-409.

Schuijjer, M. (2008). *Analyzing atonal music: Pitch-class set theory and its contexts*. University of Rochester Press.

Simms, B. R. (2000). *The atonal music of Arnold Schoenberg, 1908-1923*. Oxford University Press.

Suppes, P. (1972). *Axiomatic Set Theory*. Dover Publications.

Tymoczko, D. (2006, July). The geometry of musical chords. *Science*, 313 (5783), New York, N.Y. (pp. 72–74).

Tymoczko, D. (2011). *A geometry of music: Harmony and counterpoint in the extended common practice*. Oxford University Press.

Vázquez, H. (2006). *Fundamentos teóricos de la música atonal*. UNAM.

Villaveces, Andrés (2017). Geometría de la música: un camino por las superficies tonales. *En Perry, Patricia (Ed.), Memorias del encuentro de geometría y sus aplicaciones*, 23 (pp. 19-26).