



HAL
open science

Séries d'opérateurs

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. Séries d'opérateurs. 2023. hal-04206110v2

HAL Id: hal-04206110

<https://hal.science/hal-04206110v2>

Preprint submitted on 13 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

SÉRIES D'OPÉRATEURS

JONOT JEAN LOUIS

A la mémoire de Blandine et Jérémy.

ABSTRACT. Dans cet article, on s'intéresse à l'étude de certains opérateurs définis à partir des séries entières. Sous certaines hypothèses, la transformée de Fourier et la transformée de Fourier holomorphe simplifient ces opérateurs par multiplication. On propose ensuite une approche de la conjecture de Hilbert-Pólya.

1. OPÉRATEURS QUANTIQUES

L'espace $L^2(]a, b[)$ est l'espace des fonctions numériques ϕ sur $]a, b[$ à valeurs complexes vérifiant $\int_a^b |\phi|^2 < +\infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. La dérivation faible de $\varphi \in L^2(]a, b[)$ est définie par l'unique fonction $\widehat{\partial}\varphi$, si elle existe, qui vérifie

$$\int_a^b \varphi \phi' = - \int_a^b \phi \widehat{\partial}\varphi,$$

pour toute fonction ϕ dérivable à support compact. L'opérateur quantique \widehat{p} défini par

$$\widehat{p} = -i\widehat{\partial}$$

et l'opérateur de Berry-Keating

$$(1.1) \quad \{\widehat{x}, \widehat{p}\} = \widehat{x}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{x},$$

où \widehat{x} est l'opérateur défini par

$$\widehat{x}\varphi(\xi) = \xi\varphi(\xi), \quad \forall \xi \in]a, b[,$$

sont des opérateurs à domaine dense dans $L^2(]a, b[)$ car

$$\mathcal{D}(]a, b[) = \{\varphi \in C^\infty(]a, b[, \mathbb{C}) : \text{supp } \varphi \text{ compact}\}$$

est contenu dans chaque domaine de \widehat{p} et $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$. L'opérateur de Volterra

$$\widehat{\int}\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt,$$

est un opérateur dont le domaine contient $L^1(\mathbb{R})$.

Remark 1. *La densité des domaines définis précédemment est due au résultat plus général qui affirme que $\mathcal{D}(]a, b[)$ est dense dans $L^p(]a, b[)$ pour $p < +\infty$.*

Date: 8/10/2019.

2020 Mathematics Subject Classification. 47A60, 47A75, 30B50, 30B10.

Key words and phrases. Opérateur autoadjoint, opérateur essentiellement autoadjoint, fonction zêta de Hurwitz, transformée de Fourier, transformée de Fourier holomorphe.

Definition 1. Pour une fonction ς développable en série entière

$$\varsigma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$, l'opérateur de dérivation associé à ς est défini par

$$\widehat{\partial}_\varsigma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \widehat{\partial}^n.$$

Les opérateurs \widehat{H}_\pm sont définis formellement par l'opérateur de Volterra \widehat{J} et les opérateurs de dérivation associés aux deux séries entières ς et τ ,

$$\widehat{H}_\pm = \widehat{J}_{\widehat{\partial}_{\varsigma_\pm} \{\widehat{x}, \widehat{p}\}} \widehat{\partial}_{\tau_\pm}, \quad \tau_\pm(t) = \tau(\pm t), \quad \varsigma_\pm(t) = \varsigma(\pm t)$$

où

$$\varsigma(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n,$$

est la série de rayon de convergence 2π , B_n sont les nombres de Bernoulli et la série

$$\tau(t) = e^t - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n,$$

qui a pour rayon de convergence $+\infty$. L'opérateur de Bender, Brody et Müller, défini dans l'article [1], est \widehat{H}_- . Dans ce qui suit, \widehat{H} est l'opérateur \widehat{H}_+ ,

$$\widehat{H} = \widehat{J}_{\widehat{\partial}_\varsigma \{\widehat{x}, \widehat{p}\}} \widehat{\partial}_\tau$$

où

$$\widehat{\partial}_\tau = e^{\widehat{\partial}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \widehat{\partial}^n \quad \text{et} \quad \widehat{\partial}_\varsigma = \frac{\widehat{\partial}}{e^{\widehat{\partial}} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \widehat{\partial}^n.$$

On rappelle que

$$\zeta_\rho(x) = \zeta(\rho, x),$$

ζ est l'extension méromorphe de la fonction zêta de Hurwitz pour $\rho \neq 1$ et $x > 0$, la fonction de Riemann est définie par $\zeta(z) = \zeta(z, 1)$, $\forall z \neq 1$. $\mathcal{Z}(\zeta)$ désigne l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction de Riemann ζ .

Lemma 1. Pour $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{1 \leq 2\tau \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau}{k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq 2\tau+1 \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau+1}{k}\right) = 0.$$

Proof. Voir la preuve dans [2]. □

Corollary 1. $\forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$

$$\zeta\left(\rho, \frac{1}{3}\right) = \zeta\left(\rho, \frac{2}{3}\right) = 0.$$

Il existe des nombres $0 < \mu < \nu < 2\pi$ pour lesquels, quelque soit $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$, $\zeta_\rho(\mu) = \zeta_\rho(\nu) = 0$. On pose

$$(1.2) \quad \zeta_{\rho, \mu, \nu} = \zeta_\rho \times \mathbf{1}_{] \mu, \nu [} \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) = x^{-\rho} \times \mathbf{1}_{] \mu, \nu [}(x), \quad 0 < \mu < \nu < 2\pi.$$

Lemma 2. *Si $\zeta_\rho(\mu) = \zeta_\rho(\nu) = 0$ alors*

$$(1.3) \quad \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} = \zeta_{\rho, \mu, \nu}.$$

Proof. Calculons $\widehat{\partial}_\zeta x^{-\rho}$, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_\zeta x^{-\rho} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \partial^n x^{-\rho} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{\Gamma(-\rho+1)}{\Gamma(-\rho-n+1)} x^{-(\rho+n)} \\ &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \int_\gamma x^{-(\rho+n)} t^{n+\rho-1} e^t dt \\ &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \int_\gamma \left(\frac{t}{x}\right)^{n+\rho-1} e^{x\frac{t}{x}} d\frac{t}{x} \end{aligned}$$

où γ est un contour de Hankel qui entoure l'axe des réels négatifs et est orienté positivement. La transformation

$$t \rightarrow \frac{t}{x}$$

de γ donne un nouveau contour de Hankel, noté δ , ayant les mêmes propriétés car $x > 0$. Pour ce contour

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_\zeta x^{-\rho} &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \int_\delta t^{n+\rho-1} e^{xt} dt \\ &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_\delta t^{\rho-1} e^{xt} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) dt \\ &= -\frac{\Gamma(1-\rho)}{2\pi i} \int_\delta \frac{t^\rho e^{xt}}{1-e^t} dt = -\rho \zeta(\rho+1, x), \\ \widehat{\partial}_\zeta x^{-\rho} &= -\rho \zeta(\rho+1, x) \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) = -\rho \zeta(\rho+1, x) \times \mathbf{1}_{] \mu, \nu[}(x) = -\rho \zeta_{\rho+1, \mu, \nu}(x)$$

$$\widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) = 0 \text{ si } x < \mu,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) &= \int_\mu^x -\rho \zeta_{\rho+1}(t) dt \\ &= \zeta_\rho(x) - \zeta_\rho(\mu) \\ &= \zeta_\rho(x), \text{ si } \mu \leq x < \nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) &= \int_\mu^\nu -\rho \zeta_{\rho+1}(t) dt \\ &= \zeta_\rho(\nu) - \zeta_\rho(\mu) = 0, \text{ si } \nu < x, \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} = \zeta_{\rho, \mu, \nu}.$$

□

Theorem 1. Pour $\mu, \nu \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$, $\mu < \nu$

$$(1.4) \quad \widehat{H}\zeta_{\rho, \mu, \nu}(x) = i(2\rho - 1)\zeta_{\rho, \mu, \nu}(x), \quad \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta).$$

Proof. Pour $\mu \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$, $\zeta_{\rho}(\mu) = 0$, $\forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$ [2]. Calculons $\widehat{H}\zeta_{\rho, \mu, \nu}(x)$ par représentation intégrale de ζ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_{\tau}\zeta(\rho, x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \partial^n \zeta(\rho, x) \\ &= \zeta(\rho, x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\rho+1)}{\Gamma(-\rho-n+1)} \zeta(n+\rho, x) \\ &= \zeta(\rho, x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{\rho+n-1} e^{xt}}{1-e^t} dt \\ &= \zeta(\rho, x) - \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{\rho-1} e^{xt}}{1-e^t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \zeta(\rho, x) - \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{\rho-1} e^{xt}}{e^t - 1} dt \\ &= \zeta(\rho, x) - \zeta(\rho, x+1) = x^{-\rho}, \end{aligned}$$

γ est un contour de Hankel défini comme précédemment et,

$$(1.5) \quad \widehat{\partial}_{\tau}\zeta_{\rho, \mu, \nu}(x) = \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\int} \widehat{\partial}_{\zeta} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\partial}_{\tau}\zeta_{\rho, \mu, \nu}(x) &= \widehat{\int} \widehat{\partial}_{\zeta} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) \\ &= i(2\rho - 1) \widehat{\int} \widehat{\partial}_{\zeta} \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) \end{aligned}$$

$$\widehat{H}\zeta_{\rho, \mu, \nu} = i(2\rho - 1)\zeta_{\rho, \mu, \nu}, \quad \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta).$$

□

Remark 2. Les fonctions tronquées $\zeta_{\rho, \mu, \nu}$ et $\widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}$ sont C^{∞} en dehors de μ et ν et vérifient les relations

$$\begin{aligned} \zeta_{\rho, \mu, \nu}^{(n)} &= (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (\rho + k) \zeta_{\rho+n, \mu, \nu} \\ \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}^{(n)} &= (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (\rho + k) \widetilde{x}_{\rho+n, \mu, \nu}, \end{aligned}$$

ces fonctions sont dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

La construction qui suit donne une relation entre les opérateurs de Bender-Brody-Müller \widehat{H} et l'opérateur de Berry-Keating $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ à l'aide de la transformée de Fourier sur certains sous-espaces. On restreint les opérateurs à des domaines de symétrisation et de densité pour les étendre par fermeture à des opérateurs autoadjoints.

2. DOMAINE DE SYMÉTRISATION ET DE DENSITÉ DES OPÉRATEURS QUANTIQUES

Definition 2. Soit \widehat{L} un opérateur de $L^2([a, b])$, à domaine dense. Un sous-espace \mathfrak{D} de $\text{dom } \widehat{L}$ est un domaine de symétrisation si $\widehat{L}|_{\mathfrak{D}}$ est un opérateur symétrique.

Un sous-espace \mathfrak{D} de $\text{dom } \widehat{L}$ est un domaine de densité si $(i\widehat{L} \pm 1)|_{\mathfrak{D}}$ est dense dans $L^2([a, b])$.

Lemma 3. Si \mathfrak{D} est un domaine de symétrisation et de densité alors $\widehat{L}|_{\mathfrak{D}}$ est un opérateur essentiellement autoadjoint de $L^2([a, b])$.

Notation 1. On pose

$$(2.1) \quad \mathcal{D}_\alpha([a, b]) = \left\{ \varphi \in C^\infty([a, b]) : \lim_{x \rightarrow a^+} x^\alpha \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^\alpha \varphi(x) \right\}.$$

Lemma 4. Si $0 < a < b < +\infty$, $\mathcal{D}_\alpha([a, b])$ est un domaine de densité de \widehat{p} et si $\alpha \neq 1$, $\mathcal{D}_\alpha([a, b])$ est un domaine de densité de $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$.

Proof. On vérifie que $(\pm 1 + i\widehat{p})\mathcal{D}_\alpha([a, b])$ est dense dans $L^2([a, b])$, pour cela on montre que

$$\mathcal{D}([a, b]) \subset (1 \pm i\widehat{p})\mathcal{D}_\alpha([a, b]).$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}([a, b])$, on cherche une fonction φ telle que

$$\varphi' + \epsilon\varphi = \phi, \quad \epsilon = \pm 1$$

$$\varphi(x) = \left(\int_a^x e^{\epsilon t} \phi(t) dt + K \right) e^{-\epsilon x},$$

on fixe la constante K pour que 2.1 soit vérifiée, si $b < +\infty$, pour

$$K = \frac{b^\alpha e^{-\epsilon b}}{a^\alpha e^{-\epsilon a} - b^\alpha e^{-\epsilon b}} \int_a^b e^{\epsilon t} \phi(t) dt$$

l'égalité des limites est vérifiée. La fonction $\varphi \in \mathcal{D}_\alpha([a, b])$ et on a,

$$(\epsilon 1 + i\widehat{p})\varphi = \phi, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Pour vérifier que, pour $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, $(\pm 1 + i\{\widehat{x}, \widehat{p}\})\mathcal{D}_\alpha([a, b])$ est dense dans $L^2([a, b])$, on doit déterminer les solutions de l'équation

$$(2.2) \quad (1 + \epsilon)\varphi + 2x\varphi' = \phi, \quad \epsilon = \pm 1,$$

$\phi \in \mathcal{D}([a, b])$. Si $\epsilon = -1$, $\varphi' = \frac{1}{2x}\phi$ et si $\epsilon = +1$, $(x\varphi)' = \frac{1}{2}\phi$. Pour $\epsilon = -1$, on pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_a^x \frac{\phi(t)}{t} dt + K,$$

on veut déterminer la constante K pour laquelle la relation 2.1 est vérifiée, on obtient

$$K = \frac{b^\alpha}{2(a^\alpha - b^\alpha)} \int_a^b \frac{\phi(t)}{t} dt$$

et si $\epsilon = +1$, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \left(\int_a^x t\phi(t) dt + K \right)$$

pour $\alpha \neq 1$ on prend pour K , la constante

$$K = \frac{b^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1} - b^{\alpha-1}} \int_a^b t\phi(t) dt, \quad \text{si } a \neq 0$$

dans tous les cas, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_\alpha (]a, b[)$ telle que

$$(\pm 1 + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) \varphi = \phi$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D} (]a, b[)$. La densité de $\mathcal{D} (]a, b[)$ dans $L^2 (]a, b[)$ permet de conclure. \square

Lemma 5. $\mathcal{D}_0 (]a, b[)$ est un domaine de symétrisation de \widehat{p} et $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} (]a, b[)$ est un domaine de symétrisation de $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ pour $0 \leq a < b < +\infty$.

Proof. Le domaine $\mathcal{D}_0 (]a, b[)$ est un domaine de symétrisation de \widehat{p} , par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{\widehat{p}\varphi} \psi &= i \left(\lim_{x \rightarrow b^-} \overline{\varphi(x)} \psi(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} \overline{\varphi(x)} \psi(x) \right) + \int_a^b \overline{\varphi} \widehat{p} \psi \\ &= \int_a^b \overline{\varphi} \widehat{p} \psi, \forall \varphi \text{ et } \forall \psi \in \mathcal{D}_0 (]a, b[) \end{aligned}$$

et $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} (]a, b[)$ est un domaine de symétrisation de $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi} \psi &= 2i \left(\lim_{x \rightarrow b^-} x \overline{\varphi(x)} \psi(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} x \overline{\varphi(x)} \psi(x) \right) + \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi \\ &= \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi, \forall \varphi \text{ et } \forall \psi \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} (]a, b[). \end{aligned}$$

\square

Theorem 2. Si $0 < a < b < +\infty$, les opérateurs \widehat{p} et $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ restreints, respectivement à $\mathcal{D}_0 (]a, b[)$ et $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} (]a, b[)$ comme opérateurs de $L^2 (]a, b[)$, sont des opérateurs essentiellement autoadjoints.

3. TRANSFORMATION DE FOURIER DES OPÉRATEURS QUANTIQUES

La transformée de Fourier est l'opérateur de $L^1 (\mathbb{R})$ défini par

$$\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi) = \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\xi t} dt$$

et la transformée inverse est

$$\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{i\xi t} dt,$$

la restriction de $\widehat{\mathcal{F}} |_{L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})}$ s'étend en un opérateur borné de $L^2 (\mathbb{R})$.

Lemma 6. Pour φ et $x\varphi \in L^1 (\mathbb{R})$,

$$(3.1) \quad \widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \pm \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\widehat{x}\varphi$$

et si φ est dérivable presque partout et $\varphi' \in L^1 (\mathbb{R})$,

$$(3.2) \quad \widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \mp \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\widehat{p}\varphi.$$

Proof. Supposons φ et $\widehat{x}\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} & -i\partial_\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{\pm i\xi t} \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \partial_\xi e^{\pm i\xi t} \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) (\pm it) e^{\pm i\xi t} \\ &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t) e^{\pm i\xi t} \end{aligned}$$

et

$$\widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \pm \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\widehat{x}\varphi.$$

Si φ et $\widehat{\partial}\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, la formule 3.2 est vérifiée,

$$\begin{aligned} & \xi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{\pm i\xi t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \xi e^{\pm i\xi t} \\ &= \frac{1}{\pm i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \partial_t e^{\pm i\xi t} \\ &= -\frac{1}{\pm i} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \varphi(t) e^{\pm i\xi t} \\ &= -\frac{1}{\pm i} \frac{1}{-i} \int_{-\infty}^{+\infty} -i\partial_t \varphi(t) e^{\pm i\xi t} \\ &= \mp \int_{-\infty}^{+\infty} -i\partial_t \varphi(t) e^{\pm i\xi t} \end{aligned}$$

et

$$\widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \mp \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\widehat{p}\varphi.$$

□

Remark 3. Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\varphi \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\mathcal{F}}\varphi \text{ et } \varphi \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi,$$

en particulier si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(3.3) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi.$$

Corollary 2. Si φ est dérivable presque partout et $\varphi, x\varphi, \varphi', x\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(3.4) \quad \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi = -\widehat{\mathcal{F}}^{-1} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi$$

et

$$(3.5) \quad \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\mathcal{F}}\varphi = -\widehat{\mathcal{F}} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi.$$

Proof. Avec les hypothèses précédentes sur φ

$$\begin{aligned}\widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi &= \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{x}\varphi, \widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi = -\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{p}\varphi \\ & \\ \{\widehat{x}, \widehat{p}\}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi &= \widehat{x}\widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi + \widehat{p}\widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi \\ &= \widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{x}\varphi - \widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{x}\varphi \\ &= -\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{p}\widehat{x}\varphi - \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{x}\widehat{p}\varphi \\ &= -\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\{\widehat{x}, \widehat{p}\}\varphi\end{aligned}$$

et

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi = -\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\{\widehat{x}, \widehat{p}\}\varphi.$$

□

Dans ce qui suit γ est une série entière

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

de rayon de convergence R avec $0 < R \leq +\infty$.

Theorem 3. Si $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$ pour $R < +\infty$, $\text{supp } \varphi$ est borné si $R = +\infty$ et φ vérifie $\widehat{x}^n \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$(3.6) \quad \widehat{\partial}_\gamma \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi = \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma}^* \varphi, \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R.$$

Proof. Pour tout n , $\widehat{x}^n \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on peut permuter n fois les opérateurs $\widehat{\partial}$ et $\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}$. Formellement, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}_\gamma \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \widehat{\partial}^n \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \int_{-\infty}^{+\infty} (\mp it)^n \varphi(t) e^{\mp i \xi t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n (\mp it)^n \varphi(t) e^{\mp i \xi t} dt,\end{aligned}$$

comme $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$, il existe une constante K telle que $\text{supp } \varphi \subset [-K, K] \subset]-R, R[$

$$|\gamma_n (\mp it)^n \varphi(t) e^{\mp i \xi t}| \leq |\varphi| \sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n| K^n \in L^1(\mathbb{R}),$$

car la série entière γ est absolument convergente sur $]-R, R[$. On peut permuter les symboles \sum et \int , on obtient

$$\widehat{\partial}_\gamma \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi = \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma}^* \varphi \text{ avec } \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R.$$

□

Corollary 3. Si $\varphi, \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\text{supp } \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \subset]-R, R[$ alors

$$\widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \text{ avec } \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R,$$

en particulier,

$$(3.7) \quad \widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{L^2} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi \text{ avec } \gamma^*(t) = \gamma(it) \text{ si } |t| < R$$

si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ l'égalité précédente est vraie dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proof. Si $\text{supp } \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \subset]-R, R[$ alors il existe K tel que $\text{supp } \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \subset [-K, K] \subset]-R, R[$ (il en est de même pour $R = +\infty$) et

$$\left| x^n \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \right| \leq K^n \left| \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \right| \in L^1(\mathbb{R}),$$

on est dans les hypothèses du théorème précédent en remplaçant φ par $\widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi$

$$\widehat{\partial}_\gamma \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi = \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \text{ avec } \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R,$$

φ et $\widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi$ sont $L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi$$

et

$$\widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi,$$

l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$ est immédiate si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. \square

Theorem 4. Si $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$ si $R < +\infty$, $\text{supp } \varphi$ est borné si $R = +\infty$ et φ est C^∞ presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifie $\varphi^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\partial}_\gamma \varphi = \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi, \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R.$$

Proof. On peut écrire formellement, par intégration par partie n fois en utilisant l'hypothèse $\varphi^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \varphi^{(n)} \right) (\xi) \\ &= \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \varphi^{(n)}(x) \right) e^{\mp i \xi x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \gamma_n \varphi^{(n)}(x) e^{\mp i \xi x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \gamma_n (\mp i \xi)^n \varphi(x) e^{\mp i \xi x} dx \end{aligned}$$

$$\left| \gamma_n (\mp i \xi)^n \varphi(x) e^{\mp i \xi x} \right| \leq |\gamma_n \xi^n \varphi| \leq |\varphi| \sum_{n=0}^{+\infty} |\gamma_n| K^n \in L^1(\mathbb{R})$$

où K vérifie $\text{supp } \varphi \subset [-K, K] \subset]-R, R[$, on peut encore permuter les symboles $\widehat{\Sigma}$ et \widehat{f}

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\partial}_\gamma \varphi(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \gamma_n (\mp i \xi)^n \varphi(x) e^{\mp i \xi x} dx \\ &= \gamma^*(\xi) \int \varphi(x) e^{\pm i \xi x} dx, \quad \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R \\ &= \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

□

Corollary 4. *Si $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$, φ est C^∞ presque partout avec $\varphi^{(n)}$ et $\widehat{\partial}_\gamma \varphi \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors*

$$(3.8) \quad \widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi, \quad \gamma^*(t) = \gamma(\mp it), \quad t \in]-R, R[,$$

pour $\widehat{\partial}_\gamma \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ alors l'égalité est vraie dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proof. Avec les hypothèses on a

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\partial}_\gamma \varphi = \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi, \quad \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R$$

et

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\partial}_\gamma \varphi = \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi, \quad \gamma^*(t) = \gamma(\mp it),$$

$\widehat{\partial}_\gamma \varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$$\widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi,$$

pour $\widehat{\partial}_\gamma \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ l'égalité obtenue est dans $L^2(\mathbb{R})$. □

La transformée de Fourier holomorphe, de signe \pm , est l'opérateur défini sur $L^2(]0, +\infty[)$ par

$$\widehat{\mathfrak{F}}^\pm \varphi(\xi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{\pm it\xi} dt = \widehat{\mathcal{F}}^\mp \widetilde{\varphi}(\xi)$$

avec

$$(3.9) \quad \widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases},$$

le théorème de Paley-Wiener permet d'affirmer que $\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi$ est holomorphe sur le demi-plan $\pm \text{Im } \xi > 0$ et vérifie

$$(3.10) \quad \sup_{\pm y > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi(x + iy) \right|^2 dx < +\infty.$$

La transformée de Fourier holomorphe est l'opérateur $\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1}$

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} : L^2(]0, +\infty[) \rightarrow H^2(\Pi^\pm),$$

si $\psi \in H^2(\Pi^+)$ et

$$\psi^*(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi(x + iy)$$

alors $H^2(\Pi^+)$ est un espace de Hilbert pour le produit

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \overline{\phi^*(x)} dx.$$

La transformée de Fourier holomorphe sur le demi-plan inférieur Π^- est définie sur $L^2(]0, +\infty[)$ par

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{-1}\varphi(\xi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-it\xi} dt = \widehat{\mathcal{F}}\widetilde{\varphi}(\xi),$$

où $\widetilde{\varphi}$ est définie en 3.9.

Lemma 7. *Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset]0, +\infty[$, on a*

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi(\xi) = \pm i \widehat{\xi}^{-1} \widehat{\mathfrak{F}}^{-1} \varphi(\xi), \quad \pm \text{Im } \xi > 0$$

Les fonctions $\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi$ sont holomorphes sur les demi-plans Π^{\pm} et vérifient la condition 3.10.

Proof. Pour $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ avec support $\text{supp } \varphi \subset]0, +\infty[$, alors $\text{supp } \widehat{\int} \varphi \subset]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi(\xi) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \right) e^{\pm ix\xi} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \varphi(t) dt \right) e^{\pm ix\xi} dx, \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini,

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi(\xi) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \mathbf{1}_{]0, x[}(t) e^{\pm ix\xi} dt dx,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\varphi(t) e^{\pm ix\xi}| dt dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| e^{\mp x \text{Im } \xi} dt dx \\ &= \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| dt \int_0^{+\infty} e^{\mp x \text{Im } \xi} dx \\ &= \frac{\pm 1}{\text{Im } \xi} \|\varphi\|_1 < +\infty \text{ si } \pm \text{Im } \xi > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi(\xi) \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left(\int_t^{+\infty} e^{\pm ix\xi} dx \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left[\frac{e^{\pm ix\xi}}{\pm i\xi} \right]_t^{+\infty} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \frac{e^{\pm it\xi}}{\mp i\xi} dt \\
&= \frac{1}{\mp i\xi} \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi) \\
&= \pm i\xi^{-1} \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi) \text{ pour } \pm \operatorname{Im} \xi > 0,
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Paley-Wiener, la fonction

$$\xi \rightarrow \pm i\xi^{-1} \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi)$$

est holomorphe sur $\pm \operatorname{Im} \xi > 0$ comme produit de deux fonctions holomorphes. \square

Corollary 5. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset]0, +\infty[$, alors

$$(3.11) \quad \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi(x) = \pm ix^{-1} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi(x).$$

Proof. Avec les hypothèses précédentes,

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \widehat{\int} \varphi(\xi) = \frac{1}{\pm i\xi} \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi(\xi)$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^s \varphi(t) dt \right) e^{\pm is(x+i\eta)} ds = \frac{1}{\pm i(x+i\eta)} \int_0^{+\infty} \varphi(s) e^{\pm is(x+i\eta)} ds, \quad \pm \eta > 0$$

quand $\pm \eta$ tend vers par valeur supérieure à 0, formellement on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^s \varphi(t) dt \right) e^{\pm isx} ds = \frac{1}{\pm ix} \int_0^{+\infty} \varphi(s) e^{\pm isx} ds,$$

le passage de la limite sous le signe \int est applicable car

$$\begin{aligned}
\left| \left(\int_0^s \varphi(t) dt \right) e^{\pm is(x+i\eta)} \right| &= \left| \int_0^s \varphi(t) dt \right| e^{\mp s\eta} \\
&\leq \|\varphi\|_1 e^{\mp s\eta} \in L^1(]0, +\infty[)
\end{aligned}$$

pour $\pm \eta > 0$, donc

$$\lim_{\pm \eta \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s \varphi(t) dt \right) e^{\pm is(x+i\eta)} ds = \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\int} \varphi(x),$$

pour le deuxième terme

$$\begin{aligned}
\lim_{\pm \eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pm i(x+i\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{\pm is(x+i\eta)} ds &= \frac{1}{\pm ix} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\int} \varphi(x) \\
\left| \varphi(s) e^{\pm is(x+i\eta)} \right| &\leq |\varphi(s)| e^{\mp \eta s} \leq |\varphi(s)| \text{ si } \pm \eta > 0 \text{ et } s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

car $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\text{supp } \varphi \subset]0, +\infty[$,

$$\widehat{\mathcal{F}^{\pm 1}} \int \varphi(x) = \pm i \widehat{x^{-1}} \widehat{\mathcal{F}^{\pm 1}} \varphi(x).$$

□

4. LES OPÉRATEURS \widehat{H} ET $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$

On veut trouver une relation liant les opérateurs de Berry-Keating, Bender-Brody-Müller et la transformation de Fourier sur

$$\mathfrak{D}(]0, 2\pi[) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \text{supp } \varphi \subset]0, 2\pi[\},$$

on a le théorème suivant.

Theorem 5. *Si $\varphi \in \mathfrak{D}(]0, 2\pi[)$ alors*

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi = \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \frac{1}{e^{ix} - 1} \varphi.$$

Proof. Si $\varphi \in \mathfrak{D}(]0, 2\pi[)$ l'équation

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = \widehat{\mathcal{F}} \int \widehat{\partial}_\varsigma \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\partial}_\tau \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi$$

se transforme en utilisant la relation 3.6 appliquée à la série τ sous la forme

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = \widehat{\mathcal{F}} \int \widehat{\partial}_\varsigma \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\tau^*} \varphi$$

car $\widehat{x^n} \varphi \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\tau^*(t) = e^{it} - 1$. On a aucune condition sur $\text{supp } \varphi$ car le rayon de convergence de τ est $+\infty$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $(\widehat{\tau^*} \varphi)'$, $\widehat{x} (\widehat{\tau^*} \varphi)' \in L^1(\mathbb{R})$, on peut permuter l'opérateur de Berry-Keating et l'opérateur de Fourier

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = -\widehat{\mathcal{F}} \int \widehat{\partial}_\varsigma \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\tau^*} \varphi,$$

en utilisant 3.4. Pour $\text{supp } \varphi \subset]-2\pi, 2\pi[$ et $\widehat{x^n} \varphi' \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\tau^*} \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, en utilisant 3.6 appliquée à la série ς on peut écrire

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = -\widehat{\mathcal{F}} \int \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\varsigma^*} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\tau^*} \varphi.$$

On fait l'hypothèse supplémentaire que $\text{supp } \varphi \subset]0, 2\pi[$ alors

$$\widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = -i \widehat{x^{-1}} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\varsigma^*} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\tau^*} \varphi,$$

la relation 3.11 peut être appliquée pour les hypothèses $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\text{supp } \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\varsigma^*} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\tau^*} \varphi \subset]0, +\infty[$$

et

$$\widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\varsigma^*} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\tau^*} \varphi \in L^1(\mathbb{R}).$$

Cette dernière affirmation est une conséquence du théorème de Paley-Wiener car $\widehat{\zeta^* \{ \widehat{x}, \widehat{p} \} \tau^* \varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On obtient la relation liant les opérateurs $\widehat{e^{ix} - 1}$, $\widehat{\mathcal{F}}$ et \widehat{H} à l'opérateur de Berry-Keating $\{ \widehat{x}, \widehat{p} \}$,

$$(4.1) \quad \{ \widehat{x}, \widehat{p} \} = \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \frac{1}{\widehat{e^{ix} - 1}} \text{ sur le domaine } \mathfrak{D} (]0, 2\pi[).$$

□

Theorem 6. *Les fonctions*

$$\eta_{\rho, \mu, \nu} = \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta, \quad \eta \in \mathfrak{D} (]0, 2\pi[)$$

sont des fonctions propres de l'opérateur de Berry-Keating associées à la valeur propre $-i(2\rho - 1)$.

Proof. On se fixe $\eta \in \mathfrak{D} (]0, 2\pi[)$ et on pose

$$\begin{aligned} \eta_{\rho, \mu, \nu} &= \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \left(\zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right), \quad \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta = \eta \end{aligned}$$

$\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\eta_{\rho, \mu, \nu} \in \mathfrak{D} (]0, 2\pi[)$ donc

$$\begin{aligned} \{ \widehat{x}, \widehat{p} \} \eta_{\rho, \mu, \nu} &= \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \left(\zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) \\ &= \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right). \end{aligned}$$

La fonction $\zeta_{\rho, \mu, \nu} \in L^2(\mathbb{R})$ (voir 4.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_\tau \left(\zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\partial}_\tau \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\tau^*} \times \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right) \end{aligned}$$

car $\widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \in \mathfrak{D} (]0, 2\pi[)$, on est dans les hypothèses vérifiant 3.6

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\tau^*} \left(\widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\tau^*} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\tau^*} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \right) * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta, \end{aligned}$$

en utilisant l'équation 3.7 à $\zeta_{\rho, \mu, \nu} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left(\widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\tau^*} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \right) * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta &= \widehat{\partial}_\tau \zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \\ &= \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \end{aligned}$$

en utilisant l'équation 1.5.

La fonction $\widehat{\mathcal{F}}\zeta_{\rho,\mu,\nu}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}\zeta_{\rho,\mu,\nu}(x) &= \int \zeta_{\rho,\mu,\nu}(t) e^{-ixt} dt = \int_{\mu}^{\nu} \zeta_{\rho,\mu,\nu}(t) \left(\frac{e^{-ixt}}{-ix} \right)' dt \\ &= \left[\zeta_{\rho,\mu,\nu}(t) \frac{e^{-ixt}}{-ix} \right]_{\mu}^{\nu} - \frac{i}{x} \int_{\mu}^{\nu} \zeta_{\rho+1,\mu,\nu}(t) e^{-ixt} dt \\ &= -\frac{i}{x} \int_{\mu}^{\nu} \zeta_{\rho+1,\mu,\nu}(t) e^{-ixt} dt \end{aligned}$$

$$(4.2) \quad \left| \widehat{\mathcal{F}}\zeta_{\rho,\mu,\nu}(x) \right|^2 \leq \frac{1}{x^2} \left(\int_{\mu}^{\nu} |\zeta_{\rho+1,\mu,\nu}(t)| dt \right)^2 = \frac{(\nu - \mu)^2 |\zeta_{\rho+1,\mu,\nu}|_{\infty}^2}{2\pi x^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\partial}_{\tau} \left(\zeta_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right) &= \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right) \\ &= \left(-2ix \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right)' - i\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right) \end{aligned}$$

$$\left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right)' = \left(\int \widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta(t) dt \right)',$$

on peut dériver sous le signe \int car

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta(t) \right)' &= \widetilde{x}'_{\rho,\mu,\nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta(t) \\ &= -\rho \widetilde{x}_{\rho+1,\mu,\nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta(t) \\ \left| \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta(t) \right)' \right| &\leq |\rho| |\widetilde{x}_{\rho+1,\mu,\nu}|_{\infty} \left| \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right| \in L^1(\mathbb{R}) \\ \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right)' &= \widetilde{x}'_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right) &= \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \\ &= -i(2\rho - 1) \widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta. \end{aligned}$$

L'image en $\zeta_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta$ de l'opérateur de Bender-Brody-Müller s'écrit

$$\begin{aligned} \widehat{H} \left(\zeta_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right) &= -i(2\rho - 1) \widehat{\int} \widehat{\partial}_{\varsigma} \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right), \\ \widehat{\partial}_{\varsigma} \left(\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\eta \right) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\partial}_{\varsigma} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\mathcal{F}} \widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} \times \eta \right) \end{aligned}$$

car $\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu}^2 = \widetilde{x}_{2\rho,\mu,\nu}$. On peut appliquer, à la série ς de rayon de convergence 2π et à la fonction $\widehat{\mathcal{F}} \widetilde{x}_{\rho,\mu,\nu} \times \eta \in \mathfrak{D}([0, 2\pi[)$, le résultat donné

en 3.6

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \widehat{\partial}_\zeta \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\mathcal{F}} \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\widehat{\zeta}^* \times \widehat{\mathcal{F}} \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\left(\widehat{\zeta}^* \times \widehat{\mathcal{F}} \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} \right) \times \eta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\zeta}^* \widehat{\mathcal{F}} \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \\
&= \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\widehat{\int} \left(\widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right)$ on remarque que le produit de convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Sur $L^1(\mathbb{R})$, on va montrer que

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial} \widehat{\int} \left(\widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) &= \widehat{\partial} \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \\
&= \widehat{\partial} \left(\widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation 1.3, la fonction $\widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} = -\rho \zeta_{\rho+1, \mu, \nu}$ est dérivable sauf aux points μ, ν

$$\left(\widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right)' = -\rho \left(\widehat{\int} \zeta_{\rho+1, \mu, \nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta(t) dt \right)'$$

on peut dériver sous l'intégrale car

$$(4.3) \quad \left| \zeta_{\rho+1, \mu, \nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta(t) \right| \leq |\zeta_{\rho+1, \mu, \nu}|_\infty \left| \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta(t) \right|$$

et $\widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \in L^1(\mathbb{R})$. Les fonctions $\widehat{\int} \left(\widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right)$ et $\widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta$ sont dérivables, de même dérivée donc différent d'une constante sur \mathbb{R} car les dérivées sont continues. Pour calculer la constante, le comportement en $-\infty$ est donné par

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{\int} \left(\widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) = 0 \text{ car } \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \in L^1(\mathbb{R})$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int \int \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta(t) dt,$$

on peut permuter la limite et la somme par 4.3 donc,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta = \int \lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x-t) \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta(t) dt = 0$$

on a l'égalité

$$\begin{aligned}
\widehat{\int} \left(\widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) &= \widehat{\int} \widehat{\partial}_\zeta \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \\
&= \zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta
\end{aligned}$$

en utilisant l'équation 1.3. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\widehat{H} \left(\zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) &= \widehat{H} \zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \\
&= -i(2\rho - 1) \zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta.
\end{aligned}$$

Pour toute fonction $\eta \in \mathfrak{D}]0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \eta_{\rho, \mu, \nu} &= \frac{1}{2\pi} \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F} \widehat{H}} \left(\zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) \\ &= -i \frac{2\rho - 1}{2\pi} \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \left(\zeta_{\rho, \mu, \nu} * \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \eta \right) \\ &= -i (2\rho - 1) \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta \\ &= -i (2\rho - 1) \eta_{\rho, \mu, \nu}, \end{aligned}$$

le spectre de l'opérateur de Berry-Keating contient $\mathcal{Z}(\zeta)$, les fonctions

$$\eta_{\rho, \mu, \nu} = \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta$$

sont des fonctions propres associées à la valeur propre $-i(2\rho - 1)$. \square

Remark 4. *La relation*

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \eta_{\rho, \mu, \nu} = -i(2\rho - 1) \eta_{\rho, \mu, \nu}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$ implique l'égalité sur \mathbb{R} car ces fonctions sont C^∞ .

Theorem 7. *Les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann sont sur la droite $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$.*

Lemma 8. *Sur $L^2]a, b[$ avec $0 < a < b < 2\pi$, il existe un opérateur autoadjoint dont le spectre contient*

$$\{-i(2\rho - 1) : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)\}.$$

Proof. L'opérateur $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ restreint à $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}]a, b[$ est noté $\widehat{\{x, p\}}$. Cet opérateur $\widehat{\{x, p\}}$ est un opérateur, à domaine dense, essentiellement autoadjoint dont le spectre contient $-i(2\rho - 1)$, $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$. Pour cela il suffit de remarquer que si $\eta \in \mathfrak{D}]a, b[$, la restriction de la fonction

$$\eta_{\rho, \mu, \nu} = \widehat{e^{ix} - 1} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta,$$

notée encore $\eta_{\rho, \mu, \nu}$, appartient à $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}]a, b[$,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} \eta_{\rho, \mu, \nu} = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} \eta_{\rho, \mu, \nu} = 0,$$

et vérifie

$$\widehat{\{x, p\}} \eta_{\rho, \mu, \nu} = -i(2\rho - 1) \eta_{\rho, \mu, \nu},$$

la fermeture de $\widehat{\{x, p\}}$ est un opérateur autoadjoint, cet opérateur répond à la conjecture de Hilbert-Pólya. \square

La conjecture de Riemann s'en déduit immédiatement.

5. CONCLUSION

On a proposé, dans cet article, une approche de la conjecture de Hilbert-Pólya. Cette approche reste à confirmer mais les résultats sur les séries d'opérateurs méritent d'être développés. La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est un outil puissant pour l'étude de ces opérateurs, il permet par conjugaison de ramener ces opérateurs à des multiplicateurs, c'est-à-dire, des opérateurs de la forme $\widehat{\gamma^*}$. La preuve de cette conjecture est basée sur des résultats standards des transformées de Fourier holomorphe et non holomorphe combinés avec les résultats de Bender, Brody et Müller, ainsi que la théorie des séries d'opérateurs quantiques.

REFERENCES

- [1] Bender C., Brody D.C., Müller M. P. "Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function", *Phy. Rev. Letter*, PRL 118, 2017.
- [2] Jonot J.L., "Opérateurs quantiques, Application à la conjecture de Hilbert-Pólya" 2019
Email address: j.jonot@gmail.com