



HAL
open science

Conjecture de Hilbert-Pólya

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. Conjecture de Hilbert-Pólya. 2023. hal-04205478

HAL Id: hal-04205478

<https://hal.science/hal-04205478>

Preprint submitted on 12 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

CONJECTURE DE HILBERT–PÓLYA

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Dans cet article, on propose de donner un résumé d'une approche possible de la conjecture de Hilbert–Pólya. Les démonstrations des résultats énoncés se trouvent dans les articles [2], [3] et [4].

1. OPÉRATEURS QUANTIQUES

L'espace $L^2(]a, b[)$ est l'espace des fonctions numériques ϕ sur $]a, b[$ à valeurs complexes vérifiant $\int_a^b |\phi|^2 < +\infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. L'opérateur quantique \widehat{p} défini par

$$\widehat{p} = -i\widehat{\partial}$$

et l'opérateur de Berry-Keating

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} = \widehat{x}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{x},$$

où \widehat{x} est l'opérateur défini par

$$\widehat{x}\varphi(\xi) = \xi\varphi(\xi), \forall \xi \in]a, b[,$$

sont des opérateurs à domaine dense dans $L^2(]a, b[)$ car

$$\mathcal{D}(]a, b[) = \{\varphi \in C^\infty(]a, b[, \mathbb{C}) : \text{supp } \varphi \text{ compact}\}$$

est contenu dans chaque domaine de \widehat{p} et $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$. L'opérateur de Volterra

$$\widehat{\int}\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt,$$

est un opérateur dont le domaine contient $L^1(\mathbb{R})$.

Pour une fonction γ développable en série entière

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$, l'opérateur de dérivation associé à γ est défini par

$$\widehat{\partial}_\gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \widehat{\partial}^n.$$

Les opérateurs Bender-Brody-Muller, définis dans l'article [1], sont les opérateurs \widehat{H}_\pm sont

$$\widehat{H}_\pm = \widehat{\int}_{\varsigma_\pm} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\partial}_{\tau_\pm}, \tau_\pm(t) = \tau(\pm t), \varsigma_\pm(t) = \varsigma(\pm t)$$

Date: 11 septembre 2023.

2020 Mathematics Subject Classification. 47L30, 47L90, 11A67 .

Key words and phrases. Fonctions Zêta, Fourier, autoadjoint, essentiellement autoadjoint, opérateurs quantiques.

on pose $\widehat{H} = \widehat{H}_+$ où

$$\varsigma(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n,$$

est la série de rayon de convergence 2π , B_n sont les nombres de Bernoulli et la série

$$\tau(t) = e^t - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n,$$

qui a pour rayon de convergence $+\infty$.

$$\widehat{\partial}_\tau = e^{\widehat{\partial}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \widehat{\partial}^n \text{ et } \widehat{\partial}_\varsigma = \frac{\widehat{\partial}}{e^{\widehat{\partial}} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \widehat{\partial}^n.$$

Claim 1. *Dans ce qui suit la preuve des résultats sont dans [2] et [3]*

On rappelle que

$$\zeta_\rho(x) = \zeta(\rho, x),$$

ζ est l'extension méromorphe de la fonction zêta de Hurwitz pour $\rho \neq 1$ et $x > 0$, la fonction de Riemann est définie par $\zeta(z) = \zeta(z, 1)$, $\forall z \neq 1$. $\mathcal{Z}(\zeta)$ désigne l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction de Riemann ζ .

Lemma 1. *Pour $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\sum_{1 \leq 2\tau \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau}{k}\right) = 0 \text{ et } \sum_{1 \leq 2\tau+1 \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau+1}{k}\right) = 0,$$

en particulier,

$$\zeta\left(\rho, \frac{1}{3}\right) = \zeta\left(\rho, \frac{2}{3}\right) = 0, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta).$$

On pose

$$\zeta_{\rho, \mu, \nu} = \zeta_\rho \times \mathbf{1}_{] \mu, \nu[} \text{ et } \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu}(x) = x^{-\rho} \times \mathbf{1}_{] \mu, \nu[}(x), 0 < \mu < \nu < 2\pi.$$

Lemma 2. *Si $\zeta_\rho(\mu) = \zeta_\rho(\nu) = 0$ alors*

$$\widehat{\int} \widehat{\partial}_\varsigma \widetilde{x}_{\rho, \mu, \nu} = \zeta_{\rho, \mu, \nu}.$$

Theorem 1. *Pour $\mu, \nu \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$, $\mu < \nu$*

$$\widehat{H} \zeta_{\rho, \mu, \nu}(x) = i(2\rho - 1) \zeta_{\rho, \mu, \nu}(x), \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta).$$

2. DOMAINE DE SYMÉTRISATION ET DE DENSITÉ DES OPÉRATEURS QUANTIQUES

Definition 1. *Soit \widehat{L} un opérateur de $L^2(]a, b[)$, à domaine dense. Un sous-espace \mathfrak{D} de $\text{dom } \widehat{L}$ est un domaine de symétrisation si $\widehat{L}|_{\mathfrak{D}}$ est un opérateur symétrique.*

Un sous-espace \mathfrak{D} de $\text{dom } \widehat{L}$ est un domaine de densité si $(i\widehat{L} \pm 1)|_{\mathfrak{D}}$ est dense dans $L^2(]a, b[)$.

Lemma 3. *Si \mathfrak{D} est un domaine de symétrisation et de densité alors $\widehat{L}|_{\mathfrak{D}}$ est un opérateur essentiellement autoadjoint de $L^2(]a, b[)$.*

Notation 1. *On pose*

$$\mathcal{D}_\alpha(]a, b[) = \left\{ \varphi \in C^\infty(]a, b[) : \lim_{x \rightarrow a^+} x^\alpha \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^\alpha \varphi(x) \right\}.$$

Lemma 4. Si $0 < a < b < +\infty$, $\mathcal{D}_\alpha]a, b[$ est un domaine de densité de \widehat{p} et si $\alpha \neq 1$, $\mathcal{D}_\alpha]a, b[$ est un domaine de densité de $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$.

Lemma 5. $\mathcal{D}_0]a, b[$ est un domaine de symétrisation de \widehat{p} et $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}]a, b[$ est un domaine de symétrisation de $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ pour $0 < a < b < +\infty$.

3. TRANSFORMATION DE FOURIER DES OPÉRATEURS QUANTIQUES

La transformée de Fourier est l'opérateur de $L^1(\mathbb{R})$ défini par

$$\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi) = \widehat{\mathcal{F}}^{+1}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\xi t} dt$$

et la transformée inverse est

$$\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{i\xi t} dt,$$

la restriction de $\widehat{\mathcal{F}}|_{L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})}$ s'étend en un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$.

Lemma 6. Si φ et $x\varphi \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \pm \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\widehat{x}\varphi$$

et si φ est dérivable presque partout et $\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \mp \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\widehat{p}\varphi.$$

Remark 1. Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\varphi \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{\mathcal{F}}\varphi \text{ et } \varphi \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi,$$

en particulier si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1}\varphi.$$

Corollary 1. Si φ est dérivable presque partout et $\varphi, x\varphi, \varphi', x\varphi' \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi = -\widehat{\mathcal{F}}^{-1} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi$$

et

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\mathcal{F}}\varphi = -\widehat{\mathcal{F}} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi.$$

Dans ce qui suit γ est une série entière

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n$$

de rayon de convergence R avec $0 < R \leq +\infty$.

Theorem 2. Si $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$ pour $R < +\infty$, $\text{supp } \varphi$ est borné si $R = +\infty$ et φ vérifie $\widehat{x}^n \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\widehat{\partial}_\gamma \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1}\varphi = \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma}^* \varphi, \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R.$$

Corollary 2. Si $\varphi, \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\text{supp } \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \subset]-R, R[$ alors

$$\widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \varphi \text{ avec } \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R,$$

en particulier,

$$\widehat{\partial}_\gamma \varphi \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \varphi \text{ avec } \gamma^*(t) = \gamma(it) \text{ si } |t| < R$$

si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ l'égalité précédente est vraie dans $L^2(\mathbb{R})$.

Theorem 3. Si $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$ si $R < +\infty$, $\text{supp } \varphi$ est borné si $R = +\infty$ et φ est C^∞ presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifie $\varphi^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \widehat{\partial}_\gamma \varphi = \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi, \gamma^*(t) = \gamma(\mp it) \text{ si } |t| < R.$$

Corollary 3. Si $\text{supp } \varphi \subset]-R, R[$, φ est C^∞ presque partout avec $\varphi^{(n)}$ et $\widehat{\partial}_\gamma \varphi \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\widehat{\partial}_\gamma \varphi = \frac{1}{pp} \frac{1}{2\pi} \widehat{\mathcal{F}}^{\mp 1} \widehat{\gamma^*} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm 1} \varphi, \gamma^*(t) = \gamma(\mp it), t \in]-R, R[,$$

pour $\widehat{\partial}_\gamma \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ alors l'égalité est vraie dans $L^2(\mathbb{R})$.

La transformée de Fourier holomorphe, de signe \pm , est l'opérateur défini sur $L^2(]0, +\infty[)$ par

$$\widehat{\mathfrak{F}}^\pm \varphi(\xi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{\pm it\xi} dt = \widehat{\mathcal{F}}^\mp \tilde{\varphi}(\xi)$$

avec

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases},$$

le théorème de Paley-Wiener permet d'affirmer que $\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi$ est holomorphe sur le demi-plan $\pm \text{Im } \xi > 0$ et vérifie

$$\sup_{\pm y > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \varphi(x + iy) \right|^2 dx < +\infty. \quad (3.1)$$

La transformée de Fourier holomorphe est l'opérateur $\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1}$

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} : L^2(]0, +\infty[) \rightarrow H^2(\Pi^\pm),$$

si $\psi \in H^2(\Pi^+)$ et

$$\psi^*(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi(x + iy)$$

alors $H^2(\Pi^+)$ est un espace de Hilbert pour le produit

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \overline{\phi^*(x)} dx.$$

Lemma 7. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset]0, +\infty[$, on a

$$\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \int \varphi(\xi) = \pm i \widehat{\xi^{-1}} \widehat{\mathfrak{F}}^{-1} \varphi(\xi), \quad \pm \text{Im } \xi > 0$$

Les fonctions $\widehat{\mathfrak{F}}^{\pm 1} \int \varphi$ sont holomorphes sur les demi-plans Π^\pm et vérifient la condition 3.1.

Corollary 4. *Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset]0, +\infty[$, alors*

$$\widehat{\mathcal{F}^{\pm 1}} \int \varphi(x) = \pm i \widehat{x^{-1}} \widehat{\mathcal{F}^{\pm 1}} \varphi(x).$$

4. LES OPÉRATEURS \widehat{H} ET $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$

On veut trouver une relation liant les opérateurs de Berry-Keating, Bender-Brody-Müller et la transformation de Fourier sur

$$\mathfrak{D}(]0, 2\pi[) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \text{supp } \varphi \subset]0, 2\pi[\},$$

on a le théorème suivant.

Theorem 4. *Si $\varphi \in \mathfrak{D}(]0, 2\pi[)$ alors*

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi = \frac{1}{2\pi} e^{ix} \widehat{1} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \frac{1}{e^{ix} - 1} \varphi.$$

Theorem 5. *Les fonctions*

$$\eta_{\rho, \mu, \nu} = e^{ix} \widehat{1} \widehat{\mathcal{F}} \zeta_{\rho, \mu, \nu} \times \eta, \quad \eta \in \mathfrak{D}(]0, 2\pi[)$$

sont des fonctions propres de l'opérateur de Berry-Keating associées à la valeur propre $-i(2\rho - 1)$.

Theorem 6. *Les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann sont sur la droite $\text{Re } z = \frac{1}{2}$.*

Lemma 8. *Sur $L^2(]a, b[)$ avec $0 < a < b < 2\pi$, il existe un opérateur autoadjoint dont le spectre contient*

$$\{-i(2\rho - 1) : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)\}.$$

La conjecture de Riemann s'en déduit immédiatement. L'opérateur qui répond à la conjecture de Hilbert-Pólya est la fermeture dans $L^2(]a, b[)$, avec $0 < a < b < 2\pi$, de l'opérateur de Berry-Keating restreint à

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(]a, b[) \subset L^2(]a, b[).$$

5. CONCLUSION

Cette approche de la conjecture de Hilbert-Pólya reste à confirmer. La construction des opérateurs, à partir des séries entières est un outil puissant dans l'étude des opérateurs quantiques.

REFERENCES

- [1] Bender C., Brody D.C., Müller M. P. "Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function", *Phy. Rev. Letter*, PRL 118, 2017.
 - [2] Jonot J.L., "Opérateurs quantiques, Application à la conjecture de Hilbert-Pólya" 2019 (hal-02133808v2)
 - [3] Jonot J.L., "Séries d'opérateurs" Hal 2023.
 - [4] Jonot J.L., "Hypothèse de Riemann, Séries de Dirichlet et opérateurs associés" Hal 2018
- Email address: j.jonot@gmail.com*