



**HAL**  
open science

## Calcul des auto-oscillations par décomposition modale pour les instruments à anche

Vincent Debut, Jean Kergomard

► **To cite this version:**

Vincent Debut, Jean Kergomard. Calcul des auto-oscillations par décomposition modale pour les instruments à anche. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-04204277

**HAL Id: hal-04204277**

**<https://hal.science/hal-04204277v1>**

Submitted on 12 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul des auto-oscillations par décomposition modale pour les instruments de musique à anche

Vincent Debut & Jean Kergomard

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique-UPR 7051  
31 chemin Joseph Aiguier 13402 Marseille cedex 20  
debut@lma.cnrs-mrs.fr

## Résumé :

*Pour décrire et simuler les auto-oscillations dans les instruments de musique à anche, nous proposons une méthode de calcul par analyse modale en l'appliquant à une clarinette simplifiée. La modélisation repose sur un système unidimensionnel avec une condition à l'entrée en termes d'une relation d'impédance issue de la partie linéaire de la fonction non-linéaire pression-débit. La méthode de décomposition de la fonction de Green est présentée, ainsi que la formulation modale des auto-oscillations dans le domaine temporel. Les résultats des simulations numériques permettent une compréhension précise de la façon dont les différents modes sont excités et la méthode est validée par la technique d'équilibrage harmonique.*

## Abstract :

*This paper is devoted to the study of self-sustained oscillations in clarinetlike instruments with the help of modal analysis. The modelling procedure deals with a unidimensional dissipative system with active boundaries conditions. Expanding the Green function on the resonance modes of the system results in an original description of the dynamics. Numerical simulations are presented and gives explanations to sound production mechanisms. Even if the dynamic is ensured by a few number of components, all of them participate in the oscillation by nonlinear coupling. The decomposition is validated with the harmonic balance technique.*

## Mots-clefs :

**acoustique musicale, auto-oscillations, analyse modale, condition de paroi absorbante.**

## 1 Introduction

Si l'analyse modale est une technique couramment utilisée en acoustique musicale pour étudier et simuler le rendu sonore de structures vibrantes complexes [1, 2], peu d'études [3] se sont penchées sur son application aux instruments auto-oscillants pour lesquels le terme forçant, la source, dépend de l'inconnue. La motivation principale de ce travail est de fournir une méthode de calculs reposant sur l'analyse modale, pour mieux comprendre les mécanismes de production du son dans les instruments à vent. Plus exactement, l'approche proposée consiste à décomposer un son en composantes élémentaires qui, en régime linéaire, c'est-à-dire un court instant pendant le transitoire, sont les modes du système. Si l'on se contente ici d'appliquer la méthode au cas d'un instrument à anche pour lequel le résonateur est cylindrique, l'extension de la démarche à d'autres modèles d'instruments est directement possible.

Le modèle d'instrument considéré est le modèle élémentaire d'instruments à anche de type clarinette qui repose sur deux équations, l'anche étant supposée être un simple ressort sans masse ni amortissement [4]. Le problème traité est celui de la propagation unidimensionnelle dans un tube cylindrique en fluide dissipatif pour lequel une source de débit, fonction non linéaire de la pression, est localisée à l'entrée. Une manière simple de résoudre le problème par méthode modale est de décomposer l'impédance d'entrée du système sur les modes propres

du tuyau (cette décomposition a été effectuée expérimentalement pour la première fois par Agulló et Barjau [5]), et de projeter à chaque instant la source sur les modes. Le calcul des auto-oscillations est ensuite effectué en écrivant le champ de pression comme une somme de composantes élémentaires. L'inconvénient de cette approche, appelée dans ce qui suit *première approche*, est qu'au début du transitoire, en régime quasi-linéaire, les modes sont couplés. Une approche différente, appelée *seconde approche*, consiste à réécrire le problème avec une condition d'impédance à l'entrée, issue du terme linéaire de la relation entre la pression et le débit entrant dans l'instrument, puis à développer la fonction de Green sur les modes de résonance [6]. Les composantes élémentaires obtenues sont alors, pendant le début du transitoire, les modes eux-mêmes. Ce découplage des modes permet, au moins en régime linéaire, de connaître la fréquence de jeu à l'attaque de la note et d'étudier les seuils d'instabilité de chacun des modes.

## 2 Position du problème

Nous nous intéressons au champ interne de pression  $p(t)$  créé par une source de débit  $u(t) = F_{NL}[p(t)]$  localisée à l'entrée  $x = 0$  d'un résonateur cylindrique qui débouche en  $x = \ell$  sur une impédance nulle (le rayonnement est classiquement pris en compte en calculant le rayonnement monopolaire créé par le débit de sortie). La fonction non linéaire est obtenue grâce à certaines hypothèses à partir de la relation de Bernoulli [4]. Le problème de propagation en ondes planes dans le guide est traité dans le domaine fréquentiel à partir de la formulation en ligne de transmission avec pertes visco-thermiques [7]. Dans les deux approches, la décomposition modale de l'impédance est obtenue en calculant celle de la fonction de Green avec une position de source et récepteur quelconques, et faisant tendre leurs positions vers l'entrée. Dans la *première approche*, il faut alors imposer une condition de Neumann à l'entrée [8]; dans la seconde, on choisit une condition d'admittance correspondant au terme linéaire de la fonction  $F_{NL}$  : cette admittance est réelle, donc l'inverse d'une résistance, et pour que l'oscillation démarre, elle doit être négative, ce qui correspond à un apport d'énergie. Classiquement, le champ de pression  $P(x, \omega)$  est donné par

$$P(x, \omega) = G(x; 0) Q_s(\omega), \quad (1)$$

où  $Q_s = j\omega \frac{\rho}{S} [U(\omega) - U_L(\omega)]$ .  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $S = \pi r^2$  la section du guide cylindrique de rayon  $r$ ,  $U(\omega)$  et  $P(x, \omega)$  sont les transformées de Fourier de  $u(t)$  et de  $p(t)$ .  $U_L(\omega)$  est le terme linéaire du développement limité de la fonction  $F_{NL}$ . La fonction de Green  $G(x; x_0)$  du problème, qui vérifie les mêmes équation et conditions aux limites que le champ, est solution du problème aux limites non-homogène suivant

$$\begin{cases} [d_{xx}^2 - (j\frac{\omega}{c} + \alpha)^2]G(x; x_0) = -\delta(x - x_0), & \forall x, x_0 \in ]0; \ell[ , \\ d_x G(x; x_0) = -j\frac{\omega}{c} \frac{\rho c}{S} A G(x; x_0), & \text{en } x = 0, \\ G(x; x_0) = 0, & \text{en } x = \ell. \end{cases} \quad (2)$$

dans lequel  $A$ , qui a la dimension d'une admittance, est le coefficient du terme linéaire de la fonction non linéaire linéarisée,  $\alpha$  est le terme d'amortissement (supposé constant en  $\omega$  pour le calcul des modes),  $c$  est la célérité du son et  $\delta$  est la mesure de Dirac.

## 3 Décomposition de la fonction de Green sur les modes de résonance

La démarche pour développer la fonction de Green sur les modes de résonance du système consiste tout d'abord à rechercher une expression non décomposée dans le domaine de Fourier.

Le calcul des pôles donne ensuite les pulsations complexes de résonance, et la solution temporelle est obtenue par transformée de Fourier inverse à l'aide du théorème des résidus et prend la forme suivante

$$g(x,t;0,t_0) = H(t-t_0) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(t) \Phi_n(x), \quad (3)$$

dans laquelle les  $\Phi_n(x)$  et les  $g_n(t)$  sont respectivement les déformées modales complexes et les amplitudes modales explicitées dans [9], et  $H(t-t_0)$  la fonction d'Heaviside ( $t_0$  est l'instant d'émission de la source). Les amplitudes modales  $g_n(t)$  prennent la forme de solutions de type oscillation libre: chaque mode de résonance oscille sur sa pulsation propre de résonance, et est atténué au cours du temps de manière exponentielle avec son propre facteur dissipatif qui fait intervenir l'ensemble des phénomènes de pertes du modèle. La question de l'orthogonalité des modes  $\Phi_n(x)$  est traitée dans [9]. On retiendra que les modes ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire classique  $\int_0^\ell \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx \neq 0$ , pour  $m \neq n$ , mais qu'il est possible de définir un produit scalaire tel que la base formée par les  $\Phi_n(x)$  soit orthogonale.

Un intérêt de cette fonction de Green est qu'elle est directement la solution du problème linéaire lorsque l'on suppose, à l'instant initial, un brutal saut de pression dans la bouche du musicien (voir §. 4.1). On connaît ainsi une expression analytique de la solution après l'attaque de la note, lorsque le régime est linéaire, que l'on a validé par la solution des réflexions successives (voir figure 1).

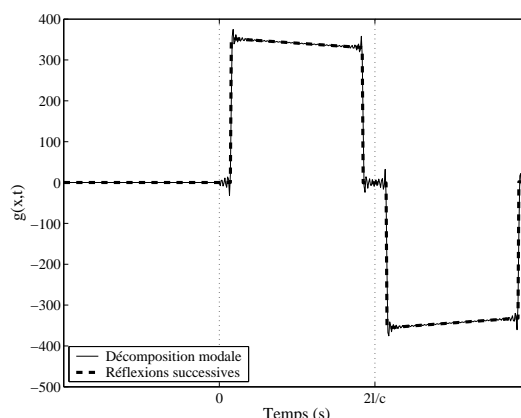


FIG. 1 – Fonction de Green. Comparaison de la forme décomposée et de la solution sous la forme de réflexions successives. 100 modes sont pris en compte ( $n = 50$ ). L'excitation est placée en  $x_0 = 0$  et le récepteur en  $x = 0,1$  m. L'amortissement au cours de la propagation est constant ( $\alpha\ell = 0,036$ ) et l'amortissement aux limites vaut  $A = 0,040$ . La longueur du tube est  $\ell = 0,655$  m.

#### 4 Formulation modale des auto-oscillations, simulations numériques

Recherchant le champ de pression à l'entrée comme une somme infinie de composantes  $p_n(t)$  de la forme  $p(t) = \sum p_n(t)$ , le report de la forme décomposée (dans le domaine de Fourier) de la fonction de Green dans la solution (1) puis l'addition des composantes d'indice  $-n$  et  $n$  et l'usage de la transformée de Fourier inverse conduisent à une formulation modale des auto-oscillations dans le domaine temporel incluant la non-linéarité. La dynamique du système est décrite par un système d'équations différentielles du second ordre, de dimension infinie, qui

gouvernent les évolutions temporelles des amplitudes  $p_n$ . Les équations sont non-linéairement couplées au second membre et le système devient diagonal lorsque l'on supprime les termes non linéaires du problème. C'est à ce stade du calcul qu'on attribue à chaque composante  $p_n(t)$  un facteur d'amortissement spécifique  $\alpha_n$  qui correspond à la valeur de l'amortissement pour la fréquence du mode. On note également que le choix de ne s'intéresser à la pression qu'en un seul point (ici à l'entrée) n'apparaît pas comme une restriction de la méthode, puisqu'on connaît la valeur des modes en tout point dès qu'on la connaît en  $x = 0$ .

Si le modèle unidimensionnel avec terminaison active permet d'expliquer l'origine des phénomènes observés et de les interpréter, cette approche présente des aspects non-triviaux et aboutit à une formulation compliquée des auto-oscillations. Pour l'application aux instruments de musique, il semble plus facile d'adopter ce que nous avons appelé la *première approche*, qui est plus directe. Le système différentiel à résoudre prend alors la forme suivante

$$\left[ \partial_{tt}^2 + \frac{2c}{\ell} Y_n \partial_t + \omega_n^2 \right] p_n(t) = \frac{2c}{\ell} \partial_t u(t), \quad (4)$$

avec  $u(t) = F_{NL}[p(t)]$  et dans laquelle on note  $Y_n = \omega_n \ell / 2c Q_n$  l'admittance du résonateur pour la pulsation propre  $\omega_n$  et  $Q_n$  le facteur de qualité à la pulsation  $\omega_n$ . Tronquée à un mode, cette formulation donne une équation de type Van der Pol quand la fonction non linéaire est un polynôme d'ordre 3. Nous montrons que les deux approches, qui conduisent à deux bases modales différentes, aboutissent à des résultats comparables pour des modèles sévèrement tronqués, et convergent vers le même résultat quand le nombre de modes tend vers l'infini [8].

#### 4.1 Conditions initiales

L'écriture sous forme d'équations différentielles du second ordre impose d'associer à chaque composante du champ une condition initiale sur le champ et sa dérivée. Pour les déterminer, nous supposons que le régime est linéaire au démarrage et nous choisissons l'instant initial des calculs  $t_0$ , dans la première "demi-période", mais non nul. Supposant un brutal saut de pression dans la bouche du musicien à  $t = 0$ , l'excitation à considérer s'écrit  $q_i(t) = \frac{d}{dt}[u_L(t) H(t)]$ . Connaissant le champ (total) à l'entrée par les réflexions successives pour la première demi-période, on accède aux conditions initiales pour chaque composante.

#### 4.2 Résonateur multimodes

Un résultat intéressant concerne les évolutions temporelles des composantes du champ de pression (voir figure 2) qui témoignent clairement de transferts inter-modaux d'énergie par la non-linéarité. Si toutes les composantes sont présentes à l'attaque de la note en raison du saut de pression d'excitation, seulement quelques unes commencent à croître pendant le transitoire : ce sont celles pour lesquelles l'énergie de la source est supérieure aux pertes dans le résonateur, pertes qui croissent comme la racine carrée de la fréquence. Ces composantes *maîtres* dominent les autres qui sont ensuite réexcitées par couplage. En régime permanent, toutes les composantes participent à l'oscillation.

S'il est clair que la méthode proposée n'est manifestement pas une décomposition en série de Fourier puisque chaque composante est un signal non sinusoïdal, l'analyse temps-fréquence des signaux simulés montre aussi qu'il existe un lien étroit entre les harmoniques impairs du signal et les composantes du champ (voir figure 3). Ceci nous amène à étudier la convergence de la méthode qui est à relier aux paramètres de contrôle du modèle. On constate que lorsque la

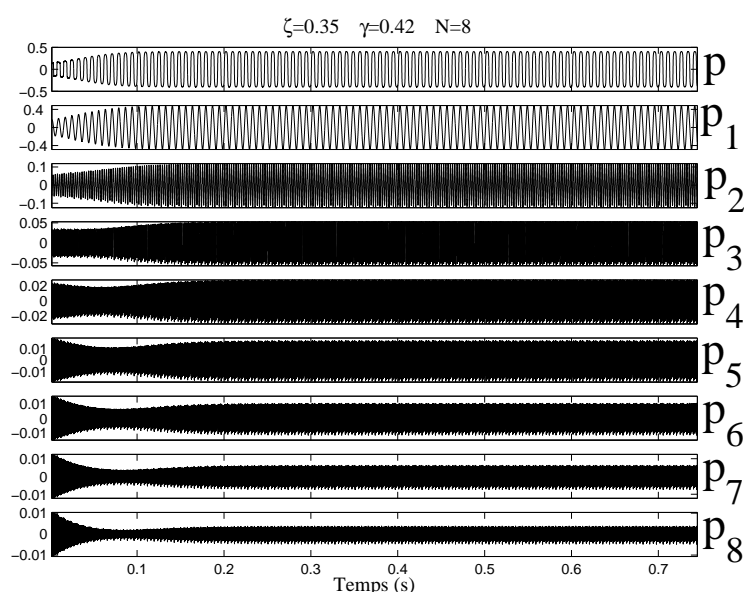


FIG. 2 – Décomposition du signal de pression  $p(t)$  en huit composantes élémentaires  $p_n(t)$  ( $n = 1, \dots, 8$ ). Formulation avec condition de paroi rigide à l'entrée (première approche). Paramètres de contrôle du modèle:  $\zeta = 0,35$ ,  $\gamma = 0,42$ ,  $\eta = 0,0228$  (voir [4] pour préciser les notations).

non-linéarité est forte - c.à.d. les sons contiennent un nombre important d'harmoniques - il est nécessaire d'augmenter l'ordre de troncature de la décomposition.

On précise que l'on a comparé les régimes établis obtenus avec ceux publiés par Kergomard et coll. [10] calculés par la méthode d'équilibrage harmonique: l'accord entre les résultats est correct, ce qui permet de valider la méthode proposée.

## 5 Conclusions

Le calcul des auto-oscillations par décomposition modale apparaît comme une méthode efficace pour décrire la nature des oscillations. Elle offre une perspective directe pour son application à d'autres formes de résonateur. Pour une description plus précise des mécanismes de production du son, une prolongation essentielle est d'inclure la dynamique de l'anche qui participe à l'oscillation. La prise en compte d'un seul de ses modes de vibration ne fait qu'ajouter une équation au système d'équations différentielles modales avec l'implication, pour la non-linéarité, de devenir une fonction de la pression et de l'ouverture de l'anche.

## Références

- [1] J.M. Adrien. *Simulation numérique de systèmes vibrants complexes, application à la synthèse sonore par modélisation physique*. PhD thesis, Université Paris 6, 1989.
- [2] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [3] J. Antunes, M. G. Tafasca, and L. L. Henrique. Simulation of the bowed-string dynamics-part 1- a nonlinear modal approach. In *Actes du 5ème congrès français d'acoustique*, pages 285–288. SFA, 2000.
- [4] J. Kergomard. Elementary considerations on reed-instrument oscillations. In A. Hirsch-

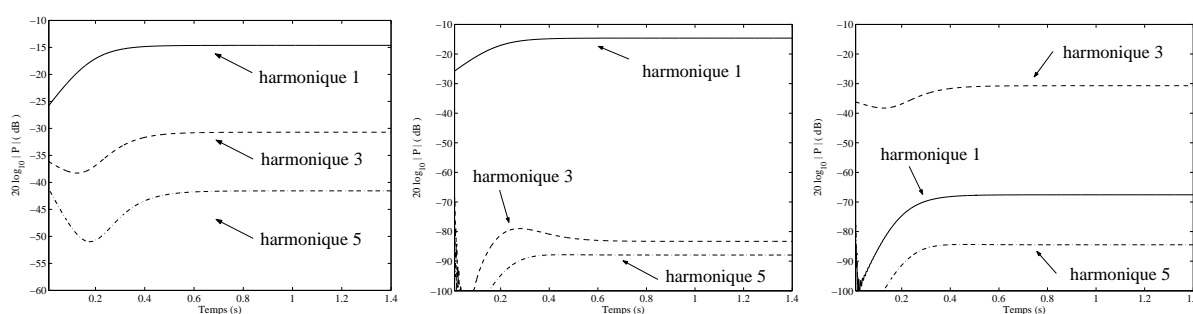


FIG. 3 – Evolution temporelle des 3 premiers harmoniques d'un signal décomposé en huit composantes.  $\zeta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,42$ ,  $\eta = 0,02$  (voir [4] pour préciser les notations). Gauche : signal  $p(t)$ . Milieu : composante élémentaire  $p_1(t)$ . Droite : composante élémentaire  $p_2(t)$ . Les évolutions de l'harmonique 3 dans le signal  $p(t)$  et dans la composante  $p_2(t)$  sont identiques en régime transitoire et en régime permanent. On constate que les évolutions temporelles d'un harmonique dans le spectre sont nettement corrélées à celles d'une composante de la décomposition.

berg/ J. Kergomard/ G. Weinreich, editor, *Mechanics of musical instruments*, volume 335 of *CISM Courses and Lectures*, pages 229–290. Springer-Verlag, Wien- New York, 1995.

- [5] J. Agulló and A. Barjau. The reflection function  $r(t)$ : matrix approach versus  $FFT^{-1}$ . *J. Sound Vibration*, 2:193–201, 1986.
- [6] P. Filippi, D. Habault, J.P Lefebvre, and A. Bergassoli. *Acoustics: basic physics, theory and methods*, chapter 2. Academic Press, Londres, 1999.
- [7] G. Zwicker and C. Kosten. *Sound absorbing materials*. Elsevier, Amsterdam, 1949.
- [8] V. Debut. *Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale*. PhD thesis, Université de la méditerranée, 2004.
- [9] J. Kergomard, V. Debut, and D. Matignon. Resonance modes in a 1D medium with purely absorbing boundaries. En préparation pour le *J. Acoust. Soc. Am.*. Voir aussi sur HAL à l'URL suivant : <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00003357>.
- [10] J. Kergomard, S. Ollivier, and J. Gilbert. Calculation of the spectrum of the self-sustained oscillators using a variable truncation method: application to cylindrical reed instruments. *Acta Acustica*, 86:685–703, 2000.