



**HAL**  
open science

# Analyse micromécanique du comportement élastoplastique effectif d'un composite bi-phasique sous chargement isotrope

Hung Le Quang, Qi-Chang He

► **To cite this version:**

Hung Le Quang, Qi-Chang He. Analyse micromécanique du comportement élastoplastique effectif d'un composite bi-phasique sous chargement isotrope. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-04204276

**HAL Id: hal-04204276**

**<https://hal.science/hal-04204276>**

Submitted on 12 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse micromécanique du comportement élastoplastique effectif d'un composite bi-phasique sous chargement isotrope

Hung Le Quang<sup>a</sup> & Qi Chang He<sup>b</sup>

Laboratoire de Mécanique, Institut Navier, Université de Marne-la-Vallée  
19 rue Nobel, 77420 Champs sur Marne, France

<sup>a</sup> hung.lequang@univ-mlv.fr

<sup>b</sup> he@univ-mlv.fr

## Résumé :

*Ce travail porte sur un composite constitué d'une matrice élastoplastique obéissant au critère de Drucker-Prager et renforcée par des inclusions linéairement élastiques. En utilisant le modèle d'assemblage des sphères composites de Hashin, le comportement élastoplastique effectif du composite soumis à un chargement isotrope est explicitement obtenu. En particulier, on montre que l'effet de la déformation plastique n'est pas significatif pour le matériau composite à inclusions mais très important pour le matériau poreux.*

## Abstract :

*This work is concerned with a composites consisting of an elastoplastic matrix obeying the Drucker-Prager criterion and reinforced by linearly elastic particles. Using the composite sphere assemblage model of Hashin, the macroscopic elastoplastic behavior of the composite undergoing isotropic loading is explicitly obtained. It is in particular shown that plastic effect is not significant for elastic particles but very important for porous materials.*

## Mots-clefs :

**Microstructures ; Composites ; Élastoplasticité**

## 1 Introduction

La prédiction du comportement macroscopique d'un composite en fonction de ses propriétés locales et de sa microstructure est le problème central de la micromécanique des matériaux. Dans un travail [1] qui est devenu classique, Hashin (1962)[1] utilise le modèle d'assemblage des sphères composites (ASC) pour estimer le comportement élastique macroscopique d'un composite constitué d'une matrice élastique renforcée par des inclusions linéairement élastiques. Ensuite, Chen (1993) [2], He et Benvenist (2004) [3] ont généralisé ce modèle à la prédiction du comportement effectif d'un composite formé de phases élastiques sphériquement anisotropes. D'autre part, Chu et Hashin (1971)[4] ont explicitement déterminé le comportement macroscopique d'un matériau composite dont la matrice est élastoplastique et obéit au critère de von Mises. Du fait qu'une classe importante de composites fait intervenir des phases sensibles à la pression, l'objectif principal de ce travail est de généraliser l'ASC à l'estimation du comportement du composite constitué d'une matrice élastoplastique obéissant au critère de Drucker-Prager et renforcée par des inclusions linéairement élastiques. Afin d'illustrer nos résultats, un exemple numérique est présenté.

## 2 Lois constitutives locales

On considère un matériau composite isotrope constitué d'une matrice élastoplastique et renforcée par des inclusions linéairement élastiques. La matrice et les inclusions sont toutes supposées homogènes et isotropes. Les interfaces entre la matrice et les inclusions sont considérées comme parfaitement adhérentes. La relation contrainte - déformation des inclusions, dénommées la phase 2, est décrite par la loi isotrope de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbb{C}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \quad \mathbb{C}^{(2)} = \kappa_2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_2 (\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (1)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur unité d'ordre deux,  $\mathbb{I}$  est le tenseur unité d'ordre quatre.  $\mathbb{C}^{(2)}$  est le tenseur de rigidité,  $\kappa_2$  et  $\mu_2$  sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement.

La matrice, appelée la phase 1, a un comportement élastoplastique parfait sensible à la pression. La déformation de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  est décomposée en une partie élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^{(1)}$  et une partie plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(1)}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_e^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(1)}. \quad (2)$$

La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  est reliée à la déformation élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^{(1)}$  par la loi isotrope de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbb{C}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_e^{(1)} = \mathbb{C}^{(1)} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(1)}), \quad \mathbb{C}^{(1)} = \kappa_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_1 (\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (3)$$

où  $\kappa_1$  et  $\mu_1$  sont les modules de compressibilité et de cisaillement. Le domaine d'élasticité de la matrice est caractérisé par le critère de Drucker-Prager:

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}) = \sigma_{eq}^{(1)} - \alpha p - (1 - \frac{1}{3}\alpha)\sigma_0 \leq 0. \quad (4)$$

Dans cette inégalité,  $p$  et  $\sigma_{eq}^{(1)}$  sont respectivement la contrainte hydrostatique et la contrainte équivalente de von Mises:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \quad \sigma_{eq}^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} : (\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}}, \quad (5)$$

où  $\sigma_0$  est la limite élastique en compression uniaxiale et  $\alpha$  est lié à l'angle de frottement  $\phi$  par la relation  $\alpha = 3 \sin \phi / (3 + \sin^2 \phi)^{1/2}$ . Comme l'angle de frottement  $\phi$  doit vérifier les inégalités  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , on en déduit que  $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ . Remarquons que, lorsque  $\alpha = 0$ , le critère de Drucker-Prager correspond au critère de von Mises. L'incrément de déformation plastique de la matrice  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^{(1)}$  est déterminé par la loi de normalité suivante

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^{(1)} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(1)}}, \quad \lambda \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \lambda f = 0, \quad (6)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange.

Plus particulièrement, on considère un état de contrainte qui a une symétrie de révolution autour d'un axe radial d'un système des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \text{diag}(\sigma_{rr}^{(i)}, \sigma_{\theta\theta}^{(i)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}, \quad (7)$$

où  $i = 1$  ou  $2$  correspond à la phase 1 ou 2. Dans ce cas, le critère de Drucker-Prager pour la matrice s'écrit sous la forme

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}) = \gamma(\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) + \frac{1}{3}(\sigma_{rr}^{(1)} + 2\sigma_{\theta\theta}^{(1)})\alpha - (1 - \frac{1}{3}\alpha)\sigma_0 \leq 0, \quad \gamma = \text{sign}(\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}) \quad (8)$$

où la fonction de signe est définie par:  $\text{sign}(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $\text{sign}(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $\text{sign}(x) = 0$  si  $x = 0$ . En supposant que le chargement ne passe pas par le sommet du cône de Drucker-Prager, les expressions des composantes non-nulles des incréments de déformations plastiques de la matrice sont obtenues par combinaison (8) avec (6):

$$\dot{\varepsilon}_{prr}^{(1)} = \lambda\eta_r, \quad \dot{\varepsilon}_{p\theta\theta}^{(1)} = \dot{\varepsilon}_{p\varphi\varphi}^{(1)} = \lambda\eta_\theta, \quad \text{avec} \quad \eta_r = \gamma + \frac{1}{3}\alpha, \quad \eta_\theta = -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3}\alpha. \quad (9)$$

### 3 Modèle d'assemblage de sphères composites

Afin d'estimer le comportement élastoplastique effectif du composite décrit ci-dessus et soumis à un chargement isotrope, on utilise le modèle d'assemblage des sphères composites (ASC) qui a été initialement proposé par Hashin (1962)[1] pour des matériaux linéairement élastiques, hétérogènes et puis généralisé par Chu et Hashin (1971)[4] aux matériaux élastoplastiques vérifiant le critère de von Mises. On rappelle brièvement le modèle d'ASC comme suit.

Considérer un matériau élastoplastique, isotrope et homogène constituant un solide tridimensionnel  $\Omega$ . Dans un premier temps, la loi de comportement de ce matériau homogène est supposée inconnue. Le solide  $\Omega$  est soumis à une déformation ou contrainte uniforme isotrope sur sa surface externe  $\partial\Omega$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0(t)\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p_0(t)\mathbf{I}. \quad (10)$$

En supposant que la force volumique est négligeable, les champs de déformation, de contrainte et les incréments de déformation, de contrainte dans  $\Omega$  sont isotropes et uniformes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0(t)\mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p_0(t)\mathbf{I}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\varepsilon}_0(t)\mathbf{I}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = -\dot{p}_0(t)\mathbf{I}. \quad (11)$$

On introduit les deux modules tangent et sécant de compressibilité,  $\tilde{\kappa}_s$  et  $\tilde{\kappa}_t$ , du matériau constituant de  $\Omega$

$$p_0 = -3\tilde{\kappa}_s\varepsilon_0, \quad \dot{p}_0 = -3\tilde{\kappa}_t\dot{\varepsilon}_0. \quad (12)$$

A présent,  $\tilde{\kappa}_s$  et  $\tilde{\kappa}_t$ , dépendent de  $\varepsilon_0$ , ne sont pas encore précisés.

On considère ensuite une sphère composite dont le noyau de rayon  $a$  est occupé par la phase 2 et entouré par une coquille concentrique de rayon externe  $b$ . La dernière est constituée de la phase 1 (Fig.1a). La sphère composite est soumise à une contrainte ou déformation uniforme isotrope  $(10)_1$  et  $(10)_2$  sur sa surface externe. La déformation est supposée infinitésimale et l'interface entre le noyau et la matrice est supposée parfaite, les moyennes volumiques de contrainte, de déformation, d'incrément de contraintes et de déformations dans la sphère composite sont déterminées par

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \varepsilon_0(t)\mathbf{I}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = -p_0(t)\mathbf{I}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) = \dot{\varepsilon}_0(t)\mathbf{I}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(t) = \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(t) = -\dot{p}_0(t)\mathbf{I}. \quad (13)$$

Le comportement élastoplastique de la sphère composite est caractérisé par les modules de compressibilité sécant et tangent,  $\kappa_s^*$  et  $\kappa_t^*$ , définis par

$$p_0 = -3\kappa_s^*\varepsilon_0, \quad \dot{p}_0 = -3\kappa_t^*\dot{\varepsilon}_0. \quad (14)$$

Les deux modules  $\kappa_s^*$  et  $\kappa_t^*$  dépendent de  $\varepsilon_0$ , de la fraction volumique  $c = (a/b)^3$  des inclusions ou de la fraction volumique  $1 - c$  de la matrice et des propriétés des phases présentées dans la section précédente. Finalement, on suppose que les modules de compressibilité sécant et tangent

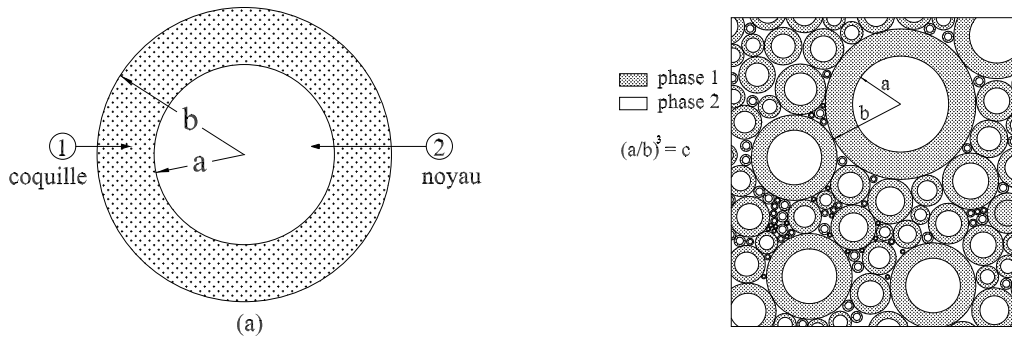


FIG. 1 – (a) Une sphère composite, (b) Assemblage de sphères composites

du matériau homogène constituant le solide  $\Omega$  sont identiques aux modules sécant et tangent de la sphère composite,

$$\tilde{\kappa}_s = \kappa_s^*, \quad \tilde{\kappa}_t = \kappa_t^*, \quad (15)$$

pour toute l'histoire de déformation isotrope  $\epsilon_0(t)$  ou de contrainte  $p_0(t)$ . Ensuite, en utilisant le même argument que celui de Chu et Hashin (1971) [4], on peut prouver qu'une sphère de rayon  $b$  du solide  $\Omega$  peut être remplacée par la sphère composite sans perturber les champs de contrainte et de déformation dans la partie restante  $\Omega$ . Autrement dit, la sphère composite insérée dans  $\Omega$  se comporte comme une inclusion neutre (Milton, 2002[5]). Grâce à cette propriété, le corps solide  $\Omega$  peut être progressivement rempli par des sphères composites de tailles différentes ayant le rapport  $a/b$  des rayons. on peut obtenir un ASC (Fig.1b) dont le comportement élastoplastique effectif sous un chargement isotrope est exactement identique à celui d'une sphère composite soumise au même chargement.

## 4 Résultats

On procède à l'analyse d'une sphère composite, décrite ci-dessus, et soumise à la condition aux limites  $(10)_2$ . La phase 1 est utilisée pour la coquille et la phase 2 est choisie pour le noyau.

### 4.1 Comportement élastique

Jusqu'à la valeur  $p'$  de la pression appliquée, les deux phases de la sphère composite restent linéairement élastiques. D'après un résultat bien connu de Hashin(1962) [1], les modules de compressibilités sécant et tangent coïncident:

$$\kappa_s^* = \kappa_t^* = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{(3\kappa_1 + 4\mu_1)c}{3\kappa_2 + 4\mu_1 + 3c(\kappa_1 - \kappa_2)}. \quad (16)$$

Cette formule donne une des deux bornes de Hashin et Shtrikman (1962)[6] quand les modules de compressibilité et de cisaillement des phases sont bien ordonnés. En échangeant le rôle de la phase 1 et celui de la phase 2, la deuxième borne de Hashin et Shtrikman est obtenue.

### 4.2 Comportement élastoplastique

Le comportement élastique ci-dessus s'applique jusqu'à la pression  $p'$  avec laquelle le critère de Drucker-Prager (8) est atteint. Il est d'abord atteint sur le bord intérieur de la ma-

trice. Après l'apparition de premier écoulement plastique, la zone plastifiée s'étend vers le bord extérieur de la matrice, quand la pression est augmentée. La matrice est divisée en une zone élastique et une zone plastifiée. Ces deux zones sont séparées par une frontière sphérique de rayon  $\rho$ . Les modules de compressibilité sécant et tangent,  $\kappa_s^*$  et  $\kappa_t^*$ , sont données par

$$\kappa_s^* = \frac{D \left( \frac{2}{3}q(1 - \zeta^3 c) - 1 \right) + \frac{B}{q}}{D \left( \frac{2q-3}{3\kappa_1} + \frac{\zeta^3 c q}{2\mu_1} \right) + \frac{B}{q\kappa_1}}, \quad \kappa_t^* = \frac{\frac{dD}{d\zeta} \left( \frac{2}{3}q(1 - \zeta^3 c) - 1 \right) - 2Dqc\zeta^2}{\frac{dD}{d\zeta} \left( \frac{2q-3}{3\kappa_1} + \frac{\zeta^3 c q}{2\mu_1} \right) + \frac{3Dqc\zeta^2}{2\mu_1}}, \quad (17)$$

avec

$$q = \frac{\alpha}{-\gamma + \frac{2}{3}\alpha}, \quad s = \frac{-3\gamma}{-\gamma + \frac{2}{3}\alpha}, \quad B = \frac{1 - \frac{1}{3}\alpha}{-\gamma + \frac{2}{3}\alpha}, \quad \zeta = \frac{\rho}{a}, \quad \delta = \frac{\kappa_2(4\mu_1 + 3\kappa_1)}{6\mu_1(\kappa_1 - \kappa_2)}, \quad (18)$$

$$D = \frac{B}{q} \left\{ \left( 1 + \frac{6\delta\alpha^2}{4\alpha^2 - 9} \right) \zeta^{2q} + \frac{9\delta\gamma\alpha}{4\alpha^2 - 9} \zeta^s \right\}^{-1}, \quad (19)$$

$$\frac{dD}{d\zeta} = -\frac{q}{B} D^2 \left\{ 2q \left( 1 + \frac{6\delta\alpha^2}{4\alpha^2 - 9} \right) \zeta^{2q-1} + \frac{9\delta\gamma\alpha s}{4\alpha^2 - 9} \zeta^{s-1} \right\}. \quad (20)$$

Il est à noter que la pression  $p$  et le rayon de la zone plastifiée sont reliés par

$$p = D\sigma_0 \left( 1 - \frac{2}{3}q(1 - \zeta^3 c) \right) - \frac{\sigma_0 B}{q}. \quad (21)$$

En introduisant les valeurs de  $\rho$  telles que  $\rho = a$  et  $\rho = b$  dans (21) et en tenant compte de (18)<sub>4</sub>, on obtient les valeurs  $p'$  et  $p''$  de la pression pour lesquelles la plastification de la matrice est respectivement commençante et totale

$$p' = D' \sigma_0 \left[ 1 - \frac{2}{3}q(1 - c) \right] - \frac{\sigma_0 B}{q}, \quad p'' = D'' \sigma_0 - \frac{\sigma_0 B}{q}, \quad (22)$$

où  $D'$  et  $D''$  sont les valeurs de  $D$  dans (19) pour  $\rho = a$  et  $\rho = b$ .

On considère maintenant le matériau composite bi-phasique dont la matrice est totalement plastifiée. Si le chargement continue à augmenter, les modules de compressibilité sécant et tangent sont donnés par

$$\kappa_s^* = \frac{p}{\frac{p}{\kappa_2} c^{(s-2q)/3} + \frac{3M\sigma_0}{E_1} \{c^{(s-2q)/3} - 1\} + \frac{B\sigma_0}{q\kappa_1} \{c^{s/3} - 1\} + \frac{B\sigma_0}{q\kappa_2} \{c^{(s-2q)/3} - c^{s/3}\}}, \quad (23)$$

$$\kappa_t^* = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_2} c^{(s-2q)/3} + \frac{3}{E_1} \{c^{(s-2q)/3} - 1\} \frac{M}{D}}, \quad (24)$$

où les constantes sont définies par

$$\nu_1 = \frac{3\kappa_1 - 2\mu_1}{6\kappa_1 + 2\mu_1}, \quad L = \frac{2(2q-3)(1-\nu_1)Dq}{-3\gamma - 4q\eta\theta}, \quad M = L\eta\theta + (1-\nu_1)(q-1)D + \nu_1 D. \quad (25)$$

L'expression (24) montre que la compressibilité tangente est constante lorsque la pression du chargement  $p$  excède  $p''$ . Pour cette raison, la valeur de  $\kappa_t^*$  est inchangée à partir du moment où la matrice est totalement plastifiée. Le calcul montre aussi que l'expression (24) se réduit à celle de (17)<sub>2</sub> lorsque  $\rho = b$ .

## 5 Exemple numérique

A titre d'exemple, on considère un composite constitué d'une matrice en aluminium et renforcée par des inclusions SiC. Les propriétés des phases sont données comme suit:

- matrice aluminium:  $\kappa_1 = 65.6GPa$ ,  $\mu_1 = 31GPa$ ,  $\sigma_0 = 1GPa$ ;
- inclusion SiC:  $\kappa_2 = 223GPa$ ,  $\mu_2 = 188GPa$ .

Ces matériaux sont ceux utilisés dans le travail de Chen et Jiang [7]. Le comportement élastoplastique macroscopique du composite bi-phasique est représenté à la Fig.2 pour différentes valeurs de la fraction volumique  $c$  des inclusions. La Fig.2b présente la propagation de la plastification dans

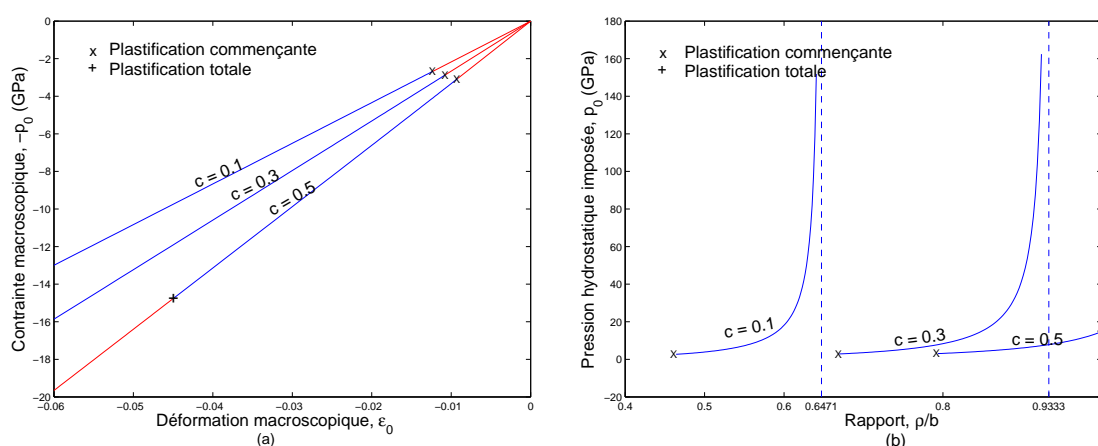


FIG. 2 – (a) Relation contrainte-déformation macroscopique du composite SiC/Aluminium pour  $\alpha = 0.2$ ; (b) Propagation de la plastification, relation pression hydrostatique  $p_0$  - rayon de la zone plastifiée  $\rho$  pour  $\alpha = 0.2$

la matrice pour  $\alpha = 0.2$ . On observe que la matrice peut être totalement plastifiée pour  $c = 0.5$  et ne peut être que partiellement plastifiée pour  $c = 0.1$  ou  $c = 0.3$ . L'influence de la sensibilité de pression et l'effet de déformations plastiques sur le comportement effectif d'un composite sont fournis en détail dans un autre papier ( Le Quang et He [8]).

## Références

- [1] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29:143–150, 1962.
- [2] T. Chen. Thermoelastic properties and conductivity of composites reinforced by spherically anisotropic particules. *Mech. Master*, 14:257–268, 1993.
- [3] Q.-C. He and Y. Benveniste. Exactly solvable spherically anisotropic thermoelastic microstructures. *J. Mech. Phys. Solids*, 52:2661–2682, 2004.
- [4] T. Y. Chu and Z. Hashin. Plastic behavior of composites and porous media under isotropic stress. *Int. J. Engng Sci.*, 9:971–994, 1971.
- [5] G.W. Milton. *The theory of composites*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11:127–140, 1962.
- [7] Y. Chen and X. Jiang. Nonlinear elastic properties of particulate composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(7):1177–1190, 1993.
- [8] H. Le Quang and Q.-C. He. (en préparation).