



**HAL**  
open science

## **Approche micromécanique en fatigue polycyclique**

Vincent Monchiet, Eric Charkaluk, Djimedo Kondo

► **To cite this version:**

Vincent Monchiet, Eric Charkaluk, Djimedo Kondo. Approche micromécanique en fatigue polycyclique. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. ⟨hal-04203518⟩

**HAL Id: hal-04203518**

**<https://hal.science/hal-04203518v1>**

Submitted on 11 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## Approche micromécanique en fatigue polycyclique

Vincent Monchiet, Eric Charkaluk, Djimedo Kondo

L.M.L.-UMR CNRS 8107, U.S.T.L., Bd. Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex  
vincent.monchiet@ed.univ-lille1.fr, eric.charkaluk@univ-lille1.fr, djimedo.kondo@univ-lille1.fr

### Résumé :

*Un critère d'endurance illimitée en fatigue multiaxiale est proposé. Basée sur les travaux fondateurs de Dang Van et de Papadopoulos, l'originalité de cette approche réside dans l'introduction d'une échelle supplémentaire, celle des Bandes de Glissement Persistantes (BGP). La modélisation proposée permet de mettre en évidence le rôle d'une pression hydrostatique en fatigue. Le critère de fatigue adopté est une condition de nucléation d'une fissure à l'interface BGP-matrice. Le cas particulier des chargements affines sera illustré.*

### Abstract :

*A multiaxial criterion in unlimited endurance is proposed. Based on the pioneering works of Dang Van and Papadopoulos, the originality of this approach lies in the introduction of an other scale : the Persistent Slip Bands. The present modelling points out the role of the hydrostatic pressure in fatigue. The fatigue criterion corresponds to a crack nucleation at PSB-matrix interface. The particular affine loading case is illustrated.*

### Mots-clefs :

**Endurance illimitée, Fatigue, BGP, Micromécanique**

### 1 Introduction

Des pièces soumises à des sollicitations cycliques peuvent se rompre, bien que les contraintes appliquées soit inférieures à la limite d'élasticité. Cette rupture est le résultat de la propagation de fissures dites de fatigue. En se basant sur les résultats expérimentaux, les approches de Crossland [1], Sines [2], purement macroscopiques, font explicitement intervenir, dans le critère de fatigue, deux invariants du tenseur des contraintes ( $I_1$ ,  $J_2$ ).

Il est aujourd'hui reconnu que la rupture des métaux et des alliages dans des conditions de sollicitation polycyclique est le résultat de la localisation de la déformation plastique. En effet à l'échelle microscopique, certains grains défavorablement orientés subissent un écoulement plastique. Toutefois, cette déformation plastique n'est pas décelable à l'échelle macroscopique. Une telle démarche micro-macro a été formalisée par Dang Van puis Papadopoulos [3] et plus récemment [4]

Néanmoins, l'activité plastique seule ne permet pas d'expliquer la nucléation des fissures de fatigue ; les glissements simples, dus au mouvement des dislocations dans leur plan, ne constituent qu'une translation de la position des atomes. Il est alors nécessaire de rechercher des mécanismes qui altèrent de manière définitive la structure du matériau.

L'approche proposée ici, s'inspire des travaux fondateurs de Dang Van et Papadopoulos et s'articule autour de trois points cruciaux : la description du comportement local des grains sollicités (glissement simple et endommagement au sein des BGP), la proposition d'un critère de fatigue polycyclique, basé sur la condition de nucléation d'une fissure et la détermination des contraintes dans les grains défavorablement orientés. Une application au cas des chargements affines sera proposée.

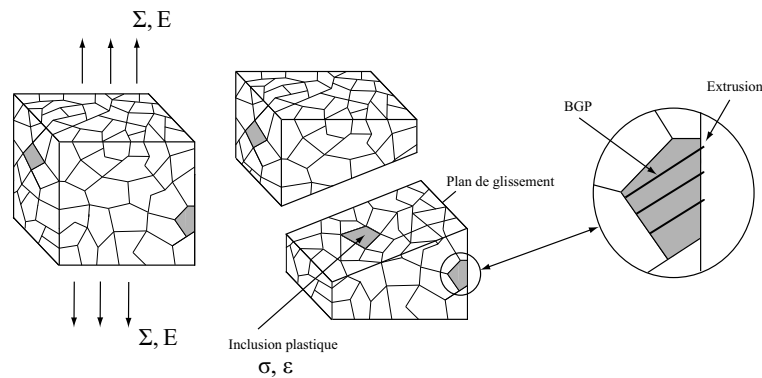


FIG. 1 – volume élémentaire représentatif

## 2 Comportement polycyclique des monocristaux

Le comportement plastique polycyclique des monocristaux est caractérisé par la formation de bandes de glissement persistantes (BGP), reconnues aujourd'hui comme le site privilégié de la nucléation des fissures. Ces BGP possèdent une structure dite "en échelle" puisque constituées d'un arrangement périodique de canaux et de murs de dislocations, murs dans lesquels l'activité plastique est particulièrement intense [5]. En plus de l'activité plastique, des variations de volumes irréversibles sont observées aux endroits où les BGP émergent en surface (formation d'extrusions) et sont le résultat de mécanismes d'endommagement au sein de ces bandes [6], [7]. Des observations récentes sur des monocristaux d'aluminium faite par Zhai et al. [8], ont ainsi mis en évidence la formation de microvides dans les murs de dislocation, et de fissures à l'interface BGP-matrice qui sont le prolongement de microfissures développées dans les murs.

### 2.1 Plasticité des monocristaux

On se place dans le cadre du glissement simple avec un seul système activé défini par la normale au plan de glissement  $\underline{n}$  et la direction du glissement  $\underline{m}$ . On note respectivement par  $\sigma$  et  $\varepsilon$  la contrainte et la déformation microscopique (c'est à dire à l'échelle du grain). La décomposition additive des déformations est adoptée :  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ . Le comportement plastique du monocristal est décrit par la loi de Schmid et la fonction de charge,  $f$ , s'écrit :  $f = |\tau - x| - \tau_0 - R$ .  $\tau$  est la contrainte de cisaillement définie par :  $\tau = \sigma : \Delta$ , avec :  $\Delta = \underline{n} \otimes \underline{m}$ ,  $\tau_0$  est le seuil initial de plasticité.  $x$  et  $R$  sont les variables d'écrouissage cinématique et isotrope définies par :

- une loi linéaire :  $x = c\gamma^p$ , où  $\gamma^p$  est définies par :  $\gamma^p = \varepsilon^p : \Delta$ .
- une loi non linéaire :  $R(p) = R_s \{1 - \exp(-rp)\}$ ,  $p$  est la déformation plastique cumulée égale à :  $p = \int_0^t |\dot{\gamma}^p(t')| dt'$ ,  $R_s$  et  $r$  sont deux paramètres ajustables.

### 2.2 Micro-endommagement dans les bandes de glissement

En se référant aux observations d'Antonopoulos et al. [7], Essmann et al. [6] et Zhai et al. [8], l'endommagement le long des bandes de glissement est le résultat de la nucléation et de la croissance de microcavités à l'intérieur des murs de dislocation.

Cet endommagement résulte de la contribution de deux mécanismes :

- la création de lacunes par annihilation de dislocations, responsable de variations de volumes irréversibles dans la direction du glissement.
- la croissance de ces vides comme le résultat de l'action combinée de l'activité plastique et des efforts de pression.

En tenant compte de ces deux mécanismes, la déformation plastique à l'échelle du grain est choisie sous la forme :  $\varepsilon^p = \gamma^p \mathbf{\Delta} + \beta_a^p \mathbf{M} + \beta_c^p / 3 \mathbf{1}$ , avec  $\mathbf{M} = \underline{m} \otimes \underline{m}$ ,  $\mathbf{1}$  le tenseur identité du second ordre,  $\beta_a^p$  est la déformation plastique due aux annihilations de dislocation et  $\beta_c^p$  la déformation plastique due à la croissance des cavités. La déformation plastique volumique totale notée  $\beta^p$  est définie par  $\beta^p = \text{tr } \varepsilon^p = \beta_a^p + \beta_c^p$ . On note  $\eta$  la porosité définie par  $\eta = \omega / \Omega$ , où  $\Omega$  est le volume occupé par la matrice solide et  $\omega$  le volume de vide. La loi d'évolution de la porosité, obtenue par différentiation, est donnée par :

$$\dot{\eta} = \frac{\dot{\omega}}{\Omega} - \eta \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = (1 - \eta) \dot{\beta}^p \Leftrightarrow \eta = 1 - \exp(-\beta) \quad (1)$$

Il est reconnu que la nucléation de cavités dans les BGP est le résultat de l'agglomération des lacunes formées par annihilation. Essmann et al. [9], ont proposé un modèle phénoménologique exprimant la densité de dislocations produites  $\rho_p$  et la densité de dislocations annihilées  $\rho_a$  par unité de volume en fonction de la déformation plastique cumulée. Cette loi s'écrit :

$$\rho_p = \rho_s k_a p; \quad \rho_a = \rho_s \{-1 + k_a p + \exp(-k_a p)\}; \quad \rho = \rho_p - \rho_a \quad (2)$$

Lorsque  $\rho$  atteint sa valeur à saturation,  $\rho_s$ , un équilibre entre production et annihilation de dislocations est créé. Toutefois l'annihilation de dislocations n'est pas un phénomène irréversible. En effet, les défauts ponctuels, c'est à dire les lacunes ou les atomes interstitiels formés par annihilation, peuvent également se redissocier par annihilation mutuelle. Afin de prendre en compte ce second mécanisme, Essmann et al. [9], ont proposé une loi d'évolution de la concentration de défauts ponctuels, notée  $\rho_d$ , donnée par :

$$\rho_d = \frac{\zeta_0 k_a \rho_s}{k_e (k_e - k_a)} \left\{ k_e \{1 - \exp(-k_a p)\} - k_a \{1 - \exp(-k_e p)\} \right\} \quad (3)$$

La formation d'un atome interstitiel requérant une énergie plus importante que la formation d'une lacune [6], on suppose que les défauts ponctuels sont essentiellement des lacunes. Soit  $V_0$  le volume d'une lacune. La déformation plastique  $\beta_a^p$ , le long des BGP, est définie par :

$$\beta_a^p = A(p) = \frac{A_0}{k_e k_a (k_e - k_a)} \left\{ k_e \{1 - \exp(-k_a p)\} - k_a \{1 - \exp(-k_e p)\} \right\} \quad (4)$$

avec :  $A_0 = V_0 \zeta_0 \kappa_a^2 \rho_s$ . Pour décrire la croissance des vides formés par agglomération des lacunes, en liaison avec l'activité plastique, on adopte la loi de Rice et Tracey [10] :

$$\frac{\dot{\omega}_c}{\omega} = h \exp \left\{ \frac{q}{\tau_0} \right\} \dot{p} \quad \text{où} \quad \dot{\beta}_c^p = h \eta \exp \left\{ \frac{q}{\tau_0} \right\} \dot{p} \quad (5)$$

où  $q = \text{tr } \sigma$  et  $h$  une constante dont la valeur est classiquement choisie égale à 0.283.

En tenant compte des déformations plastiques dues aux annihilations de dislocations, la loi d'évolution de la déformation plastique totale et de la porosité est donnée par :

$$\dot{\beta}^p = \left\{ A'(p) + \eta h \exp \left\{ \frac{q}{\tau_0} \right\} \right\} \dot{p} \quad \text{et} \quad \dot{\eta} = (1 - \eta) \dot{\beta}^p \quad (6)$$

### 2.3 Critère de nucléation d'une fissure de fatigue

On s'intéresse dans cette section aux conditions critiques conduisant à la nucléation d'une fissure de fatigue à l'interface BGP-matrice. Le critère adopté pour la nucléation d'une fissure de fatigue dans un mur de dislocations est celui proposé par Antonopoulos et al. [7] : lorsque la déformation totale dans la direction de la BGP,  $\varepsilon : \mathbf{M}$ , atteint une valeur critique que l'on notera  $\beta_0^p$ , on a alors amorçage d'une fissure à l'interface BGP-matrice.

$$\varepsilon : \mathbf{M} = \beta_0^p \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu} \right\} q + \frac{1}{2\mu} \sigma : \mathbf{M} + \beta_a^p + \frac{1}{3} \beta_c^p = \beta_0^p \quad (7)$$

Il est alors nécessaire à ce stade de déterminer le champ de contrainte dans le grain à partir de la contrainte macroscopique imposée à la structure, en utilisant un schéma d'homogénéisation approprié. Ceci fait l'objet du passage micro-macro présent dans la section qui suit.

## 3 Passage micro-macro et détermination de la limite d'endurance

### 3.1 Passage micro-macro

Le comportement macroscopique étant élastique,  $\Sigma = \mathbb{C} : \mathbf{E}^e$ .  $\Sigma$  et  $\mathbf{E}^e$  sont respectivement la contrainte et la déformation macroscopique élastique.  $\mathbb{C}$  est le tenseur d'élasticité isotrope défini par  $\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}$ ,  $k$  et  $\mu$  étant respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement et avec :  $3\mathbb{J} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ ,  $\mathbb{I}$  le tenseur identité d'ordre quatre symétrisé. On suppose de plus que les propriétés élastiques sont identiques aux deux échelles, d'où :  $\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon^e$ . Le passage des grandeurs microscopiques aux macroscopiques est envisagé à partir de différents schémas. La loi d'interaction se met sous la forme générale suivante :  $\sigma = \Sigma - \mathbb{C}^* : \varepsilon^p$ .  $\mathbb{C}^*$  est un tenseur du quatrième ordre défini par :  $\mathbb{C}^* = 0$  pour le modèle de Sachs,  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$  pour le modèle de Taylor, et  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} : (\mathbb{I} - \mathbb{P} : \mathbb{C})$  pour le modèle de Kröner, où  $\mathbb{P}$  est le tenseur de Hill qui, pour des inclusions sphériques (les grains plastiques dans notre étude), prend la forme suivante :

$$\mathbb{P} = \frac{a}{3k}\mathbb{J} + \frac{b}{2\mu}\mathbb{K} \quad \text{avec} \quad : \quad a = \frac{3k}{3k + 4\mu} \quad \text{et} \quad b = \frac{6}{5} \frac{k + 2\mu}{3k + 4\mu} \quad (8)$$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma : \Delta = \Sigma : \Delta - \Delta : \mathbb{C}^* : \varepsilon^p = \Sigma : \Delta - 2\mu^* \gamma^p \\ q &= \text{tr } \sigma = \sigma : \mathbf{1} = \text{tr } \Sigma - \mathbf{1} : \mathbb{C}^* : \varepsilon^p = \text{tr } \Sigma - 3k^* \beta^p \\ \sigma : \mathbf{M} &= \Sigma : \mathbf{M} - \mathbf{M} : \mathbb{C}^* : \varepsilon^p = \Sigma : \mathbf{M} - \lambda^* \beta_a^p - k^* \beta_c^p \end{aligned} \quad (9)$$

avec :  $\mu^* = \mu(1 - b)$ ,  $k^* = k(1 - a)$  et  $\lambda^* = k(1 - a) - \frac{2\mu}{3}(1 - b)$ . Pour l'estimation de Sachs,  $a = b = 1$  ; pour celle de Lin-Taylor,  $a = b = 0$  ; pour celle de Kröner,  $a$  et  $b$  sont donnés par (8).

### 3.2 Détermination de la limite d'endurance dans le cas des chargements affines.

Lorsque l'on applique un chargement cyclique, la réponse mécanique peut se caractériser par : l'adaptation, l'accommodation ou le rochet. Dans les deux derniers cas, la nucléation d'une fissure de fatigue aura lieu au bout d'un nombre fini de cycles. Il est donc raisonnable de supposer que la limite d'endurance se situe au dessous de la limite d'adaptation.

Dans le contexte de l'adaptation on suppose :

- que la porosité à l'échelle du grain est très faible,  $\eta \ll 1$ , compte tenu de (1), on a :  $\eta = \beta$ .

• que la densité d'annihilations est faible devant sa valeur à saturation. Par conséquent une bonne approximation de (4) est :  $\beta_a^p = A_0 p^2 / 2$ . Compte tenu de ces hypothèses, la loi d'évolution de  $\beta_c^p$  est :

$$\dot{\beta}^p = \{A_0 p + H \beta^p \exp\{-\kappa \beta^p\}\} \dot{p}; \text{ avec : } H = h \exp\left\{\frac{\text{tr } \Sigma}{\tau_0}\right\} \text{ et } \kappa = \frac{k^*}{\tau_0} \quad (10)$$

On considère un chargement affine :  $\Sigma(t) = \Sigma_a \sin(\omega t) + \Sigma_m$ ,  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_m$  étant respectivement la contrainte alternée et la contrainte moyenne macroscopique. Le cycle de chargement est défini dans l'espace des contraintes par un segment AB, A et B ayant respectivement pour coordonnées :  $\Sigma_{min} = -\Sigma_a + \Sigma_m$  et  $\Sigma_{max} = \Sigma_a + \Sigma_m$ .

Le critère de fatigue adopté (7), en utilisant (9), s'écrit pour des chargements affines :

$$\left\{\frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu}\right\} \text{tr } \Sigma_{max} + \frac{1}{2\mu} \Sigma_{max} : \mathbf{M} + \frac{a+2b}{3} \beta_a^p(p) + \frac{a}{3} \beta_c^p(p, \text{tr } \Sigma_a, \text{tr } \Sigma_m) = \beta_0^p \quad (11)$$

A l'état adapté, la déformation plastique cumulée,  $p$ , et la déformation plastique moyenne,  $\gamma_m^p$ , sont déterminées par  $\Sigma_a : \Delta = \tau_0 + R_s(1 - \exp(-rp))$  et  $\Sigma_m : \Delta = (c + 2\mu^*)\gamma_m^p$ . On observe que le critère de fatigue (11) est indépendant de la déformation plastique moyenne, et, par conséquent, de la cission moyenne macroscopique  $\Sigma_m : \Delta$ . Ceci est en bonne concordance avec les résultats expérimentaux. En effet, il est montré que le critère d'endurance dépend uniquement de l'amplitude de la cission macroscopique ( $\Sigma_a : \Delta$ ). La détermination de  $\beta_c$  est la difficulté majeure pour l'application du critère de fatigue (11), puisqu'elle nécessite la résolution de l'équation différentielle non linéaire (10). Toutefois celle-ci peut être résolue numériquement, en appliquant une méthode de type Newton-Raphson.

### 3.3 Application

A titre illustratif, considérons un tube sous une pression interne égale à  $P_m$  et soumis à une torsion égale à  $T_a \sin(\omega t) + T_m$ . La déformation plastique cumulée,  $p$ , est déterminée par :  $p = \ln\{R_s/(R_s + \tau_0 - T_a)\} / r$ . Pour le schéma de Lin-Taylor le critère se réduit à :  $\{1/(9k) + 1/(6\mu)\} P_m = \beta_0^p$ , qui ne rend pas compte de l'influence de la cission alternée macroscopique. Le schéma de Sachs est l'unique schéma pour lequel l'équation (10) est intégrable et le critère s'écrit :

$$\left\{\frac{1}{9k} + \frac{1}{6\mu}\right\} P_m + \frac{A_0}{3} p^2 + \frac{A_0}{3H^2} \{\exp(Hp) - 1 - Hp\} = \beta_0^p \text{ avec : } H = \exp\left\{\frac{P_m}{\tau_0}\right\} \quad (12)$$

Pour l'estimation de Kröner, une approximation de  $\beta_c$  a été déterminée, le critère s'écrit :

$$\left\{\frac{1}{9k} + \frac{1}{6\mu}\right\} P_m + \frac{9k+8\mu}{3k+4\mu} \frac{A_0}{2} p^2 + \frac{3k}{3k+4\mu} \frac{1}{\kappa} \ln\left\{1 + H\kappa A_0 \frac{p^2}{2}\right\} = \beta_0^p \quad (13)$$

Le critère de nucléation est représenté dans le plan  $T_a/\tau_0 - P_m/\tau_0$  sur la figure 2.

## 4 Conclusion

Une approche multiéchelle pour la détermination d'un critère de fatigue multiaxial a été proposée. Elle est basée sur le formalisme micro-macro initié par Dang Van, et sur les travaux de Mughrabi concernant les BGP. Le critère de fatigue proposé permet de rendre compte du rôle d'une pression hydrostatique, ainsi que de l'indépendance à une contrainte moyenne de cisaillement. Plusieurs aspects sont en cours de développement : l'application à des cycles de chargement plus complexes tels que les chargements déphasés, la prise en compte de l'écroutissement pour la loi de croissance des cavités et l'utilisation de schémas d'homogénéisation plus élaborés pour le passage micro-macro.

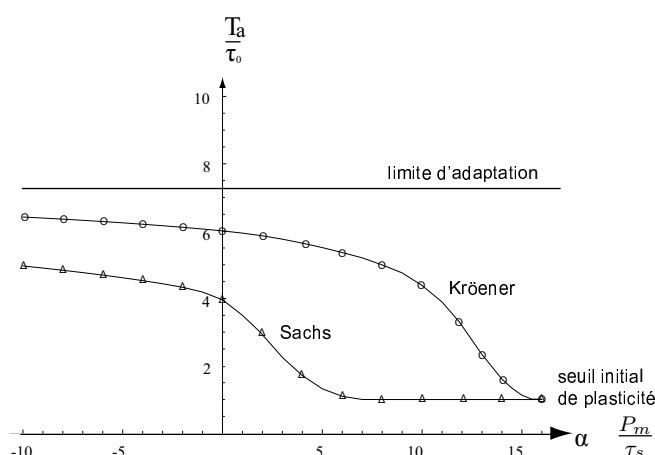


FIG. 2 – Critère de nucléation d’une fissure de fatigue,  $\tau/\tau_0$  vs.  $\alpha$ . Les paramètres utilisés sont  $k = 200000\text{MPa}$ ,  $\mu = 75000\text{MPa}$ ,  $A_0 = 1.10^{-4}$ ,  $R_0 = 300\text{MPa}$ ,  $\tau_0 = 40\text{MPa}$ ,  $\beta_0 = 0.002$

## Références

- [1] B. Crossland. Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals - I.M.E.-U.K.*, pages 138–149, 1956.
- [2] G. Sines. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. In *Metal Fatigue*, ed. G. Sines and J.L. Waisman. McGraw Hill, New York, 1959.
- [3] K. Dang Van and I.V. Papadopoulos. High cycle metal fatigue. from theory to applications. CISM Courses and Lectures, no. 392, ed. : Ky Dang Van.
- [4] A. Maitournam H. Cano, F. Constantinescu. Critère de fatigue polycyclique pour des matériaux anisotropes : application aux monocristaux. *C.R. Mécanique*, 332 :115–121, 2004.
- [5] H. Mughrabi. The cyclic hardening and saturation behaviour of copper single crystals. *Mat. Sci. Eng.*, 33 :207–223, 1978.
- [6] U. Essmann, U. Gösele, and H. Mughrabi. A model of extrusion and intrusions in fatigued metals. I. Point-defect production and the growth of extrusions. *Phil. Mag. A*, 44(2) :405–426, 1981.
- [7] J.G. Antonopoulos, L.M. Brown, and A.T. Winter. Vacancy dipoles in fatigued copper. *Phil. Mag.*, 34(4) :549–563, 1976.
- [8] T. Zhai, J.W. Martin, and G.A.D. Briggs. Fatigue damage in aluminium single crystal-I. On the surface containing the slip Burger vector. *Acta Metall. Mater.*, 43(10) :3813–3825, 1995.
- [9] U. Essmann and H. Mughrabi. Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocation densities. *Phil. Mag. A*, 40(6) :731–756, 1979.
- [10] J.R. Rice and D.M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 :201–217, 1969.