



HAL
open science

Adaptation élastoplastique de milieux périodiques

Hélène Magoariéc, Stéphane Bourgeois, Olivier Débordes

► **To cite this version:**

Hélène Magoariéc, Stéphane Bourgeois, Olivier Débordes. Adaptation élastoplastique de milieux périodiques. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. pp.1057. hal-04203509

HAL Id: hal-04203509

<https://hal.science/hal-04203509>

Submitted on 11 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Adaptation élastoplastique de milieux périodiques

Hélène Magoaric, Stéphane Bourgeois & Olivier Débordes

*Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille
& Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
Equipe Modèles Numériques, Technopôle de Château-Gombert, 13383 Marseille Cedex 13
magoarie@mn.esm2.imt-mrs.fr*

Résumé :

On étudie numériquement la fiabilité, vis-à-vis de la ruine par dissipation plastique illimitée, de milieux élastoplastiques sous chargements variables. Les milieux étudiés possèdent une microstructure périodiquement hétérogène et les chargements varient indépendamment dans un domaine donné.

La méthode consiste à coupler la théorie de l'homogénéisation périodique et la théorie de l'adaptation élastoplastique abordée par une approche statique directe. Numériquement, on couple un code éléments finis pour l'homogénéisation périodique avec un logiciel d'optimisation convexe, afin d'obtenir des critères de dimensionnement macroscopiques à partir de considérations microscopiques. La généralité des développements permet de traiter aussi bien des milieux 3D que des structures de type plaques hétérogènes périodiques.

Enfin, par l'analyse des multiplicateurs de Lagrange issus des calculs d'optimisation, on cerne, sur l'exemple d'un matériau stratifié, la nature cinématique de la non adaptation : plasticité alternée ou rochet.

Abstract :

This paper deals with elastic plastic shakedown of heterogeneously periodic media using a direct static approach : we study the strength capacity of these media with respect to failure by unlimited plastic dissipation when they are submitted to loads varying in a prescribed domain.

A numerical tool is developed, based on a coupling between a finite element software dedicated to periodic homogenization and a convex optimization software. This allows to obtain macroscopic sizing criteria from microscopic considerations. As the developments are general, they allow to treat three-dimensional media submitted to classical macroscopic strains or stresses as well as plates submitted to macroscopic generalized strains or stresses.

Finally, by analyzing the Lagrange multipliers resulting from the optimization computations, we determine in the case of a layered material the kinematical nature of the non shakedown : alternating plasticity or ratcheting.

Mots-clefs :

milieux hétérogènes périodiques ; chargements variables ; élastoplasticité ; modélisation numérique 3D ; optimisation convexe ; plasticité alternée ; rochet

1 Introduction

Cette étude s'inscrit dans le cadre du dimensionnement des structures élastoplastiques sous chargements indépendants et bornés. En effet, la théorie de l'analyse limite, usuellement utilisée pour dimensionner en plasticité, permet –en ne considérant que des chargements monotones proportionnels– d'assurer la fiabilité des structures uniquement vis-à-vis de la ruine plastique instantanée, en associant à ce phénomène un chargement limite supportable par direction de l'espace. Or, en cas de chargements indépendamment variables, deux autres phénomènes sont susceptibles de se développer : le rochet et la plasticité alternée. Ces phénomènes, bien qu'apparaissant pour des chargements inférieurs aux chargements limites supportables, impliquent la ruine de la structure, soit par une accumulation effective de déformations plastiques (rochet), soit par fatigue oligocyclique (plasticité alternée). La théorie de l'adaptation remédie à cette

limitation de l'analyse limite en prenant en compte l'aspect indépendamment variable des chargements et permet donc d'étudier la tenue mécanique d'une structure vis-à-vis de la ruine par dissipation plastique illimitée. D'autre part, l'utilisation intensive des matériaux composites en ingénierie nous incite à nous pencher sur l'étude de leur tenue mécanique.

Dans ce cadre, on propose un outil numérique permettant d'étudier la fiabilité de milieux à microstructures hétérogènes périodiques, vis-à-vis de la ruine par dissipation plastique illimitée, tout en précisant la nature cinématique de la ruine. La méthode, basée sur l'approche proposée par [1], consiste à résoudre le problème d'adaptation au niveau microscopique puis à remonter, par l'intermédiaire de relations de moyenne, aux domaines de résistance exprimés en termes de déformations ou de contraintes macroscopiques. L'analyse du type de ruine est quant-à-elle basée sur des considérations d'analyse convexe et fonctionnelle. Après avoir posé le cadre de l'étude, on présente la formulation théorique du couplage puis quelques exemples d'applications, sans s'attarder –par souci de concision– sur la discrétisation et ses spécificités, cependant détaillées dans [2]. Enfin, on définit une méthode permettant d'étudier la nature cinématique de la non adaptation que l'on applique au cas du matériau stratifié.

2 Cadre de l'étude

Les milieux étudiés étant hétérogènes périodiques, ils sont entièrement définis par la donnée d'un motif, appelé *cellule de base* et noté V , représentatif de la période des hétérogénéités. On distingue donc l'échelle macroscopique \mathbf{X} du milieu étudié de l'échelle \mathbf{x} de la cellule de base. Le passage micro-macro est assuré par les relations de moyenne (1)¹ reliant déformations et contraintes macroscopiques à leurs homologues microscopiques.

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle \triangleq \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} \, dS \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \triangleq \frac{1}{|V|} \int_{V^*} \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (1)$$

Cette périodicité se répercute sur les champs de déformations et de contraintes, également V -périodiques. Le champ local de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donc la superposition d'un champ moyen $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, représentant la déformation qui régnerait dans la cellule si elle était homogène, et d'un champ fluctuant $\boldsymbol{\varepsilon}^{pér} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{pér})$ dû à la présence des hétérogénéités [3]. On a alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{pér}) \quad (2)$$

Chaque constituant de la cellule de base est supposé élastoplastique parfait. La cellule exhibe donc en chaque point un domaine de plasticité $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, que l'on suppose défini par l'intermédiaire du convexe de plasticité \mathcal{F} de Von-Mises, tel que² :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mid \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \sigma_0(\mathbf{x})) = \frac{3}{2 \sigma_0(\mathbf{x})^2} \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) \leq 1 \right\} \quad (3)$$

Enfin, les chargements imposés quasi-statiquement à cette cellule sont exprimés en termes de déformations et contraintes macroscopiques (généralisées ou non suivant le type de milieu étudié). Ces chargements macroscopiques, engendrés par un chargement extérieur classiquement exprimé en déplacements ou en forces, sont des combinaisons linéaires de n chargements indépendants \mathcal{P}_i^0 et sont inclus dans le polyèdre convexe \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathcal{P}(t) \mid \mathcal{P}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t) \mathcal{P}_i^0, \quad \mu_i(t) \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\} \quad (4)$$

¹ V^* désigne le volume effectivement occupé par la matière et H les éventuels trous, tels que $\partial H \cap \partial V = \emptyset$.

² $\boldsymbol{\sigma}^d$ est le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\sigma_0(\mathbf{x})$ la limite élastique en \mathbf{x} . On omet la dépendance temporelle de $\boldsymbol{\sigma}$ à ce stade.

3 Approche statique du couplage

La formulation du couplage entre homogénéisation périodique et adaptation élastoplastique est basée sur le théorème statique d'adaptation de Melan [4] et sur les travaux [5]. On introduit une cellule de base fictive $V^{(e)}$ possédant des caractéristiques géométriques et matérielles identiques à celles de la cellule réelle, mais répondant purement élastiquement lorsqu'elle est soumise aux mêmes chargements que cette dernière. Le théorème couplé s'énonce ensuite ainsi :

S'il existe un coefficient de sécurité $\beta > 1$ et un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps $\rho : \mathbf{x} \in V^* \mapsto \rho(\mathbf{x})$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \beta(\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, \mathcal{P}(t)) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})) \in \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V^*, \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}, \forall t \quad (5)$$

alors le matériau hétérogène s'adapte pour tous les trajets de chargements $\mathcal{P} : t \in [0, +\infty] \mapsto \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, on dira qu'il y a adaptation pour le domaine \mathcal{D} .

Dans cet énoncé, le champ $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ est l'état de contraintes purement élastiques engendré par $\mathcal{P}(t)$ qui régnerait dans $V^{(e)}$. Ce champ est donc solution des problèmes locaux d'élasticité :

Approche déformations : $P_{déf}$	Approche contraintes : P_{cont}
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \mathbf{E}$ donnée Trouver $\mathbf{u}^{pér}$, \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$ t.q. : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{(e)*} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } V^{(e)*} \\ \mathbf{u}^{pér} = \mathbf{u} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \text{ périodique sur } \partial V^{(e)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V^{(e)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H^{(e)} \end{array} \right.$	$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ donnée Trouver $\mathbf{u}^{pér}$, \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$ t.q. : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{(e)*} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } V^{(e)*} \\ \mathbf{u}^{pér} = \mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle \cdot \mathbf{x} \text{ périodique sur } \partial V^{(e)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V^{(e)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H^{(e)} \end{array} \right.$

Le champ de contraintes résiduelles ρ satisfait quant-à-lui :

Approche déformations : $P_{déf}^{rés}$	Approche contraintes : $P_{cont}^{rés}$
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \text{ dans } V^* \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \text{ dans } V^* \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H \\ \langle \boldsymbol{\rho} \rangle = \mathbf{0} \end{array} \right.$

Les problèmes locaux $P_{déf}$, P_{cont} , $P_{déf}^{rés}$ et $P_{cont}^{rés}$ sont exposés pour une cellule 3D classique, éventuellement trouée. Leurs pendants en cas de plaques sollicitées dans leur plan ou en membrane/flexion (pour lesquels les conditions limites changent et les opérateurs de moyenne sont restreints aux composantes du plan) sont détaillés dans [2] et [6]. Le problème couplé se ramène donc au problème d'optimisation non linéaire sous contraintes (6) :

Trouver α_{adap} t.q. : $\alpha_{adap} = \max_{\boldsymbol{\rho}}(\alpha)$ où $\boldsymbol{\rho}$ satisfait :

$$\mathcal{F}(\alpha \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, \mathcal{P}(t)) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x})) \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in V^*, \forall t \quad (6a)$$

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (6b)$$

où \mathcal{C} est un opérateur linéaire traduisant $P_{déf}^{rés}$ (resp. $P_{cont}^{rés}$) si la déformation (resp. contrainte) macroscopique est imposée. Comme indiqué en introduction, l'étape de discrétisation et ses

spécificités ne sont pas explicitées ici, mais le détail peut être trouvé dans [2]. Les développements numériques permettant l'obtention des domaines de résistance macroscopiques ont été réalisés dans le logiciel éléments finis SIC [7] et dans le logiciel d'optimisation LANCELOT [8].

4 Quelques exemples de domaines de résistance macroscopiques

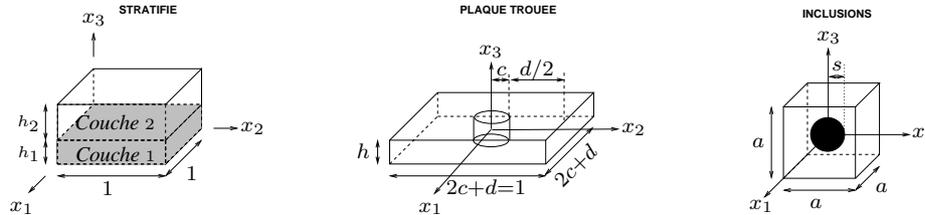


FIG. 1 – Cellules de base 3D des différents milieux étudiés

On présente ici les domaines de résistance obtenus pour trois types de milieux :

- un matériau stratifié soumis à une déformation macroscopique dont seules les composantes E_{11} et E_{22} sont non nulles (**CAS 1.**), puis à une contrainte macroscopique dont seules les composantes Σ_{11} et Σ_{22} sont non nulles (**CAS 2.**). Ce matériau, dont la cellule de base est présentée Figure 1, est traité numériquement par un problème 3D mais pouvant se ramener à un problème 1D par invariance dans le plan (x_1, x_2) ,
- deux plaques trouées obtenues par translation de la cellule de base (Figure 1) dans le plan (x_1, x_2) : l'une est sollicitée dans son plan (**CAS 3.** : seules Σ_{11} et Σ_{22} sont non nulles) et l'autre en membrane et en flexion (**CAS 4.** : seules N_{11} et M_{11} sont non nulles),
- un milieu à inclusions sphériques périodiquement réparties, milieu effectivement 3D (**CAS 5.** : seules Σ_{11} et Σ_{22} sont non nulles).

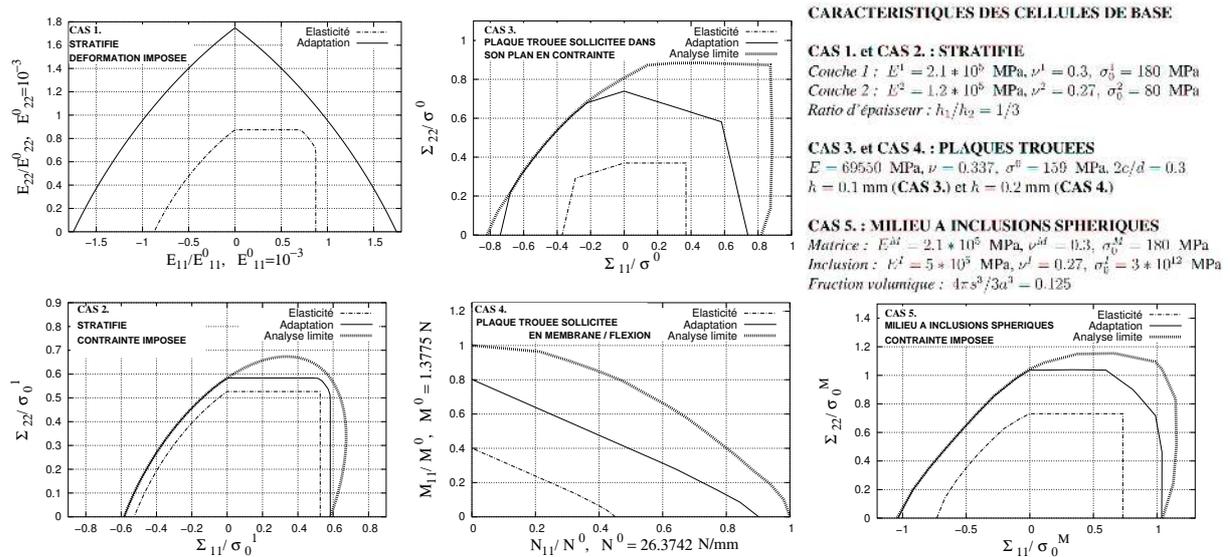


FIG. 2 – Exemples de simulations numériques

Pour des raisons de symétrie, les simulations numériques présentées Figure 2 ont été menées sur un quart de cellule pour le **CAS 4.** et sur un huitième de cellule pour les **CAS 3.** et **CAS 5.**

5 Nature cinématique de la non adaptation

On s'intéresse désormais uniquement au matériau stratifié à déformations et à contraintes imposées, soit au **CAS 1.** et au **CAS 2.** pour lesquels on cherche à déterminer si la ruine consécutive à la répétition d'un chargement cyclique à valeurs dans \mathcal{D} est due à un phénomène de plasticité alternée ou de rochet. Soient $[0, T]$ un cycle de chargements et $\dot{\epsilon}^p$ le champ des taux de déformations plastiques dans la cellule, d'après [9] on a :

$$\text{Si } \int_0^T \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) dt = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V^* \quad \text{alors il y a ruine par plasticité alternée.} \quad (7)$$

$$\text{Si } \exists \mathbf{x} \in V^* \quad \text{tel que } \int_0^T \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) dt \neq 0 \quad \text{alors il y a ruine par rochet.} \quad (8)$$

Pour analyser le type de ruine, il est donc nécessaire d'accéder au champ $\dot{\epsilon}^p$, ce que ne permet pas l'approche statique telle que présentée section 3. Cependant, l'analyse du problème de maximisation P^{opt} et de son dual³ permet d'affirmer, d'après la forme choisie pour le critère d'écoulement (3), que la variable duale du champ $\sigma = \alpha\sigma^{(e)} + \rho$ est le champ $\dot{\epsilon}^p$. On injecte donc la nouvelle variable σ dans le problème de maximisation, de telle sorte que les taux de déformations plastiques $\dot{\epsilon}^p$ soient les multiplicateurs de Lagrange associés à l'égalité $\sigma - \alpha\sigma^{(e)} - \rho = 0$. On définit ensuite l'indicateur du type de ruine par :

$$r = \left| \int_0^T \dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) dt \right| / \max_{\mathbf{x} \in V^*, t \in [0, T]} |\dot{\epsilon}_{ij}^p(\mathbf{x}, t)| \quad (9)$$

Après exploitation des résultats des calculs d'optimisation, si $r \ll 1 \quad \forall i, j, \mathbf{x}$, on conclut à un phénomène de plasticité alternée et si $\exists i, j, \mathbf{x}$ tels que $r \approx 1$, on conclut à un phénomène de rochet. Dans le cas du stratifié, l'analyse de ce coefficient nous indique qu'il y a ruine par plasticité alternée dans le **CAS 1.** et par rochet dans le **CAS 2.** A titre illustratif, la Figure 3 présente cette analyse pour la direction de chargements à 45° (stratifié maillé avec des éléments quadratiques à 20 noeuds et 8 points de Gauss) :

- à déformation imposée (seules $E_{11} = E_{22}$ non nulles), la valeur maximale de r est de l'ordre de 10^{-2} : ceci permet de conclure à un phénomène de plasticité alternée,
- à contrainte imposée (seules $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ non nulles), la valeur maximale de r est de l'ordre de 1, ce qui met en évidence un phénomène de rochet.

Dans les deux cas, la valeur maximale de r est atteinte pour ϵ_{33}^p et dans le matériau le plus mou (*Couche 2*), ce qui laisse craindre un phénomène de striction diffuse dans cette couche.

6 Conclusions

La méthode proposée permet donc d'obtenir des domaines de résistance de milieux périodiques élastoplastiques sous chargements variables, réalistes vis-à-vis des considérations comportementales microscopiques. Elle permet également de mettre en évidence le type, et éventuellement le mode, de ruine du milieu étudié.

³Ce problème dual [10] correspond au problème de minimisation découlant de l'approche cinématique du couplage ([11], [12]), basée sur le théorème de non adaptation de Koiter.

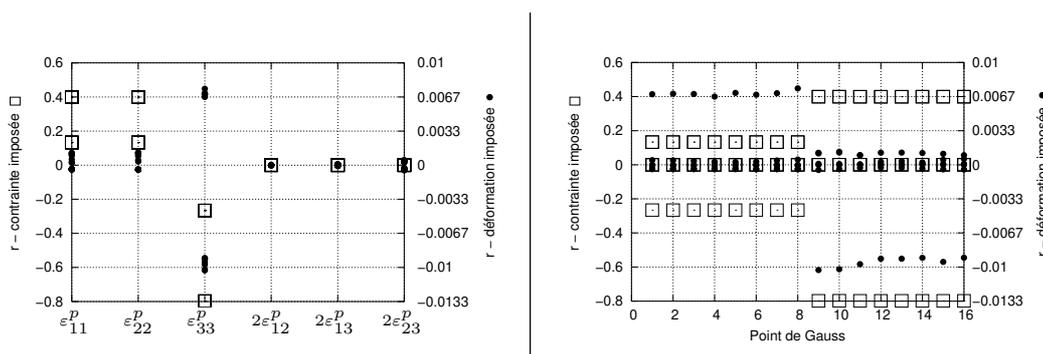


FIG. 3 – Analyse du type de ruine : cas du matériau stratifié

Références

- [1] P. Suquet. Mécanique des milieux continus, analyse limite et homogénéisation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 296 :1355–1358, 1983.
- [2] H. Magoaric, S. Bourgeois, and O. Debordes. Elastic plastic shakedown of 3D periodic heterogeneous media : a direct numerical approach. *Int. J. Plasticity*, 20/8-9 :1655–1675, 2004.
- [3] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 1. Hermes Sciences Europe Ltd., Paris, 2001.
- [4] E. Melan. Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung. *Sitber. Akad. Wiss, Wien, Abt. Ila 147*, pages 73–87, 1938.
- [5] D. Weichert, A. Hachemi, and F. Schwabe. Shakedown analysis of composites. *Mech. Res. Comm.*, 26(3) :309–318, 1999.
- [6] H. Magoaric, S. Bourgeois, and O. Débordes. Numerical limit and shakedown analyses of thin heterogeneous periodic plates. In *Plasticity'2003 - Tenth International Symposium on Plasticity, Plasticity and Metal forming*, pages 91–93, July 7-11, 2003.
- [7] S. Aunay. *Architecture de logiciel de modélisation et traitements distribués*. PhD thesis, Université Technologique de Compiègne, France, 1990.
- [8] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and Ph. L. Toint. *LANCELOT : A Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [9] J. A. König. *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*. Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [10] O. Débordes. Dualité des théorèmes statique et cinématique dans la théorie de l'adaptation des milieux continus élastoplastiques. *C.R. Acad. Sci.*, t. 282, pages 535–537, 1976.
- [11] V. Carvelli, G. Maier, and A. Taliervo. Kinematic limit analysis of periodic heterogeneous media. *Computer Modeling in Engineering and Science*, 1(2) :19–30, 2000.
- [12] H. Magoaric, S. Bourgeois, and O. Débordes. Numerical coupling between shakedown and periodic homogenisation for heterogeneous elastic plastic media. *Revue Eur. des Eléments Finis - Giens 2003*, 13(5-6-7) :593–604, 2004.