



HAL
open science

Approche géométrique de l'inversion du transfert radiatif par petits fonds

Mounadi Abdillah Ali Toihiri, Guillaume Sicot, Isabelle Quidu

► To cite this version:

Mounadi Abdillah Ali Toihiri, Guillaume Sicot, Isabelle Quidu. Approche géométrique de l'inversion du transfert radiatif par petits fonds. XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images (GRETSI'23), Aug 2023, Grenoble, France. hal-04202937

HAL Id: hal-04202937

<https://hal.science/hal-04202937v1>

Submitted on 11 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Approche géométrique de l'inversion du transfert radiatif par petits fonds

Mounadi ABDILLAH ALI TOIHIRI¹ Guillaume SICOT¹ Isabelle QUIDU¹

¹Lab-STICC UMR CNRS 6285, ENSTA Bretagne
2 rue François Verny, 29806 Brest, France

Résumé – Cet article propose une alternative à la formulation classique du problème d'inversion du modèle de transfert radiatif, en dissociant l'estimation des paramètres de la colonne d'eau de l'estimation du spectre du fond. Pour ce faire, une représentation géométrique du problème d'inversion est introduite. Elle permet de décomposer l'estimation en deux problèmes d'optimisation successifs. Cette approche ouvre la possibilité d'exploiter pleinement toute la diversité des types de fond observés.

Abstract – This paper proposes an alternative to the conventional formulation of the inversion of the radiative transfer model, by separating the estimation of the water column parameters from the estimation of the background spectrum. To do this, a geometric representation of the inversion problem is introduced. It allows the estimation to be broken down into two successive optimization problems. This approach opens up the possibility of fully exploiting the diversity of the types of background observed.

1 Introduction

L'imagerie satellitaire est largement utilisée pour décrire l'environnement et en particulier, pour mieux visualiser les impacts de nos modes de vie. Ceci concerne aussi la zone littorale sur laquelle la pression anthropique s'accroît alors que cette zone sensible constitue un enjeu économique important.

En imagerie spectrale, la source est la lumière produite par le soleil. Elle interagit avec l'ensemble des éléments qu'elle traverse. Sur la zone littorale immergée, cela correspond à l'atmosphère, la colonne d'eau et ses constituants, et enfin, le fond marin. Lorsque le fond est visible, il est ainsi possible de caractériser l'ensemble de ces éléments. Ceci en fait donc un outil d'intérêt.

Plusieurs méthodes permettant d'estimer les paramètres d'intérêt, en particulier la colonne d'eau, à partir d'images spectrales ont fait l'objet de recherche. Dans la revue [1], les méthodes sont ordonnées suivant leur besoin en données *in situ*. Dans la présente étude, l'accent est porté sur l'estimation du fond, plus précisément sur l'estimation du spectre de réflectance du fond. La collecte de mesures spécifiques à chaque zone étant délicate, la méthode d'estimation la plus adaptée est celle basée sur l'inversion d'un modèle de transfert radiatif.

Dans une première partie, section 2, la problématique traitée dans cette étude est décrite, par un rappel du modèle de transfert radiatif traditionnellement utilisé dans un contexte d'estimation [2, 5]. Pour comprendre les enjeux de cette étude, une discussion sur la place et la modélisation du fond dans les méthodes d'inversion y est incluse. Cette discussion aboutit à une nouvelle formulation de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour lequel une interprétation géométrique est décrite dans la section 3 et dont la faisabilité est montrée lors de la section 4.

2 Contexte & Problématique

L'estimation des paramètres décrivant la colonne d'eau et du fond nécessite, si l'on souhaite utiliser peu de données *in situ*,

d'introduire un modèle de transfert radiatif.

2.1 Le modèle de transfert radiatif

Le modèle de transfert radiatif traditionnellement utilisé [2] dans un contexte d'estimation est le modèle semi-analytique de Lee [7]. Il modélise la réflectance télédétektée de la colonne d'eau juste sous la surface de l'eau, notée r_{rs}^- . Le modèle de Lee considère $r_{rs,mod}^-$ comme la somme de deux quantités, l'une décrit la contribution de la colonne d'eau, notée r_{rs}^C , la seconde la contribution du fond, notée r_{rs}^B . En notant θ , les paramètres décrivant la colonne d'eau, ρ la réflectance du fond et n le bruit de mesure, l'inversion du modèle de transfert radiatif consiste à retrouver θ et ρ en supposant que :

$$r_{rs}^-(\lambda) = r_{rs,mod}^-(\lambda, \rho(\lambda)) + n_\lambda \quad (1)$$

$$= r_{rs}^C(\theta, \lambda) + r_{rs}^B(\theta, \rho(\lambda), \lambda) + n_\lambda \quad (2)$$

Le paramètre λ indique la longueur d'onde étudiée. L'association des différentes longueurs d'onde conduit à l'expression vectorielle suivante :

$$\mathbf{r}_{rs}^- = \mathbf{r}_{rs,mod}^-(\theta, \rho) + \mathbf{n} \quad (3)$$

$$= \mathbf{r}_{rs}^C(\theta) + \mathbf{r}_{rs}^B(\theta, \rho) + \mathbf{n} \quad (4)$$

où $\mathbf{r}_{rs}^B(\theta, \rho)$ est linéaire par rapport à \mathbf{r}_{rs}^- , de sorte que l'on peut écrire $\mathbf{r}_{rs}^B(\theta, \rho) = \rho \circ \mathbf{r}_{rs}^B(\theta)$, où \circ désigne le produit d'Hadamard. Le bruit \mathbf{n} est la réalisation d'un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance connue notée Σ [6]. La quantité θ contient l'ensemble des paramètres décrivant la colonne d'eau : le paramètre z quantifiant sa hauteur et les paramètres c_ϕ , c_{NAP} et c_{CDOM} quantifiant respectivement l'effet de chacun des trois constituants de l'eau, à savoir le phytoplancton, les particules en suspension et la matière organique dissoute. Pour chacun de ces constituants il convient d'y associer un paramètre noté respectivement quantifiant leur effet. En résumé $\theta = \{c_\phi, c_{NAP}, c_{CDOM}, z\}$.

Pour procéder à l'inversion de l'équation (3), le spectre de réflectance ρ est également modélisé. Il est décrit dans la section suivante.

2.2 Le modèle de fond

La procédure d'inversion ne conduit pas directement à l'estimation du spectre de réflectance du fond mais à des paramètres le modélisant. Des modélisations courantes et suffisamment riches reposent sur l'expression suivante

$$\rho(\lambda) = \sum_i \alpha_i \rho_i(\lambda), \text{ avec } \sum_i \alpha_i = 1 \quad (5)$$

Le spectre de fond apparaît comme le mélange linéaire de spectres dits "purs", les spectres ρ_i , associés à des types benthiques d'intérêt : sable, algues, coraux pour ne citer que les principaux. Le nombre de spectres purs se restreint pour les méthodes classiques à 2 ou 3 ([2]). De nouvelles évolutions à cette modélisation ont été proposées comme dans [9] où le terme $\sum_i \alpha_i$ n'est pas égale à 1 mais simplement borné ou dans [5] où les groupes benthiques ne sont plus uniquement représentés par un spectre mais associés à une classe avec un degré d'appartenance qui suit une distribution normale.

Grâce à cette modélisation du fond, l'estimation de ρ revient à estimer les paramètres α_i , qui une fois rassemblés forment le vecteur α , et nous permet d'introduire la notation suivante :

$$\rho(\alpha) = \sum_i \alpha_i \rho_i, \text{ avec } \sum_i \alpha_i = 1 \quad (6)$$

où ρ_i est construit en concaténant les valeurs des spectres purs $\rho_i(\lambda)$ pour toutes les longueurs d'onde λ considérés.

2.3 Estimation des paramètres $\{\theta, \alpha\}$

À la lecture des paragraphes précédents, il ressort que le problème d'inversion du modèle de transfert radiatif revient à estimer les paramètres $\{\theta, \alpha\}$ à partir d'un spectre de réflectance sous la surface de mer. À l'exception des méthodes utilisant l'angle spectral, les estimateurs utilisés s'apparentent à l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui appliqué à un vecteur aléatoire gaussien [2, 6], a l'expression de l'estimateur des moindres carrés appelée ci-dessous :

$$\{\hat{\theta}_{MLE}, \hat{\alpha}_{MLE}\} = \arg \min_{\substack{\theta \in \Theta \\ \alpha \in A}} d_{\Sigma} \left(\mathbf{r}_{rs}^- - \mathbf{r}_{rs,mod}^-(\theta, \rho(\alpha)) \right) \\ \text{avec } d_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (7)$$

Les ensembles Θ et A représentent l'ensemble des valeurs admissibles pour θ et α respectivement. Ainsi, en reprenant la section 2.2, $A = \{(\alpha)_i = \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \mid \sum \alpha_i = 1\}$. Cette méthode classique d'inversion est discutée et challengée dans le paragraphe suivant.

2.4 Problématique

Il apparaît à la lecture de l'équation (7) que l'inversion du modèle de transfert radiatif réalise finalement deux opérations simultanées, l'estimation des paramètres décrivant la colonne d'eau et un démelange spectral du fond, puisque le modèle inversé par l'équation est l'association de deux modèles : un modèle de transfert radiatif et un modèle de fond. Ainsi, de

par la construction du modèle de fond, l'inversion simultanée des deux modèles conduit à lier l'estimation des paramètres de la colonne d'eau au choix des spectres purs et donc *in fine* au choix des groupes benthiques considérés. Bien que ce dernier problème peut être résolu, au moins partiellement, en réalisant l'inversion décrite précédemment plusieurs fois en considérant à chaque fois différents groupes de types benthiques [2], cette dépendance est fondamentalement regrettable.

Aussi il devient légitime de se poser la question de la nécessité de dissocier ces deux modèles. C'est à cette problématique que cette étude souhaite apporter des éléments de réponse. Notre démarche, bien que se basant sur les équations proposées précédemment, admet également une interprétation géométrique qui est l'objet de la section suivante.

3 Description géométrique de l'inversion du transfert radiatif

Comme indiqué dans la section 2.3, l'équation (7) consiste à maximiser la vraisemblance, ou de manière équivalente la log-vraisemblance, $\ell(\theta, \rho)$ que l'on peut écrire, sans inclure de modèle de fond, comme ci-dessous :

$$\ell(\theta, \rho) = -\frac{1}{2} \ln \det(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2} d_{\Sigma} \left(\mathbf{r}_{rs}^- - \mathbf{r}_{rs,mod}^-(\theta, \rho) \right) \quad (8)$$

La distance d_{Σ} se ramène à une distance euclidienne, $d_{\mathbf{I}}$, par la transformation¹ $\tilde{\mathbf{x}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}$ ainsi

$$\ell(\theta, \rho) = -\frac{1}{2} \ln \det(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2} d_{\mathbf{I}} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{rs}^- - \tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^-(\theta, \rho) \right) \quad (9)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance peut ainsi s'écrire sous la forme suivante, où apparaît cette fois l'ensemble des spectres de fond admissibles, noté P , et dont la construction sera discutée plus tard :

$$\{\hat{\theta}_{MLE}, \hat{\rho}_{MLE}\} = \arg \min_{\substack{\theta \in \Theta \\ \rho \in P}} d_{\mathbf{I}} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{rs}^- - \tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^-(\theta, \rho) \right) \quad (10)$$

Soit R_{θ} l'image de P par l'application $\tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^-(\theta, \cdot)$, i.e. $R_{\theta} = \{\tilde{\mathbf{r}}_{\theta} = \tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^-(\theta, \rho) \mid \rho \in P\}$, il représente les spectres de réflectance simulés par notre modèle de transfert radiatif pour une colonne d'eau connue, paramétrée par θ . En supposant que pour tout ρ , R_{θ} est convexe, il existe un unique spectre, noté $\tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^{-,*}(\theta) \in R_{\theta}$ tel que $\tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^{-,*}(\theta) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{r}}_{\theta} \in R_{\theta}} d_{\mathbf{I}}(\tilde{\mathbf{r}}_{rs}^- - \tilde{\mathbf{r}}_{\theta})$. La figure 1 illustre l'ensemble de ces notations.

Ainsi l'équation (10) s'écrit sous la forme suivante :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \min_{\theta \in \Theta} d_{\mathbf{I}} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{rs}^- - \tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^{-,*}(\theta) \right) \quad (11) \\ \text{avec } \tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^{-,*}(\hat{\theta}_{MLE}) = \tilde{\mathbf{r}}_{rs,mod}^-(\hat{\theta}_{MLE}, \hat{\rho}_{MLE})$$

L'équation (11) présente l'estimation des paramètres $\{\theta, \rho\}$ sous la forme de deux problèmes d'optimisation, que symbolisent les flèches en trait plein de la figure 1 :

- Détermination de la distance minimale entre la donnée et un ensemble, pour nous les ensembles R_{θ}

¹ $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ existe car Σ est une matrice de covariance.

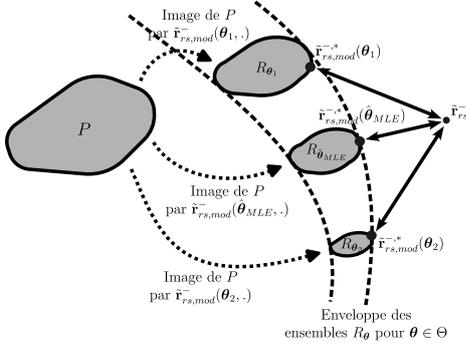


FIGURE 1 : Schéma présentant les différentes grandeurs introduites dans la section 3

- Détermination de plus petite distance du problème précédent.

La difficulté vient de la capacité à déterminer la distance minimale entre un point et un ensemble convexe. Ce problème a déjà été traité et possède des solutions algorithmes. On peut citer à titre d'exemple l'algorithme de Gilbert [3]. Cette manière de décomposer le problème en deux problèmes d'optimisation a déjà été introduite par G. Golub et V. Pereyra [4] avec de bonnes propriétés qu'on espère également vérifier dans notre cas d'étude.

Ces développements montrent qu'il n'y a pas de blocages théoriques à estimer le spectre ρ à condition d'être en mesure de construire l'ensemble P . Ce dernier peut être alimenté par des bibliothèques spectrales [8] pour devenir l'ensemble des spectres considérés comme admissibles, sans se limiter à une classification préalable ou choix de types benthiques. On peut également noter que si P est convexe alors les ensembles R_{θ} le sont également. Cette propriété découle du fait que le modèle de transfert radiatif peut s'écrire sous la forme $\mathbf{r}_{rs,mod}^-(\theta, \rho) = \mathbf{r}_{rs}^C(\theta) + \rho \circ \mathbf{r}_{rs}^B(\theta)$. Pour nos simulations, on considère que P est convexe en se basant sur le mélange linéaire effectué historiquement.

4 Simulations

L'objet de cette dernière partie est de montrer que l'équation (11) peut être mise en œuvre numériquement. Pour ce faire nous allons nous placer dans un cas traditionnel, soit lorsque le modèle de fond s'écrit suivant l'équation (6). Géométriquement ce modèle équivaut, comme le montre la figure 2, à considérer que P est un polytope de sommets ρ_i dont un sommet représente un spectre de fond "pur". Dans nos simulations, la distance minimale entre la mesure et le polytope est évalué par l'algorithme de Gilbert [3]. Dans leur implémentation, ces deux méthodes utilisent des algorithmes d'optimisation de la bibliothèque `scipy.optimize` dont l'initialisation est fixée sur les paramètres de simulation pour faciliter la convergence de ces algorithmes et éviter l'apparition de solutions aberrantes telles que de possibles minimas locaux.

Sur un premier exemple, un spectre est modélisé pour une profondeur $z = 1$ m, une colonne d'eau de paramètres : $C_{\phi} = 0.05 \text{ mg m}^{-3}$, $C_{CDOM} = 0.05 \text{ m}^{-1}$, $C_{NAP} = 0.1 \text{ g m}^{-3}$. Le spectre de fond simulé est un mélange de trois spectres "purs" tirés de [8] : une algue verte, un corail massif et du sable,

pondérés respectivement avec $\alpha_{algue} = 0.4$, $\alpha_{corail} = 0.3$ et $\alpha_{sable} = 0.3$. Un bruit additif gaussien de matrice de covariance $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ où $\sigma = 0.002$ est également appliqué à ce spectre modélisé. L'objectif est d'estimer, à partir des équations (7, qu'on note méthode $M1$) et (11, qu'on note méthode $M2$), les paramètres de la colonne d'eau $\theta = \{C_{\phi}, C_{NAP}, C_{CDOM}, z\}$, puis le spectre de réflectance modélisé \mathbf{r}_{rs}^- de l'équation (3), et enfin le spectre de fond ρ .

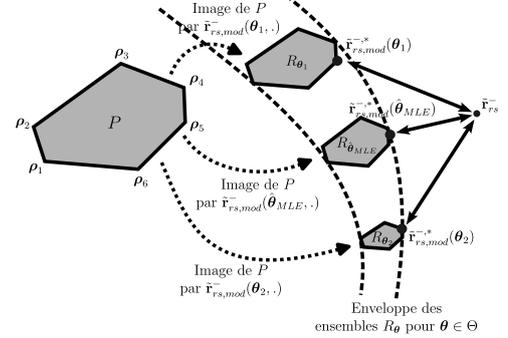


FIGURE 2 : Schéma présentant le problème d'inversion du modèle de transfert radiatif d'un point de vue géométrique avec le modèle de fond de l'équation (6)

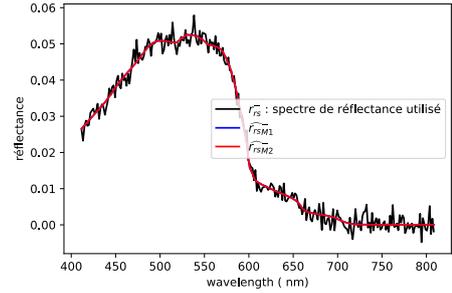


FIGURE 3 : Spectres présentant la réflectance de la colonne d'eau bruitée (en noir) et les réflectances estimées par la méthode classique (en rouge) et par notre méthode (en bleu).

La figure 3 présente sur un exemple avec une eau plutôt claire les spectres de réflectance de la colonne d'eau estimés. À partir de ce spectre, le spectre de fond peut ensuite être évalué, comme l'illustre la figure 4.

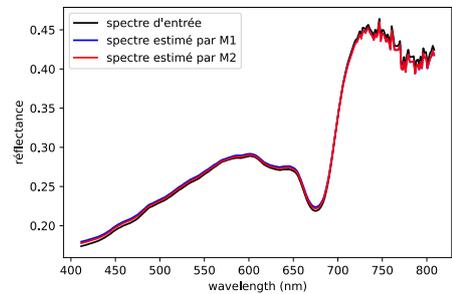


FIGURE 4 : Illustration, en fonction de la longueur d'onde, du spectre de fond ρ en noir et les spectres de fond estimés par les deux approches.

Les paramètres estimés par la méthode classique (resp. notre méthode) sont $\hat{h} = 1.028$, $\hat{C}_{\phi} = 0.055$, $\hat{C}_{CDOM} = 0.049$, $\hat{C}_{NAP} = 0.202$ (resp. $\hat{h} = 1.019$, $\hat{C}_{\phi} = 0.047$, $\hat{C}_{CDOM} =$

0.051, $\widehat{C}_{NAP} = 0.100$). On remarque que les méthodes estiment les paramètres efficacement avec peu de différence. Pour analyser et valider la méthode proposée, 500 spectres

TABLE 1 : Résultats des biais et variances de différents $\hat{\theta}$

θ	Méthode classique		Méthode proposée	
	$B_{\hat{\theta}_i}$	$\sigma_{\hat{\theta}_i}^2$	$B_{\hat{\theta}_i}$	$\sigma_{\hat{\theta}_i}^2$
Eau claire : où $z = 1$, $C_\phi = 0.05$, $C_{CDDOM} = 0.05$, $C_{NAP} = 0.1$				
z	3.1×10^{-3}	5.8×10^{-4}	1.2×10^{-3}	4.2×10^{-4}
C_ϕ	7.6×10^{-3}	2.4×10^{-3}	-1.2×10^{-2}	4.6×10^{-2}
C_{CDDOM}	-5.7×10^{-4}	1.9×10^{-5}	-2.2×10^{-4}	1.3×10^{-5}
C_{NAP}	3.2×10^{-2}	5×10^{-2}	1.1×10^{-2}	3.7×10^{-2}
Eau claire : où $z = 5$, $C_\phi = 0.05$, $C_{CDDOM} = 0.05$, $C_{NAP} = 0.1$				
z	1.07×10^{-1}	3.8×10^{-1}	2.4×10^{-4}	1.6×10^{-2}
C_ϕ	3.2×10^{-2}	9.5×10^{-3}	3.9×10^{-3}	2.8×10^{-3}
C_{CDDOM}	-10^{-4}	2.1×10^{-5}	-1.1×10^{-4}	9.8×10^{-6}
C_{NAP}	-4.3×10^{-3}	1.1×10^{-2}	2.3×10^{-3}	1.5×10^{-3}
Eau peu turbide : où $z = 0.5$, $C_\phi = 0.2$, $C_{CDDOM} = 0.2$, $C_{NAP} = 1$				
z	9.2×10^{-4}	1.4×10^{-4}	2×10^{-4}	5×10^{-5}
C_ϕ	7.2×10^{-2}	6.9×10^{-2}	1.4×10^{-2}	1.7×10^{-2}
C_{CDDOM}	-4.5×10^{-4}	1.4×10^{-4}	-3.4×10^{-4}	4.8×10^{-5}
C_{NAP}	4.2×10^{-2}	3.1×10^{-1}	1.2×10^{-2}	3.2×10^{-2}
Eau peu turbide : où $z = 2$, $C_\phi = 0.2$, $C_{CDDOM} = 0.2$, $C_{NAP} = 1$				
z	2×10^{-2}	4.7×10^{-2}	-1.7×10^{-3}	4.5×10^{-3}
C_ϕ	0.408	1.08	1.3×10^{-2}	2.9×10^{-2}
C_{CDDOM}	-5.5×10^{-3}	6.1×10^{-4}	-6.8×10^{-4}	1.1×10^{-4}
C_{NAP}	-2.7×10^{-2}	2.9×10^{-2}	-6.5×10^{-3}	3.7×10^{-3}

bruités sont simulés pour différents paramètres de colonne d'eau. Le tableau (1) présente le biais et la variance estimés sur chaque paramètre. Les biais et variances observées montrent que les paramètres utilisés pour la modélisation sont précisément estimés avec les deux méthodes. Aussi la méthode proposée, bien que ne faisant pas d'hypothèse particulière sur le fond présente des résultats tout à fait comparable à la méthode classique. Pour mesurer l'efficacité des méthodes, l'erreur d'estimation du spectre de fond pour un cas (voir Tableau 1) d'eau claire et d'une hauteur $z = 1m$ est quantifiée, par $\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\rho - \hat{\rho}_i|$ où $\hat{\rho}_i$ est le spectre estimé à la i -ème réalisation, et représentée sur la figure 5.

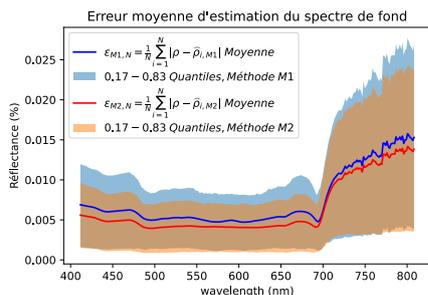


FIGURE 5 : Erreurs moyennes du spectre de fond estimé par les deux méthodes avec une confiance de 66% (donc des quantiles de 0.17 - 0.83).

A partir de ces résultats, figure 5, on remarque que les erreurs observées sont, fonction de la longueur d'onde et, équivalentes avec une erreur d'estimation de 2.5% maximum.

5 Conclusion et Perspectives

L'inversion du modèle de transfert radiatif réalise dans sa version classique deux opérations : l'estimation des paramètres de

la colonne d'eau et les paramètres d'un modèle de fond. Ce dernier prend traditionnellement la forme d'un mélange de deux à trois spectres, chacun le plus souvent représentatif d'un type benthique d'intérêt. La construction de ce modèle n'est malheureusement pas bien documentée. L'étude de l'estimation du maximum de vraisemblance permet une description géométrique du problème. Ce changement de perspective conduit à s'intéresser uniquement à l'ensemble des spectres de fond possible, sans se soucier de leur type benthique mais seulement de leur signature spectrale. Les simulations effectuées dans ce papier montrent la faisabilité de notre approche avec des résultats comparables à la méthode classique. Cette nouvelle approche ouvre la possibilité de mieux tenir compte de la diversité des spectres de fond observée.

Références

- [1] Mohammad ASHPHAQ et AL. : Review of near-shore satellite derived bathymetry : Classification and account of five decades of coastal bathymetry research. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 6(4):340–359, décembre 2021.
- [2] Arnold G. DEKKER et AL. : Intercomparison of shallow water bathymetry, hydro-optics, and benthos mapping techniques in australian and caribbean coastal environments. *Limnology and Oceanography : Methods*, 9(9):396–425, septembre 2011.
- [3] E.G. GILBERT, D.W. JOHNSON et S.S. KEERTHI : A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 4(2):193–203, 1988.
- [4] Gene GOLUB et Victor PEREYRA : Separable nonlinear least squares : the variable projection method and its applications. *Inverse Problems*, 19(2):R1–R26, février 2003.
- [5] Sylvain JAY et AL. : Hyperspectral remote sensing of shallow waters : Considering environmental noise and bottom intra-class variability for modeling and inversion of water reflectance. *Remote Sensing of Environment*, 200:352–367, octobre 2017.
- [6] Sylvain JAY et AL. : Predicting minimum uncertainties in the inversion of ocean color geophysical parameters based on cramer-rao bounds. *Optics Express*, 26(2):A1, janvier 2018.
- [7] Zhongping LEE et AL. : Hyperspectral remote sensing for shallow waters. i. a semianalytical model. *Appl. Opt.*, 37(27):6329–6338, Sep 1998.
- [8] Pascal MOUQUET et Jean-Pascal QUOD : Spectrhabent-oi - acquisition et analyse de la librairie spectrale sous-marine. Rapport technique, RST-Délégation Réunion/2010-02, 2010.
- [9] Tristan PETIT et AL. : Hyperspectral remote sensing of coral reefs by semi-analytical model inversion – comparison of different inversion setups. *Remote Sensing of Environment*, 190:348–365, mars 2017.