



HAL
open science

Conditions asymptotiquement nécessaires et suffisantes pour des inégalités polynomiales matricielles du second ordre

Lucas A.L. Oliveira, Kevin Guelton, K.M. Motchon, Valter J.S. Leite

► **To cite this version:**

Lucas A.L. Oliveira, Kevin Guelton, K.M. Motchon, Valter J.S. Leite. Conditions asymptotiquement nécessaires et suffisantes pour des inégalités polynomiales matricielles du second ordre. Congrès annuel de la SAGIP (SAGIP), 2023, Marseille, France. hal-04195838

HAL Id: hal-04195838

<https://hal.science/hal-04195838>

Submitted on 20 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Conditions asymptotiquement nécessaires et suffisantes pour des inégalités polynomiales matricielles du second ordre

Lucas A.L. Oliveira^{1,2}, Kevin Guelton¹, Koffi M.D. Motchon¹, Valter J.S. Leite²

¹ CReSTIC EA3804, Université de Reims Champagne-Ardenne, France
{lucas.oliveira,kevin.guelton,koffi.motchon}@univ-reims.fr

² CEFET-MG, Campus Divinópolis, Brésil
valter@ieee.org

Mots-clés : *Inégalités matricielles polynomiales, LMIs, Illustration en commande robuste.*

1 Introduction

Considérons une inégalité polynomiale matricielle d'ordre 2 donnée par :

$$\mathcal{P}(\tau) = \tau^2 \Phi_2 + \tau \Phi_1 + \Phi_0 < 0, \quad (1)$$

où $\Phi_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 0, 1, 2$) et $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ est une quantité réelle bornée. De telles contraintes quadratiques jouent un rôle important dans la théorie du contrôle. Elles sont souvent considérées pour relâcher des conditions de stabilité, notamment dans le cadre des systèmes à retards variables [5, 7, 4]. Ainsi, de nombreux travaux sont menés pour réduire le conservatisme des conditions sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) satisfaisant (1). À cette fin, deux approches sont généralement considérées. La première, basée sur des considérations géométriques [5], utilise les propriétés de convexité ou de concavité du polynôme scalaire formé par $\xi^T \mathcal{P}(\tau) \xi$, $\forall \xi \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Cependant, ces approches ne sont que suffisantes, et restent donc conservatives. Afin de relâcher davantage ces conditions, des travaux récents proposent le partitionnement de l'intervalle de définition $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ du paramètre τ en N sous-intervalles [1, 4, 6], conduisant ainsi à des conditions Asymptotiquement Nécessaires et Suffisantes (ANS) à mesure que N peut être augmenté. Une autre approche, introduite dans [2, 8], conduit à des conditions LMIs nécessaires et suffisantes satisfaisant (1). Néanmoins, ces dernières requièrent l'ajout de variables de relaxation supplémentaires qui, dans certains cas, sont susceptibles d'augmenter considérablement le coût de calcul, et donc d'impacter le succès de leur résolution numérique à l'aide des algorithmes d'optimisation convexe. L'objectif de notre étude est de proposer de nouvelles conditions ANS satisfaisant (1), qui convergent plus rapidement vers la solution optimale que les approches géométriques mentionnées ci-dessus (i.e. plus relâchées avec une complexité moindre) et ne requérant aucunes variables de décision supplémentaires. Ces nouvelles conditions ANS, présentées dans la section suivante, sont basées sur la réécriture du polynôme $P(\tau)$ sous la forme d'un polynôme homogène, ainsi que sur le partitionnement de l'intervalle $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$. L'efficacité de cette nouvelle approche est comparée aux résultats antérieurs dans la section 3, au travers d'un exemple classique de synthèse quadratique d'une loi de commande robuste pour un système Linéaire à Paramètre Variant (LPV) inspiré de [3]. D'autres résultats et exemples, omis ici pour des raisons de place, seront présentés lors de l'exposé.

2 Résultat principal

Le théorème suivant fournit des conditions LMIs ANS pour (1), basées sur la réécriture sous forme de polynôme homogène et le partitionnement de l'intervalle $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$.

Théorème 1 $\forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ et pour un entier N donné, l'inégalité polynomiale matricielle (1) est satisfaite si les inégalités matricielles (2) sont satisfaites $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.

$$I) \mathcal{P}(\underline{\tau}) < 0, \quad II) \mathcal{P}(\bar{\tau}_i) < 0, \quad III) 2\mathcal{P}(\underline{\tau}_i) + \mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i) < 0, \quad IV) 2\mathcal{P}(\bar{\tau}_i) + \mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i) < 0, \quad (2)$$

où $\mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i) = 2\underline{\tau}_i \bar{\tau}_i \Phi_2 + (\bar{\tau}_i + \underline{\tau}_i) \Phi_1 + 2\Phi_0$ avec $\underline{\tau}_i = \underline{\tau} + \frac{(i-1)(\bar{\tau}-\underline{\tau})}{N}$ et $\bar{\tau}_i = \underline{\tau} + \frac{i(\bar{\tau}-\underline{\tau})}{N}$.

Preuve : Pour un $N \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère le partitionnement $[\underline{\tau}, \bar{\tau}] = \bigcup_{i=1}^N [\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i]$ avec $\underline{\tau}_i$ et $\bar{\tau}_i$ définis ci-dessus. $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ et $\forall \tau \in [\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i]$, on pose $\alpha_{1i} = \frac{\tau - \underline{\tau}_i}{\bar{\tau}_i - \underline{\tau}_i} \in [0, 1]$ et $\alpha_{2i} = \frac{\bar{\tau}_i - \tau}{\bar{\tau}_i - \underline{\tau}_i} \in [0, 1]$, on peut alors écrire $\tau = \alpha_{1i} \bar{\tau}_i + \alpha_{2i} \underline{\tau}_i$. Dans ce cas, $\forall \tau \in [\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i]$, l'inégalité (1) devient :

$$(\alpha_{1i} \bar{\tau}_i + \alpha_{2i} \underline{\tau}_i)^2 \Phi_2 + (\alpha_{1i} \bar{\tau}_i + \alpha_{2i} \underline{\tau}_i) \Phi_1 + \Phi_0 < 0 \quad (3)$$

Puisque $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} = 1$, l'inégalité (3) peut être réécrite sous la forme (polynôme homogène) :

$$\alpha_{1i}^2 \mathcal{P}(\bar{\tau}_i) + \alpha_{1i} \alpha_{2i} \mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i) + \alpha_{2i}^2 \mathcal{P}(\underline{\tau}_i) < 0 \quad (4)$$

Notons que si les LMIs I) et II) dans (2) sont satisfaites, alors (4) est satisfaite si $\mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i) < 0$. A contrario, si $\mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i) \geq 0$, sachant que $\alpha_{1i} \alpha_{2i} \leq \frac{1}{2}(\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2)$, l'inégalité (4) est satisfaite si :

$$\alpha_{1i}^2 (\mathcal{P}(\bar{\tau}_i) + \frac{1}{2} \mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i)) + \alpha_{2i}^2 (\mathcal{P}(\underline{\tau}_i) + \frac{1}{2} \mathcal{T}(\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i)) < 0, \quad (5)$$

c'est-à-dire si les LMIs III) et IV) dans (2) le sont. \square

3 Exemple numérique

Considérons un système LPV en temps discret, inspiré de [3] et décrit par :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^2 \rho_i(k) (A_i x(k) + B_i u(k)), \quad \text{avec } A_i = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^i \beta \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{et } B_i = \begin{bmatrix} 5 + (-1)^{i-1} \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathbb{R}$ le signal de commande et $k \in \mathbb{N}$ le temps discret, $\rho_1(k) \geq 0$, $\rho_2(k) \geq 0$ sont des paramètres variables (supposés accessibles pour la commande) satisfaisant $\rho_1(k) + \rho_2(k) = 1$ et où $\beta \geq 0$ est un paramètre scalaire dédié à tester la faisabilité des conditions LMIs. Afin de stabiliser (6), on propose de réaliser la synthèse d'une loi de commande donnée par :

$$u(k) = \sum_{j=1}^2 \rho_j(k) F_j P^{-1} x(k) \quad (7)$$

où $F_j \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ et $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont des matrices de gains. En considérant une fonction quadratique candidate de Lyapunov $V(x(k)) = x^T(k) P^{-1} x(k)$, la synthèse de la loi de commande (7) peut être réalisée si $\exists P = P^T > 0$ et F_i ($i = 1, 2$), solution de la LMI paramétrée suivante [3] :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_i(k) \rho_j(k) \Gamma_{ij} < 0, \quad \text{avec } \Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} -P & -P A_i^T - F_j^T B_i^T \\ \star & -P \end{bmatrix} \quad (8)$$

Notons que, dans la littérature, des conditions LMIs suffisantes existent pour résoudre (8). Ainsi, en appliquant les conditions proposées dans [9] et sur la base de l'inégalité (8), il est possible de synthétiser une loi de commande (7) stabilisant (6) pour un domaine de faisabilité des conditions LMIs donné par $\beta \in [0, 1.71]$. Néanmoins, puisque ces conditions ne sont que suffisantes, il est certainement possible d'augmenter la valeur maximale de l'intervalle de faisabilité du paramètre β . En effet, puisque $\rho_2(k) = 1 - \rho_1(k)$, l'inégalité (8) peut être réécrite sous la forme d'une inégalité polynomiale matricielle (1), où $\tau = \rho_1(k) \in [0, 1]$, avec $\Phi_2 = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} - \Gamma_{12} - \Gamma_{21}$,

$\Phi_1 = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} - 2\Gamma_{22}$ et $\Phi_0 = \Gamma_{22}$. Dès lors, les conditions du Théorèmes 1 s'appliquent pour l'obtention d'une solution ANS à mesure que N augmente. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 1. On constate que le Théorème 1 admet toujours le plus grand intervalle de faisabilité des LMIs en comparaison des conditions proposées dans [1, 4, 6], ce qui illustre la réduction du conservatisme apportée. De plus, notons que pour cet exemple de faible complexité numérique, il est possible d'obtenir la valeur optimal $\beta = 1.765$ via l'application des conditions proposées dans [8] (ce qui pourrait ne pas être le cas pour un problème de plus grande complexité du fait de l'ajout de variables de décision supplémentaires). On constate donc que les conditions du Théorème 1 convergent asymptotiquement vers cette valeur optimal (avec une précision de 10^{-3}) pour $N = 8$, alors qu'elle n'est atteinte qu'à partir de $N = 13$ partitions pour [4, 6] (Lemme 1) et $N = 38$ pour [1] (Lemme 2). Ceci illustre l'efficacité du Théorème 1.

Méthode / N	1	2	3	4	...	8	...	13	...	38
[1] (Lemme 1)	1.282	1.360	1.618	1.668	...	1.742	...	1.757	...	1.765
[4, 6] (Lemme 2)	1.360	1.710	1.733	1.742	...	1.764	...	1.765	...	1.765
Théorème 1	1.710	1.742	1.756	1.764	...	1.765	...	1.765	...	1.765

TAB. 1 – Valeurs maximales obtenues (à l'aide du Théorème 1 versus [1, 4, 6]) de l'intervalle de faisabilité des LMIs ($\beta \in [0, \bar{\beta}]$) selon le nombre N de partitions considéré.

4 Conclusions et perspectives

De nouvelles conditions LMIs asymptotiquement nécessaires et suffisantes pour les inégalité matricielles polynomiales (1) ont été proposées, moins conservatives que celles basées sur les traditionnelles approches géométriques. L'exemple de la synthèse quadratique d'une loi de commande robuste pour un système LPV, sortant du cadre habituel des systèmes à retards pour lesquels ces inégalités polynomiales sont généralement employées, a permis d'illustrer l'efficacité des conditions proposées. Ces résultats ouvrent la voie à une généralisation en vue de traiter des problèmes plus complexes en commande robuste ou pour les systèmes à retards.

Références

- [1] J. Chen, J.H. Park, and S. Xu. Stability analysis of systems with time-varying delay : a quadratic-partitioning method. *IET Control Theory & App.*, 13(18) :3184–3189, 2019.
- [2] F.S.S. de Oliveira and F.O. Souza. Further refinements in stability conditions for time-varying delay systems. *Applied Mathematics and Computation*, 369 :124866, 2020.
- [3] T.M. Guerra and L. Vermeiren. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno's form. *Automatica*, 40(5) :823–829, 2004.
- [4] J. He, Y. Liang, F. Yang, and Z. Wei. Novel negative-definiteness conditions on the quadratic polynomial function with application to stability analysis of continuous time-varying delay systems. *ISA Transactions*, in press, doi :10.1016/j.isatra.2022.10.007, 2022.
- [5] J.H. Kim. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems. *Automatica*, 64 :121–125, 2016.
- [6] F. Liu, H. Liu, Y. Li, and D. Sidorov. Two relaxed quadratic function negative-determination lemmas : Application to time-delay systems. *Automatica*, 147 :110697, 2023.
- [7] A.N.D. Lopes, K. Guelton, L. Arcese, and V.J.S. Leite. Local sampled-data controller design for T-S fuzzy systems with saturated actuators. *IEEE Control Systems Letters*, 5(4) :1169–1174, 2021.
- [8] J. Park and P. Park. Finite-interval quadratic polynomial inequalities and their application to time-delay systems. *Journal of the Franklin Institute*, 357(7) :4316–4327, 2020.
- [9] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2) :324–332, April 2001.