



**HAL**  
open science

# Débit atteignable d'une communication montante par satellite avec des effets non linéaires via la décomposition de Bussgang

Arthur Louchart, Inbar Fijalkow

## ► To cite this version:

Arthur Louchart, Inbar Fijalkow. Débit atteignable d'une communication montante par satellite avec des effets non linéaires via la décomposition de Bussgang. GRETSI 2023-29° Colloque sur le traitement du signal et des images, GRETSI, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04195344

**HAL Id: hal-04195344**

**<https://hal.science/hal-04195344v1>**

Submitted on 4 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Débit atteignable d'une communication montante par satellite avec des effets non linéaires via la décomposition de Bussgang

Arthur LOUCHART<sup>1</sup> Inbar FIJALKOW<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IMT Nord Europe, Institut Mines-Télécom, Univ. Lille, Centre for Digital Systems, rue Guglielmo Marconi, 59650 Villeneuve-d'Ascq, France

<sup>2</sup>ETIS, UMR 8051, CY Cergy Paris Université, ENSEA, CNRS, 6 avenue du Ponceau, 95000 Cergy-Pontoise, France

**Résumé** – Dans le contexte des communications montantes par satellite à faisceau unique, avec des distorsions non linéaires liées à l'amplificateur de puissance, nous donnons une expression analytique du débit de données via la décomposition de Bussgang. Nous montrons un gain significatif par rapport à l'état de l'art, permettant d'établir une nouvelle borne inférieure.

**Abstract** – In the context of single beam satellite uplink communications, with nonlinear distortions related to the power amplifier, we give a closed-form expression of the data rate via the Bussgang decomposition. We show a significant gain compared to the state of the art, allowing to establish a new lower bound.

## 1 Introduction

Les systèmes de communication traditionnels supposent la plupart du temps des modèles linéaires avec un bruit blanc gaussien additif (AWGN) pour le développement d'algorithmes d'allocation de ressources. Bien que les systèmes possèdent de nombreuses distorsions non linéaires, les approximations linéaires donnent des résultats satisfaisants jusqu'à maintenant. Cependant, dans les nouveaux paradigmes, par exemple l'usage de fréquences millimétriques et d'une bande large, les hypothèses de linéarisation sont insuffisantes.

Dans ce papier, nous nous focalisons sur les communications par satellite, où la prise en compte des effets non linéaires permet d'obtenir des gains de performance. Nous considérons le lien retour/montant, où les utilisateurs terrestres transmettent des données au satellite, qui agit ensuite comme un relais et les envoie à une passerelle terrestre. Malheureusement, l'amplificateur de puissance à bord du satellite présente une caractéristique non linéaire lorsqu'il fonctionne à proximité du régime de saturation. Ce scénario apparaît lorsque la communication nécessite un rapport signal sur bruit suffisamment élevé. Par conséquent, la performance du système satellitaire est affectée par la distorsion générée par l'amplificateur de puissance, modélisé par un polynôme sans mémoire d'ordre trois [1, 2].

L'objectif de ce papier est d'exprimer de manière analytique le débit de données, en utilisant la décomposition de Bussgang [3, 4]. Nous mettons en évidence les termes mis en jeu, notamment en exposant la corrélation au symbole utile. Notez que cette évaluation a déjà été traitée dans [5], où les corrélations en temps et fréquences des parties linéaire et non linéaire sont négligées. Les résultats numériques montrent que notre revisite permet un gain de l'ordre de 10% du débit atteignable.

## 2 Modèle du système

Nous considérons un satellite à faisceau unique, où  $M$  utilisateurs terrestres appartiennent à ce faisceau. Nous utilisons

la technique d'accès multiple FDMA afin d'éviter les interférences intra-faisceau, où le nombre d'utilisateurs  $M$  est égal au nombre de sous-bande. On suppose que l'affectation des sous-bandes a été effectuée, et on note  $m$  l'utilisateur affecté à la sous-bande  $m$ , et  $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$  l'ensemble des utilisateurs. Cet utilisateur  $m$  transmet une séquence de symbole  $\{a_{m,n}\}_n$ , où  $n$  représente l'index des symboles. Tous les utilisateurs utilisent le même filtre de mise en forme, de réponse impulsionnelle  $p_T(t)$ . Ce filtre est en racine de cosinus sur-élevé (SRRC).

Le signal émis en bande de base par l'utilisateur  $m$  est

$$x_m(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} p_T(t - nT_s). \quad (1)$$

Chaque signal  $x_m(t)$  est transposé autour de la fréquence  $f_m$ . La différence entre deux fréquences adjacentes est notée  $\Delta F$ .

L'antenne du satellite reçoit la somme des  $M$  signaux transposés. On note par  $x_a(t)$  le signal analytique reçu,

$$x_a(t) = \sum_{m=1}^M \sqrt{G_m} x_m(t) e^{2i\pi f_m t}, \quad (2)$$

avec  $G_m$  le gain du canal entre l'utilisateur  $m$  et le satellite.

Soit  $y_a(t)$  le signal analytique reçu par la passerelle terrestre. À partir du signal reçu par le satellite  $x_a(t)$ , le signal reçu par la passerelle est d'abord passé à travers un amplificateur de puissance, modélisé comme un équipement non linéaire sans mémoire, puis un canal AWGN entre le satellite et la passerelle. Par conséquent, nous obtenons

$$y_a(t) = \gamma_1 x_a(t) + \gamma_3 x_a(t) x_a(t) \overline{x_a(t)} + w_a(t), \quad (3)$$

où  $\overline{\cdot}$  représente la conjugaison, et  $w_a(t)$  est un bruit blanc gaussien complexe, circulairement symétrique, de moyenne nulle et de variance  $P_W$ . Les coefficients complexes  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  caractérisent la distorsion non linéaire de l'amplificateur de puissance [1]. Notons que la relation d'entrée-sortie de l'amplificateur est une fonction polynomiale d'ordre trois, utilisée

Ce travail est en partie réalisé dans le cadre du PEPR 5G réseaux du futur.

généralement dans le contexte des communications par satellite [1, 2]. De plus, nous supposons un lien parfait entre le satellite et la passerelle, car ce lien descendant utilise une autre fréquence et met en jeu une diffusion à une unique passerelle.

Considérons maintenant la réception pour l'utilisateur  $m$ . Nous retournons d'abord en bande de base,

$$y_m(t) = y_a(t)e^{-2i\pi f_m t}, \quad (4)$$

puis nous appliquons le filtre adapté  $p_R(t) := \overline{p_T}(-t)$ ,

$$z_m(t) = \int_{\mathbb{R}} p_R(\tau) y_m(t - \tau) d\tau. \quad (5)$$

Finalement, le signal est échantillonné tous les instants  $nT_s$ , donnant la séquence  $\{z_{m,n}\}_n$  avec

$$z_{m,n} = z_m(nT_s). \quad (6)$$

Après quelques calculs simples, et en supposant une synchronisation parfaite entre nos utilisateurs, nous obtenons

$$\begin{aligned} z_m(t) = & \gamma_1 \sum_{m'=1}^M \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m'}} a_{m',n'} e^{2i\pi(m'-m)\Delta F t} \\ & \times h_1(t - n'T_s, m' - m) \\ & + \gamma_3 \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m_1} G_{m_2} G_{m_3}} \\ & \times a_{m_1, n_1} a_{m_2, n_2} \overline{a_{m_3, n_3}} e^{2i\pi(m_1+m_2-m_3-m)\Delta F t} \\ & \times h_3(t - n_1 T_s, t - n_2 T_s, t - n_3 T_s, m_1 + m_2 - m_3 - m) \\ & + \int_{\mathbb{R}} p_R(\tau) w_a(t - \tau) e^{-2i\pi f_m(t-\tau)} d\tau, \quad (7) \end{aligned}$$

avec  $h_1$  et  $h_3$  deux noyaux de Volterra, du premier et troisième ordre respectivement :

$$h_1(t_1, \ell) = \int_{\mathbb{R}} p_T(t_1 - \tau) p_R(\tau) e^{-2i\pi \ell \Delta F \tau} d\tau, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h_3(t_1, t_2, t_3, \ell) = & \int_{\mathbb{R}} p_T(t_1 - \tau) p_T(t_2 - \tau) p_T(t_3 - \tau) \\ & \times p_R(\tau) e^{-2i\pi \ell \Delta F \tau} d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

Par conséquent, après échantillonnage du signal  $z_m(t)$  à  $nT_s$ , le terme  $z_{m,n}$  peut être décomposé en trois parties :

$$z_{m,n} = z_{m,n}^{(L)} + z_{m,n}^{(NL)} + w_{m,n}, \quad (10)$$

où  $z_{m,n}^{(L)}$  est la partie dépendante linéairement du symbole courant et  $z_{m,n}^{(NL)}$  la partie dépendante non linéairement des symboles  $\{a_{m,n}\}_{m,n}$ .

Puisque  $h_1(nT_s, m)$  est égal à zéro pour tous  $n \neq 0$  et  $m \neq 0$  (orthogonalité en temps et fréquence entre les utilisateurs grâce au filtre de mise en forme), et égal à un autrement, nous forçons  $m' = m$  et  $n' = n$  pour obtenir la partie linéaire suivante

$$z_{m,n}^{(L)} = \gamma_1 \sqrt{G_m} a_{m,n}. \quad (11)$$

La partie non linéaire prend la forme suivante

$$\begin{aligned} z_{m,n}^{(NL)} = & \gamma_3 \sum_{m_1, m_2, m_3=1}^M \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m_1} G_{m_2} G_{m_3}} \\ & \times a_{m_1, n_1} a_{m_2, n_2} \overline{a_{m_3, n_3}} \\ & \times e^{2i\pi(m_1+m_2-m_3-m)\Delta F n T_s} \\ & \times h_3(n_1 T_s, n_2 T_s, n_3 T_s, m_1 + m_2 - m_3 - m). \quad (12) \end{aligned}$$

### 3 Expression analytique du débit atteignable en régime non linéaire

Dans cette section, nous donnons une expression du débit atteignable pour notre système de communication, en utilisant la décomposition de Bussgang [3, 4], lorsque la séquence de symbole  $\{a_{m,n}\}_{m,n}$  à l'entrée du canal est supposée gaussienne et indépendante. Les symboles reçus  $z_{m,n}$  peuvent aussi s'écrire comme

$$z_{m,n} = z_{m,n}^{(\parallel)} + z_{m,n}^{(\perp)} + w_{m,n}, \quad (13)$$

où

$$\begin{aligned} z_{m,n}^{(\parallel)} = & \gamma_1 \sqrt{G_m} a_{m,n} \\ & + \gamma_3 \sum_{(m_1, n_1) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z}} \sum_{(m_2, n_2) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z}} \sqrt{G_{m_1} G_{m_2} G_m} \\ & \times a_{m_1, n_1} a_{m_2, n_2} \overline{a_{m, n}} e^{j2\pi(m_1+m_2-m-m)\Delta F n T_s} \\ & \times h_3(n_1 T_s, n_2 T_s, 0, m_1 + m_2 - m - m) \\ & + \gamma_3 \sum_{(m_1, n_1) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z}} \sum_{\substack{(m_3, n_3) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_3, n_3) \neq (m, 0)}} \sqrt{G_{m_1} G_m G_{m_3}} \\ & \times a_{m_1, n_1} a_{m, n} \overline{a_{m_3, n_3}} e^{j2\pi(m_1-m_3)\Delta F n T_s} \\ & \times h_3(n_1 T_s, 0, n_3 T_s, m_1 - m_3) \\ & + \gamma_3 \sum_{\substack{(m_2, n_2) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_2, n_2) \neq (m, 0)}} \sum_{\substack{(m_3, n_3) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_3, n_3) \neq (m, 0)}} \sqrt{G_m G_{m_2} G_{m_3}} \\ & \times a_{m, n} a_{m_2, n_2} \overline{a_{m_3, n_3}} e^{j2\pi(m_2-m_3)\Delta F n T_s} \\ & \times h_3(0, n_2 T_s, n_3 T_s, m_2 - m_3) \quad (14) \end{aligned}$$

est le terme contenant le symbole courant  $a_{m,n}$ , et

$$\begin{aligned} z_{m,n}^{(\perp)} = & \gamma_3 \sum_{\substack{(m_1, n_1) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_1, n_1) \neq (m, 0)}} \sum_{\substack{(m_2, n_2) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_2, n_2) \neq (m, 0)}} \sum_{\substack{(m_3, n_3) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_3, n_3) \neq (m, 0)}} \\ & \sqrt{G_{m_1} G_{m_2} G_{m_3}} a_{m_1, n_1} a_{m_2, n_2} \overline{a_{m_3, n_3}} \\ & \times e^{j2\pi(m_1+m_2-m_3-m)\Delta F n T_s} \\ & \times h_3(n_1 T_s, n_2 T_s, n_3 T_s, m_1 + m_2 - m_3 - m). \quad (15) \end{aligned}$$

est le terme ne dépendant pas du symbole courant.

Nous pouvons utiliser la décomposition de Bussgang du terme  $z_{m,n}^{(\parallel)}$ , afin de réécrire les échantillons reçus,

$$z_{m,n} = B_{m,n} a_{m,n} + \eta_{m,n} + z_{m,n}^{(\perp)} + w_{m,n}, \quad (16)$$

où  $B_{m,n}$  représente le gain de Bussgang, défini comme

$B_{m,n} = \frac{\mathbb{E}[z_{m,n}^{(\parallel)} \overline{a_{m,n}}]}{\mathbb{E}[|a_{m,n}|^2]}$ , et  $\eta_{m,n}$  représente le bruit de distortion qui est décorrélié de  $a_{m,n}$  et  $w_{m,n}$ .

#### 3.1 Expression du gain de Bussgang

À partir de la définition du gain de Bussgang, nous avons

$$\begin{aligned} B_{m,n} = & \gamma_1 \sqrt{G_m} \\ & + \gamma_3 \sum_{(m_1, n_1) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z}} \sum_{(m_2, n_2) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z}} \sqrt{G_m G_{m_1} G_{m_2}} \\ & \times \mathbb{E}[a_{m_1, n_1} a_{m_2, n_2} \overline{a_{m, n}} \overline{a_{m, n}}] / \mathbb{E}[|a_{m,n}|^2] \\ & \times e^{j2\pi(m_1+m_2-2m)\Delta F n T_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times h_3(n_1 T_S, n_2 T_S, 0, m_1 + m_2 - 2m) \\
& + \gamma_3 \sum_{(m_1, n_1) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z}} \sum_{\substack{(m_3, n_3) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_3, n_3) \neq (m, 0)}} \sqrt{G_{m_1} G_m G_{m_3}} \\
& \times \mathbb{E} [a_{m_1, n-n_1} a_{m, n} \overline{a_{m_3, n-n_3} a_{m, n}}] / \mathbb{E} [|a_{m, n}|^2] \\
& \times e^{j2\pi(m_1-m_3)\Delta F n T_S} h_3(n_1 T_S, 0, n_3 T_S, m_1 - m_3) \\
& + \gamma_3 \sum_{\substack{(m_2, n_2) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_2, n_2) \neq (m, 0)}} \sum_{\substack{(m_3, n_3) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_3, n_3) \neq (m, 0)}} \sqrt{G_m G_{m_2} G_{m_3}} \\
& \times \mathbb{E} [a_{m, n} a_{m_2, n-n_2} \overline{a_{m_3, n-n_3} a_{m, n}}] / \mathbb{E} [|a_{m, n}|^2] \\
& \times e^{j2\pi(m_2-m_3)\Delta F n T_S} h_3(0, n_2 T_S, n_3 T_S, m_2 - m_3). \quad (17)
\end{aligned}$$

Comme les symboles  $\{a_{m, n}\}$  sont supposés être des variables aléatoires gaussiennes complexes circulairement symétriques, et selon [6] basé sur le théorème d'Isserlis, nous savons que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [a_{m_1, n-n_1} a_{m_2, n-n_2} \overline{a_{m_3, n-n_3} a_{m, n}}] = \\
& \mathbb{E} [a_{m_1, n-n_1} \overline{a_{m, n}}] \mathbb{E} [a_{m_2, n-n_2} \overline{a_{m_3, n-n_3}}] \\
& + \mathbb{E} [a_{m_2, n-n_2} \overline{a_{m, n}}] \mathbb{E} [a_{m_1, n-n_1} \overline{a_{m_3, n-n_3}}]. \quad (18)
\end{aligned}$$

Suite à cette décomposition des moments d'ordre quatre dans (17), de nombreux indices peuvent être supprimés en remarquant que les espérances sont non nulles si les deux premiers indices et les deux seconds indices sont égaux entre eux. On note que dans le cas des constellations contraintes, actuellement utilisées dans les systèmes de communication, le cumulatif d'ordre quatre de  $\{a_{m, n}\}_{m, n}$  serait ajouté dans cette décomposition.

Après suppression des termes nuls dans (17), nous obtenons

$$\begin{aligned}
B_{m, n} &= \gamma_1 \sqrt{G_m} + 2\gamma_3 G_m \sqrt{G_m} \mathbb{E} [|a_{m, n}|^2] h_3(0, 0, 0, 0) \\
& + \gamma_3 \sqrt{G_m} \sum_{\substack{(m_3, n_3) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_3, n_3) \neq (m, 0)}} G_{m_3} \mathbb{E} [a_{m_3, n-n_3} \overline{a_{m_3, n-n_3}}] \\
& \times h_3(n_3 T_S, 0, n_3 T_S, 0) \\
& + \gamma_3 \sqrt{G_m} \sum_{\substack{(m_2, n_2) \in \mathcal{M} \times \mathbb{Z} \\ (m_2, n_2) \neq (m, 0)}} G_{m_2} \mathbb{E} [a_{m_2, n-n_2} \overline{a_{m_2, n-n_2}}] \\
& \times h_3(0, n_2 T_S, n_2 T_S, 0). \quad (19)
\end{aligned}$$

Puisque tous les utilisateurs ont le même filtre de mise en forme, nous pouvons réaliser des permutations pour les indices  $t_i$  dans le noyau de Volterra  $h_3$ .

Finalement, le gain de Bussgang devient

$$B_{m, n} = \gamma_1 \sqrt{G_m} + 2\gamma_3 \beta \sqrt{G_m} \sum_{m_1=1}^M G_{m_1} P_{m_1}, \quad (20)$$

où  $P_m = \mathbb{E} [|a_{m, n}|^2]$  et  $\beta = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} h_3(0, n_1 T_S, n_1 T_S, 0)$ . On remarque que tous les utilisateurs contribuent au gain de Bussgang, et que celui-ci ne dépend pas de l'instant  $n$ . De plus, on peut prouver que  $\beta$  est positif en utilisant la symétrie du filtre SRRC.

### 3.2 Expression du SINR

En utilisant (16), le rapport signal sur bruit plus interférence (SINR) de l'utilisateur  $m$  est donné par

$$\text{SINR}_m = \frac{|B_m|^2 P_m}{D_m + P_W}, \quad (21)$$

avec

$$D_m = \mathbb{E} [|\eta_{m, n}|^2] + \mathbb{E} \left[ \left| z_{m, n}^{(\perp)} \right|^2 \right] + 2\Re \left\{ \mathbb{E} \left[ \eta_{m, n} \overline{z_{m, n}^{(\perp)}} \right] \right\}. \quad (22)$$

On se focalise alors sur l'expression de  $D_m$ . Puisque le bruit additionnel se décompose comme  $\eta_{m, n} = z_{m, n}^{(\parallel)} - B_m a_{m, n}$ , par définition de la décomposition de Bussgang, nous avons

$$\mathbb{E} [|\eta_{m, n}|^2] = \mathbb{E} \left[ \left| z_{m, n}^{(\parallel)} \right|^2 \right] - |B_m|^2 P_m. \quad (23)$$

Nous avons aussi

$$\mathbb{E} \left[ \eta_{m, n} \overline{z_{m, n}^{(\perp)}} \right] = \mathbb{E} \left[ z_{m, n}^{(\parallel)} \overline{z_{m, n}^{(\perp)}} \right], \quad (24)$$

car  $z_{m, n}^{(\perp)}$  ne contient pas  $a_{m, n}$ , et la séquence de symbole est indépendante.

Finalement, il reste à établir les expressions analytiques de  $\mathbb{E} \left[ \left| z_{m, n}^{(\parallel)} \right|^2 \right]$ ,  $\mathbb{E} \left[ z_{m, n}^{(\parallel)} \overline{z_{m, n}^{(\perp)}} \right]$ , et  $\mathbb{E} \left[ \left| z_{m, n}^{(\perp)} \right|^2 \right]$ . La méthode de calcul est similaire à [5], où (i) les moments d'ordre quatre ou six sont décomposés en somme de produit d'espérance, grâce à l'hypothèse de symboles gaussiens indépendants, puis (ii) les noyaux de Volterra prédominants sont seulement conservés.

Après les différents calculs, on obtient

$$\begin{aligned}
D_m &= 2|\gamma_3|^2 \alpha_1^{(3)} \tilde{P}_m^2 \left( \tilde{\delta}_{m, M} \tilde{P}_{m+1} + \tilde{\delta}_{m, 1} \tilde{P}_{m-1} \right) \\
& + 2|\gamma_3|^2 \tilde{P}_m \alpha_0^{(5)} \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathcal{M} \\ m_1 + m_2 - 2m = 0}} \tilde{P}_{m_1} \tilde{P}_{m_2} \\
& + 2|\gamma_3|^2 \tilde{P}_m \alpha_1^{(5)} \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathcal{M} \\ m_1 + m_2 - 2m = \pm 1}} \tilde{P}_{m_1} \tilde{P}_{m_2} \\
& + 4|\gamma_3|^2 \alpha_0^{(4)} \tilde{P}_m \sum_{\substack{m_1 \in \mathcal{M} \\ m_1 \neq m}} \tilde{P}_{m_1}^2 \\
& + 4|\gamma_3|^2 \alpha_1^{(4)} \tilde{P}_m \left( \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1 \neq m}}^{M-1} \tilde{P}_{m_1+1} \tilde{P}_{m_1} + \sum_{\substack{m_1=2 \\ m_1 \neq m}}^M \tilde{P}_{m_1-1} \tilde{P}_{m_1} \right) \\
& + 4|\gamma_3|^2 \alpha_1^{(1)} \left( \tilde{\delta}_{m, M} \tilde{P}_{m+1} + \tilde{\delta}_{m, 1} \tilde{P}_{m-1} \right) \sum_{\substack{m_1, m_2 \in \mathcal{M} \\ m_1, m_2 \neq m}} \tilde{P}_{m_1} \tilde{P}_{m_2} \\
& + 2|\gamma_3|^2 \alpha_0^{(2)} \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \in \mathcal{M} \\ m_1, m_2, m_3 \neq m \\ m_1 + m_2 - m_3 = 0}} \tilde{P}_{m_1} \tilde{P}_{m_2} \tilde{P}_{m_3} \\
& + 2|\gamma_3|^2 \alpha_1^{(2)} \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \in \mathcal{M} \\ m_1, m_2, m_3 \neq m \\ m_1 + m_2 - m_3 = \pm 1}} \tilde{P}_{m_1} \tilde{P}_{m_2} \tilde{P}_{m_3} \\
& + 8|\gamma_3|^2 \lambda_1 \tilde{P}_m \left( \tilde{\delta}_{m, M} \tilde{P}_{m+1} + \tilde{\delta}_{m, 1} \tilde{P}_{m-1} \right) \sum_{\substack{m_1 \in \mathcal{M} \\ m_1 \neq m}} \tilde{P}_{m_1}, \quad (25)
\end{aligned}$$

où  $\tilde{P}_i = G_i P_i$ ,  $\tilde{\delta}_{m, m'} = 1 - \delta_{m, m'}$  avec l'indice de Kronecker  $\delta_{m, m'}$ , et

$$\alpha_\ell^{(1)} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \left| \sum_{\substack{n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_2 \neq 0}} h_3(n_1 T_S, n_2 T_S, n_2 T_S, \ell) \right|^2 \quad (26)$$

$$\alpha_\ell^{(2)} = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \\ n_1, n_2, n_3 \neq 0}} |h_3(n_1 T_S, n_2 T_S, n_3 T_S, \ell)|^2 \quad (27)$$

$$\alpha_\ell^{(3)} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} |h_3(n_1 T_S, 0, 0, \ell)|^2 \quad (28)$$

$$\alpha_\ell^{(4)} = \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_2 \neq 0}} |h_3(n_1 T_S, n_2 T_S, 0, \ell)|^2 \quad (29)$$

$$\alpha_\ell^{(5)} = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} |h_3(n_1 T_S, n_2 T_S, 0, \ell)|^2 \quad (30)$$

$$\lambda_\ell = \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1, n_2 \neq 0}} \Re\{h_3(n_1 T_S, 0, 0, \ell) \overline{h_3(n_1 T_S, n_2 T_S, n_2 T_S, \ell)}\}. \quad (31)$$

On remarque alors que les termes  $\alpha_\ell^{(i)}$  sont positifs. Par évaluation numérique, le dernier terme de (25) lié à  $\lambda_1$  s'avère être négatif et va venir améliorer le SINR.

## 4 Résultats numériques

Nous considérons la liaison montante d'un système de communication par satellite avec un unique faisceau, utilisant la bande 27.5 - 29.5GHz. L'affectation des liens entre les utilisateurs et les sous-bandes est supposée déjà faite [7]. Nous fixons  $M = 6$  sous-bandes (donc 6 utilisateurs par faisceau). Les utilisateurs utilisent un filtre de mise en forme en racine de cosinus sur-élevé avec un facteur de décroissance de 0.25. La puissance maximale des utilisateurs terrestres est de  $P_{\max} = 50\text{W}$ . Les gains de canal sont calculés conformément à [7]. Les coefficients de distorsion de l'amplificateur de puissance  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  sont respectivement de 1 et 0.05 [1]. De plus, nous ajoutons un pré-amplificateur à gain variable, noté  $G_{\text{amp}}$  juste avant l'amplificateur de puissance. Celui-ci permet de régler le régime de fonctionnement de l'amplificateur de puissance, et change les gains des canaux de manière uniforme.

Sur la figure 1, nous traçons la somme des débits en fonction de la puissance de transmission des utilisateurs, où on force  $P_m = P, \forall m$ . On note (i) *AWGN* lorsque le débit est évalué avec  $\log_2(1 + \tilde{P}_m/P_W)$ , (ii) *SOTA* lorsque le débit est évalué avec l'équation (13) de [5], et (iii) *Bussgang* lorsque le débit est évalué avec  $\log_2(1 + \text{SINR}_m)$ , où le SINR est donné par (21). On s'intéresse à trois configurations, A, B et C qui correspondent à un régime linéaire, transitoire et non linéaire de l'amplificateur de puissance. Nous remarquons que la nouvelle évaluation du débit est une meilleure borne inférieure du débit atteignable en régime non linéaire. De plus la puissance de transmission idéale est différent selon l'expression considérée, avec un gain de l'ordre de 10% du débit atteignable.

## 5 Conclusion

Dans le cadre des communications par satellite avec un amplificateur de puissance générant des distorsion non linéaire, nous avons proposé une expression analytique du débit atteignable via la décomposition de Bussgang. Cette nouveauté permet d'obtenir un gain par rapport à l'état de l'art, et constitue une nouvelle borne inférieure. Dans nos travaux futurs, nous nous intéresserons au développement d'algorithme d'allocation de ressources avec cette nouvelle expression du débit de données.

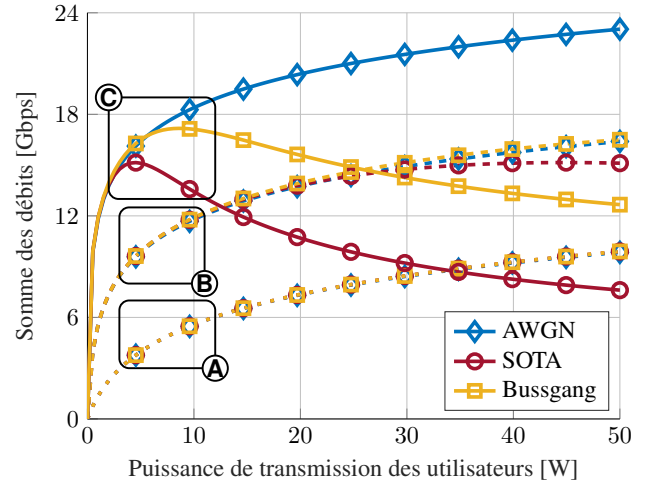


FIGURE 1 : Somme des débits vs. puissance de transmission, pour  $G_{\text{amp}} \in \{-10, 0, 10\}$ dB, respectivement A, B et C en trait pointillé, tiret et plein.

## Références

- [1] B. F. BEIDAS : Intermodulation Distortion in Multi-carrier Satellite Systems : Analysis and Turbo Volterra Equalization. *IEEE Transactions on Communications*, 59(6) :1580–1590, juin 2011.
- [2] S. BENEDETTO, E. BIGLIERI et R. DAFFARA : Modeling and Performance Evaluation of Nonlinear Satellite Links-A Volterra Series Approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-15(4) :494–507, juillet 1979.
- [3] A. K. SAXENA, I. FIJALKOW et A. L. SWINDLEHURST : Analysis of One-Bit Quantized Precoding for the Multiuser Massive MIMO Downlink. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(17) :4624–4634, septembre 2017.
- [4] O. T. DEMIR et E. BJORNSON : The Bussgang Decomposition of Nonlinear Systems : Basic Theory and MIMO Extensions [Lecture Notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 38(1) :131–136, janvier 2021.
- [5] A. LOUCHART, P. CIBLAT et C. POUILLIAT : Sum-capacity of Uplink Multiband Satellite Communications with Nonlinear Impairments. In *ICC 2021 - IEEE International Conference on Communications*, pages 1–6, Montreal, QC, Canada, juin 2021.
- [6] I. REED : On a moment theorem for complex Gaussian processes. *IRE Transactions on Information Theory*, 8(3) : 194–195, avril 1962.
- [7] E. LAGUNAS, S. K. SHARMA, S. MALEKI, S. CHATZINOTAS et B. OTTERSTEN : Resource Allocation for Cognitive Satellite Communications With Incumbent Terrestrial Networks. *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, 1(3) :305–317, septembre 2015.