



HAL
open science

Introduire le théorème de Thalès en Troisième - Quel appui sur le travail des élèves en classe ?

Monique Chappet-Paries, Aline Robert

► To cite this version:

Monique Chappet-Paries, Aline Robert. Introduire le théorème de Thalès en Troisième - Quel appui sur le travail des élèves en classe ? : ANALYSES DE VIDÉOS EN REP EN TEMPS DE COVID (2020-2021). 2023. hal-04194351v2

HAL Id: hal-04194351

<https://hal.science/hal-04194351v2>

Preprint submitted on 5 Sep 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LDAR

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ



**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°24**

Octobre 2022

**INTRODUIRE LE THÉORÈME DE THALÈS EN TROISIÈME
- QUEL APPUI SUR LE TRAVAIL DES ÉLÈVES EN CLASSE ?
ANALYSES DE VIDÉOS EN REP EN TEMPS DE COVID (2020-2021).**

Par Monique Chappet-Paries, Aline Robert

ISBN : 978-2-86612-401-4

ISSN : 2105-5203

Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<https://irem.u-paris.fr/>

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):

Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,

8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,

75013 Paris 13ème arrondissement

(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France)

Nous Contacter

Pour téléphoner : 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:

Locufier Nadine

IREM de Paris – Case 7018

Université de Paris

75205 Paris cedex 13

par voie électronique :

nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

<https://irem.u-paris.fr/> (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé :

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Introduire le théorème de Thalès en troisième **Quel appui sur le travail des élèves en classe ?**

Analyses de vidéos en REP en temps de Covid (2020-2021).

Monique Chappet-Paries, LDAR

Aline Robert, LDAR

Table de matières

Introduction.....	5
Partie 0 : cadrages et questionnements associés à ce travail, méthodologie.....	7
I Cadrages théoriques	
1) ZPD des élèves et interventions porteuses de proximités	
2) Différents types de proximités : notre catégorisation	
3) Double approche, vigilance didactique et relief sur la notion à enseigner : étudier la complexité.	
4) Ce qui est cherché ici	
II Méthodologie	
1) Les données	
2) Le relief	
3) Les analyses de séances	
4) Les résultats	
Partie 1 : une vue globale des séances.....	15
1) Des éléments de relief	
a) Du côté des programmes et de la notion en jeu : une notion RAP ?	
b) Du côté des élèves	
2) Scénario, énoncés proposés et fiches de cours	
3) La chronique détaillée	
4) L'itinéraire cognitif	
Partie 2 : les analyses de séances.....	23
Analyse des tâches du tipi	
I Analyse de la séance 1 : de Pythagore à Thalès, en passant par les triangles semblables - la résolution des deux premières questions du tipi.....	
23	
1) Résolution de la première question du tipi	
2) La deuxième question du tipi : Pythagore n'est pas la réponse à tout	
3) Révision sur les triangles semblables et la proportionnalité	
a) Premier temps : on associe le mot Thalès et les mots triangles semblables	
b) Deuxième temps : on associe les mots triangles semblables et le mot proportionnalité	
4) Le travail sur la fiche « Triangles semblables ».	
a) La définition est reprise.	
b) L'introduction de la proportionnalité des longueurs	
5) Bref retour à la question 2 du tipi	
II Analyse de la séance 2 : des triangles semblables au théorème de Thalès - question 2 du tipi, conjecture préparant le théorème de Thalès, début du cours et exercice d'application immédiate	
29	
1) Reprise de la question 2 du tipi : travail sur les triangles semblables (démonstration)	
a) Les deux triangles sont semblables car ils ont les mêmes angles (démonstration reprise)	
b) Fin de la question 2- Travail sur la proportionnalité.	
2) La conjecture - L'introduction du parallélisme	
3) Le cours et le travail sur la fiche « Théorème de Thalès »	
a) Premier temps : la présentation de l'énoncé du théorème s'appuyant sur ce qui a été fait	
b) Deuxième temps : exploitation du tableau et mises en garde	
4) Un premier exercice d'application immédiate : c'est encore laborieux !	
a) On pose le problème	
b) La construction du tableau	
c) Correction au tableau	

Partie 3- Résultats.....	39
1) Retour sur le scénario : une prise en compte importante de ce que nous avons appelé « relief »	
2) Côté gestion : un appui constant sur le travail des élèves, adapté à la classe et aux contraintes	
a) Des appuis immédiats sur le travail des élèves à leur place ou pendant des échanges avec la classe qui suivent ce travail (quand c'est possible) – l'importance des mots	
b) Des appuis différés plus globaux – les points bilans	
c) Un bilan sur les proximités	
d) Un exemple où le professeur prend en charge une partie du raisonnement sans appui sur le travail des élèves, faute de temps ?	
3) L'adaptation au contexte REP : une logique d'action bien visible (le pari du sens)	
a) Le pari du sens	
b) Rôle du contexte	
c) Le rapporteur	
d) Le suivi d'un élève	
4) Un début d'évaluation : analyse des copies d'élèves	
a) Des remarques et un petit bilan	
b) Discussion	
Conclusion.....	50
1) Retour sur les proximités (et leur classification), les pratiques de l'enseignant et ses logiques d'action	
2) Des alternatives ? Le pari du sens/le pari de la technique	
3) Enseignement explicite ? Qu'est-ce qui est explicité, à quel moment...	
4) A quoi peut servir ce type d'analyses ?	
5) En formation : comment utiliser de tels matériaux ?	
6) Questions	
Références.....	56
Annexes.....	58
Annexe 0 : des éléments sur les programmes.....	58
Annexe 1 : le balisage des films.....	64
Annexe 2 : la résolution de la question 3 du tipi.....	72
Annexe 3 : tableau récapitulatif de la comparaison cours/vidéo.....	76
Annexe 4 : la transcription du début du cours.....	78
Annexe 5 : : quelques précisions données par l'enseignant sur ses séances.....	84

Introduire le théorème de Thalès en troisième

Quel appui sur le travail des élèves en classe ?

Analyses de vidéos en REP en temps de Covid (2020-2021).

Introduction

Nos recherches sur les pratiques se situent dans le cadre de la double approche. Il s'agit d'étudier les pratiques des enseignants en relation avec les activités des élèves en distinguant les choix de contenus, de déroulements et toutes les contraintes, institutionnelles, sociales voire personnelles.

Du côté des apprentissages, nous avons adopté le modèle de la conceptualisation à la fois comme processus à réaliser à travers les activités et comme produit des apprentissages. Nous retenons un certain nombre d'hypothèses sur des facteurs favorisant cette conceptualisation. Elles portent sur le travail autonome des élèves, sur les médiations de l'enseignant, sur les analyses de tâches et la nature des notions.

Cependant ces différents aspects à combiner par les enseignants, avec des adaptations, en fonction du contexte, ne constituent pas, pour nous, un modèle cohérent de pratiques à mettre en œuvre et ne définissent pas directement des « bonnes pratiques ». En fait, nos recherches sur les pratiques ont pour objectif de mettre en lumière, sur un contenu et dans un contexte précis, la manière dont les enseignants opérationnalisent en classe certains de ces aspects pour mieux comprendre ce qui est possible et éventuellement en déduire des palettes de possibles. Cela peut servir dans des formations où on s'appuie sur des pratiques effectives, en classe pour faire découvrir, faire prendre conscience, faire discuter ces mises en fonctionnement.

Ainsi, dans ce cahier, nous étudions comment un enseignant¹ de REP, en troisième – élèves de 14-15ans en dernière année de collège - (et en temps de Covid) se place possiblement dans la (les) « ZPD » de ses élèves (d'après nous) pour introduire le théorème de Thalès. Plus précisément, nous avons analysé quatre vidéos du début du cours² (exercice d'introduction, premier cours et premier exercice d'application de Thalès) filmées en 2020-2021 (merci à l'enseignant et à l'intermédiaire entre nous et lui).

Nous nous inspirons, pour apprécier ce type d'interventions, d'une étude préalable que nous menons sur ce qui est visé dans l'enseignement étudié, que nous appelons le relief sur le savoir en jeu (Robert, 2010 ; Robert & al., 2012). Il s'agit d'une analyse croisant des éléments mathématiques spécifiques de la notion à enseigner, les programmes à considérer et les difficultés des élèves, déjà connues (qu'elles soient décrites dans des recherches ou encore empiriques, faisant partie du bagage professionnel commun). Nous ne distinguons pas savoir et connaissances, sauf à utiliser plutôt le premier mot lorsqu'il s'agit de notions reconnues et partagées par la communauté mathématique et le deuxième lorsqu'il s'agit des acquisitions individuelles de ce savoir.

Plan

¹ Cet enseignant est très formé, expérimenté, et participe à des groupes IREM.

² Contrairement à d'autres études qui ciblent l'utilisation du théorème une fois celui-ci bien installé (Hache 2016).

Dans la partie 0 nous rappelons nos hypothèses sur l'intérêt, pour les apprentissages des élèves, d'un travail que leur enseignant place dans leur ZPD. Cela nous amène à préciser l'étude faite ici, dans laquelle nous recherchons ce qui peut relever d'un travail en classe de ce type : cela se traduit par des interventions du professeur qualifiées de proximités (ou dites porteuses de proximités). Ce sont des rapprochements explicites, faits par l'enseignant à l'oral, entre ce qui vient des élèves et les connaissances visées. Nous dégageons une classification, puis présentons plusieurs questionnements que nous abordons dans le texte, liés aux pratiques enseignantes et détaillons la méthodologie retenue. La première partie a pour objet la description globale, du point de vue de la recherche, de la notion étudiée (relief), le scénario prévu par l'enseignant pour introduire le théorème de Thalès (décrit comme une suite d'activités, que nous pouvons apprécier en référence au relief) et la chronique résumée du déroulement des deux séances analysées. Les analyses correspondantes sont présentées dans la partie 2, chronologiquement, avec une attention particulière sur les candidats « rapprochements ». Les résultats font l'objet de la partie 3, avec notamment des éléments sur la logique d'action de l'enseignant, en relation avec le contexte de la classe (REP). La conclusion permet en particulier de réfléchir à ce qu'on peut faire de ce type d'analyses, notamment en formation.

Partie 0 : cadrages et questionnements associés à ce travail, méthodologie

I Cadrages théoriques

1) ZPD des élèves et interventions porteuses de proximités

Nous nous intéressons à ce que les enseignants ajoutent, à l'oral, à leur discours strictement mathématique. Plus précisément nous étudions la façon dont les enseignant.e.s relient, à l'oral, les éléments mathématiques en jeu, connus, ou supposés en partie connus des élèves, dans ce qu'ils disent ou font, à ce qui est nouveau (visé ou déjà présenté mais non acquis). Il s'agit de repérer et d'analyser les éléments du discours de l'enseignant³ faisant ces liens, quel que soit le moment de la séance, y compris dans des aides, en réfléchissant à leur contribution éventuelle à la compréhension et aux apprentissages des élèves, compte tenu de leur travail et de l'état de leurs connaissances⁴.

Nous justifions cette centration de l'étude par l'adoption et l'adaptation à notre contexte de l'hypothèse de Vygotski (1997) mettant en jeu la Zone Proximale de Développement des élèves (ZPD) (Robert, 1998). Nous postulons ainsi que les élèves peuvent être aidés dans certains de leurs apprentissages en étant associés à ce que dit⁵ l'enseignant lors d'un travail qui se déroule. Les élèves seuls ne peuvent pas encore le réaliser complètement, même après réflexion, parce qu'ils n'y ont pas pensé ou que ça reste trop vague par exemple. L'enseignant apporte, ajoute par son discours, et en les explicitant, des éléments que les élèves peuvent cependant reconnaître, reprendre ou comprendre en partie. Autrement dit, les élèves ne sont pas très « loin » de la résolution ou de la compréhension visées, préparées par leur travail⁶, ce qui rend possible des interventions (explicitations) de l'enseignant à la fois proches de ce qu'ils savent, ont fait ou peuvent faire, et proches de ce qui est visé. C'est cette double proximité, entre du nouveau mathématique et ce qui est déjà là ou déjà fait côté élèves, portée par le discours de l'enseignant, qui nous laisse postuler qu'une appropriation pourra succéder à ce moment de partage, évidemment compte tenu de ce qui suivra.

Cela s'inscrit en complément des autres hypothèses admises sur les apprentissages, qu'elles soient didactiques ou plus générales comme la nécessité d'un travail autonome des élèves contribuant à donner du sens à leurs acquisitions (suite à Piaget, Rogalski, 2015) ou la référence à la conceptualisation⁷ pour modéliser l'apprentissage (suite à Vergnaud, 2002).

Ainsi, en bref, adoptons-nous l'idée qu'il y a des acquisitions mathématiques des élèves qui, moyennant certaines conditions, peuvent être facilitées par un travail partagé avec l'enseignant, à l'oral, au cours duquel ce dernier, s'appuyant sur ce travail, le relie aux connaissances ou nouvelles activités qu'il est en train d'enseigner. On parle alors de proximité discursive (Robert & Vandebrouck, 2014) ou d'intervention porteuse de proximité, et c'est notre objet d'étude ici. Cette restriction sur ce qui est étudié (présence d'un lien entre activités et savoir) se justifie alors

³ A partir de cet endroit du texte, nous utilisons le mot « enseignant » pour qualifier à la fois enseignant et enseignante sauf si on connaît et respecte l'identité de la personne en jeu.

⁴ Le mot est à prendre au sens large, connaissances relatives à un savoir aussi bien définition, théorème ou propriété qu'exemple, procédure ou méthode...

⁵ Cela peut qualifier ce qui a été fait ou être associé à des gestes mais nous retenons ici uniquement le discours.

⁶ Une certaine familiarisation a eu lieu.

⁷ Nous associons l'apprentissage des élèves pour une notion donnée au processus de conceptualisation défini par Vergnaud (2002). Cela conduit à la disponibilité ou au moins la mobilisabilité des connaissances en jeu sur la notion et à leur réorganisation dans l'ensemble des acquis des élèves.

d'une part par son potentiel en termes d'acquisition des élèves et d'autre part parce que les éléments de discours oral correspondant sont complètement spécifiques à la situation de classe, et ne peuvent pas apparaître par exemple dans les manuels (Bridoux & al., 2016), voire les capsules (vidéos filmées mises sur You Tube par exemple, cf. Chappet-Paries & al., 2017b)).

2) Différents types de proximités : notre catégorisation

Nous avons donc attribué des qualificatifs différents aux proximités⁸ repérées, évoquant le sens de la dynamique entre particulier et général qui peut être portée par l'intervention.

Compte tenu de la spécificité du travail mathématique, entre énoncés généraux et exercices particuliers, entre aspects déclaratifs et aspects procéduraux des connaissances, un des aspects à repérer dans les proximités, qui nous a semblé porteur d'impact potentiel sur les acquisitions des élèves, tient à la distinction entre un appui qui va du contextualisé présent chez les élèves à du décontextualisé introduit (ou à introduire) par le professeur ou alors dans le sens inverse, du décontextualisé (le cours notamment) au contextualisé, ou alors un appui qui "redit" les choses autrement, au même niveau de généralité. Cela peut accompagner, à nos yeux, différentes activités complémentaires nécessaires qui interviennent toutes en mathématiques.

Nous pensons ainsi que les dynamiques impliquées par un appui explicité sur des activités ou un savoir utilisé en contexte, qui débouchent sur une généralisation ou, au contraire, sur la mise en lumière d'une application en contexte d'une connaissance générale, n'induisent pas les mêmes processus de conceptualisation (apprentissage). De ce fait l'explicitation portée par la proximité peut contribuer à provoquer des prises de conscience des élèves à partir de ce qu'ils ont fait, et notamment à partir des familiarisations en acte qu'ils ont pu accumuler. Cela peut renforcer les progrès sur la mobilisation des connaissances avec leurs adaptations⁹ en jeu (Robert & al., 2012), lorsque c'est une décontextualisation qui est commentée, par exemple ; cela peut aussi favoriser la prise de sens ou la disponibilité des connaissances, ou encore préparer l'exposé d'une nouvelle connaissance, lorsque c'est le passage d'un contexte à un savoir qui est repris. Enfin ce serait l'organisation des connaissances entre elles et la coordination de leurs différents aspects qui pourrait être en jeu dans les commentaires sans changement de niveau de généralité, restant en contexte ou restant décontextualisés.

Ce qui vient des élèves est ainsi associé, avec l'intervention choisie par l'enseignant, à ce qui peut s'en rapprocher en termes de connaissance ou d'activité mathématiques, pas encore explicitement présentes, qu'il introduit ou fait introduire par les élèves (si c'est sous la forme d'une question). Dans ce dernier cas, on parlera de proximité si la question oriente clairement les élèves vers un savoir ou une activité déjà en jeu dans ce qu'ils ont fait ou ont dit, mais à préciser, ou à généraliser.

C'est la direction de ce rapprochement, entre contexte et expression générale, qui nous sert à classer les proximités. Cela a déjà été fait pour étudier des moments d'exposition des connaissances, où l'activité des élèves est particulièrement inobservable, cette étude en donnant des indices indirects (Bridoux & al., 2016 ; Chappet-Paries & al., 2017a), 2017b) ; Robert &

⁸ Nous n'indiquons plus discursives dans la suite du texte, ce sont les seules étudiées ici.

⁹ Ce peuvent être des reconnaissances de modalités d'application, des introductions d'intermédiaires, des étapes à introduire, des choix à faire ou des mélanges de cadres, registres, points de vue, mises en relation...

Rogalski, 2020). Elle a été généralisée à d'autres moments de travail des élèves (Chappet - Paries & Robert, soumis¹⁰).

Plus précisément si les élèves ont travaillé sur un exemple, à décontextualiser, on s'intéresse aux explicitations de la généralisation qui est faite de ce qu'ils ont dit, fait (ou savent), peut-être en actes – on parlera alors d'une proximité ascendante. Elle intervient dans le cadre de démarches plutôt inductives, où les élèves affrontent du nouveau "généralisant" ou au moins une mobilisation nouvelle (ou oubliée) d'un énoncé général. Il s'agit de les accompagner dans cette démarche, souvent difficile car inhabituelle, contraire à la démarche déductive, plus habituelle, qui s'appuie sur la connaissance générale en jeu déjà présentée.

Donnons un exemple. Dans le cours étudié, les différentes configurations associées au théorème de Thalès viennent d'être présentées aux élèves. Dans l'exercice précédant le cours ils ont eu à utiliser, pour calculer une longueur, le fait que si deux triangles sont semblables leurs côtés sont proportionnels (savoir ancien). Il s'agit maintenant d'avancer dans le cas général des deux configurations (triangles emboîtés et papillon) en (ré)utilisant la similitude des triangles et la proportionnalité. Le professeur enchaîne :

P : Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ?

E : la proportionnalité

P : de la proportionnalité et c'est ça qui est très fort dans Thalès, c'est qu'on va utiliser cette proportionnalité (proximité ascendante reliant un savoir antérieur déjà utilisé en contexte et la généralisation de son utilisation au cas général).

Il y a aussi des proximités ascendantes qui portent sur une activité des élèves, en contexte, mettant en fonctionnement un énoncé général que l'enseignant, au lieu de citer directement, fait déduire de cette utilisation ou fait discuter. On pourrait dire que l'enseignant fait d'abord « remonter » l'élève du contexte à l'énoncé général qu'il a utilisé, lui permettant de constater similitude ou différence avec la connaissance à mobiliser ou le résultat attendu.

Si c'est une connaissance générale à faire approprier et/ou appliquer, il s'agira par exemple de clarifier ce que les élèves ont fait à partir de leurs premiers essais de contextualisation - on parlera d'une proximité descendante. Elle peut mettre en exergue les choix liés au sens de la connaissance ou aux conditions techniques d'application.

Donnons un exemple.

Après avoir utilisé le théorème de Pythagore pour calculer une longueur, les élèves ont à en calculer une autre, pour laquelle ce théorème ne s'applique pas, l'absence d'angle droit étant constatée. L'enseignant ajoute « *Que vous compreniez que Pythagore n'est pas votre seule arme ... Je trouve la hauteur avec Pythagore (proximité descendante sur le savoir à utiliser), par contre pour trouver la longueur EF, Pythagore ça ne fonctionne pas ...*

Enfin, s'il n'y a pas de changement de niveau de généralité entre ce qui sert d'appui et ce qui est rapproché on parlera de proximité horizontale, comme dans la dernière phrase de la citation

¹⁰ Cf : S'appuyer sur le travail des élèves pour intervenir oralement pendant les recherches d'exercices en classe dans le secondaire : des diversités ?

précédente. Ce peuvent être des demandes de précision ou des commentaires sur ce que les élèves font, notamment en termes de changements de point de vue, registre ou cadre, ou vocabulaire. Ce type de proximité peut être repéré dans des explicitations de ces changements, à partir d'essais plus ou moins réussis des élèves, avec la visée d'une prise de conscience.

On pourrait évoquer une telle proximité, portant sur l'activité des élèves, dans la dernière phrase de la citation précédente (comme ils ont pu le constater, *Pythagore ne fonctionne pas*)¹¹.

Donnons un exemple.

Les élèves ont déjà étudié les triangles semblables et citent le mot, pour trouver une longueur.

Le professeur rebondit :

Deux triangles semblables alors c'est quoi deux triangles semblables ? (proximité horizontale associée à une question qui oriente sur le savoir en jeu)

E'' : Alors pour moi si c'est semblable, alors EFD c'est un gros zoom de ADC.

P : Dit avec ses mots à elle.

Notons qu'une même phrase peut porter des proximités différentes selon les interprétations que peuvent en faire les élèves, entre ceux qui en restent à l'exercice et ceux qui y voient déjà un cas générique, voire peut porter de proximités classées de plusieurs manières.

Dans l'exemple suivant la proximité semble horizontale mais pourrait être descendante pour des élèves qui auraient oublié la propriété.

Un élève cite le mot « coefficient de proportionnalité » à bon escient, à propos du calcul des rapports de longueurs de côtés de triangles. Le professeur rebondit en reprenant et en ajoutant une précision sans changement de niveau de généralité :

P. Qu'est-ce que vous pouvez dire de toutes ces valeurs ?

E : Je peux conclure que ce n'est pas semblable car le coefficient de proportionnalité n'est pas le même partout.

P : Ce n'est pas semblable parce qu'il n'y a pas la proportionnalité, le coefficient n'est pas le même (proximité horizontale sur le savoir en jeu).

Ainsi les tentatives des enseignants de s'appuyer sur ce qui vient des élèves peuvent, sans doute utilement pour certains, accompagner toutes ces dynamiques différentes qui peuvent intervenir. C'est ce qui justifie la catégorisation présentée, qui s'adapte à ce qu'élabore l'enseignant au sein de la démarche qu'il met en œuvre.

3) Double approche, vigilance didactique et relief sur la notion à enseigner : étudier la complexité.

Nos analyses de pratiques consistent à renseigner, in fine, les logiques d'action des enseignants, qui résultent de l'imbrication de ce que nous modélisons en termes de composantes et de niveaux d'organisation¹² (cf. Double approche didactique et ergonomique des pratiques, Robert & Rogalski, 2002). Sont en jeu la composante cognitive, associée au choix des tâches, la composante médiative associée aux déroulements, et en particulier ici aux interventions portant un rapprochement entre travail des élèves et savoirs, mais aussi la composante sociale, qui révèle des manières de s'adapter au public REP et la composante institutionnelle, en termes de

¹¹ Nous ne l'avons pas retenue car elle fait un peu double emploi.

¹² C'est surtout pour caractériser les pratiques des débutants que nous avons utilisé les niveaux d'organisation

respect des programmes (et du temps). Ici nous sommes concernés par deux types d'imbrication.

Une première imbrication se fait en quelque sorte en amont de la classe, en termes de prévision, même si cela n'est pas explicite, et même si on n'en a que des traces : cela concerne ce que nous appelons l'établissement ou l'adoption du relief sur la notion, sur lequel l'enseignant s'appuie, même implicitement, lorsqu'il décide de son scénario, jusqu'aux évaluations. Ce peut être pour choisir ce qu'il va reprendre du manuel, ou des ressources, ou pour élaborer des tâches d'introduction et choisir la variété des tâches à proposer, mais en ayant toujours en tête la classe, les acquis et les difficultés des élèves (sur la notion mais pas seulement), les contraintes... Rappelons que ce relief sur une notion à enseigner imbrique des analyses mathématiques (voire historiques, épistémologiques...) et curriculaires, adaptées à cette notion au niveau scolaire étudié, et une analyse plus cognitive des difficultés des élèves déjà répertoriées et de leurs connaissances antérieures supposées, en lien avec ce qui est visé.

Ce relief aide à définir, explicitement ou seulement en actes, la conceptualisation que l'on peut viser en contexte, préciser les connaissances que l'on voudrait mobilisables ou disponibles¹³, organiser les nouvelles connaissances dans ce qui est déjà là.

En tant que chercheuses, nous établissons un relief de référence qui nous sert dans un premier temps pour apprécier l'itinéraire cognitif¹⁴ associé au scénario, tant du côté des préparations de l'enseignant que des séances effectives.

Une autre imbrication repérée et qui nous intéresse directement est associée à ce que certains auteur.e.s appellent la vigilance didactique ou une forme de vigilance didactique (VD). Il s'agit de contrôler, pendant les séances en classe, le travail des élèves entre prévu et réalisé et de s'en servir pour réguler ses propos et ses propositions d'activités. Cela met en jeu à la fois (au moins) la composante cognitive et la composante médiative. Nous sommes concernés plus spécifiquement ici par ce que l'enseignant « fait » de ce qu'il repère chez ses élèves : comment il l'interprète et élabore des interventions, des commentaires, en relation avec les connaissances à installer, et surtout quelles proximités adaptées il produit.

Une donnée essentielle à renseigner pour pouvoir exercer cette forme de vigilance (pour l'enseignant) est ainsi pour nous l'appréciation de la « proximité », pour les élèves, des contenus à enseigner, visés, des contenus supposés déjà acquis ou en voie d'acquisition et des activités en cours. Autrement dit l'exercice de la VD est étroitement lié au repérage des ZPD des élèves relatives aux connaissances en jeu et à son « exploitation », toutes choses permises ou en tout cas facilitées par la représentation du relief que s'est faite l'enseignant, par expérience et/ou suite à une appropriation de travaux l'établissant. Deux aspects sont à prendre en compte, la possibilité d'un appui sur des connaissances proches, s'il y en a, ou la « création » de (pré-)connaissances sur lesquelles s'appuyer ultérieurement. Cela passe par la proposition d'activités (au sens large, jusqu'à l'écoute) et par l'observation et l'interprétation de ce qui a lieu en classe, conduisant à des accompagnements jugés adaptés, des commentaires ou même des activités ajoutées.

¹³ Connaissances mobilisables : les élèves les utilisent correctement si elles sont indiquées ; disponibles : même chose mais les connaissances ne sont pas indiquées.

¹⁴ La suite des activités prévues.

L'exercice de la VD pendant les séances amène ainsi l'enseignant à être sur le « qui vive », à s'adapter, voire à modifier un projet... en identifiant grâce aux références citées (appropriées) cet état des élèves sur ce qui est visé. Laisser travailler les élèves sur des tâches dont on a établi un certain « profil didactique », sur lesquelles on a une certaine attente, les observer et les écouter, comparer aux attentes, compléter en s'appuyant sur ce qu'on a pu repérer, en allant du contexte au général ou le contraire (à choisir), autant de manières pour tenter cet exercice – difficile !

4) Ce qui est cherché ici

Cette monographie est traversée par plusieurs questionnements reliés, descriptifs, justifiés par ce qui précède. Quel scénario est adopté par l'enseignant, en référence au relief que nous avons établi ? Pendant les déroulements comment l'enseignant gère-t-il la production de proximités, entre relief, ZPD et contexte ? Quelle logique d'action peut-on repérer dans ses pratiques, et avec quelles tensions éventuelles en relation avec le contexte ? Nous tenterons en conclusion de préciser des problématiques émergentes (notamment liées à l'hétérogénéité des élèves) et de réfléchir à l'usage qu'on peut en faire en formation.

II Méthodologie

1) Les données

L'enseignant a envoyé 6 vidéos (numérotées de 18 à 23) que nous décrivons plus loin. Un des films est vide (le 22). Nous retenons ici les deux premières séances qui correspondent aux 4 premières vidéos, de 18 à 21, sachant que le film 19 est très court.

Nous avons réalisé une transcription « intermédiaire » (balisage, en annexe 1) à partir des 6 vidéos à notre disposition, en indiquant ce qui se passe toutes les 5 minutes environ, y compris pour la dernière vidéo, qui est consacrée à la dernière question de l'exercice commencé au début. En fait il nous manquait un passage entre cette vidéo et la précédente, d'où la décision de ne pas étudier ce dernier extrait. Toutefois nous l'avons quand même analysé à part, en notant des évolutions qui ont lieu (cf. annexe 2).

Nous avons aussi transcrit mot à mot certains passages, et numéroté les proximités repérées de (1) à (31) - en fait la plupart des proximités ont été ainsi notées.

Enfin nous avons transcrit entièrement le début du cours (annexe 4).

2) Le relief

Nous avons établi des éléments sur le relief de la notion compte tenu des programmes actuels (annexe 0) et des ressources didactiques déjà écrites, nombreuses (brochure Commission InterIrem -CI2 -premier cycle, 1995 ; Laguerre, 2008 ; Minet, 2008). Il faut cependant remarquer que ce programme est très différent des précédents, ce qui rend caduque un certain nombre de documents -sauf à étudier l'histoire de l'enseignement de ce théorème (Matheron, 1994).). Soulignons que nous ne questionnons pas ce programme : nous étudions ce qui est faisable ou non au sein du programme imposé. D'autres didacticiens ont des démarches différentes en cherchant par exemple à proposer une progression cohérente pour le cycle 4 quitte à bousculer des pratiques établies (cf. Perrin & al., 2021).

3) Les analyses de séances

A partir de notre balisage et des indications envoyées par le professeur (énoncés et fiches), nous avons reconstitué le scénario (tâches et déroulements¹⁵) et l'itinéraire cognitif que l'enseignant fait suivre à ses élèves (d'abord avec une chronique résumée puis plus en détail). Nous avons en particulier travaillé sur les interventions dans les moments collectifs, en relation avec le travail des élèves. Cela a conduit à repérer les interventions porteuses de proximités que nous avons souvent transcrites précisément. Nous avons mis en italique les citations précises de l'enseignant et des élèves.

Une classification faite par chaque auteure et discutée ensuite nous a permis de nous mettre d'accord sur l'affectation d'un ou plusieurs labels à ces proximités, étudiées dans les trois phases successives que sont la recherche de l'exercice préliminaire avec la révision des triangles semblables, la conjecture et le début du cours sur le théorème, l'exercice d'application.

De plus nous avons précisé l'étiquetage des proximités des différents types en indiquant ce qui est visé, en lien avec ce qui vient des élèves : savoirs (vocabulaire ou théorème ou propriété – cités ou développés) – activités (reconnaissance, traitement, organisation¹⁶).

Enfin nous avons distingué (et encadré) les conclusions intermédiaires, qui constituent des commentaires méta¹⁷, que l'enseignant produit à la fin de chaque épisode associé à une sous-tâche précise (y compris de cours), appelés « points-bilans ». Ils sont souvent porteurs d'une ou plusieurs proximités.

4) Les résultats

De ces analyses réunies nous avons déduit des régularités sur les pratiques de l'enseignant (logique d'action), en mettant en regard le relief que nous avons établi, les choix de scénario et les déroulements, ainsi que les contraintes repérées.

Un tableau récapitulatif des proximités classées en fonction de ce qu'elles visent permet de constater des tendances, en relation avec la nature de la proximité.

¹⁵ Nous avons dégagé à peu près les déroulements prévus à partir des déroulements effectifs.

¹⁶ Ceci fait référence à la classification des activités proposée dans Robert et Vandebrouck, 2014.

¹⁷ On utilise le mot méta pour indiquer un discours sur les mathématiques, non strictement mathématique, en langage courant (mixte) (Robert & Robinet, 1996, Robert & al., 2012).

Partie 1 : Une vue globale des séances

Précisons que les vacances de Noël ont eu lieu entre les deux séances analysées (c'est-à-dire que la première séance est la dernière avant les congés). Les élèves et l'enseignant sont masqués. Voici ce que l'enseignant nous a transmis sur la classe :

« Il y a 24 élèves dans une REP+ du nord de Montpellier, pas particulièrement calmes - surtout lors des séances filmées ! Ce que nous avons fait en amont :

1. Proportionnalité
2. Principes du Calcul Littéral
3. Statistiques
4. Arithmétique
5. Aire et Pythagore.

Les séances filmées se positionnent à la toute fin d'un travail sur Pythagore (des rappels pour certains, une découverte pour d'autres ...). Thalès n'est pas explicitement fait en 4ème mais ce résultat est abordé à l'occasion du travail sur les triangles semblables. Il n'y en a aucune trace dans les savoirs institutionnalisés mais les collègues ne manquent pas de signaler aux élèves que ce théorème sera travaillé en classe de 3ème. »

1) Des éléments de relief

Nous avons étudié le relief sur le théorème à enseigner en troisième sans reprendre complètement les études précédentes rendues en partie obsolètes par changement de programme.

a) Du côté des programmes et de la notion en jeu : une notion RAP ?

On pourrait écrire une histoire du théorème de Thalès dans les programmes (on en trouve d'ailleurs un début dans Matheron (1994)). On a ainsi changé au cours des années les configurations en jeu, plus ou moins générales, les registres dans lesquels sont écrites les caractérisations choisies, ou encore les démonstrations envisagées. De nombreux articles ont été écrits depuis la brochure de la CI2 premier cycle (ibid.), en particulier sur des considérations mathématiques ou concernant l'introduction didactique possible du théorème, qui dépendent étroitement de ce que nous appelons le relief : une description des notions en jeu dans un programme donné, compte tenu des programmes des niveaux antérieurs et des difficultés déjà répertoriées des élèves...

Nous n'étudierons ici que le programme 2015, correspondant aux manuels de 2016 (avec des compléments en 2018 et 2020), qui est assez différent des précédents. En effet les triangles semblables sont présentés en quatrième, avec la définition (angles égaux) et la propriété caractéristique de proportionnalité des côtés homologues, non démontrée en général. Quelquefois on inverse définition et propriété. De plus des repères de progression annuelle sont ajoutés depuis 2019 par cycle et par année (annexe 0), qui peuvent changer la donne.

Le théorème de Thalès et sa réciproque s'expriment alors comme une caractérisation, en termes de rapports de longueurs, du parallélisme de deux droites dans des configurations particulières : elles coupent deux droites sécantes et déterminent ainsi deux triangles (soit emboîtés, soit de la forme « papillon »), qui sont semblables (lien avec la quatrième) et ont leurs côtés proportionnels.

Une application importante (savoir-faire) est le calcul de la longueur d'un côté d'un triangle à partir de trois autres longueurs de côtés (bien choisis), et aussi la possibilité de savoir si deux droites sont parallèles lorsqu'on connaît les longueurs de quatre côtés bien choisis des triangles en jeu.

Ajoutons que ces longueurs sont données soit numériquement soit algébriquement (variables positives). Une raison d'être du théorème pourrait être cette traduction d'une propriété géométrique en une propriété algébrique (et réciproquement), donnant lieu à des calculs liés à la proportionnalité. Il y a donc comme objectifs à la fois la mobilisabilité du théorème (et de sa réciproque) et sa disponibilité dans des situations « concrètes ».

Vu ce qui précède, on peut donc s'appuyer pour introduire le théorème sur le fait que les triangles semblables et la proportionnalité ont déjà été étudiés, au moins partiellement, par les élèves (en quatrième). Le parallélisme du théorème de Thalès se ramène directement à la présence de deux triangles semblables dans les configurations retenues. De plus on a fait admettre aux élèves en quatrième que les longueurs des côtés (homologues) des triangles semblables sont proportionnelles et réciproquement (voire on l'a pris comme définition). Ainsi les ingrédients en jeu sont connus, même s'ils sont admis, mais ils ne sont pas cités directement dans les énoncés. La notion pourrait apparaître comme une réponse à un problème (RAP), consistant à trouver comment spécifier la similitude déjà rencontrée aux configurations nouvelles retenues, avec le parallélisme de deux droites.

b) Du côté des élèves

On peut penser que plusieurs difficultés demeurent quoi qu'il en soit.

Pour le théorème, il y a d'abord une difficulté plutôt géométrique : l'identification des couples de côtés à associer pour écrire correctement les rapports de longueurs égaux traduisant la proportionnalité, déjà renseignée dans le travail de Horoks, 2008 (en seconde). Même si les triangles semblables n'apparaissent pas directement dans l'énoncé, il pourrait être utile de les repérer au moins au début de l'apprentissage pour en distinguer les côtés « homologues ». On peut le faire soit grâce aux angles égaux (côtés homologues « en face » d'angles égaux), soit en associant 2 à 2 les côtés rangés dans l'ordre des mesures de leurs longueurs, soit en reconnaissant ou reconstituant la configuration « triangles emboîtés » et l'agrandissement ou la réduction éventuels entre les triangles à appliquer aux côtés. La correspondance est souvent faite par les enseignants ou dans les manuels directement, sans revenir aux triangles, en ne travaillant que sur les longueurs, à partir de l'alignement des points sur les deux droites ou demi-droites correspondantes, complété par le parallélisme des deux derniers côtés (respectifs). Il y a donc un passage à réaliser entre les côtés (segments), impliqués dans les triangles semblables, et leurs longueurs impliquées dans la proportionnalité, qui met en jeu pour formuler les choses dans le cas général les extrémités de ces côtés. Or la condition souvent indiquée ne porte finalement que sur ces points extrémités, et leur alignement sur des droites sécantes, avec une condition de parallélisme de deux autres droites ainsi déterminées. On pourrait évoquer une déconstruction dimensionnelle citée par Duval & Godin (2005), qui peut être source de difficultés selon les auteurs.

Ainsi, comme le théorème n'est pas justifié en général, qu'on ne démontre pas explicitement que les triangles en jeu sont semblables, les élèves peuvent ne pas faire le lien entre d'une part

la phrase, un peu compliquée, de l'énoncé de leur théorème¹⁸, faisant intervenir des droites, sécantes et parallèles et des points alignés, et d'autre part le fait que les triangles en présence sont semblables. La justification de ce qui figure dans les rapports (tout comme le choix des longueurs homologues) sont souvent cachés et cela peut priver les élèves d'un éventuel point d'appui, alors que l'équivalence triangles semblables/droites parallèles, non immédiate mais au moins accessible visuellement, pourrait pourtant aider au repérage à faire (et nous verrons que c'est le choix fait ici). Cette référence pourrait aussi contribuer à ce que les élèves placent bien toutes les longueurs associées à l'un des triangles en numérateur et à l'autre en dénominateur.

Si on veut que les élèves fassent le lien avec ce qu'ils ont vu en quatrième, on peut ainsi compléter le strict énoncé du théorème en faisant un détour par les triangles semblables : on doit ajouter que les parallèles déterminent des triangles semblables (et on peut même le justifier, par exemple parce qu'ils ont leurs angles respectivement égaux si les droites sont parallèles). Revenir aux triangles semblables constitue ainsi une alternative, avec le risque éventuel cependant d'alourdir la présentation, en introduisant une étape intermédiaire.

Il peut y avoir une autre difficulté géométrique à bien reconnaître les deux types de configurations et à s'y limiter – et dans le cas de la configuration « papillon » cela peut être un peu plus difficile d'identifier correctement les côtés à associer sans les triangles semblables. Une autre petite alternative concerne l'ordre dans lequel on présente les deux versions, un travail de reconnaissance sur la deuxième devant être fait dans tous les cas.

L'autre grande source de difficultés est le travail algébrique à faire sur les rapports, une fois écrits. Il y a là un traitement algébrique de la proportionnalité, exprimée sous une forme élaborée, faisant souvent intervenir directement des fractions, qui peut la cacher pour certains élèves. Quand le lien n'est pas fait entre l'égalité des fractions à établir dans le théorème et le tableau « brut » donnant les longueurs des côtés homologues, établi grâce à la similitude des triangles, et souvent ni cité ni a fortiori écrit, les élèves peuvent ne pas reconnaître qu'il s'agit bien de calculer une quatrième proportionnelle. De plus le choix d'une méthode pour trouver cette quatrième proportionnelle, soit grâce à un coefficient de proportionnalité (au cas où le tableau est écrit mais difficile à imaginer en son absence), soit par « un produit en croix », reste à faire. Ce qui est difficile aussi c'est qu'il y a deux égalités donc se pose la question de repérer celle qui est utilisable. Notons aussi que ce tableau, ou les fractions en question, mettent en jeu des longueurs de segments, ou leurs mesures et pas toujours des nombres ou des variables usuelles, ce qui constitue une autre adaptation des situations de proportionnalité étudiées. La non distinction des longueurs (voire des côtés) et de leurs mesures est généralisée et pourrait peut-être questionner certains élèves. Enfin le calcul de certaines longueurs, que l'on doit obtenir à partir de données intermédiaires pour appliquer le théorème, peut être une source d'adaptations, y compris lorsque leur expression mélange inconnue et nombres (dans un calcul du type $x + 4$, par exemple, ou même $(x/(x + 4))$).

Enfin une troisième source de difficultés tient à la formulation même du théorème, et notamment de l'implication si... alors ... Cela a été étudié en particulier dans le groupe Léo¹⁹ de l'IREM (formuler, reformuler, 2017). Un travail spécifique à partir des formulations des élèves

¹⁸ Du type : soient d et d' deux droites sécantes en A . Les points B et M sont deux points de la droite d distincts de A . Les points C et N sont deux points de la droite d' distincts de A . Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les longueurs des côtés du triangle ABC sont proportionnelles à celles du triangle AMN . Cependant les énoncés peuvent varier.

¹⁹ Léo comme Langage, Ecrit, Oral.

a été expérimenté. Les séances analysées dans ce texte se placent en amont d'une utilisation « courante » du théorème (dont est seulement étudiée ici l'introduction).

Pour la réciproque, d'autres difficultés s'ajoutent que nous n'illustrerons pas ici.

2) Le scénario adopté dans les deux séances retenues

On peut donc tenter d'introduire le théorème en s'appuyant sur ces connaissances déjà travaillées antérieurement (plus ou moins) : triangles semblables et proportionnalité. C'est ce qui est fait ici, avec un premier exercice (le tipi) qui met en jeu l'ancien. Les questions sont projetées au fur et à mesure du déroulement mais les élèves auront aussi l'énoncé complet.

L'enseignant veut ainsi d'abord faire réviser les triangles semblables vus en quatrième. Pour cela il propose un exercice dans lequel, dans la deuxième question, les élèves doivent reconnaître deux triangles semblables et mettre en œuvre la proportionnalité des longueurs connues de leurs côtés pour calculer la longueur inconnue d'un autre côté (c'est possible sans le théorème de Thalès) – la troisième question fait en revanche utiliser le théorème de Thalès.

Voici l'énoncé précis par lequel l'enseignant fait démarrer les élèves (appelé tipi ensuite).

Exercice du Tipi :



L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est.



Pour la reconstitution d'un village amérindien, on cherche à construire un tipi où chaque perche en bois mesure 9 mètres et dépasse de 1,5 mètres. Le diamètre du cercle tracé au sol mesure 12 mètres.



1) Le but de ce tipi est d'abriter un totem de 4 mètre de haut.

Le tipi est-il assez haut pour accueillir ce totem ?

2) Les concepteurs souhaitent placer une plateforme circulaire au sommet du tipi.

Quel sera le diamètre de la plateforme ?

3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 mètres et ont une envergure de 2,2 mètres.

Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?



Cet exercice, résolu en trois temps très séparés, permettra aussi, grâce à la différence entre les deux premières questions, de dégager l'idée que le théorème de Pythagore ne s'applique pas à toutes les situations où on doit calculer des longueurs – le nouveau théorème qui va être introduit sera une autre possibilité. L'enseignant nous a confirmé qu'il motivait le nouveau théorème en faisant travailler une question où le théorème de Pythagore, pourtant utile dans la question précédente, ne sert plus. Avant de terminer la (deuxième) question qui met en jeu des triangles semblables, l'enseignant intercale donc une révision de cours sur ces triangles semblables, appuyée sur une fiche qu'il commente, donnant la définition (angles égaux) et la propriété caractéristique (proportionnalité des longueurs des côtés). Cela précède les congés de Noël.

Les élèves auront la fiche à coller sur leur cahier ou ils la recopient.

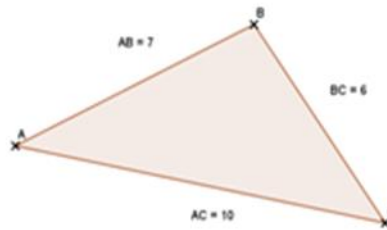
Triangles semblables

Description intuitive :

Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont la même forme.

Traduction mathématique :

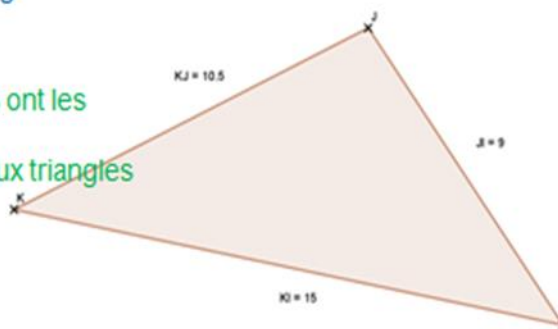
Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont les mêmes angles.



Conséquence et caractérisation :

Deux triangles qui sont semblables ont les côtés qui ont des longueurs proportionnelles.

Inversement, si deux triangles ont les côtés qui ont des longueurs proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.



La question 2) de l'exercice ayant donné lieu à ce rappel est reprise après les vacances, avec une démonstration de l'égalité des angles et donc de la similitude²⁰, puis un travail sur le tableau de proportionnalité construit à partir des longueurs des côtés, connues et inconnue est mené pour calculer la longueur cherchée.

Une nouvelle tâche intermédiaire est alors proposée, qui met en jeu une caractérisation perceptive du parallélisme de deux droites en relation avec la similitude des deux triangles qu'elles déterminent avec deux sécantes.

La conjecture

(GeoGebra)

Comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites ?

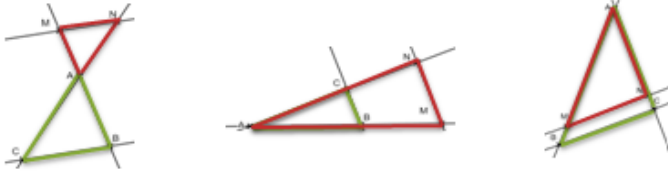
Suit le cours sur le théorème de Thalès, appuyé sur une deuxième fiche, qui reprend l'étude des triangles semblables dans les trois configurations classiques. La fiche est projetée et commentée. Le professeur la dévoile petit à petit et fait travailler les élèves dessus.

²⁰ Le mot n'est pas prononcé.

Le théorème de Thalès

(Cahier de Leçon)

1) Théorème de Thalès – La configuration



Si

- Les droites (MB) et (NC) sont **sécantes en A**
- Les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**

Alors

Les triangles ABC et AMN sont semblables.

Rappel : Deux triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles.

Remarque : il y a plusieurs façons d'exploiter la proportionnalité...

- On peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix (recommandé)

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle AMN	AM	AN	MN

- Utiliser le coefficient de proportionnalité et parler d'agrandissement ou de réduction (parfois utile)
- ou encore écrire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (mode expert)

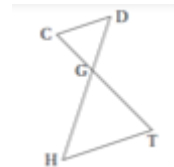
Il est indiqué dans la fiche que le tableau de proportionnalité des longueurs des côtés, qui est construit à partir des triangles semblables, peut être exploité de plusieurs manières : avec un produit en croix, en calculant un coefficient de proportionnalité ou sous forme de rapports égaux.

Un premier exercice d'application immédiate est alors proposé.

Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

$GD = 25$ mm, $GH = 45$ mm, $CG = 20$ mm et $HT = 27$ mm.

Calculer CD et GT .



Puis la classe revient à la dernière question du premier exercice, laissée encore en suspens, qui est une autre application relativement immédiate du théorème. Nous arrêtons notre analyse avant cette dernière résolution, dont l'étude est toutefois jointe en annexe 2, malgré un « trou » dans les vidéos entre la suite du cours et cette question, ce qui limite les interprétations.

Les déroulements ont été reconstitués à partir des séances filmées. On peut penser, vu ce qui s'est fait, que l'enseignant comptait dès sa préparation installer, sans doute comme d'habitude, pour chaque question du tipi, pour la conjecture et pour l'exercice d'application, une recherche individuelle, pendant laquelle il circule dans la classe, suivie éventuellement d'une recherche collective, puis une correction collective. En ce qui concerne les deux moments de cours, les élèves travaillent sur la fiche projetée en répondant à des questions de l'enseignant et la recopient, là encore sans doute selon l'habitude de la classe. Les vacances de Noël ont vraisemblablement amené à reprendre plus longuement que prévu ce qui avait été amorcé avant.

3) L'itinéraire cognitif

L'enseignant prévoit de s'appuyer sur du déjà-vu, à réviser : triangles semblables et proportionnalité, grâce au travail sur deux questions de l'exercice d'introduction et sur une fiche de révision. Puis il propose une conjecture à chercher, mettant en jeu l'obtention géométrique de la configuration de Thalès, qui permet d'associer droites parallèles et triangles semblables. Toutes ces activités d'approche sont suivies d'un cours, présenté sur une fiche projetée et travaillée. Un premier exercice d'application immédiate est proposé.

Puis les élèves reviendront à la dernière question de l'exercice d'introduction (où il faut utiliser le théorème avec des adaptations) – cf. annexe 2 - et à d'autres exercices.

4) La chronique des séances analysées

Les deux séances étudiées occupent 2h30 environ dont 2h consacrées aux mathématiques qui nous intéressent ici. Nous n'avons pas tenu compte des interventions sur le travail à faire, le conseil de classe, les vacances, le covid ...

Nous avons indiqué dans le tableau ci-dessous, par épisodes associés à une tâche précise indiquée dans la colonne de gauche, le travail qui est organisé par l'enseignant.

Apparaissent aussi des points-bilans, détaillés plus loin, marqueurs de conclusions intermédiaires de l'enseignant sur ces (sous)-tâches, ponctuant les déroulements.

Nous avons souligné à droite les phases de recherche des élèves (à leur place, avec un travail individuel ou collectif lorsque l'enseignant au tableau orchestre les interventions des élèves) et mis en italique les moments d'exposition des connaissances.

Tâches par épisodes	Activités et Durées – <i>les moments d'exposition de connaissance en italique</i> - <u>les moments de recherches soulignés</u>
Séance 1 (films 18 et 19)	
Question 1 du tipi (24') Mathématisation et Théorème de Pythagore	5' <u>recherche individuelle globale</u> 8' modélisation par le professeur et figure 3' <u>recherche individuelle (calcul de la hauteur)</u> 8' correction collective (un élève au tableau)
Début de la question 2 du tipi : <i>Pythagore ne fait pas tout</i> (14') Retour motivé aux triangles semblables (rappel de cours)	7' <u>recherche individuelle</u> 7' correction collective (théorème de Pythagore inutilisable et <i>révision collective des triangles semblables</i>) (point-bilan)
Idem (film 19) (6')	6' <i>travail sur la fiche triangles semblables</i> et premier retour sur la question 2 par le professeur (point-bilan)
Séance 2 (film 20)	
Question 2 du tipi suite (24')	11' rappels du professeur et <u>recherche collective</u> de la similitude des deux triangles en jeu dans la question 4' correction par le professeur (point-bilan) 5' correction du tableau de proportionnalité des longueurs des côtés par le professeur (point-bilan) 4' correction finale par le professeur (point-bilan)
Conjecture : obtenir deux triangles semblables et début du cours sur Thalès (19')	6' <u>recherche individuelle</u> 5' <u>recherche collective</u> avec Geogebra 8' conclusion du professeur : des droites parallèles impliquent des triangles semblables et <i>début de cours sur le théorème Thalès par le professeur</i>
Séance 2 suite (film 21)	
Cours Thalès (suite) (10')	10' <i>Retour sur la fiche Théorème de Thalès</i> (3 points-bilans)
Exemple d'utilisation cherché en classe (23'30)	13'30 Tracé de la figure au tableau par le professeur et <u>recherche individuelle</u> - Quelques interventions du professeur (aides procédurales) 4'30 Début de correction par le professeur- retour au cours (point-bilan) 5'30 Fin de la correction avec un élève au tableau (2 points-bilans).

Tableau 1 La chronique des séances analysées

Partie 2 : Les analyses de séances

Nous allons présenter successivement le déroulement de la séance 1, avec le début de la recherche sur la question 2, qui motive le remplacement du théorème de Pythagore par un autre outil et le retour aux triangles semblables (qui se termine par un travail sur une fiche de cours), et la première reprise de la question 2 ; puis la séance 2 en trois parties – d’abord la fin de la résolution de la question 2, avec la démonstration de la similitude des triangles et le calcul effectif de la longueur cherchée comme 4^{ème} proportionnelle, puis le travail sur le théorème avec la recherche de la conjecture qui le précède (activité introductive) – qui introduit le parallélisme - et ce qui est fait sur l’énoncé (à partir de la fiche de cours) et enfin la recherche d’un premier exemple d’application.

Auparavant, nous présentons l’analyse des tâches des deux premières questions du tipi dont la recherche intervient dans les deux séances analysées.

Analyse des tâches du tipi

La première tâche, non indiquée, consiste à remplacer les données par une figure plane. Cela demande une mathématisation du problème et la reconnaissance de la figure simplifiée à choisir.

La première question amène alors à reconnaître qu’il faut utiliser le théorème de Pythagore : cela nécessite le tracé de la hauteur (intermédiaire à introduire, assez naturel) et de reconnaître qu’elle est aussi médiane car le triangle est isocèle. Il faut ensuite travailler seulement dans le demi-triangle rectangle qui apparaît, à isoler et à reconnaître. Il est utile de nommer les différents points de la figure à utiliser. Il y a plusieurs adaptations, qui correspondent à des étapes à introduire, le calcul de la longueur de l’hypoténuse qui demande de soustraire 1,5 à 9, suite de la mathématisation, le calcul de la longueur de la base comme moitié du diamètre (connaissance ancienne), et, à partir du théorème de Pythagore, le calcul du deuxième côté de l’angle droit, et non de l’hypoténuse (reconnaitre cette modalité d’application).

La deuxième question requiert de reconnaître des triangles semblables à partir d’égalité d’angles. Puis on exploite cette propriété en construisant le tableau de proportionnalité des mesures des côtés, ce qui demande de repérer les côtés à associer en colonne. Enfin il faut « traiter » le tableau pour calculer la longueur manquante (4^{ème} proportionnelle) : cela demande d’extraire l’information utile et de faire le calcul attendu. Plusieurs adaptations sont en jeu : reconnaître ce qu’il faut utiliser, repérer les angles égaux et les côtés homologues, choisir une manière d’exploiter le tableau et mener le calcul jusqu’au bout.

La troisième question est analysée en annexe 2.

I Analyse de la séance 1 : de Pythagore à Thalès, en passant par les triangles semblables - la résolution des deux premières questions du tipi.

Nous avons distingué 5 étapes dans cette séance, que nous présentons successivement : une mise au travail avec une modélisation du problème et une révision du théorème de Pythagore à appliquer en contexte ; la recherche de la question 2), avec d’abord l’échec de la reprise du même théorème de Pythagore et la reconnaissance du fait qu’on a affaire ici à des triangles semblables ; une première incursion vers le théorème de Thalès, associant le nom du théorème, les triangles semblables et la proportionnalité ; la révision organisée autour d’une fiche de cette notion ; et une première résolution rapide de la question 2 où l’enseignant prend la main.

1) Résolution de la première question du tipi

Le professeur distribue l'énoncé du problème à résoudre pendant la séance, le projette au tableau et demande aux élèves d'en faire une lecture silencieuse. L'énoncé est ensuite lu à haute voix par un élève ; l'enseignant donne quelques précisions sur le schéma.

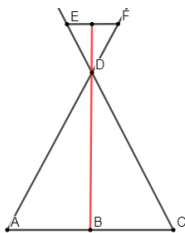
Les élèves cherchent seuls. Le professeur circule dans la classe puis commente ce qu'il voit sur les cahiers : il montre qu'en inclinant une baguette la hauteur change et indique que la figure en 3D n'est pas celle sur laquelle il faut raisonner. Il interroge un élève pour qu'il trace la hauteur sur le schéma en 3D puis avec Geogebra incline la figure projetée (aide) pour qu'elle montre un triangle sur lequel les élèves peuvent voir et dessiner au tableau ce qu'ils cherchent (hauteur et centre du cercle).

Et commente :

« Je peux me mettre dans une situation plus favorable. Est-ce que vous sentez que je suis en train de vous faire basculer dans autre chose qu'un dessin ? »

« Ça c'est une opération qu'on vous fait rarement faire c'est passer d'un truc réel, vous allez chercher vous aller filtrer ce qui est réellement nécessaire à cet exercice. C'est ce travail qu'on appelle modélisation, passer d'une situation un peu réelle à une situation qui est entièrement mathématique. »

Les élèves cherchent la hauteur seuls puis l'un d'eux propose de mettre des lettres sur la figure ce qui est fait.



On constate que ce calcul numérique (algébrique) de longueurs est déjà difficile

Pour calculer la hauteur DB, les élèves ont d'abord à calculer la longueur DC. Pour cela ils doivent effectuer le calcul $9 - 1,5$ compte tenu des données de l'énoncé. En observant leur travail l'enseignant remarque un « blocage » de nombreux élèves : *« Il y a une longueur que vous cherchez tous à obtenir. »*

Il trace un segment au tableau sur lequel il indique les points : *« Voici D, voici C, voici E. Comment trouver DC ? ... Je vais prendre EC en entier auquel je retranche ED. EC vaut $9 - 1,5$; DC fait ? »* les élèves répondent ensemble *« 7,5 »*.

Une élève demande même au professeur de valider son raisonnement alors qu'elle a effectué le même calcul. On constate donc qu'ici rien de va de soi ! Il n'y a pas ici de proximité possible puisque les élèves n'ont rien proposé. Le professeur rappelle donc comment calculer la longueur d'un segment lorsque les points en jeu sont alignés.

Une élève passe ensuite au tableau et écrit la correction du calcul de DB, la hauteur du tipi. Le professeur commente : *« Le théorème de Pythagore est caché quelque part dans DBC rectangle en B. »* Il insiste sur les pièges qu'il fallait éviter : les élèves ne pouvaient pas utiliser directement les 9 m de l'énoncé ; ils devaient soustraire pour obtenir $DB^2 = DC^2 - BC^2$.

Un élève pose encore la question du signe – (!), et l'enseignant réexplique, en reprenant la distinction hypoténuse (plus grand côté) et côtés de l'angle droit.

2) La deuxième question du tipi : Pythagore n'est pas la réponse à tout

Après lecture à voix haute de la deuxième question, les élèves cherchent seuls pendant 7 minutes ; le professeur observe leurs productions individuelles. Il précise la forme de la plateforme (disque) et montre sur la figure utilisée qu'on cherche EF.

Un élève propose d'utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle EDF.

Mais l'utilisation de ce théorème « ne marche pas » pour cette question, et l'enseignant la réfute en montrant que le triangle en jeu n'est pas rectangle ce qui correspond à un but poursuivi par lui (comme il l'a expliqué dans un mail, annexe 5) : faire changer les élèves de théorème pour calculer des longueurs dans des situations variées... (et utiliser le théorème de Thalès).

P : « Vous réinventez Pythagore dans DEF mais la question, où est le triangle rectangle ? Est-ce que j'ai un angle droit ? Je réponds non » (occasion de proximité manquée ?). Le professeur dit alors que s'il était rectangle le triangle DAC le serait aussi (occasion de proximité manquée ?). J'ai les moyens de savoir si ce triangle est rectangle ou pas (aide)

E : Pythagore

P : la réciproque de Pythagore (aide).

Un élève dicte le calcul correct à faire.

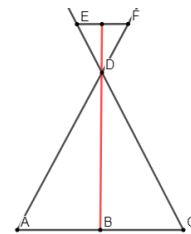
Soulignons la stratégie de l'enseignant à ce sujet : ici, une anticipation, qui aurait pu être limitée à un discours²¹, est remplacée par une proximité ascendante qui suit une activité effective sur une tâche adéquate. Ainsi, au lieu simplement mettre en garde les élèves sur le fait « *Pythagore n'a pas réponse à tout* » (1), l'enseignant a d'abord proposé une activité (la question 2 du tipi) dont il pense qu'elle peut provoquer des propositions erronées. C'est bien le cas et c'est seulement après avoir montré l'inefficacité de Pythagore ici qu'il produit la proximité ascendante correspondante.

3) Révision sur les triangles semblables et la proportionnalité

Dans les 7 minutes suivantes, le professeur profite de la réponse d'un élève « *deux droites semblables* » pour reprendre la notion de triangles semblables. Il s'appuie sur une fiche projetée et qu'il va distribuer aux élèves.

Le professeur installe d'abord une discussion avec la classe en deux temps. Ce qui nous semble à noter dans cette discussion c'est que tout ce que dit le professeur a d'abord été proposé plus ou moins bien par un élève (cité). Les proximités horizontales correspondantes, souvent limitées à une reprise complétée des mots des élèves, sont ensuite réunies dans un point-bilan intermédiaire, ascendant.

a) Premier temps : on associe le mot Thalès et le mot triangles semblables



²¹ Comme dans la vidéo étudiée ensuite.

Tout d'abord un élève évoque Thalès : « *On prend Thalès* » sans en dire plus et le professeur rebondit :

P : C'est quoi Thalès ? (proximité horizontale associée à une question sur le savoir en jeu)(2)

E : C'est pour savoir si deux droites sont semblables ou non

P : Deux droites sont semblables, non.

E' : C'est pour quand y a deux triangles semblables.

P : Deux triangles semblables alors c'est quoi deux triangles semblables ? (proximité horizontale associée à une question sur le savoir en jeu) (3).

E'' : Alors pour moi si c'est semblables, alors EFD c'est un gros zoom de ADC.

P : Dit avec ses mots à elle.

On peut ici identifier plusieurs interprétations du début de l'échange : ou bien le mot Thalès a été prononcé à bon escient par l'élève, qui a reconnu une connaissance déjà rencontrée, mais sans doute vague. Ou bien l'élève a prononcé un peu au hasard ce mot (ou par un effet de contrat) et nous avons affaire à un effet Jourdain, l'enseignant lui accordant une valeur qu'il n'a pas. Nous ne savons pas si c'est le même élève que celui qui a soufflé « Thalès » qui répond à la première question de l'enseignant, la réponse, qui prouve que le mot n'a pas été dit au hasard, nous amène cependant à constater que si effet Jourdain il y a, ce n'est sans doute pas pour tous. Il y a là des questions à se poser, notamment sur les différences entre élèves.

Les élèves continuent à énumérer diverses représentations qu'ils ont des triangles semblables, justes ou fausses, dont les angles égaux, et leurs réponses sont simplement répétées par l'enseignant et évaluées « *ça me plaît, ça me plaît pas ...* ». En conclusion provisoire il reprend :

Point-bilan (proximité descendante sur le savoir en jeu) (4) : « *Que vous compreniez que Pythagore n'est pas votre seule arme ... Je trouve la hauteur avec Pythagore, par contre pour trouver la longueur EF, Pythagore ça ne fonctionne pas. On passe par ce qu'on appelle le théorème de Thalès. Vous l'avez déjà entendu. Vous avez déjà travaillé l'année dernière les triangles semblables et ce qui en ressort aujourd'hui, c'est pas trop mal. Les triangles semblables et c'est là où vous allez un peu observer.* »

b) Deuxième temps : on associe le mot triangles semblables et le mot proportionnalité

Un élève prononce le mot « *proportionnel* ». Une autre indique de manière assez confuse mais juste la manière de commencer à traiter le tableau de proportionnalité.

Le professeur reprend :

« *Dans cette discussion, elle vous a dit comment faire mais c'est le mot qui est important. Il a été dit par A.* »

Plusieurs élèves proposent « *proportionnels.* »

Le professeur poursuit : « *La proportionnalité. Vous devez faire le lien ...* » (proximité horizontale) (5).

Tout est en place pour la suite !

4) Le travail sur la fiche « Triangles semblables »

Ce qui précède donne l'occasion au professeur de projeter ensuite, et de commenter au fur et à mesure, une fiche récapitulative sur la notion de triangles semblables ; elle sera distribuée aux

élèves. L'enseignant organise le rappel sur les triangles semblables à partir de cette fiche : définition (angles égaux) et caractérisation (proportionnalité des côtés) ; cette dernière est précédée d'une nouvelle discussion avec la classe.

Triangles semblables

Description intuitive :

Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont la même forme.

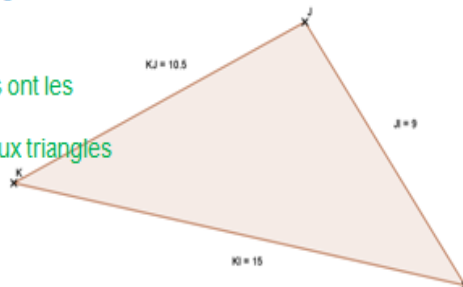
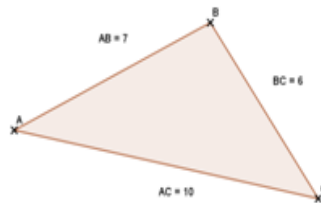
Traduction mathématique :

Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont les mêmes angles.

Conséquence et caractérisation :

Deux triangles qui sont semblables ont les côtés qui ont des longueurs proportionnelles.

Inversement, si deux triangles ont les côtés qui ont des longueurs proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.



a) La définition des triangles semblables est reprise.

L'enseignant montre la fiche

« Vous avez ici des triangles semblables »

« Ce qui est très très important, c'est qu'ils ont les mêmes angles » insiste-t-il (cela a été dit auparavant par des élèves - on peut évoquer une proximité descendante sur le savoir différée, car cela a été vu avant avec les élèves) (6).

Il code les angles sur la fiche projetée sans cependant donner de moyens de repérer les homologues sauf perceptivement.

b) L'introduction de la proportionnalité des longueurs

Un élève parle des longueurs. Le professeur interroge la classe jusqu'à ce que le mot « *proportionnel* » soit prononcé par l'un d'eux après sa question sur ce qui est important : « *le mot c'est quoi ?* »

L'enseignant reprend l'idée de proportionnalité et la commente en insistant sur la difficulté du passage des angles aux longueurs (non démontré).

Un autre élève parle de « *tableau* » et le professeur complète « *si on fait un tableau, il sera de proportionnalité* » (proximité descendante sur le savoir en jeu) (7).

Point-bilan (proximité à la fois descendante, sur le savoir – de l'égalité des angles à la proportionnalité - et ascendante, abordant le théorème à venir) (8) « *C'est un petit peu le*

théorème de Thalès ; c'est dire que si vous avez des triangles semblables, alors j'ai de la proportionnalité. C'est dire que si vous avez les mêmes angles alors vous aurez de la proportionnalité dans les longueurs. Ce lien là il est pas du tout simple. Et y a l'inverse. »

L'enseignant souligne ensuite que ce théorème permet de donner une caractérisation numérique d'une propriété géométrique comme le théorème de Pythagore (commentaire méta).

Au final, on voit bien que le professeur s'appuie ainsi le plus possible sur ce que disent les élèves, qu'il sollicite beaucoup, pour (faire) compléter ce qui est dit, puis il donne de la cohérence, remet ensemble ce qui a fusé de toutes parts avec ses points-bilans. En fait il attend le mot qui lui permettra de faire des proximités horizontales (un mot repris par lui et assorti d'une question par exemple) et descendantes (en référence au cours de quatrième) avant de généraliser dans des points-bilans descendants, voire aussi ascendant. Des commentaires méta nombreux émaillent l'ensemble, porteurs d'idées générales, voire de raisons d'être, notamment sur l'insuffisance du théorème de Pythagore pour certaines configurations et sur la nature du théorème de Thalès, entre géométrie et numérique. Le théorème de Thalès est évoqué, sans avoir été donné, comme si l'enseignant cherchait à familiariser les élèves avec le mot, en contexte. On retrouve ces caractéristiques tout au long des moments analogues du travail.

5) Bref retour à la question 2 du tipi : le temps presse (il reste 6 minutes !) ...

Un élève demandant pourquoi dans l'exercice du tipi les deux triangles ont des angles égaux, on reprend la deuxième question de l'exercice. L'enseignant insiste sur la nouvelle question qui se pose : comment démontrer que les triangles ont les mêmes angles. Il distribue la fiche (triangles semblables) puis il revient à la question 2 en annonçant : « *ce serait bien d'appliquer ceci à notre plateforme.* » Il refait la figure du tipi codée.

Il demande : « *où sont les triangles semblables ?* » un élève répond, il reprend : « *est-ce qu'ils ont les mêmes angles ?* ». Il donne rapidement une correction, on conçoit que le temps presse, d'autant que c'est la dernière séance avant les vacances de Noël ! C'est lui qui rappelle que les triangles sont isocèles et parle des « ingrédients » nécessaires à la démonstration, en questionnant très rapidement les élèves sur l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle et sur la somme des angles d'un triangle (égale à 180°). Il s'appuie sur le fait que les angles opposés par le sommet sont égaux (sans le justifier).

Il conclut :

Point-bilan « Et donc j'ai deux triangles qui ont leurs angles égaux, et donc ils sont semblables et on va utiliser de la proportionnalité pour trouver EF ».

Le décor est posé, même si, sans doute à cause de la pression du temps, l'enseignant a moins associé les élèves que d'habitude - et d'ailleurs il reprendra tout ! On peut évoquer le principe de clôture (cf. Roditi, 2015), respecté par les enseignants, qui ne laissent pas partir les élèves sur quelque chose d'inachevé.

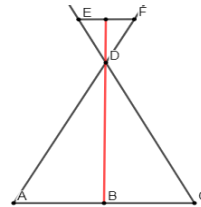
II Analyse de la séance 2 : des triangles semblables au théorème de Thalès – la question 2 du tipi, la conjecture et le début du cours, l'exercice d'application immédiate

Nous avons distingué quatre étapes dans ce cours (de plus d'une heure et demie) : la reprise de la question 2 vue très rapidement à la fin de la séance précédente – sachant que les vacances de

Noel ont eu lieu entre les deux séances ; la recherche d'une conjecture préparant le théorème en mettant l'accent sur le parallélisme de deux des droites ; l'exposition du cours (avec l'aide d'une fiche projetée) ; la recherche d'un exercice d'application immédiate.

1) Reprise de la question 2 du tipi : travail sur les triangles semblables (démonstration)

L'enseignant, en rappelant l'objet de la question à résoudre, valide le mot Thalès et insiste sur la similitude des triangles EDF et ADC (sans utiliser le mot similitude bien entendu).



a) Les deux triangles sont semblables car ils ont les mêmes angles (démonstration reprise)

Le professeur amène les élèves dans un jeu de questions/réponses à rappeler la définition des triangles semblables : « *Qu'est-ce que c'est que des triangles semblables ?* » (Question portant une proximité descendante) (9)

Les élèves apportent plusieurs réponses, reprises par l'enseignant : ils ont les mêmes angles, la même forme. Le mot proportionnel est prononcé. Le professeur insiste : « *Il y a de la proportionnalité* ».

Il redémontre l'égalité des angles des deux triangles en jeu, comme avant les vacances, en interrogeant cette fois-ci les élèves sur chaque étape (triangles isocèles, somme des angles). Des élèves répondent correctement. Il détaille cependant l'utilisation algébrique de l'égalité de la somme des angles à 180° , en rappelant l'égalité des angles opposés par le sommet. Et il commente : « *Là c'est un raisonnement mathématique* » (méta) et dégage à nouveau ce qui a servi : les triangles sont isocèles et la somme des angles d'un triangle est égale à 180° . Il termine : « *conclusion : les deux triangles sont semblables* » et va les écrire effectivement avec les lettres convenables.

Il commente encore : « *Les triangles sont semblables, c'est ça la clé ; alors la figure doit être faite, au moins un schéma. En géométrie, c'est la première étape. On a besoin de raisonner sur quelque chose, sur un schéma qui porte une figure.* ». Et il ajoute que ce qui est difficile à démontrer c'est l'égalité des angles, redonnant encore deux fois ce qu'il appelle les ingrédients utilisés (triangles isocèles et somme des angles).

Il revient enfin sur l'intervention antérieure d'un élève qui a parlé de deux angles « *opposables* » et en profite pour faire un bref rappel sur le vocabulaire concernant les angles : alternes internes, correspondants, opposés par le sommet. (Rappel porteur d'une proximité descendante, au moins pour certains élèves) (10).

b) Fin de la question 2- Travail sur la proportionnalité.

Dans cet épisode il y a un travail simultané de l'enseignant qui écrit au tableau et des élèves à leur place.

Il revient au calcul de EF : « *en quoi tout ce qu'on vient de faire va m'aider à calculer EF ?* »

Un élève demande si on peut utiliser le théorème de Thalès et l'enseignant rappelle qu'on ne l'a pas encore – il est « *caché derrière* » ...

Un autre élève suggère de faire un tableau (de proportionnalité) et l'enseignant acquiesce « *voilà c'est ton truc de tout à l'heure* ». L'enseignant écrit au tableau en même temps qu'il questionne les élèves : « *on est en train de dire que AC il est proportionnel à qui ?* »

Les élèves : à EF...

P. *On a donc de la proportionnalité. On a donc un tableau de proportionnalité* (proximité horizontale sur le vocabulaire adapté) (11).

Il dessine ce qui sera le tableau de proportionnalité des mesures des côtés sur son tableau blanc en disant comment il le remplit au fur et à mesure, en s'appuyant toujours sur un jeu de questions réponses avec les élèves. Il note les 3 côtés du triangle EFD (EF, FD, ED) dans la première ligne puis écrit dans la deuxième ligne ACD. Il s'arrête et remarque : « *Là où c'est un peu compliqué, ou du moins il y a un piège c'est la correspondance des côtés* ».

Deux propositions d'élèves sont faites, une de mettre ensemble les plus grands, moyens et plus petits côtés et l'autre de regarder l'alignement. Il ne réfute pas mais propose autre chose :

« *Je vais essayer de vous donner un ordre. Il va y avoir correspondance entre 1,5 et 7,5. On voit bien que le 12 va avec EF. Ensuite, il faut imaginer que le petit triangle, je le prends, je le tourne et je l'agrandis du coup, (le professeur mime) ED va avec ?* (plusieurs élèves répondent DC) *Oui je suis en train de vous faire le théorème de Thalès. Ça fait partie de Thalès en revanche formulé, dit, un peu différemment, mais c'est le cœur de Thalès.* »

Il continue en introduisant les mesures connues dans le tableau.

EFD	EF	FD (1,5)	ED (1,5)
ACD	AC (12)	AD (7,5)	CD (7,5)

Un élément de stratégie mérite d'être souligné ici : la présentation en contexte, avant même d'avoir écrit le théorème, d'une des difficultés signalées dans le relief, à savoir la détermination des côtés correspondants. On peut de ce fait évoquer une proximité ascendante (12), au moins pour certains élèves, dans la mesure où ils sont en train de chercher à construire le tableau en même temps que l'enseignant le remplit. C'est l'activité en cours qui est en jeu, l'enseignant formule la correspondance) respecter (à « voir ») et précise ainsi la procédure utilisée.

De même pour le calcul de EF, l'enseignant rappelle globalement, par ce qui peut être pour certains une proximité descendante en réponse à leur travail (associée à la deuxième difficulté de cette tâche, signalée dans le relief) :

Point-bilan (avec une proximité descendante) sur les activités (le traitement à faire) (13) « *On fait ce qu'on veut : on trouve un coefficient, on fait une quatrième proportionnelle, la linéarité s'il y en a. On est dans un tableau de proportionnalité, on est dans un tableau de nombres et on sait opérer sur ce tableau de nombres.* »

L'enseignant suggère de faire une quatrième proportionnelle et pour aider un élève interrogé oralement (à sa place), il écrit le calcul à effectuer. Il insiste sur le fait que c'est un calcul à savoir faire. On trouve 2,4.

Il ajoute en réponse à des remarques d'élèves « *oui, c'est 5 fois plus petit ; entre 1,5 et 7,5 rapport de 5 ; 5 fois 1,5 ça fait 7,5 ; le mot fort à retenir c'est triangles semblables* ».

Un dernier moment de rappel de cours termine cette partie : décontextualisant ce qui vient d'être fait, l'enseignant reprojette la fiche sur triangles semblables donnée la fois précédente et reprend la propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles semblables. Il explique que cette propriété est toutefois très difficile à démontrer et qu'on leur demande de l'admettre.

2) La conjecture - L'introduction du parallélisme

La conjecture

(GeoGebra)

Comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites ?

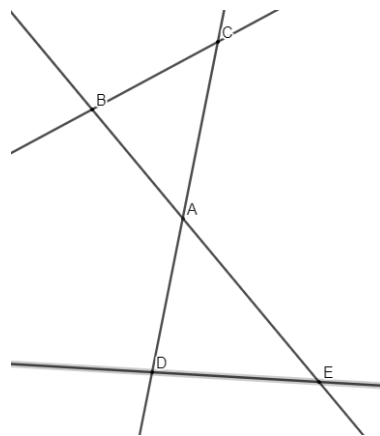
C'est un petit problème qui va mettre les élèves au cœur de la problématique (commentaire méta) : il dit « *Avant de passer à la forme aboutie parce que là on est dans une forme émergente de Thalès, je vais vous poser une question. C'est un Thalès bébé, pas encore abouti, je vous pose une seule question et vous allez y réfléchir : comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites... avec une règle... en faisant quatre traits... Je veux le voir.* »

Après un bref échange sur la différence entre triangles identiques et semblables les élèves cherchent d'abord seuls pendant 6 minutes. Le professeur reprend la main en projetant au tableau la figure (il a choisi le type papillon) sur Geogebra et en l'animant.

De fait l'enseignant dissymétrise le problème, le réduit, en fixant deux droites sécantes et en faisant bouger les positions relatives des deux autres droites qui coupent les premières. Les élèves ont à repérer les triangles et à reconnaître s'ils sont semblables ou non. Notons que le travail sur l'exercice du tipi a pu les préparer à être réceptif à une figure de ce type. En réalité l'enseignant suppose, mais sans le dire, que les deux couples de côtés homologues des triangles semblables cherchés qui sont portés par les droites sécantes, sont chacun sur la même droite – ainsi [AB] est associé à [AE] et [AC] à [AD]. Cela apparaît au bout de 15'' au tableau avec la projection des trois longueurs des côtés de chaque triangle l'une sous l'autre (M.J. Perrin nous a détaillé l'autre cas, où les triangles sont semblables sans cette condition).

AB 3,26 AC ... BC ...

AE 3,55 AD ... DE ...



A partir des calculs de rapports de longueurs faits et affichés dans Geogebra, l'enseignant va jouer sur l'association de la proportionnalité des côtés, caractérisant les triangles semblables, et

le parallélisme apparent des droites variables. C'est l'occasion de s'appuyer sur les lectures que les élèves font de ce qu'ils voient, ce qui entraîne la participation de nombreux élèves. Un premier échange aboutit à l'émergence du mot attendu (cf. annexe 5) sur l'origine de cette réponse, dont on ne peut pas être sûr) :

P : *Pourquoi ils sont pas semblables ?*

E : *Parce qu'elles ne sont pas parallèles.* »

Le professeur incite alors les élèves à regarder sur Geogebra le tableau préconstruit des longueurs des côtés homologues des triangles déterminés par les quatre droites, ainsi que le calcul du quotient des deux nombres de chaque colonne, qu'il a fait afficher :

« *Vous voyez les longueurs là ... Ce que je regarde maintenant, je regarde le coefficient de chaque colonne... Qu'est-ce que vous pouvez dire de toutes ces valeurs ?*

E : *Je peux conclure que ce n'est pas semblable car le coefficient de proportionnalité n'est pas le même partout.*

P : *Ce n'est pas semblable parce qu'il n'y a pas la proportionnalité, le coefficient n'est pas le même (proximité horizontale et descendante sur le savoir en jeu) (14). Et maintenant je prends ton idée de parallélisme (il fait bouger la figure) et j'essaie de faire des droites.*

E : *parallèles*

P : *Parallèles. Qu'est-ce qui se passe ?* »

Un certain nombre d'élèves répondent correctement et le professeur reprend : « *En fait quand j'ai du parallélisme, ça donne le même coefficient.* » (Proximité horizontale) (15).

Un élève résume : « *Quand on a des droites parallèles, les triangles sont semblables* »

Le professeur conclut, en regroupant les étapes, et avec les élèves : « *Quand j'ai deux droites qui se croisent et que je vais tracer deux parallèles (il mime), j'aurai automatiquement des triangles (E. semblables) semblables et c'est lui le théorème de Thalès* ». (Proximité ascendante sur la configuration en jeu dans le théorème) (16).

Cette animation sur Geogebra a permis de faire visualiser le fait que les triangles ont des côtés proportionnels en même temps que les droites semblent parallèles.

Le travail sur la « conjecture » introduit ainsi ce qui manquait encore – le parallélisme. Et c'est Geogebra qui sert pour emporter la conviction de l'association droites parallèles, triangles semblables...

Il répète, en concluant à nouveau « *voici le théorème de Thalès* », avant de faire le même travail sur Geogebra sur l'autre configuration de Thalès (triangles de même sens), en faisant mettre en évidence les deux triangles en jeu, ce qui s'avère nécessaire pour certains qui ne les voient pas tout de suite.

Une remarque sur la stratégie : là encore on voit que ce qui aurait pu être réduit à une anticipation seulement verbale (la différence entre les deux types de configuration avec la reconnaissance des deux triangles dans chaque cas) est réalisée effectivement et commentée (l'enseignant rappelle même ce qu'il avait fait sur le tipi pour établir la correspondance des côtés). On retrouve l'attention portée à une difficulté éventuelle signalée dans le relief.

On peut noter que l'utilisation par les élèves du mot « coefficient de proportionnalité » lorsque le tableau n'est pas de proportionnalité n'est pas correcte (l'enseignant parle de coefficient), mais on conçoit que pour ne pas rompre l'engagement dans ce travail l'enseignant laisse filer.

On peut aussi remarquer que l'enseignant réduit pour l'instant le théorème à une version géométrique, tout en ayant utilisé la proportionnalité des longueurs (lue) pour y arriver.

Un moment de cours suit avec une démonstration adaptée de ce qui précède : l'enseignant démontre dans le cas de la deuxième configuration que si les droites sont parallèles les angles des deux triangles sont égaux (un angle commun et deux angles alternes-internes égaux). Il évoque l'intervention précédente d'un élève à ce sujet et reprend encore une fois : « *donc la clef c'est deux sécantes coupées par deux parallèles ça me donnera deux triangles semblables* ».

3) Le cours et le travail sur la fiche « Le théorème de Thalès » (transcription en annexe 4)

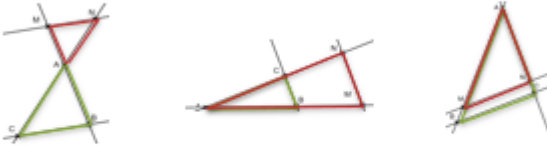
Cette fois-ci tout est en place ! L'enseignant projette au tableau, en plusieurs temps, la fiche « théorème de Thalès » qu'il commente ligne à ligne, les élèves ayant pris leur cahier de cours. Ce moment reste très interactif, l'enseignant avance pas à pas.

Notons que les différentes configurations sont dans un ordre et une position inhabituels (pour la deuxième figure), le papillon rappelant cependant l'exercice du tipi.

- a) Premier temps : la présentation de l'énoncé du théorème s'appuyant sur ce qui a été fait

Le théorème de Thalès
(Cahier de Leçon)

1) Théorème de Thalès – La configuration



Si

- Les droites (MB) et (NC) sont **sécantes en A**
- Les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**

Alors
Les triangles ABC et AMN sont semblables.

Rappel : Deux triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles.

On travaille d'abord sur les figures (cf. relief), avec des tracés refaits au tableau et sur les figures données aux élèves.

P : Mes conseils d'abord : Thalès ça parle d'abord à votre œil. On doit le voir. Ça apparait sur un schéma, ... sur une figure. Il faut voir les parallèles, il faut voir les sécantes.

Un premier repérage, celui des parallèles, est fait effectivement par les élèves et repris par l'enseignant sur les trois figures projetées, avec des couleurs pour distinguer les couples de droites parallèles dans chaque cas.

Le professeur insiste en référence à la conjecture : « *J'ai toujours deux parallèles.* »

Certains élèves néanmoins disent qu'ils ne voient pas les deux triangles. L'enseignant les montre encore une fois pour les trois cas de figure, les élèves semblent enfin convaincus (deuxième repérage).

Le troisième repérage est alors fait de la même façon (accompagné d'une petite mise au point de vocabulaire, sur le mot mathématique sécante)

P. Le deuxième ingrédient c'est les droites ... qui se croisent...

Point-bilan (commentaire méta avec proximité ascendante sur l'activité de reconnaissance en jeu) (17) : *il n'y a pas besoin de longueurs... Il faut que votre œil remarque systématiquement ces configurations. Je parle de configuration, c'est-à-dire, c'est un modèle géométrique, deux droites qui se coupent, deux droites parallèles... Et quand vous vous trouvez face à ce genre de figure, votre cerveau doit dire : ah il y a peut-être Thalès dans le jeu ...*

Ensuite l'enseignant reprend le lien avec les triangles semblables (cf. conjecture).

« Alors le théorème dit, le théorème de Thalès dira, que si j'ai des sécantes et des parallèles, alors quoi ? E....(répondent)

Alors j'aurai 2 triangles semblables. Maintenant je le dis avec les lettres de la figure » (il cite les noms des droites). Et il continue : *La démonstration je l'ai faite tout à l'heure rapidement avec l'idée de N. et les angles correspondants... C'est ça le théorème de Thalès.*

L'enseignant aborde ensuite la proportionnalité, qui découle de ce qui précède

P. Et par contre Thalès, on l'utilise comment, c'est qu'on exploite ce que veut dire semblable » (proximité ascendante sur l'activité à mener, la méthode à suivre). *C'est un truc très très fort. OK, ça veut dire qu'il y a les mêmes angles mais ça veut surtout dire qu'il y a quoi ? Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ?* (proximité descendante en termes d'activité) (18).

E : la proportionnalité

P : de la proportionnalité et c'est ça qui est très fort dans Thalès, c'est qu'on va utiliser cette proportionnalité (proximité ascendante sur l'activité) (19).

Il lit la fiche et ajoute : « *Thalès c'est exploiter cette proportionnalité pour déterminer les longueurs* (proximité ascendante). *Thalès c'est d'abord un coup d'œil, on voit les parallèles, les sécantes* » (reprise d'un commentaire méta sur l'activité de reconnaissance).

Point-bilan (reprise méta) : L'enseignant précise que si le théorème de Pythagore fait un lien entre un angle droit, un triangle rectangle, des droites perpendiculaires et une égalité numérique(aires) « *Thalès c'est quelque chose d'aussi fort. Il va lier la proportionnalité qui vit dans un monde de tableaux et dans un monde de nombres à des droites parallèles et des droites sécantes, en géométrie ; voilà pourquoi ces deux théorèmes sont si importants. Ils ont clairement établi des liens entre des propriétés géométriques et des opérations numériques. Maintenant le cœur de Thalès ça va être d'exploiter la proportionnalité... C'est vraiment l'ingrédient clef, notamment la quatrième proportionnelle qu'on a revu tout à l'heure ensemble* » (proximité ascendante sur une activité de traitement) (20).

b) Deuxième temps : exploitation du tableau et mises en garde

P. « il y a plusieurs moyens d'exploiter la proportionnalité... il y a une rédaction évolutive.... Tout à l'heure vous m'avez dit le triangle il est zoomé... ça s'appelle agrandissement ou réduction ; il y a une autre façon, ce serait de faire un tableau de proportionnalité et puis une façon experte ce serait en utilisant des fractions... qui sera utilisée au lycée » (proximité horizontale sur le vocabulaire) (21).

Il projette la deuxième partie de la fiche et reprend : « *On peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix, ce que je recommande. Comme tout à l'heure (proximité descendante sur un activité de traitement)* » (22).

Remarque : Il y a plusieurs façons d'exploiter la proportionnalité...

- On peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix (recommandé)

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle AMN	AM	AN	MN

- Utiliser le coefficient de proportionnalité et parler d'agrandissement ou de réduction (parfois utile)
- ou encore écrire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (mode expert)

Il revient cependant d'abord sur la construction même du tableau, en commentant : « *je fais une correspondance sans me tromper...* » (anticipation).

Il enlève alors le tableau projeté et le fait remplir aux élèves, garantissant ainsi l'association rapide d'une activité réelle et de sa mise en garde.

Il renchérit : « *Le piège de Thalès il est là. Souvent on fait une erreur sur la correspondance des côtés* ».

Il illustre cette correspondance sur les différentes configurations de la fiche, en particulier pour les côtés non parallèles : « *il faut rester dans l'alignement* ». Il énumère les côtés à associer de chaque configuration, puis reprojette le tableau rempli, en reliant le tableau reprojété et les petit et grand triangles pour les deux configurations où cela se pose.

Il reprend et commente la fin de la fiche.

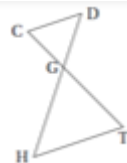
Point-bilan sur l'écriture du théorème (cours) « *c'est une première façon d'utiliser Thalès, c'est je fais un tableau de proportionnalité. La deuxième façon c'est d'utiliser le coefficient de proportionnalité, parler d'agrandissement réduction (il cite les calculs de l'élève qui avait suggéré cette méthode pour un exercice précédent) ... Et la dernière façon c'est le mode expert et je vous attends pour commenter. Là j'ai des fractions. J'aimerais que vous réfléchissiez, ça veut dire quoi ce truc (il montre l'égalité des trois rapports de longueurs)* ».

Suite à une question d'élève, l'enseignant reprend la correspondance entre coefficient et rapport d'agrandissement. Les élèves finissent de recopier en-complétant la fiche... et ceux qui ont fini sont invités à reprendre la question 3 du tipi.

Intermède méta : le professeur distingue les deux parties du travail à faire pour résoudre un exercice de mathématiques, « savoir-faire et savoir écrire » ... Il annonce qu'ils vont s'entraîner d'abord à savoir faire.

4) Un premier exercice d'application immédiate : c'est encore laborieux !

Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.
 $GD = 25$ mm, $GH = 45$ mm, $CG = 20$ mm et $HT = 27$ mm.
 Calculer CD et GT .



Il s'agit de laisser travailler les élèves en les accompagnant. L'épisode dure longtemps (13'30) et s'avère très nécessaire, ce que nous voudrions illustrer ici. Application immédiate sans doute, mais pas du tout facile pour les élèves ! Tout se passe comme si c'était seulement maintenant

que les élèves se confrontent à la situation, essaient de la comprendre parce qu'ils doivent l'appliquer, ce qui amène l'enseignant, qui visiblement s'y attend, à tout redire et même plusieurs fois. Il joue sur de nombreux allers/retours entre des rappels et ce que font les élèves : entre aides procédurales, pour engager les élèves dans l'activité et proximités pour en tirer parti !

a) On pose le problème

Il s'agit de faire une application de ce qui précède en vue de construire le tableau de proportionnalité – c'est là que se place l'incident du rapporteur sur lequel nous reviendrons.

L'enseignant trace au tableau la figure de l'exemple qu'il propose aux élèves, marque les hypothèses.

Il annonce d'emblée qu'il s'agit bien d'appliquer Thalès : on n'est pas encore dans la reconnaissance du théorème mais dans l'apprentissage de son utilisation.

« Je vous mets au défi, je vous dis que (CD) est parallèle à (HT), [...] J'ai deux droites parallèles, clairement j'ai deux droites sécantes, je vous mets dans des conditions claires de Thalès, je vous demande de déterminer les nombres qui manquent en utilisant un tableau de proportionnalité de préférence. Je vous demande de savoir faire. On rédigera ensuite [...] Mais dans un premier temps, êtes-vous capables de me donner les longueurs ? ... »

Les élèves cherchent un peu seuls. Puis l'enseignant intervient *« C'est quoi l'ingrédient clef ? le but c'est de déterminer GT et CG... »*

Il reprend rapidement :

Vous écoutez, tous. Je vous mets en situation de Thalès, dans une configuration de Thalès et je vous la donne, j'ai des parallèles et j'ai des sécantes (il la décrit et rectifie l'erreur d'un élève qui pensait à partir de la figure qu'un des triangles était isocèle)... Il y a là un début d'aide procédurale²².

Devant le silence de la classe l'enseignant ajoute : *« Quel est l'outil mathématique que l'on va utiliser ? »*. Là encore l'enseignant guide la réflexion (aide).

Un élève propose le rapporteur (Peut-être en référence aux rapports évoqués auparavant ?)

« Le rapporteur. C'est un instrument... »

L'enseignant répète sa question. Un autre élève répond correctement. Le professeur redit *« L'outil mathématique sera la proportionnalité. »*

Il revient ensuite sur le rapporteur (voir en partie 3, 3 c)) et rappelle l'incertitude des mesures avec un tel instrument²³... (aide seulement à confirmer un résultat).

Ouf ! Les élèves démarrent ! Puis le professeur circule et s'adresse individuellement aux élèves sur leur travail.

b) La construction du tableau de proportionnalité

L'enseignant doit reprendre le tableau de proportionnalité de la fiche du cours dans le cas des triangles emboîtés pour un élève mais rapidement il se met au tableau et s'adresse en fait à tous.

²² Aide sur ce qu'il faut faire.

²³ Soupçon qui n'a pas été exprimé à propos des mesures de longueurs sur Geogebra...

« *AB devient AM, je prends, je tire... AC devient AN... BC, MN. Ça te donne ce tableau et lui il est proportionnel.* »

Il montre alors la configuration papillon et indique qu'il faut se placer, « *dans ce cas-là et avec ces lettres-là* ».

Il remontre encore une fois comment on peut mettre un triangle sur l'autre dans le cas papillon (proximité descendante – ou aide procédurale selon les élèves).

Point-bilan 1 sur la « morale » de l'histoire, l'objectif et la construction du tableau (après 10 minutes de travail) *Je veux votre attention, là je l'exige. Je vous demande de bien comprendre que Thalès c'est exploiter de la proportionnalité grâce à du parallélisme... (il le redit) (proximité descendante sur le savoir en jeu) (23). Dès que j'ai des droites sécantes et des parallèles j'obtiendrai de la proportionnalité je fais un tableau et j'arriverai comme on va le voir à déterminer les mesures qui manquent. Ça permet de calculer des longueurs sans avoir à tracer la figure ni à mesurer. C'est extrêmement puissant. Je vais pouvoir dire ce côté-là mesure tant. Et j'en suis certain, j'ai pas besoin je vous fais une prédiction qui est sûre à 100%. C'est là la puissance de Thalès. Je vais prédire des longueurs par le calcul.*

On continue sur le travail sur le tableau et l'enseignant en profite pour revenir au mode expert *Alors on va utiliser des tableaux de proportionnalité et là j'entends une question que j'attendais : mode expert ça veut dire quoi ce truc ? ... Pourquoi est-ce que c'est normal de pouvoir écrire AM divisé par AB est égal à AN divisé par AC est égal à MN divisé par BC ? ça veut dire quoi ce truc ? Redis-le.*

L'élève explique que c'est comme si dans le tableau on avait effacé des lignes. Le professeur acquiesce « *Oui, c'est comme si j'avais effacé des trucs.* »

Un autre élève est repris : « *Quand vous dites ils sont tous égaux, c'est qui le ils ?* »

E. des angles, des longueurs, ... E. des parallèles

Point-bilan 2 : encore sur la proportionnalité et l'utilisation à prévoir : ... *Méfiez-vous la proportionnalité veut dire qu'il y a un coefficient que je peux déterminer. ...*

La proportionnalité veut dire qu'il y a un coefficient que je peux déterminer de trois façons différentes ... Parce que c'est proportionnel, chaque colonne (du tableau) a le même coefficient, vous vous rappelez de ça ? C'était le tableau de tout à l'heure (proximité descendante sur la propriété en jeu) (24). Il y avait trois nombres, je cherchais à ce qu'ils soient égaux. C'est eux, je cherche à ce que les trois nombres soient égaux (il les montre sur la fiche de cours projetée). Si les trois nombres sont égaux, ça veut dire que votre tableau est de proportionnalité (reprise de la proximité descendante sur la propriété en jeu) (25). Oui c'est bonne réponse parce que c'est proportionnel. Parce que c'est proportionnel les trois divisions vous renvoient trois fois la même chose (reprise de la proximité descendante sur l'activité de traitement reliée à la propriété en jeu) (26) ... Mais attention la vraie raison c'est parce que c'est un tableau de proportionnalité j'ai trois fois le même coefficient (reprise de la proximité descendante sur la propriété en jeu) (27).

Je préfère que vous utilisiez si vous n'êtes pas confortable un tableau tout en sachant qu'à un moment donné on n'écrit plus le tableau parce qu'on gagne du temps avec cette écriture-là qui veut dire la même chose : ça veut dire que les trois colonnes ont le même coefficient et après je remplacerai, je ferai le produit en croix mais cette écriture-là est un peu plus dure pour l'instant. »

Une élève pose alors une question que le professeur répète : « *Elle a dit, si j'utilise cette écriture là et que je remplace les valeurs et qu'il me manque une comment je fais pour la trouver ? C'est*

ce qu'on appelle la quatrième proportionnelle, t'as le droit encore mais on sera dans le champ des fractions. » (Aide procédurale)

Il y en a qui ont su faire, je vais envoyer quelqu'un au tableau qui saurait faire le tableau justement. »

c) Correction au tableau

Il envoie au tableau une élève qui a su faire. Elle prépare son tableau de proportionnalité et le remplit en silence pendant que les autres élèves travaillent seuls et que le professeur circule dans la classe intervenant individuellement auprès de certains sur le tableau à obtenir.

Après un point de discipline, il regarde ce que l'élève au tableau fait et la renvoie à sa place et commente de nouveau sur une des difficultés signalées dans le relief, la correspondance.

Point-bilan 3 encore sur l'obtention du tableau « *Le plus dur c'est faire ce tableau. Ce tableau-là, c'est la difficulté, la correspondance (proximité horizontale sur la difficulté de l'activité en jeu) (28). Après ça m'intéresse pas, parce que c'est fini ... le plus dur est fait. Maintenant c'est les calculs, maintenant je prends ma calculette et je donne des réponses mais pas avant. Et encore là on n'est pas dans la rédaction finale mais c'est déjà bien parti. Ecoutez bien. Vous devez absolument voir les deux triangles (proximité descendante sur l'activité de reconnaissance en jeu) (29). Quand c'est cette configuration là, ça va. Je vois un triangle qui s'appelle GCD ... peu importe si vous inversez, ... le petit peut être en bas, peu importe. Quand vous parlez d'un tableau de proportionnalité, vous pouvez parler la première ligne les kilos, la deuxième ligne les euros ou inversement, première ligne les euros, deuxième ligne les kilos. Là y a pas d'ordre (proximité descendante sur l'activité de traitement en jeu) (30). Ça commence par un triangle. Le deuxième triangle, il s'appelle HGT et là ça devient compliqué. J'écris mes trois côtés. Y a le côté GD, le côté CD et le côté GC. Pour pas vous tromper, celui-là c'est assez facile, il va avec HT (il montre les parallèles), celui-là il va avec qui ? (Plusieurs élèves donnent la réponse correcte) Ensuite je vous demande de respecter l'alignement, si vous plaît, je redis l'alignement (proximité descendante sur l'activité de traitement en jeu) (31) : GC va avec, je suis dans l'alignement (les élèves répondent) GD dans l'alignement va avec GH ... et vous avez votre tableau. En rouge elle remplace par les valeurs numériques que je donne et puis maintenant vas-y M. pour trouver CD. ...)*

Celle-résolution se fait laborieusement, lentement, avec des reprises descendantes nombreuses, comme si c'était seulement au moment où les élèves ont à le faire effectivement qu'une partie d'entre eux s'y met vraiment. Tout le début a sans doute servi à ce qu'ils puissent entrer dans la tâche, se l'approprier, mais un important travail reste à faire en contexte pour qu'ils investissent « en vrai » et appliquent les énoncés généraux qu'ils ont entendus et recopiés. L'enseignant ne laisse pas les élèves sécher trop longtemps et, s'il y a lieu, les débloque avec des aides procédurales qui seront transformées ultérieurement en proximités, une fois que les élèves se seront enfin engagés dans l'activité. De nombreuses répétitions sont nécessaires, y compris souvent méta, qui semblent d'autant plus efficaces qu'elles s'ancrent à la fois sur ce que les élèves cherchent et sur quelque chose qui vient d'un ou plusieurs d'entre eux - connaissances ou activités. En témoignent les points-bilans qui jouent ce rôle de reprise un peu distanciée, globalisant les échanges qui les précèdent.

Un dernier élément de stratégie : tout se passe comme si l'enseignant voulait retarder une certaine automatisation de l'utilisation de la formule, en faisant comprendre aux élèves d'où vient cette formule, et en leur donnant les moyens de la rétablir...

Il nous manque une partie de la suite où le professeur commence à reparler de la question 3 du tipi (film 22 presque vide). Dans la séance suivante (film 23), la question 3 est résolue et un nouvel exercice d'application est abordé.

Partie 3- Résultats

1) Retour sur le scénario : une prise en compte importante de ce que nous avons appelé relief

Dans les programmes actuels, rappelons-le, la notion peut apparaître comme réponse à un problème (RAP) sachant que la difficulté a été reportée en quatrième avec l'introduction des triangles semblables (et la proportionnalité des côtés), même si cela se limite pour le théorème à des configurations particulières.

Le scénario est très révélateur de la prise en compte de ce relief, que l'enseignant s'est « approprié » de fait, et de stratégies didactiques assumées (cf. annexe 5) avec la prise en compte de ce qui est nouveau, les acquis antérieurs des élèves et les difficultés prévisibles. Cela se traduit par le souci de s'appuyer sur ce que les élèves ont déjà vu pour introduire le théorème : ainsi on retrouve à la fois la mobilisation de connaissances des élèves de quatrième et des activités propres à aller vers du nouveau. Cela se produit à deux moments : pour réviser les triangles semblables grâce au travail sur le tipi, et ensuite grâce à une nouvelle tâche (la conjecture) permettant de mettre en jeu une future configuration de Thalès reposant sur la mise en relation parallélisme/triangles semblables particuliers. Dans les deux cas, l'enseignant peut s'appuyer effectivement pendant le travail en séance sur l'intervention d'élèves, qui proposent au moins les mots clefs attendus (souvent sans beaucoup plus il faut bien le dire).

Non seulement les mises en activité se font sur des tâches soigneusement pensées mais encore l'enseignant y introduit aussi de nombreuses étapes intermédiaires permettant chacune des appuis sur les élèves, grâce à des connaissances antérieures ou à des activités provoquées.

Il s'y ajoute, toujours en appui sur une tâche, une insistance sur les limites des situations relevant du seul théorème de Pythagore pour mettre en relation géométrique et numérico-algébrique, ce qui induit un intérêt pour le nouveau théorème.

A ce sujet ajoutons que l'enseignant a modifié un document diffusé pour permettre de faire prendre conscience aux élèves dans une activité du besoin d'un théorème autre que le théorème de Pythagore. Voici cet énoncé « restreint » : scénario pédagogique de l'académie de Caen (https://mathsciences.discip.ac-caen.fr/IMG/pdf/scenario_tipi.pdf)

Énoncé

L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est. Chaque perche en bois mesure 21 pieds et dépasse de 3 pieds. Le rayon du cercle tracé au sol mesure 7,5 pieds. Le grand chef indien veut coiffer le cercle formé par le haut des perches de son tipi d'un chapeau de plumes. Problématique : Quel doit être le diamètre de son chapeau ?



La première question a ainsi été ajoutée au problème de Caen par le professeur que nous avons filmé. Elle a pour objectif de faire utiliser par les élèves le théorème de Pythagore (déjà connu et révisé) qui sera alors ravivé dans leur tête. Du coup pour résoudre la seconde question, ils essaient de l'appliquer aussi. Le professeur leur démontre, preuve à l'appui que « *Pythagore n'est pas la réponse à tout* » et qu'ils ont donc besoin d'une autre connaissance. Cela donne ainsi à l'enseignant l'occasion de rebondir sur cet échec prévisible des élèves (de certains élèves) pour expliciter ce que le théorème en question ne permet pas de faire.

On pourrait simplement anticiper, en indiquant aux élèves que le théorème de Pythagore ne s'applique pas toujours, ou, comme c'est le cas ici, on peut s'appuyer sur une activité d'élève qui illustre cet échec pour donner ce commentaire (en produisant une proximité). C'est que permet l'ajout de la première question à la ressource. Autrement dit une certaine connaissance du relief, peut-être empirique, (ici difficulté des élèves de reconnaître quand ne pas appliquer le théorème de Pythagore) a permis d'anticiper d'une autre façon que par un simple discours, en choisissant une tâche à proposer donnant une occasion de proximité. Ce choix de tâche a pour objectif de motiver indirectement l'introduction du nouveau (le théorème de Thalès).

Le même type de stratégie a été noté pour le travail sur les deux configurations, qui est explicité complètement pour chacune.

Concernant la recherche de la correspondance des côtés homologues, qui est organisée pendant le cours, au moment de la présentation du tableau de proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles, l'enseignant annonce d'abord un piège mais fait très vite travailler les élèves à la correspondance (en enlevant même le tableau projeté pour que les élèves le refassent eux-mêmes).

Cependant restent à la charge de l'enseignant, et on ne voit pas comment faire autrement, l'organisation des rappels sur triangles semblables et l'institutionnalisation du théorème de Thalès qui nécessite de faire le lien entre géométrie et algébrique, avec cette introduction transitoire des triangles semblables à repérer.

Il faut souligner que ni les triangles semblables ni la proportionnalité ne figurent dans les énoncés finaux visés, habituels (cf annexe 0), ce qui n'empêche pas l'enseignant d'en faire des intermédiaires essentiels.

2) Côté gestion : un appui constant sur le travail des élèves, adapté à la classe et aux contraintes

Le souci de s'appuyer sur les activités des élèves sur les tâches proposées prend plusieurs formes.

Une remarque sur les masques portés par l'enseignant et par les élèves : nous n'avons pas pu apprécier les modifications apportées.

- a) Des appuis immédiats sur le travail des élèves à leur place ou pendant des échanges avec la classe qui suivent ce travail (quand c'est possible) – l'importance des mots

Souvent après une recherche individuelle, l'enseignant met en place un jeu de questions-réponses collectives, phases de questionnement et de "reprises" locales qui permettent d'introduire des proximités, locales, en rebondissant sur ce qu'a pu dire un élève au moins. L'enseignant garde même en mémoire des réponses d'élèves lui permettant un tel appui ultérieurement et peut reprendre ce qu'ils ont dit un moment après qu'ils ont parlé. Nous avons relevé notamment ainsi quelques proximités ascendantes, à partir de simples mots prononcés dans la classe reprises au vol. Nous avons noté une grande attention aux mots, y compris avec un possible travail de familiarisation (le nom du théorème de Thalès est cité plusieurs fois avant même d'en donner l'énoncé). De même nous avons relevé des proximités descendantes pendant ou juste après une recherche des élèves où ils doivent appliquer ce qui a été exposé en cours. Cependant à deux reprises, compte tenu de ce qui est attendu mais ne se passe pas dans la classe, l'enseignant a dû aider davantage les élèves, en citant plus précisément ce qui doit être utilisé (aides procédurales collectives).

De plus l'enseignant accorde une très grande attention au vocabulaire spécifique (droites qui se croisent, sécantes) même s'il ne se prive pas d'un langage courant, voire familier dans ses points méta. Il utilise ainsi souvent des mots inhabituels, comme le mot « ingrédient », qui signalent aux élèves toujours la même chose, ici la ou les propriétés utilisées. Cela dit, il personnalise aussi beaucoup son discours en utilisant le « je » et les possessifs (mon triangle...)

On peut aussi souligner que l'enseignant au début de la résolution de l'exercice du tipi attend la suggestion d'un élève pour nommer les points de la figure.

b) Des appuis différés plus globaux – les 11 points bilans

Après des recherches et corrections des épisodes, suivent des points-bilans intermédiaires, réunissant les éléments qui viennent d'être dits de manière dispersée, homogénéisant et donnant un début de cohérence, bien répartis (cf. tableau 1). En effet cette gestion par questions-réponses et la reprise de réponses variées, venant d'élèves différents, pourrait engendrer une certaine dispersion du discours de l'enseignant, même si elle a son importance à nos yeux pour provoquer un travail s'appuyant sur les connaissances des élèves, qui facilite la suite du processus d'acquisition. L'enseignant complète dans les points-bilans ce travail par des commentaires méta, plus globaux, qualifiant, synthétisant ou explicitant ce qui a été travaillé. Cela peut ainsi contribuer à montrer aux élèves une certaine cohérence de ce qui est en jeu, qui dépasse, en le prolongeant, le suivi « au fur et à mesure » établi dans la phase précédente. Ces commentaires peuvent aussi servir à homogénéiser ce que les élèves pourront retenir, par-delà ce à quoi ils auront pu participer directement ou non. L'enseignant dégage ainsi et insiste sur les idées importantes. Il s'agit d'aider les élèves à distinguer ce qu'ils doivent intérioriser et retenir, finalement. Par exemple il souligne le fait que le théorème de Thalès permet le passage de la géométrie à l'algèbre, tout comme le théorème de Pythagore.

On peut redire ici qu'un certain nombre d'anticipations éventuelles sont remplacées par des activités permettant des proximités.

Cependant dans la construction du tableau de la fiche de cours qu'il fait compléter aux élèves, il les prévient : « *je fais une correspondance sans me tromper...* » puis ajoute « *Le piège de Thalès il est là. Souvent on fait une erreur sur la correspondance des côtés* ». Très rapidement grâce au travail mis en place, cette anticipation, appuyée sur le travail pour certains élèves, doit au moins être suivie rapidement d'effets comme on l'a déjà signalé.

On peut remarquer aussi une autre anticipation lorsque l'enseignant propose de comparer les aires de deux triangles semblables à la fin de la résolution de la question 3 du tipi étudiée en annexe 2.

Enfin, l'enseignant accorde aussi beaucoup d'importance à la rédaction, mais ce n'est pas visible directement dans cet extrait, sauf à insister sur la différence entre savoir-faire et savoir rédiger.

c) Un bilan sur les proximités

Nous avons cherché pour synthétiser ces résultats sur quoi portent les proximités repérées, en notant aussi leur nature (descendantes, ascendantes ou horizontales) et le moment où elles sont émises. Sont ainsi en jeu soit le savoir – sous forme d'un théorème, d'une propriété, d'une technique, d'une méthode, même si ce n'est que par leur nom, ou sous forme de vocabulaire, soit une activité – de reconnaissance ou de traitement.

		Savoir Théorème, propriété, étiquetage	Vocabulaire	Activité de reconnaissance	Activité de traitement
Proximités ascendantes 8 au total	Tipi Q1Q2	8		1-2	
	Conjecture Cours	16		17	18-19-20
	Exercice				
Proximités descendantes 16 au total	Tipi Q1Q2	4-6-7-9	10		13
	Conjecture Cours	14		22	
	Exercice	23-24-25-27		29	26-30-31
Proximités horizontales 8 au total	Tipi Q1Q2	2-3	5-11		
	Conjecture Cours	14-15-21			
	Exercice			28	

Tableau 2 : les proximités, repérées par leur numéro

C'est à la fois le choix des tâches qui donne de nombreuses occasions de proximités (le relief contribue à le repérer) et celui des déroulements. Aussi bien les recherches collectives que les corrections collectives permettent à l'enseignant de prendre appui sur les élèves et de produire des proximités alors que pendant les cours c'est le travail sur la fiche qui le permet. Certaines proximités sont locales, quasi conjoncturelles, d'autres plus différées sont portées par des commentaires méta nombreux (points-bilans) qui balisent très régulièrement les déroulements

Comme on pouvait s'y attendre, les proximités descendantes sont les plus nombreuses dans les moments de recherche d'exercices (6 dans le tipi pour réviser et surtout 8 dans le premier exercice d'utilisation du théorème pour l'appliquer alors qu'il n'y en a que 2 au moment de la conjecture et du cours). Elles portent essentiellement sur des reprises (locales) de notions déjà vues par les élèves, théorèmes, propriétés, éventuellement réduites à leurs noms, mais ce peut aussi être sur leurs applications et la technique (ou méthode) à adopter pour y parvenir. Amener les élèves à utiliser des notions déjà-là en explicitant ce qui est en jeu (déjà connu), en les faisant préciser, ou en les précisant... semble un « ingrédient » habituel des pratiques de l'enseignant.

Les proximités ascendantes, plus rares, sont cependant présentes ici. Elles sont souvent portées par des commentaires méta, un peu longs, pendant (ou à la fin) des moments consacrés à la recherche de la conjecture notamment, avec un bilan de ce qui a été trouvé, et pendant le cours sur Thalès, avec des généralisations des activités de traitement du contexte (qui a été travaillé) au cas général (il y en a 5 au total dans cet épisode contre 3 au début et 0 dans l'exercice d'application).

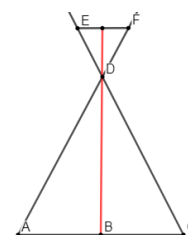
Les proximités horizontales sont plutôt liées à des reprises très locales de l'enseignant, sur des précisions concernant le savoir, le vocabulaire, la méthode de résolution (réparties également pendant la révision, 4, et le cours, 3, et presque absentes dans l'exercice d'application)...

Cependant l'enseignant ne peut pas échapper à la contrainte du temps, qui peut amener à renoncer à s'appuyer sur un travail préalable des élèves, pas plus qu'il ne peut pallier le manque éventuel de réponses des élèves.

d) Des exemples où le professeur prend en charge une partie du raisonnement sans appui sur le travail des élèves, faute de temps ou faute de possibilité d'appui ?

Nous avons déjà indiqué qu'après la lecture à haute voix de la deuxième question de l'exercice du tipi, les élèves travaillent seuls. Le professeur montre sur la figure utilisée qu'on cherche EF.

Un élève propose d'utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle EDF.
P : « Vous réinventez Pythagore dans DEF mais la question, où est le triangle rectangle ? Est-ce que j'ai un angle droit ? Je réponds non » (proximité manquée). Le professeur dit alors que s'il était rectangle le triangle DAC le serait aussi (proximité manquée). *J'ai les moyens de savoir si ce triangle est rectangle ou pas* (aide)



E : Pythagore

P : la réciproque de Pythagore (aide).

Un élève dicte le calcul correct à faire.

Ici pas de proximité. L'enseignant, faute de temps peut-être, et/ou pour ne pas lasser ou perdre les élèves (nous ne le savons pas), veut peut-être accélérer la résolution pour arriver à ce qui est visé, c'est-à-dire la révision des triangles semblables et la proportionnalité des côtés.

Nous avons déjà remarqué qu'à deux reprises l'enseignant ne peut pas s'appuyer sur le travail des élèves, trop inexistant (pour le calcul de la longueur de l'hypoténuse à partir 9,5 et dans le premier exercice d'application du théorème de Thalès).

On perçoit finalement dans cette gestion la nécessité de tenir les élèves, de les engager, de les garder investis tout en avançant dans la construction des connaissances et ce n'est pas une tâche facile.

3) Une logique d'action bien visible (le pari du sens), et des adaptations, le rôle du contexte REP

Si on essaie de globaliser les résultats précédents, en se plaçant au niveau des composantes et de leur imbrication, on peut d'abord constater des régularités dans les pratiques de l'enseignant, ce qui est conforme à des résultats déjà obtenus sur la stabilité des pratiques (Robert, 2007) et ce qui autorise une certaine généralisation. La répartition entre travail des élèves, corrections et

cours est semblable dans tous les épisodes repérés dans des séances ; on commence par une recherche individuelle, suivie ou non d'une recherche collective, puis l'enseignant corrige souvent collectivement voire seul ou présente le cours. Ainsi sur les 120'30 analysées, 42% du temps est consacré à la recherche dont 2/3 individuelle, 1/3 collective, 45% du temps est dévolu à des corrections pendant lesquelles l'enseignant peut faire référence aux cours et 13% du temps consiste en un travail sur le cours à partir de fiches projetées.

L'enseignant, on l'a détaillé ci-dessus, d'une part adapte au contexte ce que nous identifions comme du relief (même s'il ne le formule pas ainsi, même si cela vient de son expérience et n'a pas été explicité), en essayant de proposer un maximum de tâches sur lesquelles s'appuyer, même si elles ne sont pas complètement réussies. Cela traduit une certaine imbrication du cognitif et du social, au sein d'un programme respecté, et cela renseigne sur les composantes cognitive, sociale et institutionnelle de la pratique de cet enseignant. D'autre part il développe tout au long des séances une gestion adaptée au choix des tâches et à son contexte, avec un maximum d'appui sur le travail des élèves. A cette fin il alterne les accompagnements individuels, qu'il donne lorsqu'il circule dans la classe pendant que les élèves cherchent et qui lui permettent de repérer ce que les élèves font, et les phases collectives, pendant lesquelles il essaie de garder l'attention des élèves, notamment aux autres (« *Ecoutez-vous* », « *Y a pas d'écoute là ! On est en train de résoudre collectivement, ça ne veut pas dire que chacun le résout individuellement* »).

a) Le pari du sens

Il nous semble qu'on peut ainsi donner une illustration du processus d'apprentissage installé ici (suite aux choix des tâches et du déroulement tout au long des deux séances), compatible avec le relief en partie imposé par l'institution, avec des difficultés peut être « grossies » par le contexte REP. C'est ce qui se dégage en creux de la logique d'action de l'enseignant (combinaison des composantes de sa pratique), complétant l'itinéraire cognitif déjà repéré notamment avec le tableau des proximités (tableau 2), qui pourrait se résumer par : le pari du sens.

L'enseignant installe d'abord un processus faisant (re)travailler ce qui servira d'appui : les triangles semblables et la proportionnalité, déjà vus. Grâce à des activités notamment, il fait mobiliser ainsi les connaissances déjà-là utiles (ciblées par ce qui servira), avec des proximités ascendantes, sur le savoir et sur ce qu'il y a à reconnaître (3) et surtout descendantes, sur le savoir (4), le vocabulaire (1) et une activité de traitement (1). On peut noter une certaine attention au vocabulaire déjà-là, peut-être accru par le contexte (4 proximités horizontales, reprenant le dire des élèves, dont 3 sur le vocabulaire).

Puis le travail sur les configurations en jeu (introduites ou réintroduites par la recherche d'une conjecture) débouche sur l'association droites parallèles/triangles semblables, qui était le maillon encore manquant, peut-être en partie nouveau, pour donner le théorème. Tout se passe comme si on enrichissait encore les connaissances déjà-là avec ce petit élément, pas encore acquis par tous mais peut-être proche de l'être. La présentation du théorème suit, avec la donnée des énoncés généraux à retenir, présentés à partir d'une fiche projetée. Ces deux moments sont accompagnés par 5 proximités ascendantes, dont 3 vers des activités de traitement, généralisant ce qui est su en contexte, 2 horizontales sur le savoir, et seulement 2 descendantes, rappels du connu. Suit tout de suite après une application immédiate du théorème, qui se caractérise par

des proximités essentiellement descendantes (8) et c'est l'épisode où il y en a le plus : il faut lier le cours et sa contextualisation.

Le méta, porteur de proximités plus ou moins différées, souvent descendantes, a ainsi une place importante dans le discours de l'enseignant. La plupart du temps ce discours est riche de commentaires généraux sur les mathématiques en jeu (cf. les 11 points-bilans).

Ainsi cet enseignant ne renonce pas à donner un sens à ce qui est travaillé malgré les contraintes horaires, des élèves pas toujours très réactifs, pas toujours collectifs, hétérogènes, dont certains semblent avoir du mal à dépasser l'action. Nous évoquons le sens pour plusieurs raisons. D'une part l'enseignant a fait faire aux élèves, sur le tipi, un travail qui est ensuite prolongé par ce qu'il ajoute en explicitant le lien - les élèves ne sont pas complètement en *terra incognita*, et sont associés à la présentation du nouveau savoir ; d'autre part, l'enseignant présente aux élèves, de manière presque qualitative, globale, l'objet du théorème, avec un vocabulaire non strictement mathématique, comme s'il les associait aussi à une appréciation de ce qui est en jeu, les mettant en quelque sorte du même côté de la barrière que les mathématiciens. Tout se passe comme si, en caricaturant un peu, l'enseignant voulait affranchir les élèves de la soumission à la seule technique, subie, en leur faisant partager, avec lui, une certaine maîtrise du pourquoi, du sens... Ainsi le point bilan suivant au milieu du cours sur Thalès que nous recopions ici en le complétant :

« J'insiste de façon générale. Thalès et Pythagore sont emblématiques au collège. Ils vont tisser des passerelles entre deux mondes, l'un numérique et l'autre géométrique. Pythagore ... grâce à l'angle droit je fais une égalité et si j'ai cette égalité ça veut dire que j'ai un angle droit. Pythagore a ici tissé un premier lien entre droites perpendiculaires, triangle rectangle d'un côté et égalité de Pythagore avec des aires de l'autre. Donc pour savoir s'il y a un angle droit je fais un calcul. Thalès c'est quelque chose d'aussi fort. Il va lier la proportionnalité qui vit dans un monde de tableaux et dans un monde de nombres à des droites parallèles et des droites sécantes, en géométrie ; voilà pourquoi ils sont si importants. Ils ont clairement établi des liens entre des propriétés géométriques et des opérations numériques. Maintenant le cœur de Thalès ça va être d'exploiter la proportionnalité... »

Et la citation suivante, dans l'exercice d'application, *« Le plus dur c'est faire ce tableau. Ce tableau-là, c'est la difficulté, la correspondance. Après ça m'intéresse pas, parce que c'est fini ... le plus dur est fait. Maintenant c'est les calculs, maintenant je prends ma calculette et je donne des réponses mais pas avant. »* est très représentative de cette stratégie déjà signalée : retarder les automatismes...

Reste à préciser le rôle éventuel du contexte dans ces choix.

b) Rôle du contexte

REP, vacances de Noël, covid, nous ne pouvons pas préciser ce qui est exactement en jeu dans le contexte... De fait les élèves ne sont pas toujours engagés autant que l'enseignant le voudrait, ne s'écoutent pas toujours les uns les autres (*« On écoute un petit peu ! »*), voire ne mobilisent pas ce qui vient d'être expliqué. Nous percevons la tension classique entre le fait de laisser travailler les élèves et le fait qu'ils se lassent, faute de s'engager ou de réussir. Or pour pouvoir produire des proximités il faut que quelque chose vienne des élèves, qui les aide à élaborer ou à utiliser du nouveau à partir de ce qu'ils ont fait, à reprendre par l'enseignant. Comment faire si rien ne vient ? Ou si c'est trop limité pour conduire au savoir visé ?

Nous avons rappelé ci-dessus deux exemples où l'enseignant doit se décider à donner des aides procédurales pour faire démarrer les élèves (le calcul de la longueur de l'hypoténuse et l'exercice d'application). En voici deux autres, peut-être plus spécifiques, qui nous semblent illustrer le fait qu'on est en présence d'élèves qu'il faut amener à dépasser l'action en visant le sens.

c) L'incident du rapporteur

Un petit incident très révélateur du contexte a lieu lorsqu'un élève répond « rapporteur » à la question de l'enseignant sur l'outil mathématique attendu pour étudier des triangles semblables (qui était la proportionnalité ou l'égalité de rapports). Interprétant cette réponse en relation avec l'égalité des angles nécessaire à montrer la similitude, l'enseignant commence par ignorer la réponse puis il y revient, en associant rapporteur et instrument plutôt qu'outil, et en expliquant que mesurer des angles ne permet pas d'en déduire leur égalité même si les mesures sont les mêmes. Qui sait ? On peut se demander si l'élève n'a pas aussi voulu parler des rapports, même s'il évoque ensuite les angles ... Des recherches²⁴ ont déjà indiqué le malentendu possible sur le mot « outil » chez des élèves de REP, qui se manifeste lors de la réponse à des questions du type « qu'utilise-t-on ? », avec selon les élèves, des réponses matérielles ou plus conceptuelles.

d) Le suivi d'un élève

Un des élèves de la classe parle beaucoup, souvent à bon escient, levant le bras à toutes les occasions et cherchant à être interrogé. Nous avons relevé un certain nombre de ses interventions, qui nous semblent révélatrices d'un mode de fonctionnement dont l'enseignant tient compte. Il nous semble ainsi que cet élève formule des réponses aux questions de l'enseignant sans préparer ce qu'il dit, sans que ce soit accompagné d'un effort pour s'exprimer correctement, mettre à distance, traduire quelque chose "de plus", dépasser l'action. Il s'avère notamment à un moment donné incapable de répéter, à la demande du professeur, ce qu'il vient de dire. Il est même interloqué de cette demande. On peut y voir le signe de cette improvisation de la parole, comme s'il s'agissait seulement de répondre aux questions, très vite, le plus vite possible, le plus souvent possible, sans autre forme d'élaboration intellectuelle, de "penser". D'ailleurs ses phrases sont souvent peu précises (truc, ...) et mal formulées (mauvaise syntaxe) ... Et pourtant il est très investi et a de bonnes idées, retenues de l'an passé peut-être - cependant souvent liées à une action ou à une pratique, voire accompagnées de gestes éclairants comme le zoom/dézoom pour traduire la similitude ou, pour le tableau de proportionnalité, l'idée d'en effacer des lignes pour avoir les fractions égales. Il est envoyé au tableau pour corriger l'exercice d'application. De même il contextualise le plus possible son propos, en prenant un exemple, souvent au tableau. Il apprécie les méthodes simples (recettes ?), qu'il répète, comme pour s'en imprégner - si on repère des parallèles et des sécantes, on aura à appliquer Thalès...repérer les côtés proportionnels : les grands avec les grands, les moyens avec les moyens ... On peut être presque sûr qu'il le fera ! On pourrait évoquer une difficulté d'élaboration de quelque chose de général, par-delà l'action, voire un recours le plus longtemps possible à ce qu'il sait déjà, surtout en contexte. De plus il n'est pas très collectif semble-t-il (se fâche contre les autres lorsqu'il est au tableau) et paraît ne faire confiance qu'à l'enseignant et non à ses pairs. L'enjeu est alors de l'amener à conceptualiser.

4) Un début d'évaluation : analyse des copies d'élèves

²⁴ Chesnais, 2014.

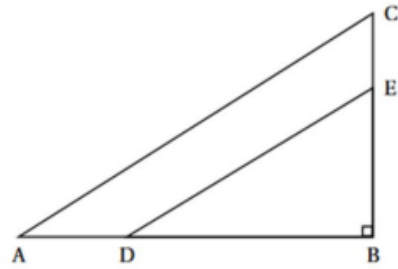
Il s'agit d'un contrôle donné cinq mois après le cours dans deux classes de cet enseignant, dont l'une (la classe C, filmée) a bénéficié de pouvoir consulter son cours pendant le travail.

Exercice :

Dans la figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle), on donne :

- Les points B,D et A sont alignés.
- Les points B,E et C sont alignés.
- Le triangle ABC est rectangle en B.
- $BA = 12 \text{ cm}$; $BC = 9 \text{ cm}$
 $BD = 8 \text{ cm}$ et $BE = 6 \text{ cm}$

- 1) Démontrer que les droites (DE) et (AC) sont parallèles.
- 2) Déterminer par le calcul la longueur du segment [AC].



Nous avons codé les copies selon les critères suivants :

1	Tout est bon (nom du théorème, conditions d'utilisation, valeurs exactes des rapports considérés)
2	La conclusion est correcte (les droites sont parallèles) et le raisonnement presque correct mais le nom du théorème n'est pas bon ou pas cité (Thalès ou théorème de Thalès ou réciproque) ou il manque les conditions d'utilisation du théorème (tout ou partie) ou les rapports considérés sont des valeurs approximatives, ou l'égalité des rapports est écrite au départ et on trouve à la fin une égalité du type $2/3=2/3$
3	La situation est reconnue, la conclusion est correcte mais il manque le raisonnement
4	Tout est faux
0	La question n'est pas abordée
T	Le mot Thalès est écrit
S	Le mot semblable est écrit :
P	Les mots proportionnel ou proportionnalité ou tableau de proportionnalité sont écrits ou le tableau est construit :
R(J)	Le résultat « les droites sont parallèles » est écrit (code R : ce résultat est de plus justifié partiellement (avec une incursion dans le numérique))
F	La formule avec une égalité est écrite

Voici le tableau résumant les analyses

Classes/Codes	1	2	3	4	0	T	S	P	RJ	R	F
3°C- 15 élèves	1	7	3	3	1	7	5	4	11	11	11
3°A- 13 élèves	0	6	1	4	2	5	4	4	8	7	1
Totaux	1	13	4	7	3	12	9	8	19	18	12

a) Des remarques et un petit bilan

Dans la classe C un élève conclut : = sans rien de plus ; un autre : les triangles sont semblables ; un autre encore =1,5 - = 1,5 sans rien de plus.

Dans la classe A un élève conclut : les triangles sont proportionnels.

Cinq mois après le cours sur le théorème de Thalès et sa réciproque, quatorze élèves sur vingt-huit savent à peu près résoudre cet exercice (codes 1 et 2) ; seuls trois ne l'abordent pas et sur les onze autres, sept écrivent des choses tout à fait fausses et quatre, tout en reconnaissant la situation et en donnant une conclusion correcte, ne produisent aucun raisonnement. Il n'y a pas de différence majeure entre les deux classes, juste une petite supériorité de la classe C, alors que l'enseignant a eu plus de mal dans cette classe (cf. annexe 5).

Le mot « Thalès » est écrit dans presque la moitié des copies, le mot « semblables » dans neuf copies dont une sans le mot « Thalès ».

Une traduction de la proportionnalité que ce soit par le mot ou par le tableau apparaît dans huit copies (sur vingt-huit).

Seul un élève de la classe A utilise directement la réciproque du théorème de Thalès sans commencer par écrire un tableau avec les mesures des côtés, alors que dans la classe C tous ceux qui ont réussi le font. On peut se demander s'il ne reste pas une confusion entre ce qu'est la forme définitive du théorème de Thalès et ce qui l'a précédé dans le cours (cf. le « bébé Thalès » de l'enseignant).

Pour la moitié des élèves au moins, il reste des traces de la reconnaissance qu'il faut utiliser le théorème de Thalès et de l'identification correcte des côtés correspondants mais pour la moitié aussi le raisonnement précis n'y est pas. Quant aux autres élèves, il reste des manques et /ou des maladresses dans la rédaction. On peut remarquer de plus que la plupart des élèves notent correctement les longueurs et les droites lorsqu'ils les citent à l'exception de trois élèves.

Voici l'appréciation, assez réaliste, de l'enseignant, questionné à la fin de l'année : « *les élèves ont bien saisi le nœud du problème : parallélisme en lien avec la proportionnalité via les triangles semblables. Et c'est bien un nœud pour eux : ils ne savent pas par quel fil dérouler un problème donné. Ils savent que c'est lié à la proportionnalité mais ne savent pas s'ils doivent la montrer ou l'utiliser* ».

b) Discussion

Tout se passe comme si cette séquence avait un effet positif : utilisation légitime de « Thalès » en lien avec triangles semblables et proportionnalité et un effet négatif : la formule ne semble pas d'emblée mobilisée ce qui peut être mis en relation avec les mises en garde de l'enseignant sur les difficultés de ce « mode expert ». On peut ainsi se demander si la volonté de s'appuyer sur du connu n'amène peut-être pas à « trop » insister sur le lien Thalès/triangles semblables au détriment du théorème précis reliant directement égalités numériques et parallélisme

Une difficulté ultérieure se présente, comme nous l'avons évoqué au début, liée aux formulations. Le document Eduscol « Mathématiques et maîtrise de la langue » (2016) signale ainsi à ce propos : « *Faire produire aux élèves ou proposer des (re)formulations, les comparer, les faire évoluer, est un processus riche permettant de faire cohabiter plusieurs formulations d'une même définition, ou d'une même propriété, tout en travaillant le sens. Les élèves se familiarisent ainsi avec les différentes formes qu'ils vont rencontrer, dans les exercices par exemple.* »

Est-ce que ce qui a été fait dans les premières séances permet une meilleure installation ultérieure de la formulation ? Les copies des élèves relevées cinq mois après en sont peut-être

un indice positif, dans la mesure où l'arbre (la formulation) n'a pas caché la forêt (le théorème) et négatif dans la mesure où, en revanche, les formulations utilisées laissent à désirer.

Conclusion

1) Retour sur les proximités (et leur classification), les pratiques de l'enseignant et ses logiques d'action

La classification a permis de montrer qu'on peut effectivement accompagner de manière diverse et adaptée des dynamiques de conceptualisation complémentaires, entre contexte et décontextualisé à tous les moments des séances. Il existe des proximités de chaque catégorie et elles ne sont pas interchangeables : elles incrémentent différemment les processus cognitifs liés à la ZPD. Il y a là comme un « théorème d'existence » !

Pour illustrer ce qu'ajoutent certaines proximités au processus d'apprentissage enclenché, nous avons tenté de les barrer de quelques interventions et de voir « ce qui reste ».

Donnons un premier exemple sur une proximité ascendante (donnée en cours) avant de traduire la proportionnalité sur les deux triangles en jeu :

~~P. Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ?~~

~~E. la proportionnalité~~

~~P. de la proportionnalité et c'est ça qui est très fort dans Thalès, c'est qu'on va utiliser cette proportionnalité~~

Il aurait pu ne dire que : *P. on va utiliser de la proportionnalité.*

Dans cette « version » la seule information donnée est le nom du savoir à utiliser – dans la version « complète », il y a une inscription de l'activité à venir dans ce qui avait été utilisé par les élèves (le savoir). L'enseignant annonce la généralisation de ce qui avait été fait avec succès dans le cas particulier du tipi. Les élèves restent en terrain un peu connu ! Tout se passe comme si, sinon, on privait un peu les (des) élèves des bénéfices de leur familiarisation avec la proportionnalité en contexte, faute de leur expliciter que c'est la même chose qu'on va utiliser. Le deuxième exemple concerne une proximité descendante.

Il s'agit du point-bilan qui est fait après l'échec de l'utilisation du théorème de Pythagore pour calculer une longueur : « ~~Que vous compreniez que Pythagore n'est pas votre seule arme ... Je trouve la hauteur avec Pythagore, par contre pour trouver la longueur EF, Pythagore ça ne fonctionne pas. On passe par ce qu'on appelle le théorème de Thalès.~~

Le lien entre le travail fait, aboutissant à un échec, et la cause de l'échec, un mauvais choix de théorème, n'est pas fait dans la nouvelle version (avec suppression d'une partie du texte). Seule est donnée l'information de ce qui est à utiliser, sans revenir sur cet échec qui justifie d'aller chercher autre chose. Tout se passe comme si on privait peut-être les (des) élèves d'une raison d'être de cet autre théorème.

Nous avons montré que l'enseignant prend ainsi souvent appui sur ce qui vient des élèves. L'étude menée a permis d'accéder dans une certaine mesure à une logique d'action de l'enseignant, qui pourrait encore être précisée par un entretien (cf. composante personnelle). Nous l'avons appelée « le pari du sens » : l'enseignant profite des occasions qu'il a éventuellement lui-même créées par les tâches proposées, pour expliciter des liens entre activités (ou savoirs anciens) et savoirs nouveaux, ce qui contribue à donner du sens à ces derniers. Les élèves peuvent s'appuyer sur leurs activités en contexte, les prolonger, pour accéder à ce qui est général ou le mobiliser, et donc, la généralisation ne part pas de rien et son usage est précédé d'une illustration en contexte. Cependant il faudrait compléter sur d'autres contenus et dans d'autres classes pour dégager valablement une logique d'action plus générale.

2) Des alternatives : mise en regard des deux séances et d'une capsule-vidéo²⁵ pour réviser le cours (ou le pari du sens et le pari de la technique)

On ne peut pas comparer directement un cours et ce qui est proposé comme une révision dans une vidéo mise sur You Tube par un autre enseignant, cependant nos éléments de relief nous permettent de différencier les deux ressources (cf. tableau récapitulatif en annexe 3).

Tout d'abord nous apportons quelques précisions concernant la capsule.

La partie portant sur le théorème de Thalès dure quatorze minutes (16 minutes pour le cours filmé au sens strict). L'enseignant utilise de nombreuses figures préparées à l'avance, y compris animées, joue beaucoup sur les couleurs et la perception visuelle (« *on voit* », « *on regarde* » ...), les gestes (pour désigner les côtés des triangles). Pour créer sans doute un certain contact avec les élèves, il utilise le « je » et quelques expressions familières (« *Et bien* », « *mais bon* », « *j'attaque* », « *je prends appui* », « *le côté [AB'] confondu avec (AB) l'un est sur l'autre* », « *je promène B' et C' sur leurs côtés ...* »). Cette révision du cours est totalement orientée sur l'utilisation de la formule. L'enseignant fait même un travail sur la forme des égalités de rapports indépendamment de leur signification (et a fortiori de la démonstration) en disséquant le rôle de chaque lettre : « *mes deux triangles je vois qu'ils ont un sommet commun, c'est A. Ce A on le retrouve quatre fois dans les deux premiers rapports de ma formule.* »

En résumé, le théorème de Thalès est donné sous sa forme habituelle (aboutie) dans les deux configurations et le cours consiste d'abord à partir de la donnée de figures coloriées à remarquer la présence de deux triangles semblables, sans aucune justification de la similitude mais en rappelant qu'ils ont leurs côtés deux à deux proportionnels. Il n'est pas question d'angles égaux, ni de formes analogues. Ensuite l'enseignant paraphrase les conditions d'application du théorème : points alignés, droites parallèles puis il présente la conclusion du théorème avec l'égalité des trois rapports de longueurs sans préciser ni que ce sont des longueurs ni que cela traduit la proportionnalité. L'animation de la figure donne à voir l'égalité des rapports en jeu calculée par Geogebra comme si c'était une preuve (l'approximation des mesures affichées n'est pas signalée). L'enseignant se livre ensuite à un travail sur la forme puis il passe à la configuration « papillon » présentée comme une extension de la configuration triangle grâce à une autre animation avec la même justification sur Geogebra (égalité numérique des rapports de longueurs). Enfin un exemple numérique illustre l'utilisation du théorème « *qui sert tout simplement à calculer des longueurs dans des triangles quelconques* ».

Plusieurs éléments, directement inspirés du relief établi sur la notion, concordent à expliciter ce qui est proposé aux élèves : pourrait-on évoquer un cours sur le « comment ? » dans la capsule / un cours sur le « pourquoi ? » dans le cours analysé ?

Y participent dans la capsule l'absence de justification et de lien avec ce qui précède, certes inévitables, et l'attention à la « lettre » de la formule, qui, cependant, s'explique par le fait qu'il peut s'agir d'une révision. En particulier, l'utilisation du méta consiste ici à énoncer des paraphrases centrées sur ce qui peut aider les élèves à utiliser le théorème et non sur leur compréhension.

²⁵ Maths et tiques, cours de troisième, le cours sur le théorème de Thalès.

Plus précisément, dans la capsule, les raisons d'être (calculer de longueurs) sont données après l'introduction du théorème et réduites au calcul d'une longueur, alors que, dans le cours, ce calcul, fait dès le début sur un exemple, et contribue à motiver l'introduction du théorème.

De fait l'ordre des deux exposés est très différent, tout comme le temps en jeu : mais dans la mesure où l'exposé du théorème prend une quinzaine de minutes dans la capsule, la comparaison est très limitée. Dans la capsule, le théorème est donné d'abord, après l'introduction commentée des configurations en jeu. Puis l'enseignant insiste surtout sur les conditions d'utilisation du théorème et termine par l'utilisation dans un exemple. Dans le cours il y a tout un travail d'introduction, pour réviser les notions en jeu (triangles semblables et proportionnalité) et pour caractériser les configurations retenues (parallélisme).

Ainsi les liens triangles semblables /côtés proportionnels, et parallélisme/triangle semblables, ne sont pas du tout explicités dans la capsule, contrairement à ce qui est fait par l'enseignant observé, avec le premier exercice pour le premier lien et la conjecture pour le deuxième.

L'enseignant observé donne plusieurs façons de repérer les côtés homologues, ce qui est délicat pour les élèves comme nous l'avons déjà indiqué, alors que dans la capsule une seule est indiquée, très procédurale, en relation avec l'alignement des points qui interviennent dans les longueurs. On peut noter ce passage subreptice, peut-être difficile, souligné dans le relief, des cotés à leurs longueurs et aux points « extrémités », est accentué dans la capsule par le choix du seul repérage sur les points et leur alignement dans l'énoncé du théorème donné d'emblée.

Enfin, concernant le traitement numérique relatif à l'utilisation du théorème de Thalès, dans la capsule n'est proposée que l'utilisation de la quatrième proportionnelle à partir de l'égalité des fractions en jeu, alors que l'enseignant mentionne aussi le du tableau de proportionnalité des longueurs des côtés, le travail possible sur le coefficient de proportionnalité et le recours aux fractions établies à l'aide du tableau (et déconseillé au début).

3) Enseignement explicite ? Qu'est-ce qui est explicité, à quel moment ?

On pourrait poser la question de la proximité (!) de ce que nous défendons avec l'enseignement explicite – nous utilisons beaucoup le mot !

Nous allons donner quelques éléments qui indiquent des différences essentielles – une étude plus précise serait nécessaire, y compris sur les « preuves » avancées pour l'efficacité de cet enseignement. Nous avons utilisé la petite synthèse sur l'enseignement explicite proposée par l'Académie de Grenoble (2020) et, à charge, le document sur le sujet édité par le centre Alain Savary (2021).

En réalité certes il y a une phase d'explicitation revendiquée dans les deux types de pratiques mais ce n'est ni au même moment ni sur la même chose... De plus les préalables théoriques différent, ainsi que la conception de l'apprentissage. Nous ne pouvons pas attribuer à un élément précis de notre démarche une portée spécifique sur les apprentissages, nous ne découpons pas - pour nous c'est l'ensemble qui est en jeu, tant du point de vue des acquisitions que du point de vue de l'enseignement.

Dans notre cas, ce qui est étudié comme étant explicité suit un travail des élèves, et concerne le lien entre ce qu'ils ont fait et le savoir visé. Ce qui ne veut pas dire que l'enseignant n'explicité pas d'autres éléments d'ailleurs, notamment en termes de structuration ou d'objectifs, mais ce n'est pas notre objet !

Dans l'enseignement explicite, les objectifs d'apprentissage sont donnés aux élèves, avant même tout travail – cela présuppose que les élèves vont en profiter, par une « *recentration sur la notion à découvrir et à acquérir* », pour éviter une focalisation sur « le faire ». Nos hypothèses nous amènent à questionner ce postulat, par-delà même le listage d'objectifs qui nous semble souvent artificiel, dans la mesure où nous valorisons au contraire, encore une fois, le lien entre travail des élèves et savoir des élèves, même si des présentations peuvent aussi aider les élèves, avant tout travail, mais peut-être moins que ce qui est supposé ici. En revanche il est préconisé que l'explicitation repose sur la clarification, ce que nous partageons, mais encore une fois on clarifie autre chose !

L'enseignant est supposé montrer et enseigner la démarche à suivre : là encore l'ordre diffère ! Dans notre cas, certes il peut y avoir de l'imitation mais limitée à des éléments proches des connaissances déjà là...

4) A quoi peut servir notre analyse ?

Cette étude sur un cas illustre et confirme plusieurs aspects des pratiques, même si la preuve de l'efficacité des proximités n'a été apportée que par l'adoption d'une hypothèse théorique (opérationnalisant le modèle de la ZPD).

Nous avons d'abord pu vérifier qu'il existe bel et bien dans le discours oral de l'enseignant des interventions porteuses de proximité, diverses, attachées à des dynamiques complémentaires des apprentissages. La complexité des pratiques se révèle cependant dans l'étude, tant on a pu constater à quel point ces proximités dépendent à la fois de la notion et des connaissances antérieures, du moment où en est le travail des élèves (et du temps dont dispose l'enseignant) mais aussi des élèves eux-mêmes et de ce qu'ils ont fait – et sans doute de l'enseignant lui-même. La production de proximités ou leur appréciation ne peuvent ainsi se faire de manière isolée. De plus les proximités ont la particularité de relier précisément, souvent de manière spontanée voire improvisée ce qu'on entend dans la classe et ce qui est visé, dans le *hic et nunc*. Autrement dit, les proximités ont un caractère conjoncturel, variable d'une séance à l'autre même si le savoir en jeu est, lui, fixé. On pourrait dire qu'une proximité est rarement reproductible telle quelle, elles font partie de ce que les enseignants peuvent développer de manière sans cesse renouvelée, grâce à leur vigilance et à leur disponibilité.

L'intérêt d'avoir établi le relief sur la notion est aussi mis en valeur, notamment pour réfléchir à l'introduction de la notion (et à celle que l'enseignant a choisie), en relation avec des liens possibles à expliciter entre les activités provoquées et le savoir.

Plus généralement, les relations entre le choix des tâches et les occasions de proximités, en relation avec le travail des élèves, ont été exemplifiées en particulier pour donner (ou non) à l'enseignant des occasions d'illustrer, à partir d'exemples, ce que peut apporter le théorème, et qui « manque » encore, ou de commenter, voire de comparer des manières de l'utiliser.

La comparaison esquissée avec une autre pratique a permis d'exemplifier une certaine palette des possibles, notamment en termes de commentaires méta et de proximités.

5) En formation : comment utiliser de tels matériaux ?

Les aspects dégagés ci-dessus, liés au relief, à la complexité des pratiques et aux choix qui se présentent aux enseignants, nous semblent pouvoir faire l'objet de formations, dernier élément de ce à quoi cela peut servir.

Tous les enseignants, notamment avec une certaine expérience, produisent des proximités spontanément, et sans avoir besoin d'établir ou de se procurer le relief sur les notions qu'ils enseignent, dont ils ont assez vite une idée de par leur expérience, qui peut cependant être enrichie par certains travaux. Ce que cette étude nous semble pouvoir contribuer à outiller davantage, d'une certaine manière, c'est la vigilance constante des enseignants vis-à-vis de ce qu'ils peuvent repérer chez les élèves, en termes de travail et de connaissances, pour s'appuyer dessus et rebondir (ou faire rebondir). Cela nourrit l'intérêt d'une reconnaissance permanente du travail et de l'engagement de ces élèves : d'ailleurs reprendre leurs réponses (incomplètes ou erronées), quitte à les compléter ou à les corriger, peut contribuer à leur donner confiance en eux. Surtout, plus spécifiquement, chercher à s'appuyer systématiquement sur ce qui vient des élèves en s'inspirant de notre catégorisation est, nous semble-t-il, porteur d'une attention qui peut se préciser, dans la mesure où il s'agit de se demander à chaque fois comment le faire et à quel moment – faut-il (faire) rebondir sur du décontextualisé en germe dans le travail, faut-il faire (faire) au contraire le lien avec ce qui a été utilisé, faut-il établir des relations entre éléments analogues ?

Même s'il n'y a évidemment pas une seule « bonne » réponse à ces choix, qui sont contraints, même si on n'a pas toujours le temps de faire ce dont on aurait envie, même si on ne peut pas toujours interpréter à temps des réponses d'élèves et les reprendre, le fait de prendre conscience de ces alternatives nous semble susceptible d'enrichir, par l'introduction de ce questionnement permanent, le spectre des échanges en classe associés à diverses dynamiques de conceptualisation.

Schématiquement, on peut ainsi penser qu'une vigilance de l'enseignant, centrée sur ce qui vient des élèves, référée à la notion, permettant d'improviser des proximités adaptées, pourrait être développée de manière assez systématique, devenant une préoccupation « naturelle », une sorte de posture, associée à la question des liens à faire. Cela gagne à être précédé d'une réflexion antérieure à la classe, fondée sur le relief et sur la spécificité du contenu en jeu, et portant sur des tâches ou des questions pouvant donner de bonnes occasions de proximités. Avec l'idée qu'en réalité on fait souvent des sortes de paris sur l'interprétation de ce qu'ont dit ou fait les élèves...

Comment peut s'acquérir une telle posture ? Est-ce une affaire de prise de conscience ? Peut-être à partir de vidéos contrastées, où les enseignants gèrent différemment leurs séances, les participants peuvent repérer différents modes d'intervention, les discuter, les interroger. C'est à la charge du formateur d'en indiquer à la fois des justifications théoriques et des conditions d'application, compte tenu d'une réflexion à engager sur les contraintes liées à la notion et aux programmes mais aussi à l'établissement, à la classe et aux élèves.

6) Des questions qui restent ouvertes

Une question méthodologique peut être posée, sur la différence entre le balisage et les transcriptions. On peut ainsi comparer, sur le début du cours, ce qu'apporte les deux types de

données, le balisage (annexe 1) ayant été complété mais pas autant qu'avec une transcription complète (annexe 4).

La première question de fond a déjà été posée : quelle évaluation faire de ce type d'interventions ? Sont-elles entendues ? Ont-elles les mêmes effets sur tous les élèves ?

On peut en ajouter d'autres qui précisent la dernière question posée.

Comment distinguer ZPD d'un élève ou ZPD « moyenne » d'une classe, et tenir compte des différences, voire de l'hétérogénéité entre élèves (question posée depuis un certain temps par J. Rogalski) ?

On peut par exemple se demander si les différences de ZPD entre élèves n'entraînent pas sur les apprentissages des effets potentiellement différents, voire différenciateurs : les uns entendent mieux et bénéficient davantage que d'autres des rapprochements faits par l'enseignant, notamment en relation avec leurs connaissances « déjà-là » et ce qui est dans leur ZPD. Le travail sur lequel l'enseignant s'appuie n'est pas toujours fait par tous les élèves, du coup ne pourrait-on pas redouter un cercle vicieux, certaines proximités ne servant à rien pour des élèves, trop éloignés de ce qui est évoqué dans l'intervention, qui auraient peut-être eu besoin de plus de temps de recherche ou d'une aide préalable. Se pourrait-il que des proximités jouent comme des freins, minorent la recherche de certains élèves en les mettant trop vite sur une piste de résolution et contribuent même à approfondir le fossé entre élèves ?

Une autre question assez proche est la suivante : y a-t-il des cas où l'enseignant valide et complète les réponses des élèves par des interventions pensées porteuses de proximités ascendantes ou descendantes, alors qu'elles n'induisent peut-être que des « effets Jourdain » limités à la situation ? Elles seraient basées sur des surinterprétations de ce qui vient des élèves et non sur des éléments de leur ZPD. Mais comment apprécier la limite entre ce qui est proche et ce qui serait « trop loin » des connaissances actuelles ? Peut-être même n'est-il pas exclu qu'à partir d'un effet Jourdain, s'enclenche « quand même » une acquisition... Cela dépend-il des élèves, encore une fois ?

De même anticiper une difficulté répertoriée avec une intervention porteuse d'une « proximité » descendante appuyée seulement sur des activités à venir des élèves peut ne servir à rien, et ce tant qu'ils n'ont pas été confrontés à ce qui est en jeu. Mais est-ce toujours vérifié ?

Dans le même ordre d'idées J. Rogalski se pose la question de la différence entre les émetteurs de proximités. Elle se demande notamment si on peut déceler des différences selon que la proximité vient de l'enseignant ou d'un autre élève, utilisant ses propres mots.

Références bibliographiques

- Académie de Grenoble (2020). L'enseignement explicite : quatre principes pour mieux faire apprendre les élèves et leur application dans les différentes disciplines.
https://projet-academique.web.ac-grenoble.fr/sites/default/files/media-pdf/2020-02/principes_enseignement_explicite.pdf
- Bridoux, S., Hache, C., Grenier-Boley, N. & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 21, 187-233.
- Centre Alain Savary (2021). Enseigner plus explicitement.
<https://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/education-prioritaire/ressources/theme-1-perspectives-pedagogiques-et-educatives/realiser-un-enseignement-plus-explicite/enseigner-plus-explicitement-un-dossier-ressource>
- Chappet- Paries, M., Pilorge, F. & Robert, A. (2017a). Pour étudier le dispositif de classe inversée. Analyse des moments d'exposition des connaissances en classe et de capsules vidéo. *Petit x*, 105, 37-72.
- Chappet-Pariès, M, Pilorge, F. & Robert, A., (2017b). Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée, s'appuyant sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde. *Document pour la formation des enseignants, du laboratoire André Revuz*, 16. Irem de Paris.
- Chesnais A. (2014). *Enseigner les mathématiques en ZEP*. Rennes : PUR.
- Commission InterIrem premier cycle (1995) *Autour de Thalès*
- Duval R. & Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.
- Eduscol (2016). Mathématiques et maîtrise de la langue. eduscol.education.fr/ressources-2016
- Hache C. (Ed.) (2016) Groupe Léo. *Formuler, reformuler. Document en ligne*. IREM de Paris
- Horoks, J. (2008). Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(3), 379–416.
- Laguerre E. (2008). La quête du sens dans l'enseignement des mathématiques : une étude de cas autour du théorème de Thalès en fin de collège. *Petit x* 76, 55-77.
- Matheron Y. (1994). Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès. *Petit x* 34, 59-87.
- Minet P. (2008). Un parcours d'étude et de recherche sur les fonctions en classe de Mrabet S. (2006). L'enseignement du théorème de Thalès : quelques points de réflexion *Actes Corfem*, 96-121
- Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18 (2), 139-190.
- Robert A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27 (3), 271-312.
- Robert A. (2010). La formation des maîtres, une préoccupation constante d'André Revuz. Un point de vue actuel de chercheur en didactique. In Colmez, de Hosson, Pichaud, Robert. *Hommage à André Revuz: L'engagement universitaire, l'héritage didactique*, pp.128-140. Paris : Université Paris 7.
- Robert A., Penninckx J., Lattuati M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.
- Robert, A. & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16 (2), 145-176.

- Robert A. & Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education* 4, 505-528.
- Robert A. & Rogalski J. (2020). D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. ...? *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz* n°22. Irem de Paris.
- Robert, A. & Vandebrouck F. (2014). Proximités-en-actes mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 297-300.
- Roditi E. (2015). Recherches sur les pratiques enseignantes et relations chercheurs-praticiens. *Carrefours de l'éducation*, 39, 55-68. Paris : Armand Colin
- Rogalski J. (2015). Didactique et cognition. De Vygotsky à Dehaene ? *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz* n°13. Irem de Paris.
- Vygotski, L. (1984/1997). *Pensée et langage*. Paris : La dispute.
- Vergnaud G. (2002) La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants*.
<http://eduscol.education.fr/cid46598/la-conceptualisation-clef-de-voute-des-rapports-entre-pratique-ettheorie.html>

Annexes

Annexe 0 : les programmes

Différents documents sont mis à la disposition des enseignants concernant le théorème de Thalès sur le site d'Eduscol. Y figurent les programmes de 2016, les compléments du programme datés de 2018, les programmes en vigueur actuellement (2020), les attendus de fin de quatrième, ceux de troisième ainsi que les repères annuels de progression (en vigueur actuellement). Nous n'avons recopié que les extraits où figurent soit les triangles semblables (en jaune) soit le théorème de Thalès (en bleu).

Les différents programmes

1) Extrait du programme d'enseignement du cycle des approfondissements (cycle 4) 2016 - Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015

Thème D - Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie

Attendu de fin de cycle

- Représenter l'espace
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

<p>Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Position relative de deux droites dans le plan. - Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. - Médiatrice d'un segment. - Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). - Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. - Théorème de Thalès et réciproque. - Théorème de Pythagore et réciproque. 	<p>Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure.</p> <p>Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.</p> <p>Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré.</p> <p>Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).</p>
---	--

Repères de progressivité

Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures. La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration. Le théorème de Pythagore est introduit dès la 4^{ème}, et est réinvesti tout au long du cycle dans des situations variées du plan et de l'espace. **Le théorème de Thalès est introduit en 3^{ème}, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.**

2) Cycle 4 : les spécificités du cycle des approfondissements Bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018 – s'applique en 18-19, 19-20 ? (extraits)

Thème D - Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
Connaissances	Compétences associées
Triangle : <ul style="list-style-type: none"> - Somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ; - Hauteurs et médiatrices ; - Inégalité triangulaire ; - Cas d'égalité des triangles ; - Triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique ; Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique. Le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon) ; Le théorème de Pythagore et sa réciproque.	Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. - Faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles.

3) Programme du cycle 4 en vigueur en 2020 D'après le BOEN n° 31 du 30 juillet 2020 – ne peut s'appliquer qu'à partir de 20-21, voire 21-22 ? (extraits)

Thème D –

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (caractérisation angulaire du parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, **théorèmes de Thalès** et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre de raisonnements et démonstrations. De nouvelles transformations (symétries centrales, translations, rotations, homothéties) font l'objet d'une première approche, basée sur l'observation de leur effet sur des configurations planes, essentiellement à partir de manipulations concrètes (papier calque, papier pointé, quadrillage, etc.) ou virtuelles (logiciel de géométrie dynamique). L'objectif est d'installer des images mentales qui faciliteront ultérieurement l'analyse de figures géométriques ainsi que la définition ponctuelle des transformations étudiées.

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Connaissances	Compétences associées
<ul style="list-style-type: none"> - Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes internes, angles correspondants. - Triangle : <ul style="list-style-type: none"> • Somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ; • Hauteurs et médiatrices ; • Inégalité triangulaire ; • Cas d'égalité des triangles ; • Triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique). • Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique). • Le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon). • Le théorème de Pythagore et sa réciproque. 	<ul style="list-style-type: none"> - Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. - Faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles. - Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure. - Mobiliser les connaissances des figures, des configurations et des transformations au programme pour déterminer des grandeurs géométriques. - Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations

À l'issue d'activités rituelles de construction et de verbalisation des procédures et la résolution de problèmes, effectuées tout au long du cycle, les élèves doivent avoir mémorisé des images mentales (configurations de Pythagore et de Thalès, lignes trigonométriques dans un triangle rectangle) et automatisé les procédures de repérage et de constructions géométriques liées aux figures et aux transformations du programme.

4) Attendus de fin d'année de 4^e (mai 2019)

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Ce que sait faire l'élève

À partir des connaissances suivantes : les cas d'égalité des triangles ; le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration des triangles emboîtés ; le théorème de Pythagore et sa réciproque ; le cosinus d'un angle d'un triangle rectangle ; effet d'une translation : conservation du parallélisme, des longueurs, des aires et des angles, il met en œuvre et écrit un protocole de construction de figures. Il transforme une figure par translation. Il identifie des translations dans des frises et des pavages.

Il sait calculer une longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de la connaissance des longueurs des deux autres côtés.

Il démontre qu'un triangle est un triangle rectangle à partir de la connaissance des longueurs de ses côtés.

Il démontre le parallélisme de deux droites en s'appuyant sur des rapports de longueurs.

5) Attendus de fin d'année de 3^{ème} (mai 2019)

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Ce que sait faire l'élève

À partir des connaissances suivantes : le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration papillon ; les triangles semblables : une définition et une propriété caractéristique, en appliquant le théorème de Thalès, il effectue des calculs de longueurs.

6) Cycle 4 mathématiques REPÈRES ANNUELS de progression (mai 2019)

Espace et géométrie

Géométrie plane

4 ^{ème}	3 ^{ème}
<p>Les cas d'égalité des triangles sont présentés et utilisés pour résoudre des problèmes. Le lien est fait avec la construction d'un triangle de mesures données (trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle). Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration des triangles emboîtés sont énoncés et utilisés, ainsi que le théorème de Pythagore (plusieurs démonstrations possibles) et sa réciproque. La définition du cosinus d'un angle d'un triangle rectangle découle, grâce au théorème de Thalès, de l'indépendance du rapport des longueurs le définissant.</p> <p><i>Une progressivité dans l'apprentissage de la recherche de preuve est aménagée, de manière à encourager les élèves dans</i></p>	<p>Une définition et une caractérisation des triangles semblables sont données. Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration du papillon sont énoncés et utilisés (démonstration possible, utilisant une symétrie centrale pour se ramener à la configuration étudiée en quatrième). Les lignes trigonométriques (cosinus, sinus, tangente) dans le triangle rectangle sont utilisées pour calculer des longueurs ou des angles. Deux triangles semblables peuvent être définis par la proportionnalité des mesures de leurs côtés. Une caractérisation angulaire de cette définition peut être donnée et démontrée à partir d'un cas d'égalité des triangles et d'une caractérisation angulaire du parallélisme</p>

l'exercice de la démonstration. Aucun formalisme excessif n'est exigé dans la rédaction.

On constate que les repères annuels, utilisables à partir de l'année 2019-2020 (mais sans qu'existent encore les manuels adaptés), introduisent sur les notions qui nous intéressent une progressivité qui n'était pas nécessairement celle adoptée jusqu'ici.

L'enseignant filmé a considéré que le théorème de Thalès doit être introduit (ou réintroduit peut-être pour certains élèves) en classe de troisième, pour les deux configurations (triangles emboîtés et papillon), et que les triangles semblables ont été introduits en quatrième (avec une définition, par l'égalité des angles, et la propriété de proportionnalité des côtés, admise).

Une rapide lecture des manuels indique une certaine hétérogénéité selon les collections, notamment dans l'expression du théorème (en troisième), et ceci dès les programmes de 2016. Ainsi par exemple on peut trouver l'énoncé suivant, un peu différent de celui cité en note 18 : si (DB) et (EC) sont deux droites sécantes en A avec (BC) et (DE) parallèles, alors on peut écrire les égalités : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BE}{DE}$

Ou encore : Si les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

De plus, selon que le manuel ait été écrit pour le cycle 4²⁶ (et avec un théorème de Thalès réservé à la troisième) ou pour chaque niveau séparément, les énoncés diffèrent aussi. Dans ce dernier cas on peut trouver le théorème dès la quatrième, pour des triangles emboîtés seulement. C'est notamment le cas pour les manuels où figure la mention « conforme aux nouveaux repères de progression », édition 2020.

Ainsi a-t-on trouvé : si ABC et AMN sont deux triangles tels que M est un point de la demi-droite [AB), N est un point de la demi-droite [AC), les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Il faut donc sans doute attendre quelques années pour que tout cela se stabilise !

²⁶ Avec la mention « nouveau programme de 2016 ».

Annexe 1 : le balisage des films

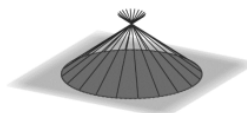
Film 18

	Vidéos	Objectifs
Le problème du tipi	47'	Rappeler la définition des triangles semblables et la propriété des côtés

Exercice du Tipi :



L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est.



Pour la reconstitution d'un village amérindien, on cherche à construire un tipi où chaque perche en bois mesure 9 mètres et dépasse de 1,5 mètres. Le diamètre du cercle tracé au sol mesure 12 mètres.



1) Le but de ce tipi est d'abriter un totem de 4 mètre de haut.

Le tipi est-il assez haut pour accueillir ce totem ?

2) Les concepteurs souhaitent placer une plateforme circulaire au sommet du tipi.

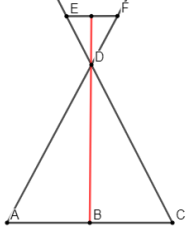
Quel sera le diamètre de la plateforme ?

3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 mètres et ont une envergure de 2,2 mètres.

Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?



Temps	
	Le professeur distribue l'énoncé du problème à résoudre pendant la séance, le projette au tableau et demande aux élèves d'en faire une lecture silencieuse. L'énoncé est ensuite lu à haute voix par un élève puis commenté par l'enseignant qui donne quelques précisions sur le schéma.
9'à 14'	Lecture par un élève de la première question, commentée par le professeur. Les élèves cherchent seuls. L'enseignant circule dans la classe et donne une précision concernant la plateforme. Question d'élève : on n'a pas la hauteur.
14'à 22'	Le professeur commente ce qu'il voit sur les cahiers des élèves : il montre qu'en inclinant une baguette la hauteur change et indique que la figure en 3 D n'est pas celle sur laquelle il faut raisonner. Il interroge un élève pour qu'il trace la hauteur sur le schéma en 3D puis avec Geogebra incline la figure projetée (aide) pour qu'elle montre un triangle sur lequel les élèves peuvent voir et dessiner au tableau ce qu'ils cherchent Commentaire méta de l'enseignant : <i>se mettre dans une situation plus favorable.</i> <i>Est-ce que vous sentez que je suis en train de vous faire basculer dans autre chose qu'un dessin ?</i> <i>Ça c'est une opération qu'on vous fait rarement faire c'est passer d'un truc réel, vous allez chercher vous allez filtrer ce qui est réellement nécessaire à cet exercice. C'est ce travail qu'on appelle modélisation, passer d'une situation un peu réelle à une situation qui est entièrement mathématique.</i> Indication de la hauteur et du centre du cercle par un élève au tableau.
22' à 25'	Les élèves cherchent la hauteur seuls .Un élève propose de mettre des lettres sur la figure ce qui est fait par le professeur.

	
25' à 33'	<p>Le professeur au tableau indique que la longueur cherchée est DC qui est égale à $9 - 1,5 = 7,5$.</p> <p>Un élève passe au tableau et écrit la correction pour calculer DB. Le professeur commente : le théorème de Pythagore est caché quelque part dans DBC rectangle en B. Il insiste sur les pièges qu'il fallait éviter : utiliser les 9 m de l'énoncé et il fallait soustraire pour obtenir $DB^2 = DC^2 - BC^2$.</p>
33' à 40'	<p>Lecture de la deuxième question. Les élèves travaillent seuls pendant que le professeur observe leurs productions individuelles. Il précise la forme de la plateforme (cercle) et montre sur la figure qu'on cherche EF.</p>
40' à 47'	<p>Un élève proposant d'utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle EDF, le professeur aidé des élèves montrent en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore que ADC n'est pas rectangle en D et comme l'angle \widehat{ADC} n'est pas droit, l'angle qui est le même (opposé par le sommet propriété qui n'est pas indiquée) ne l'est pas non plus. EDF n'est pas un triangle rectangle.</p> <p>Pythagore n'est pas la réponse à tout. Thalès est évoqué sans plus de précision. Et un élève propose 2 droites semblables.</p> <p>Le professeur rectifie : 2 triangles semblables. Avec les élèves il précise ce que cela signifie : des angles égaux. La clé elle est là dit le prof, on passe par le théorème de Thalès.</p> <p>Le professeur passe le début de la fiche triangle semblables. Un élève prononce le mot « proportionnel » que le professeur commente.</p>

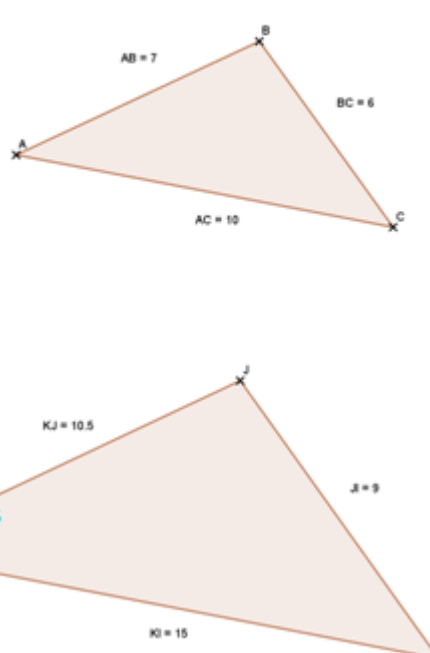
Triangles semblables

Description intuitive :
Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont la même forme.

Traduction mathématique :
Deux triangles semblables sont deux triangles qui ont les mêmes angles.

Conséquence et caractérisation :
Deux triangles qui sont semblables ont les côtés qui ont des longueurs proportionnelles.

Inversement, si deux triangles ont les côtés qui ont des longueurs proportionnelles, alors ces deux triangles sont semblables.

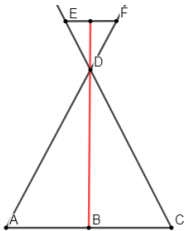


Film 19

0' à 6'	La séance se poursuit avec la fiche Triangles semblables qu'il distribue. Le commentaire du professeur porte sur la correspondance des côtés (petit avec petit, grand avec grand). Il insiste sur l'implication triangles semblables, proportionnalité des côtés et sa réciproque. Puis il revient à l'exercice du tipi. Il refait la figure et demande aux élèves de repérer les triangles semblables (EFD et ADC) puis propose une rapide démonstration de l'égalité de leurs angles. Pour calculer EF il indique qu'il faudra utiliser la proportionnalité.
---------	--

Film 20

Temps	
0' à 5'	Les élèves s'installent.
5' à 10'	Récapitulation du programme de travail pour le mois à venir. Le professeur demande aux élèves de rappeler ce qui a été vu au dernier cours. Les élèves évoquent l'activité du tipi, le théorème de Thalès, Pythagore. Le professeur précise qu'ils n'ont pas vu le théorème de Thalès mais qu'ils commencent à l'introduire.
10' à 16'	L'enseignant affiche l'exercice du tipi au tableau et rappelle le travail déjà fait : le schéma, la résolution de la première question en utilisant le théorème de Pythagore pour calculer la hauteur. Il trace la figure sur laquelle il marque les longueurs connues et les angles égaux. Il insiste sur les mots importants travaillés : triangles semblables avec la définition et annonce qu'il y aura de la proportionnalité. Il demande aux élèves de justifier pourquoi les triangles EDF et

	ADC sont semblables et les aide à retrouver les connaissances utiles : les triangles sont isocèles, ils ont un angle en commun et la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .								
16' à 20'	L'enseignant répète le raisonnement et écrit la conclusion au tableau (EDF et ADC sont semblables).								
20' à 25'	<p>Un élève ayant parlé d'angles opposés, le professeur fait un bref rappel sur le vocabulaire concernant les angles : alternes internes, correspondants, opposés par le sommet. Il insiste sur le lien triangles semblables, tableau de proportionnalité et construit au tableau celui en jeu en indiquant comment établir les côtés correspondants dans ce tableau de nombres :</p> <table border="1" data-bbox="363 555 887 707"> <tr> <td>EFD</td> <td>EF</td> <td>FD (1,5)</td> <td>ED (1,5)</td> </tr> <tr> <td>ACD</td> <td>AC (12)</td> <td>AD (7,5)</td> <td>CD (7,5)</td> </tr> </table>  <p><i>ça fait partie de Thalès dit-il mais formulé différemment.</i></p>	EFD	EF	FD (1,5)	ED (1,5)	ACD	AC (12)	AD (7,5)	CD (7,5)
EFD	EF	FD (1,5)	ED (1,5)						
ACD	AC (12)	AD (7,5)	CD (7,5)						
25' à 29'	Pour calculer EF, le professeur suggère de calculer une quatrième proportionnelle ($EF=2,4$). Il montre que EFD est 5 fois plus petit que ACD puis projette au tableau la fiche donnée à la dernière séance sur les triangles semblables. Il indique que le cœur de Thalès est là.								
29' à 35'	<p>Le professeur propose une nouvelle activité aux élèves construire deux triangles semblables à l'aide de 4 droites.</p> <p style="text-align: center;">La conjecture (GeoGebra)</p> <p style="background-color: yellow;">Comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites ?</p> <p>Les élèves cherchent seuls. Le professeur distribue des règles et circule dans la classe en regardant les productions individuelles. Suit une petite discussion à la suite d'une confusion entre triangles identiques et semblables.</p>								
35' à 40'	<p>Le professeur projette au tableau la construction Geogebra des 4 droites et demande aux élèves où sont les deux triangles construits et s'ils sont semblables. Un élève répond que ce n'est pas parallèle.</p> <p>Les longueurs des côtés des triangles sont affichées au tableau ainsi que les rapports des longueurs des côtés correspondants. Ainsi quand le professeur fait varier la position des droites pour se rapprocher de droites parallèles, les rapports des longueurs des côtés des triangles changent et tendent vers l'égalité. Il conclut que deux sécantes coupées par deux parallèles donnent automatiquement deux triangles semblables : « <i>voici le théorème de Thalès</i> » dit-il. Il insiste sur le fait que le repérage est visuel : dans la configuration il faut voir un petit triangle et un grand.</p>								
40' à 47'48'	<p>Le professeur démontre que si les droites sont parallèles les angles des deux triangles ont des angles égaux (alternes internes, correspondants) donc ils sont semblables.</p> <p>Il ramasse les règles et les élèves prennent leur cahier de cours pour la nouvelle leçon.</p>								

Le théorème de Thalès

(Cahier de Leçon)

1) Théorème de Thalès – La configuration

Si

- Les droites (MB) et (NC) sont **sécantes en A**
- Les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**

Alors
Les triangles ABC et AMN sont semblables.

Rappel : Deux triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles.

Remarque : Il y a plusieurs façons d'exploiter la proportionnalité...

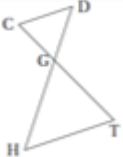
- On peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix (recommandé)

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle AMN	AM	AN	MN

- Utiliser le coefficient de proportionnalité et parler d'agrandissement ou de réduction (parfois utile)
- ou encore écrire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (mode expert)

Le professeur commente les différentes figures, montre les triangles semblables, rappelle les « ingrédients » : les droites parallèles, les droites sécantes (mot mathématique) avec leurs noms. Il résume le théorème de Thalès : si des sécantes et des parallèles alors les triangles sont semblables et on exploite ce que veut dire semblables, mêmes angles mais surtout proportionnalité.

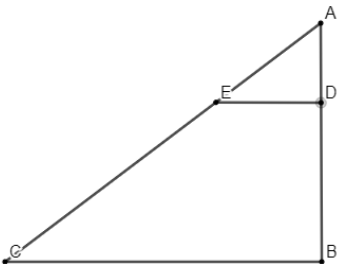
Film 21

Temps	
0' à 5'	La fiche « Théorème de Thalès » est projetée au tableau. Par un commentaire méta, le professeur précise que les théorèmes de Pythagore et de Thalès permettent de faire un lien entre propriétés géométriques et propriétés numériques. Il indique que si le cœur de Thalès c'est la proportionnalité, il y a plusieurs façons de l'exploiter : comme un agrandissement ou une réduction (qui peuvent être donnés en pourcentage), avec un tableau de proportionnalité (respecter la correspondance des côtés des triangles), ou le mode expert avec des fractions (rapport de longueurs).
5' à 10'	Les élèves recopient le tableau de proportionnalité et le travaillent seuls, le professeur circule dans la classe.
10' à 15'	Le professeur propose l'exemple d'utilisation à chercher. Les droites (CD) et (HT) sont parallèles. $GD = 25$ mm, $GH = 45$ mm, $CG = 20$ mm et $HT = 27$ mm. Calculer CD et GT.  Par un commentaire méta le professeur distingue savoir faire et savoir rédiger. Pendant que les élèves travaillent il dessine la figure au tableau avec les mesures des longueurs connues.
15' à 23'30	Les élèves cherchent seuls au brouillon mais sans rédiger dans un premier temps. L'enseignant, après avoir précisé qu'ils raisonnent sur une configuration de Thalès, leur demande de quel outil ils vont se servir. Un élève propose le rapporteur. L'enseignant justifie sa réponse (instrument pas outil et seulement quelquefois pour confirmer un résultat) et donne la réponse qu'il attendait la proportionnalité.

	Il intervient ensuite après des élèves individuellement.
23'30 à 28'	Le professeur retourne au tableau et propose de faire un tableau qui permettra de calculer les longueurs. Un élève pose une question concernant ce que le professeur a appelé « mode expert » sur la fiche ... L'enseignant précise que les 3 nombres sont égaux, qu'on a 3 fois le même coefficient, qu'on peut écrire les quotients dans « l'autre sens » et qu'on est dans le champ des fractions.
28' à 33'29	Il interroge une élève qui vient faire les calculs au tableau pendant que les autres continuent à chercher seuls. L'élève au tableau construit un tableau de proportionnalité. Le professeur circule dans la classe, valide le travail de l'élève au tableau qui revient à sa place. Il fait un point sur les difficultés que peuvent rencontrer les élèves : le tableau, voir les 2 triangles, respecter l'alignement des côtés. Il interroge un élève pour donner la longueur CD. Fin de la séance

Film 22 vide

Film 23

Temps	
0' à 5'	<p>Les élèves s'installent. La séance est consacrée à la résolution de la question 3 de l'exercice du tipi qui est projetée au tableau :</p> <p>3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 mètres et ont une envergure de 2,2 mètres. <i>Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?</i></p> <p>Le professeur rappelle que, dans la question 1, la hauteur du tipi a été trouvée (4,5 m) et dans la question 2, le diamètre de la plateforme en utilisant le théorème de Thalès (2,4 m). Un élève est interrogé au tableau pour tracer la figure simplifiée pour être plus claire, indiquer les longueurs connues et mettre des lettres.</p>  <p>AB=4,5 m DB=3,5 m D'où AD=1m BC= 6 m AC=7,5 m (Les lettres ne sont pas celles de la figure précédente)</p> <p>Le professeur indique qu'il faut mobiliser le théorème de Thalès pour déterminer la longueur ED « inaccessible » sinon.</p>
5' à 10'	<p>Il rappelle les ingrédients particuliers pour pouvoir utiliser le théorème de Thalès : deux droites parallèles et deux droites sécantes ce qui donne des triangles semblables. Pour la figure ci-dessus il démontre que les droites (DE) et (BC) sont parallèles car (AD) est la hauteur du tipi donc perpendiculaire à sa base. Il admet que les ailes du totem sont perpendiculaires à la hauteur du tipi. Par un jeu de questions réponses prof/ élèves on peut démontrer que (DE) et (BC) sont parallèles (deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles entre elles) et que les droites (AB) et (AC) sont sécantes.</p>

10' à 15'	<p>Le professeur en déduit que le théorème de Thalès dit que les triangles ADE et ABC sont semblables. Un élève dicte le tableau de proportionnalité écrit par le professeur au tableau qui calcule DE</p> <table border="1" data-bbox="352 300 871 416"> <tr> <td>ADE</td> <td>DE</td> <td>AD (1)</td> <td>AE</td> </tr> <tr> <td>ABC</td> <td>BC (6)</td> <td>AB (4,5)</td> <td>AC (7,5)</td> </tr> </table> <p>$DE = \frac{6}{4,5} \approx 1,33$. Le professeur conclut que les ailes mesurant 2,2 m, la moitié est égale à 1,10 m et donc le totem rentre dans le tipi ($1,33 > 1,10$)</p>	ADE	DE	AD (1)	AE	ABC	BC (6)	AB (4,5)	AC (7,5)
ADE	DE	AD (1)	AE						
ABC	BC (6)	AB (4,5)	AC (7,5)						
15' à 22'	<p>Le professeur fait constater aux élèves que ABC a des côtés 4,5 fois plus grandes que ADE (3^e colonne du tableau ci-dessus) et demande aux élèves si l'aire sera 4,5 fois plus grande. Ils ne peuvent pas savoir. Cette question est remise à plus tard.</p> <p>Le professeur récapitule ce qui est important en géométrie : faire une figure épurée pour qu'elle « parle » ; ne pas oublier parallèles et sécantes ; faire attention à l'alignement ; utiliser les produits en croix.</p> <p>Un élève demande si on peut utiliser $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ Le professeur indique que plusieurs rédactions sont possibles mais que les élèves sont peut-être plus à l'aise pour faire les calculs avec les tableaux de proportionnalité que les fractions.</p>								

Annexe 2 : la résolution de la question 3 du tipi

L'énoncé



3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 m et ont une envergure de 2,2 mètres.

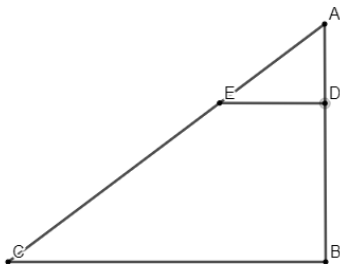
Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?

La tâche

La troisième question demande de mathématiser pour traduire le fait que le totem rentre dans la tente par le fait que le "bras" a une mesure inférieure ou égale à la largeur de la tente à la hauteur du bras. D'où le calcul de cette largeur, cette fois avec le théorème de Thalès – même si on peut encore se ramener aux triangles semblables - et les adaptations suivantes : se placer dans le demi-triangle modélisant le totem ; vérifier que les droites sont parallèles en utilisant un théorème "ancien" (droites perpendiculaires à une même droite) ; calculer le côté inconnu en choisissant bien le calcul ; comparer le résultat et la largeur donnée.

Le déroulement

Avant de commencer à résoudre avec les élèves la question 3 de l'exercice du tipi, le professeur rappelle que, la veille, les questions 1 et 2 ont permis de calculer la hauteur du tipi et, à l'aide du théorème de Thalès, le diamètre de la plateforme. Il précise que la « situation à éviter » c'est que « les ailes du totem dépassent du tipi ». Il interroge un élève au tableau pour construire « une figure mathématique sur laquelle raisonner » qui retourne ensuite à sa place. Le professeur continue seul à écrire au tableau. Il demande aux élèves « de faire des propositions et ensuite de mobiliser le théorème de Thalès pour déterminer cette longueur inaccessible. » (Aide). Cela évite que les élèves en restent aux triangles semblables... La figure tracée au tableau est simplifiée au maximum. Les points sont nommés « pour pouvoir communiquer » et les mesures indiquées.



L'enseignant interroge les élèves :

P : Et pour Thalès, j'ai besoin d'un ingrédient très particulier, qu'on n'a pas encore ... Qu'est-ce qu'il dit Thalès et qui m'intéresse ? (Proximité descendante)

E : Les deux droites sont parallèles.

P : Il dit ça Thalès ? Il dit qu'il faut des droites comment ?

E : Parallèles

P : Et plus que ça après (Proximité horizontale)

E : deux droites parallèles et deux droites sécantes en un point.

P : Est-ce qu'on a les ingrédients ? (Proximité horizontale ?)

E : oui

P : Et qu'est-ce qu'il vous dira Thalès à ce moment-là ? Que c'est ? (Proximité descendante)

E : Les triangles sont proportionnels, semblables.

P : Semblables, voilà ce qu'il vous dira Thalès. Il me manque juste ce qu'a dit ... Où sont les droites parallèles ? (Aide)

Les élèves proposent les droites parallèles (BC) et (DE) ? L'enseignant valide que ce choix est pertinent, le justifie lui-même et continue avec la participation des élèves la rédaction de la réponse à la question.

P : Le théorème de Thalès nous dit quoi ? (Proximité descendante)

E : Il faut faire un tableau de proportionnalité.

P : J'ai de la proportionnalité dans les deux triangles. Ce mot semblable nous dit alors qu'il y a une correspondance à faire, on a travaillé hier, et sur laquelle il faut pas se tromper.

(Proximité descendante)

L'enseignant construit le tableau de proportionnalité. Un élève dicte les longueurs des segments qui y figurent et leurs mesures.

ADE	DE	AD (1)	AE
ABC	BC (6)	AB (4,5)	AC (7,5)

Le professeur précise qu'on s'intéresse à DE, qu'on écrit pour le calculer $\frac{6 \times 1}{4,5}$ et qu'on ne sort la calculatrice que maintenant. Un élève donne le résultat : 1,333

L'enseignant reprend : « la calculatrice vous répond $\frac{4}{3}$ » puis « environ 1,33 »

Il conclut que les ailes mesurant 2,2 m, la moitié est égale à 1,10 m donc le totem rentre dans le tipi (1,33 > 1,10).

Un bilan

Il nous manque, certes, un extrait de séance entre le premier exemple d'application du théorème de Thalès et cette résolution de la question 3 de l'exercice du tipi ; cependant ce complément peut nous permettre d'apprécier un peu les effets de ce qui précède et les difficultés encore éprouvées par les élèves.

Le théorème de Thalès n'était pas disponible pour les élèves au lendemain du cours ce dont l'enseignant était conscient puisqu'il leur propose, dès le début de la recherche, de le « mobiliser ». Cependant, les élèves (au moins certains d'entre eux) s'appuyant sur les questions du professeur (proximités) peuvent en effet le faire en partie.

Si on compare le déroulement de cette recherche (dont la durée est de 5 min) avec celui de la résolution de l'exemple d'application qui suit le cours (dont la durée est de 21'30), le professeur ne précise pas la marche à suivre (dans l'exemple : « je vous mets dans des conditions claires de Thalès, je vous demande de déterminer les nombres qui manquent en utilisant un tableau de proportionnalité de préférence »), ne donne pas lui-même les conditions d'utilisation (dans l'exemple : « j'ai des parallèles et j'ai des sécantes ») mais aidés par un questionnement ciblé, les élèves arrivent eux-mêmes à les citer.

Les points-bilans (1, 2 et 3) de l'exemple ne sont plus nécessaires. Les élèves ont retenu que les triangles (emboîtés) sont « *semblables* » et qu'il y a « *proportionnalité* » (de la longueur des côtés). Un élève dicte le tableau de proportionnalité. Le mode « *expert* » (comme l'a indiqué l'enseignant précédemment) n'est pas évoqué. Là le professeur reprend la main pour la fin de la résolution (longueur à déterminer, mode de calcul et résultat). On peut deviner que le travail sur ces calculs sera la prochaine étape du travail...

Annexe 3 : récapitulatif de la comparaison cours/capsule

	Capsule	Enseignant
Raison d'être Calcul de longueurs Jeu de cadre géométrique/numérique	X (donné après le théorème)	X (problématisé par un exercice : 2 ^{ème} question du tipi résolue après une révision sur les triangles semblables) X
Lien avec le programme précédent Mots prononcés Triangles semblables Angles (égaux) Proportionnalité (des côtés) Côté Droite Segment Longueur Correspond... Aligne... Point Rapport Fraction Tableau de proportionnalité	X (5) 0 X (3) 33 0 1 12 2 0 7 24 1 0	X (5) X (3) X (15) 8 10 0 4 5 1 2 0 2 6
Repérage des côtés homologues En face des angles égaux En respectant l'ordre des longueurs En reconstituant la configuration triangles Visualiser agrandissement/réduction Alignement des points à partir des côtés Côté sur un autre	X X	X (un élève) X X X
Distinguer les configurations Voir Regarder	X (triangle 1-papillon 2) 3 10	X (papillon1-triangle2) 6 0
D'où sortent les fractions		X (tableau de proportionnalité)
Précision côtés, droites, segments, longueur, mesures		
Traitement numérique	X (4 ^{ème} proportionnelle)	X (4 ^{ème} proportionnelle Coefficient de proportionnalité)

		Fractions et 4 ^{ème} proportionnelle)
Justifications Mot démonstration,... Droites parallèles/triangles semblables Triangles semblables/proportionnalité Droites parallèles/proportionnalité	0 Sans rien ! X (Visualisation sur Geogebra en guise de preuve)	1 X (démontré) X (admis explicitement) X (résultat de ce qui précède)
Ordre du cours	<ul style="list-style-type: none"> - Départ par les 2 figures avec triangles semblables (admis) - Paraphrase du théorème pour les 2 versions - Conditions d'utilisation - Conclusion - Utilisation dans un exemple 	<ul style="list-style-type: none"> - Raison d'être - Triangles semblables - Proportionnalité - Droites parallèles/ Triangles semblables - Le théorème
Méta	<ul style="list-style-type: none"> - Paraphrase avec des mots familiers - Des généralités - Ce qui va changer dans le théorème - Seule condition à vérifier 	<ul style="list-style-type: none"> - Points bilan organisés - Proximités - Aides en appui avec le travail des élèves - Prises de hauteur avec des mots familiers
Lapsus	<ul style="list-style-type: none"> - Si les triangles sont semblables alors les droites sont parallèles (c'est l'inverse qui est attendu) - Sur le mot rapport 	<ul style="list-style-type: none"> - Sur ce qui est proportionnel

Annexe 4 : la transcription du début du cours

Le théorème de Thalès

(Cahier de Leçon)

1) Théorème de Thalès – La configuration



Si

- Les droites (MB) et (NC) sont **sécantes en A**
- Les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**

Alors

Les triangles ABC et AMN sont semblables.

Rappel : Deux triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles.

Alors il y a des lettres que vous ne voyez peut-être pas du fond de la salle je repasse (il repasse au tableau les noms des segments). Bien.

Mes conseils maintenant : Thalès ça parle d'abord à votre œil. On doit le voir. Ça apparaît sur un schéma, ça apparaît sur une figure. Il faut voir les parallèles, il faut voir les sécantes.

Où sont les parallèles ici

E....

Alors MN et CD. Et là ? pareil

Je vais la repasser en rouge pour vous montrer.

J'ai deux parallèles. J'ai fait plusieurs dessins parce qu'il peut y avoir plusieurs configurations (il repasse dans les 3 dessins). OK.

J'ai toujours deux parallèles. J'ai toujours deux parallèles.

E.

Et ta question c'est pourquoi il n'y en a que deux [triangles ?]? C'est ça ?

E.

Là vous voyez bien les deux triangles ? Et là, il y a un petit et un grand. Et là il y a un autre petit et un autre plus grand. Il montre en suivant du doigt les trois dessins.

E. le 3^{ème} ?

Le triangle AMN et le triangle ABC (il montre).

E. Et là ?

Il y a toujours le triangle AMN et le triangle ABC. Ce sont eux les 2 triangles semblables.

Alors le deuxième ingrédient, J. l'avait dit, c'est les droites qui se tracent comme elle dit

E. Croisent

merci qui se croisent... Il repasse dans les trois dessins.

E. sécantes

Voilà. Qui se croisent oui, sauf que le mot mathématique associé c'est sécantes.

Alors il n'y a pas besoin de longueurs... Il faut que votre œil remarque systématiquement ces configurations. Je parle de configuration, c'est-à-dire, c'est un modèle géométrique, deux droites qui se coupent, deux droites parallèles... Et quand vous vous trouvez face à ce genre de figure, votre cerveau doit dire : ah il y a peut-être Thalès dans le jeu là...

Mettez-y un peu de couleurs, du rouge et du bleu comme je viens de le faire (les élèves écrivent)

Alors le théorème dit, le théorème de Thalès dira, que si j'ai des sécantes et des parallèles, alors quoi ?

E.

Alors j'aurai 2 triangles semblables.

Maintenant je le dis avec les lettres de la figure. Les droites (MB) et (NC) sont sécantes au point A. A chaque fois j'ai des droites qui se coupent et qui se croisent au point A. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Voilà une bonne configuration pour obtenir 2 triangles semblables. La démonstration je l'ai faite tout à l'heure rapidement avec l'idée de N. et les angles correspondants. Si j'ai des droites parallèles j'ai des angles égaux (il montre) et donc j'aurai des triangles semblables. Et le rappel, il est très très fort, qui va apparaître ici. Donc ça c'est le théorème de Thalès.

P. Et par contre Thalès, on l'utilise comment, c'est qu'on exploite ce que veut dire semblable » C'est un truc très très fort. OK, ça veut dire qu'il y a les mêmes angles mais ça veut surtout dire qu'il y a quoi ? Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ?

E : la proportionnalité

P : de la proportionnalité et c'est ça qui est très très fort dans Thalès, c'est qu'on va utiliser cette proportionnalité.

Rappel 2 triangles semblables sont des triangles qui ont des longueurs proportionnelles (il montre ce qui est projeté au tableau)

Thalès c'est exploiter cette proportionnalité pour déterminer les longueurs (il distribue des feuilles de cours à des élèves). Thalès c'est d'abord un coup d'œil, on voit des trucs parallèles, on voit les sécantes, il y a de la proportionnalité, il y a Thalès qui est là. »

E. Si dans un exercice il y a des parallèles et des sécantes il y a Thalès ?

Il a 90% de chances qu'on te fasse utiliser Thalès.

E. Que ça ?

J'insiste de façon générale. Thalès et Pythagore sont emblématiques au collège. Ils vont tisser des passerelles entre deux mondes, l'un numérique et l'autre géométrique. Pythagore comme on l'a vu tout à l'heure ou avant les vacances grâce à l'angle droit le fais une égalité et si j'ai cette égalité ça veut dire que j'ai un angle droit. Pythagore a ici tissé un premier lien entre droites perpendiculaires, triangle rectangle d'un côté et égalité de Pythagore avec des aires de l'autre. Donc pour savoir s'il y a un angle droit je fais un calcul.

Thalès c'est quelque chose d'aussi fort. Il va lier la proportionnalité qui vit dans un monde de tableaux et dans un monde de nombres à des droites parallèles et des droites sécantes, en géométrie ; voilà pourquoi ils sont si importants. Ils ont clairement établi des liens entre des propriétés géométriques et des opérations numériques. Maintenant le cœur de Thalès ça va être d'exploiter la proportionnalité... C'est la raison pour laquelle on y a passé beaucoup de temps en début d'année, à revenir sur les tableaux. C'est vraiment l'ingrédient clef, ça fait tourner beaucoup de choses la proportionnalité, notamment la quatrième proportionnelle qu'on a revu tout à l'heure ensemble. Donc c'est un peu la suite.

Il y a plusieurs moyens d'exploiter la proportionnalité... On remarque que Thalès il y a une rédaction évolutive, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire de plusieurs façons.... Tout à l'heure vous m'avez dit le triangle il est zoomé...[on a dit j'avais un triangle 5 fois plus petit...] ça s'appelle agrandissement, réduction ça ; il y a une autre façon, ce serait de faire un tableau de proportionnalité et puis une façon experte ce serait en utilisant des fractions, donc ce qui nous attend maintenant c'est d'arriver au mode expert celui qui sera utilisée au lycée.

Alors on peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix, ce que je recommande. C'est-à-dire que comme tout à l'heure on était aux portes de Thalès. J'ai un triangle ABC, j'ai un triangle AMN (il montre).

Remarque : Il y a plusieurs façons d'exploiter la proportionnalité...

- On peut faire un tableau de proportionnalité et utiliser le produit en croix (recommandé)

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle AMN	AM	AN	MN

- Utiliser le coefficient de proportionnalité et parler d'agrandissement ou de réduction (parfois utile)
- ou encore écrire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (mode expert)

Je fais une correspondance sans me tromper... Et c'est là que je vous attends. AB il enlève le tableau, on va voir hein.

Le piège de Thalès il sera là. Souvent on fait une erreur dans la correspondance des côtés. Souvent on fait une erreur dans la correspondance des côtés. Par exemple ce triangle il faut que j'associe chaque côté à l'autre triangle. Par exemple le côté CB il va avec qui ?

E. MN

MN. Et on aura à chaque fois CB va avec MN. Quand j'agrandis le côté CB se transforme en MN. Et e côté AB va avec qui

E. MA.

Le côté AB quand j'agrandis, MA oui. C'est là où il ne faut pas se tromper. Il faut rester dans l'alignement.

AB va avec AM, AB va avec AM. (il montre sur les trois dessins).

Il faut bien voir que vous avez un petit triangle là que je fais apparaître un petit peu en surbrillance en vert/bleu turquoise et puis vous avez un autre grand triangle que je fais apparaître en rouge ici (il montre) et il y a cette correspondance.

C'est la première façon d'utiliser Thalès, c'est je fais un tableau de proportionnalité. La deuxième façon c'est d'utiliser le coefficient de proportionnalité, parler d'agrandissement réduction (il cite les calculs de l'élève qui avait suggéré cette méthode pour un exercice précédent : il a vu que de 1,5 à 7 ? 5 il y a 5 et après 12 il a multiplié par 5... c'est la vision d'agrandir les deux 5 fois) ... Et la dernière façon c'est le mode expert et je vous attends pour commenter. Là j'ai des fractions. J'aimerais que vous réfléchissiez, ça veut dire quoi ce truc (il montre l'égalité des trois rapports de longueurs) ».

Intermède : avec une élève, explication de la relation entre coefficient de proportionnalité et pourcentage.

Annexe 5 : quelques précisions données par l'enseignant sur ses séances.

a) Présentation générale (donnée par mail)

Les séances filmées se positionnent à la toute fin d'un travail sur Pythagore (des rappels pour certains, une découverte pour d'autres ...). Le problème du tipi est l'introduction à Thalès, en visant dans un premier temps la caractérisation abordée en 4° : Triangles semblables et longueurs proportionnelles. Il a aussi pour objectif de travailler la modélisation en cherchant une figure exploitable par les outils mathématiques permettant de répondre aux questions du problème. Enfin, un choix a été fait pour la première question : les différentes expériences de ce problème m'ont amené à l'ajouter... En effet, les élèves mobilisaient majoritairement le théorème de Pythagore pour accéder à la donnée manquante (celle de la question 2). J'ai donc décidé de poser une question qui mobilise d'entrée leur connaissance de Pythagore, et de montrer que cette connaissance est inadaptée pour la seconde question.

b) Quelques réponses supplémentaires à nos questions posées bien après les séances

Est-ce que les élèves ont vu le théorème de Thalès avant (en quatrième) ?

Thalès n'est pas explicitement fait en 4° mais ce résultat est abordé à l'occasion du travail sur les triangles semblables. Il n'y en a aucune trace dans les savoirs institutionnalisés mais je sais que les collègues ne manquent pas de signaler aux élèves que ce théorème sera travaillé en 3°.

Pourquoi l'élève qui suggère que ce sont des droites parallèles qui déterminent des triangles semblables coupant deux droites sécantes, a-t-il eu cette idée ?

Je n'ai pas souvenir de cet élève (la séance date et je n'ai pas gardé la vidéo...). Cependant, j'ai fait l'hypothèse en montant cette activité que l'aspect des parallèles horizontales sera perçu par les élèves. Dire que cela conduit à l'identification de triangles semblables suppose la mobilisation d'une part des propriétés des angles égaux dans le cas d'une sécante coupant deux parallèles, et de la caractérisation des triangles semblables par les angles.

Dire pourquoi cet élève fait cette suggestion m'est assez difficile. Il peut s'agir d'une simple observation d'une propriété supposée de la figure sans lien avec les triangles semblables ou, au mieux, un élève qui perçoit que seule la condition de parallélisme permettra d'avoir deux triangles « identiques », qui ont la même forme. Dans tous les cas, j'attends de la classe que ce mot ressorte afin de pouvoir faire moi-même le lien avec les triangles semblables.

Sur la conjecture

C'est un élève qui manipule la construction Geogebra projetée en classe. L'accent est porté sur : « plus les coefficients du tableau sont proches, plus les droites semblent parallèles. Lorsque le tableau est de proportionnalité, nous avons le parallélisme ».

Quelles interrogations ou remarques ou commentaires tu as, toi, sur ces séances filmées ?

J'ai un ressenti très mitigé ; Les élèves ont bien acquis le lien entre parallélisme et proportionnalité, mais j'ai dû prendre en charge la majorité des adaptations de cette activité. La phase de dévolution a été fortement entravée par l'obstacle de modélisation. J'ai l'habitude de conduire cette activité et je l'ai d'ailleurs faite cette même année dans une autre classe de 3° et c'est passé bien plus facilement.

TITRE :

Introduire le théorème de Thalès en troisième - Quel appui sur le travail des élèves en classe ? Analyses de vidéos en REP en temps de Covid (2020-2021).

AUTEURS:

Monique Chappet-Paries, Aline Robert

RÉSUMÉ :

Dans cette monographie, nous analysons, à partir de vidéos tournées en classe, l'introduction du Théorème de Thalès faite dans une classe de troisième (REP) – en temps de Covid (2020-2021). Un des objectifs de l'étude est d'apprécier la manière dont l'enseignant s'appuie sur ce qui vient des élèves pour le rapprocher des connaissances visées (cf. proximités). Une justification de notre intérêt pour les interventions orales de l'enseignant en relation avec les apprentissages (adoption didactique du modèle de la ZPD) est présentée. Cela amène à établir le scénario des séances et à en étudier le déroulement fin. Une étude du savoir visé croisant les caractéristiques mathématiques de la notion en jeu dans le programme et les difficultés des élèves (relief) précède ces analyses, nous servant de référence pour apprécier les choix du professeur (autre objectif).

Nous abordons les questions suivantes : quels liens cet enseignant tisse-t-il entre les activités des élèves et le nouveau savoir, y compris dans un moment d'exposition des connaissances ? Dans quelle mesure ces proximités s'adaptent-elles aux différentes dynamiques d'appropriation mises en place, entre contextualisé et décontextualisé ?

Nous avons aussi dégagé de notre étude une logique d'action de l'enseignant, caractérisée par un choix de tâches donnant de nombreuses occasions de proximités et des déroulements faisant toujours place à un travail de recherche des élèves précédant des interventions collectives, qui peuvent ainsi porter des proximités variées. Ainsi cet enseignant, malgré les contraintes, ne renonce pas à installer le théorème avec du sens, avant de travailler la technique.

Nous revenons en conclusion sur des alternatives à ces choix et sur des utilisations éventuelles, en formation, de ce type d'étude.

MOTS- CLÉS :

Théorème de Thalès, triangles semblables, analyse de vidéos, proximités, relief, pratiques, logique d'action, REP.

Éditeur: IREM de Paris

Responsable de la publication: C. Hache

IREM de Paris – Case 7018

Université de Paris

75205 Paris cedex 13

irem_de_paris@u-paris.fr

<https://irem.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2022

ISBN : 978-2-86612-401-4