



HAL
open science

Extension de feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte conexe

Cyrille Dadi

► **To cite this version:**

Cyrille Dadi. Extension de feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte conexe. 2023. hal-04189445

HAL Id: hal-04189445

<https://hal.science/hal-04189445>

Preprint submitted on 28 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Extension de feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte conexe

Cyrille Dadi

Fundamental Mathematics Laboratory ,
University Felix Houphouet-Boigny , ENS
08 PO Box 10 Abidjan (Ivory Coast)
email : cyriledadi@yahoo.fr

August 28, 2023

Abstract¹

Given a parallelizable transverse foliation (M, \mathcal{F}) on a compact connected manifold M and let $\ell(M, \mathcal{F})$ be Lie algebra of \mathcal{F} -transverse foliated vector fields, then there is a *one-to-one* correspondence between Lie-subalgebras of $\ell(M, \mathcal{F})$ and the extensions of (M, \mathcal{F}) .

1 Introduction

Etant donné un \mathcal{G} -feuilletage de Lie \mathcal{F} ayant ses feuilles denses sur une variété compacte M on montre dans ([1], [2]) qu'il y a une correspondance biunivoque entre les sous- algèbres de Lie de \mathcal{G} et les extensions de \mathcal{F} .

Dans cet article on généralise ce résultat aux feuilletages transversalement parallélisables. Pour y arriver on utilise le résultat suivant se trouvant dans [2] : Etant donné $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) de dimension p sur une variété M de dimension $(p + q)$ alors (M, \mathcal{F}) admet une extension (M, \mathcal{F}') de dimension $p + n$ avec $n \leq q$ si et seulement s'il existe sur T un feuilletage \mathcal{F}'_T de dimension n invariant par les γ_{ij} .

On note que \mathcal{F}'_T est le projeté de (M, \mathcal{F}') sur T suivant les feuilles de (M, \mathcal{F})

...

Ceci dit, notre papier est divisé en quatre parties:

- la deuxième partie est consacrée aux rappels sur les feuilletages et sur les extensions des feuilletages .
- la troisième partie est consacrée à une propriété des recouvrements d'ouverts des variétés compactes connexes
- la quatrième partie est consacrée au résultat principal

¹2010 **Mathematics Subject Classification:** 53C05, 53C12, 58A30

Keywords and phrases : *feuilletage, feuilletage transversalement parallélisable, extension de feuilletage transversalement parallélisable, champs feuilleté, algèbre de lie des champs feuilletés.*

2 Préréquis

Dans ce paragraphe, nous reformulons dans le sens qui nous est utile certaines définitions et certains théorèmes qui se trouvent dans ([1], [2], [4], [5], [8]).

Definition 2.1 *Un feuilletage (M, \mathcal{F}) de codimension q sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M , de submersion $f_i : U_i \rightarrow T$ où T est une variété de dimension q et, pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, d'un difféomorphisme*

$$\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset T \rightarrow f_i(U_i \cap U_j) \subset T$$

satisfaisant :

$$f_i(x) = (\gamma_{ij} \circ f_j)(x) \text{ pour tout } x \in U_i \cap U_j.$$

On dit que $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ est un cocycle feuilleté.

La variété T est appelée variété transverse du feuilletage (M, \mathcal{F}) .

Le variété transverse T peut être vu comme une réunion disjointe des ouverts $f_i(U_i)$.

Definition 2.2 *Le quotient*

$$\mathcal{V}(\mathcal{F}) = \frac{TM}{T\mathcal{F}}$$

est le fibré transverse du feuilletage \mathcal{F}

S'il existe sur M une métrique on identifie $\mathcal{V}_x(\mathcal{F})$ et $(T_x\mathcal{F})^\perp$ où $(T_x\mathcal{F})^\perp$ est l'orthocomplémentaire de $T_x\mathcal{F}$

Definition 2.3 *Soit $X \in \chi(M)$ où $\chi(M)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à la variété M et $\chi(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents au feuilletage \mathcal{F} .*

X est dit feuilleté si et seulement si

$$\forall Y \in \chi(\mathcal{F}), [X, Y] \in \chi(\mathcal{F}) .$$

L'ensemble des champs feuilletés est noté $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$.

$\chi(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$. On a la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow \chi(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}(M, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}(M, \mathcal{F})/\chi(\mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Le quotient

$$\ell(M, \mathcal{F}) = \mathcal{L}(M, \mathcal{F})/\chi(\mathcal{F})$$

est appelé l'algèbre de Lie des champs transverses au feuilletage \mathcal{F} . On remarquera que c'est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les sections du fibré transverse $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.

Proposition 2.4 [6] *Dans tout ouvert simple distingué U , un champ de vecteur X est feuilleté si et seulement s'il est **projetable** en un champ de vecteurs sur la variété quotient locale \overline{U}*

Definition 2.5 Soit $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) sur variété M et $\dim(T) = q$.

On dit que (M, \mathcal{F}) est transversalement parallisable si et seulement s'il existe X_1, X_2, \dots, X_q q champs de vecteurs linéairement indépendant et invariant par les γ_{ij} .

On notera dans ce cas que chaque champ de vecteur X_i induit sur M un champ de vecteur feuilleté. qui est encore noté X_i .

Definition 2.6 Une extension d'un feuilletage (M, \mathcal{F}) de codimension q est un feuilletage (M, \mathcal{F}') de codimension q' tel que $0 < q' < q$ et les feuilles de (M, \mathcal{F}') sont des réunions de feuilles de (M, \mathcal{F}) (on notera $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$).

On montre que si (M, \mathcal{F}') est une extension simple d'un feuilletage simple (M, \mathcal{F}) et si (M, \mathcal{F}) et (M, \mathcal{F}') sont définis respectivement par les submersions $\pi : M \rightarrow T$ et $\pi' : M \rightarrow T'$, alors il existe une submersion $\theta : T \rightarrow T'$ telle que $\pi' = \theta \circ \pi$.

On dira que la submersion θ est une liaison entre le feuilletage (M, \mathcal{F}) et son feuilletage extension (M, \mathcal{F}') .

On montre dans [1] que si le feuilletage (M, \mathcal{F}) et son extension (M, \mathcal{F}') sont définis respectivement par les cocycles $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ et $(U_i, f'_i, T', \gamma'_{ij})_{i \in I}$ alors on a

$$f'_i = \theta_i \circ f_i \text{ et } \gamma'_{ij} \circ \theta_j = \theta_i \circ \gamma_{ij}$$

où θ_s est une liaison entre le feuilletage (U_s, \mathcal{F}) et son feuilletage extension (U_s, \mathcal{F}') .

Proposition 2.7 [3] Etant donné $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) de dimension p sur une variété M de dimension $(p + q)$ alors (M, \mathcal{F}) admet une extension de dimension $p + n$ avec $n \leq q$ si et seulement s'il existe sur T un feuilletage de dimension n invariant par les γ_{ij} .

Theorem 2.8 ([1], [2]) Soit (M, \mathcal{F}) un G -feuilletage de Lie ayant ses feuilles denses sur une variété compacte et connexe, d'algèbre de Lie \mathcal{G} .

Alors:

1- Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ (ou si l'on préfère entre les sous-groupes de Lie connexes de G) et les extensions de \mathcal{F} .

2- Une extension de \mathcal{F} est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage transversalement riemannien à fibré normal trivial, définie par une 1-forme vectorielle à valeurs dans $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$.

3- Une extension de \mathcal{F} est transversalement homogène (resp. de Lie) si et seulement si le sous-groupe de Lie de G correspondant est un sous-groupe fermé (resp. un sous-groupe normal) dans G .

Remark 2.9 Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ une extension d'un \mathcal{G} -feuilletage de Lie \mathcal{F} ayant ses feuilles denses sur une variété compacte correspondant à la sous-algèbre de Lie \mathcal{H} de \mathcal{G} ,

- i) $T\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = T\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$
ii) Soit $\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ (resp. $\mathcal{X}(\mathcal{F})$) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ (resp. \mathcal{F}), $\mathcal{A}^1(M)$ l'espace des fonctions différentiables sur M et $\tilde{\mathcal{H}}$ l'algèbre des champs de vecteurs \mathcal{F} -feuilletés obtenus à partir de \mathcal{H} .
On a $\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus (\mathcal{A}^1(M) \otimes \tilde{\mathcal{H}})$

Definition 2.10 Soit $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) . S'il existe une métrique riemannienne g_T sur T invariant par les γ_{ij} , on dit que \mathcal{F} est un feuilletage riemannien. La métrique riemannienne g_T est dans ces conditions appelée métrique transverse du feuilletage riemannien \mathcal{F} .

On note que la métrique transverse g_T et une identification du fibré tangent TM à la somme directe des fibrés tangent $T\mathcal{F}$ et normal $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ à \mathcal{F} permettent de construire une métrique riemannienne g sur M ayant les propriétés suivantes:

- 1) les sous-fibrés $T\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ sont orthogonaux pour g ;
- 2) pour chaque application $f_i : U_i \rightarrow T$ et pour chaque point x de U_i l'application tangente $T_x f_i$ induit une isométrie de la fibre $V_x(\mathcal{F})$ sur l'espace tangent $T_{f_i(x)}(T)$.

Une métrique vérifiant les conditions 1) et 2) est dite quasi-fibré relativement à \mathcal{F} .

L'existence d'une métrique quasi-fibrée caractérise les feuilletages riemanniens [8].

Notons que pour toute métrique quasi-fibrée g relativement à un feuilletage riemannien \mathcal{F} , si Y et Z sont deux champs de vecteurs normaux à \mathcal{F} , alors pour tout champ de vecteurs X tangent à \mathcal{F} on a

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) \quad [5].$$

De façon générale, tout champ de vecteurs X (tangent ou non à \mathcal{F}) vérifiant la relation précédente est appelé champ de Killing pour \mathcal{F} . Un tel champ de vecteurs est feuilleté [6]. Le champ transverse associé est appelé champ de Killing transverse pour \mathcal{F} .

Pour terminer, remarquons que tout feuilletage de Lie est transversalement parallélisable et tout feuilletage transversalement parallélisable est riemannien.

Nous terminons ces prérequis en donnons une application du théorème de la base incomplète et en donnons aussi la définition d'un fibré vectoriels trivial.

Proposition 2.11 *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E possède dans E un sous-espace supplémentaire : on considère une base B de F qu'on complète en une base B' de E : l'espace engendré par les vecteurs de B' qui ne sont pas dans B est un supplémentaire de F .*

Definition 2.12 *Le fibré trivial de rang n sur une variété V est $V \times \mathbb{R}^n$ avec la structure d'espace vectoriel constante sur \mathbb{R}^n*

Remark 2.13 *Les sections du fibré trivial s'identifient aux applications $V \rightarrow \mathbb{R}^n$*

Definition 2.14 Deux fibrés $\phi : E \rightarrow M$ et $\psi : E' \rightarrow M$ sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme $h : E \rightarrow E'$ qui induit un isomorphisme de $\phi^{-1}(a)$ sur $\psi^{-1}(a)$ pour tout $a \in M$.

3 Une propriété des recouvrements d'ouverts des variétés compactes connexes

Proposition 3.1 Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts d'une variété M compacte connexe.

Alors il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ de M tel que pour $i \in \{1, \dots, (s-1)\}$

$$U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$$

Proof. Considérons un recouvrement d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ d'une variété M compacte connexe; comme M est compacte alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $(U_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ est un recouvrement d'ouverts de M .

Ceci dit M étant compacte connexe, considrons un recouvrement fini $(O^i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$

de M , on a $O^1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^s O^k \right) \neq \emptyset$ si non M ne serait pas connexe. Notons par x_2 un

élément de $O^1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^s O^k \right)$ et par O_2^1 un ouvert O^k de la réunion $\left(\bigcup_{k=1}^s O^k \right)$ qui con-

tient x_2 . Supposons que O_2^1 est un certain O^{k_o} , on a $(O^1 \cup O_2^1) \cap \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq k_o}}^s O^k \right) \neq \emptyset$

si non M ne serait pas connexe encore. Notons par x_3 un élément de $(O^1 \cup O_2^1) \cap$

$\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq k_o}}^s O^k \right)$ et par O_3^2 un ouvert O^k de la réunion $\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq k_o}}^s O^k \right)$ qui contient x_3

dans la réunion $O^1 \cup O_2^1$. Quitte à ré-indicer les ouverts O^1 et O_2^1 on peut supposer que $x_3 \in O_2^1$. Par ce processus on détermine les ouvert U_{k+1}^k pour $k \in \{1, \dots, (s-1)\}$.

On remarque $(O_{k+1}^k)_{k \in \{1, \dots, (s-1)\}}$ est un recouvrement fini de M et pour $k \in \{1, \dots, (s-1)\}$,

En posant $U_1 = O^1$ et $U_k = O_{k+1}^k$ on a pour $k \in \{1, \dots, (s-1)\}$

$$U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset.$$

■

4 Resultat principal

Theorem 4.1 Soit $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) transversalement parallélisable sur une variété compacte connexe M et $\ell(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs \mathcal{F} -feuilletés transverses.

Alors il existe une correspondance biunivoque entre les extensions de \mathcal{F} et les sous-algèbre de Lie de $\ell(M, \mathcal{F})$.

Proof. Soient $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) transversalement parallélisable de parallélisme \mathcal{F} -transverse (Y_1, Y_2, \dots, Y_q) , (M, \mathcal{F}') une extension de (M, \mathcal{F}) et $\ell(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs \mathcal{F} -feuilletés transverses.

1) On sait d'après [3] qu'étant donné $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un cocycle feuilleté définissant un feuilletage (M, \mathcal{F}) de dimension p sur une variété M de dimension $(p + q)$ alors (M, \mathcal{F}) admet une extension (M, \mathcal{F}') de dimension $p + n$ avec $n \leq q$ si et seulement s'il existe sur T un feuilletage \mathcal{F}'_T de dimension n invariant par les γ_{ij} .

On note que \mathcal{F}'_T est le projeté de (M, \mathcal{F}') sur T suivant les feuilles de (M, \mathcal{F}) .

Comme T admet un parallélisme alors les fibrés tangents $T\mathcal{F}'_T$ et $T(T)$ sont respectivement isomorphe à $T \times \mathbb{R}^n$ et à $T \times \mathbb{R}^q$ où $\dim(\mathcal{F}'_T) = n$ et $\dim(T) = q$.

Ceci dit, on peut dire qu'il existe n sections globales X_1, X_2, \dots, X_n de $T\mathcal{F}'_T$ linéairement indépendant en tout point $x \in T$ (c'est à dire n champs de vecteurs globaux X_1, X_2, \dots, X_n tangents aux feuilles du feuilletage $T\mathcal{F}'_T$, et en tout point $x \in T$, $(X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x))$ est une base de $T_x T\mathcal{F}'_T$).

Ceci dit nous allons construire n champ de vecteurs $\{\bar{X}_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ invariants par les γ_{ij} et linéairement indépendant en tout point $x \in T$ à partir des champs de vecteurs $\{X_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$.

Comme M est compacte alors il existe un nombre fini de $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})$ qui définissent le feuilletage (M, \mathcal{F}) et T peut être vue comme une réunion fini et disjoint des $f_i(U_i)$. De ce fait on dit qu'il existe un cocycle feuilleté $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in \{1, \dots, s\}}$ où $s \in \mathbb{N}$ définissant (M, \mathcal{F}) et

$$T = \bigcup_{i=1}^s f_i(U_i) ;$$

on peut supposer (cf. proposition 3.1) que le recouvrement fini $(U_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ est tel que pour $i \in \{1, \dots, (s - 1)\}$

$$U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$$

Dans ce suit on construit des champs vecteurs $(\bar{X}_r)_{r \in \{1, \dots, n\}}$ sur

$$T = \bigcup_{i=1}^s f_i(U_i)$$

invariants par les γ_{ij} à partir des champs de vecteurs $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de $T\mathcal{F}'_T$ de la façon suivante:

On pose

$$\begin{aligned} (\bar{X}_r)_{/f_1(U_1)} &= (X_r)_{/f_1(U_1)} \\ (\bar{X}_r)_{/f_2(U_2)} &= (\gamma_{21})_* \left((\bar{X}_r)_{/f_1(U_1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{X}_r)_{/f_3(U_3)} &= (\gamma_{32})_* \left((\overline{X}_r)_{/f_2(U_2)} \right) \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet \\
(\overline{X}_r)_{/f_k(U_k)} &= (\gamma_{k(k-1)})_* \left((\overline{X}_r)_{/f_{(k-1)}(U_{k-1})} \right) \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet \\
(\overline{X}_r)_{/f_s(U_s)} &= (\gamma_{s(s-1)})_* \left((\overline{X}_r)_{/f_{(s-1)}(U_{s-1})} \right)
\end{aligned}$$

Les champs de vecteurs \overline{X}_k pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ainsi construits sont par construction invariants par les $\gamma_{k(k-1)}$ et chaque champ de vecteurs \overline{X}_k est tangent à aux du feuilletage \mathcal{F}_T . Et ces champs de vecteurs se relèvent sur M suivant les feuilles de \mathcal{F} en des champs \mathcal{F} -feuilletés transverses \tilde{X}_k tangent aux feuilles de \mathcal{F}' et vérifient

$$(T\mathcal{F})^\perp \cap (T\mathcal{F}') = \langle \tilde{X}_1 \rangle \oplus \langle \tilde{X}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{X}_n \rangle$$

autrement dit $\langle \tilde{X}_1 \rangle \oplus \langle \tilde{X}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{X}_n \rangle$ se projette sur la variété \mathcal{F} -transverse T suivant les feuilletage de \mathcal{F} sur $\langle \overline{X}_1 \rangle \oplus \langle \overline{X}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \overline{X}_n \rangle$

Considérons le système différentiel

$$S : x \rightarrow S(x) = \langle \overline{X}_1(x) \rangle \oplus \langle \overline{X}_2(x) \rangle \oplus \dots \oplus \langle \overline{X}_n(x) \rangle.$$

sur la variété \mathcal{F} -transverse T .

Comme

$$T_x \mathcal{F}' = S(x) \text{ pour tout } x \in T$$

alors on peut affirmer que le système différentiel $x \rightarrow S(x)$ est intégrable.

Ainsi le théorème de Frobenius [6] permet de dire que $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n\}$ est une algèbre de Lie de champs de vecteurs sur T . Cette algèbre de Lie se relève sur M suivant les feuilles de \mathcal{F} sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n\}$. L'ensemble \mathcal{H} est ce fait une algèbre de Lie car :

i) on a

$$T = \bigcup_{i=1}^s f_i(U_i)$$

est une réunion disjointe et finie des $f_i(U_i)$

ii) \mathcal{F}_T est le projeté de $((T\mathcal{F})^\perp \cap (T\mathcal{F}'))$ sur T suivant les feuilles de \mathcal{F}

iii) pour $x \in U_i$

$$T_x f_i : (T_x \mathcal{F})^\perp \rightarrow T_{f_i(x)} T \text{ est une isométrie,}$$

iv)

$$T_x f_i \left(\left(\tilde{X}_k \right) /_{U_i} \right) (x) = \left((\bar{X}_k) /_{f_i(U_i)} \right) (x)$$

Il résulte de ce précède que $\mathcal{H} = \{ \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n \}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\ell(M, \mathcal{F})$.

Comme

$$\left((T\mathcal{F})^\perp \cap (T\mathcal{F}') \right) = \langle \tilde{X}_1 \rangle \oplus \langle \tilde{X}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{X}_n \rangle$$

alors

$$\begin{aligned} T\mathcal{F}' &= (T\mathcal{F} \cap T\mathcal{F}') \oplus (T\mathcal{F})^\perp \cap T\mathcal{F}' \\ &= (T\mathcal{F}) \oplus \left((T\mathcal{F})^\perp \cap T\mathcal{F}' \right) \\ &= (T\mathcal{F}) \oplus \left(\langle \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n \rangle \right) \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que

$$T\mathcal{F}' = T\mathcal{F} \oplus \mathcal{H} .$$

Ainsi \mathcal{H} est la sous-algèbre de $\ell(M, \mathcal{F})$ correspondant à l'extension \mathcal{F}' de \mathcal{F} .
On notera que

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\mathcal{H}} .$$

2) Soit \mathcal{H} une sous-algèbre de $\ell(M, \mathcal{F})$ et soit $S : x \rightarrow T_x \mathcal{F} \oplus ev_x(\mathcal{H})$ un système sur M . Soit Z et B deux champs de vecteurs tels que $Z(x) \in S(x)$ et $B(x) \in S(x)$ pour tout $x \in M$.

Comme $S(x) = T_x \mathcal{F} \oplus ev_x(\mathcal{H})$ alors il existe des champs de vecteurs $Z_{\mathcal{F}}$, $Z_{\mathcal{H}}$, $B_{\mathcal{F}}$ et $B_{\mathcal{H}}$ tels que $Z_{\mathcal{F}}(x) \in T_x \mathcal{F}$, $Z_{\mathcal{H}}(x) \in ev_x(\mathcal{H})$, $B_{\mathcal{F}}(x) \in T_x \mathcal{F}$, $B_{\mathcal{H}}(x) \in ev_x(\mathcal{H})$, $Z = Z_{\mathcal{F}} + Z_{\mathcal{H}}$ et $B = B_{\mathcal{F}} + B_{\mathcal{H}}$.

Ceci dit, on a

$$[Z, B] = [Z_{\mathcal{F}}, B_{\mathcal{F}}] + [Z_{\mathcal{F}}, B_{\mathcal{H}}] + [Z_{\mathcal{H}}, B_{\mathcal{F}}] + [Z_{\mathcal{H}}, B_{\mathcal{H}}]$$

et

$$[Z_{\mathcal{F}}, B_{\mathcal{F}}] + [Z_{\mathcal{F}}, B_{\mathcal{H}}] + [Z_{\mathcal{H}}, B_{\mathcal{F}}] \in T\mathcal{F} \quad \text{et} \quad [Z_{\mathcal{H}}, B_{\mathcal{H}}] \in \mathcal{H}$$

Ce qui montre que

$$[Z, B](x) \in S(x)$$

Ainsi d'après le théorème de Frobenius [6] le système différentiel $S : x \rightarrow T_x \mathcal{F} \oplus ev_x(\mathcal{H})$ est intégrable. Il est aisé de voir que le feuilletage \mathcal{F}_S obtenu est une extension de \mathcal{F} . Et on a

$$T\mathcal{F}_S = T\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$$

car

$$T_x \mathcal{F}_S = S(x) = T_x \mathcal{F} \oplus ev_x(\mathcal{H}) .$$

Le 1) et 2) établissent la correspondance biunivoque en question. ■

References

- [1] **C.Dadi, 2008.** “*Sur les extensions des feuilletages*”. Thèse unique, Université de Cocody, Abidjan.
- [2] **C.Dadi et H.Diallo, 2007.** “*Extension d’un feuilletage de Lie minimal d’une variété compacte*”. Afrika Matematika, Série 3, volume 18 pp 34-45.
- [3] **C. Dadi and A. Codjia, 2018** “Existence of an equivalence between transversely diagonal foliation and transversely almost produced multi-foliated foliation of type (q, q) ” Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Pushpa Publishing House, Allahabad, India Volume 109, Number 2, 2018, Pages 273-302
- [4] **E.Fédida, 1974.** “*Sur l’existence des Feuilletages de Lie*”. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [5] **C.Godbillon, 1985.** “*Feuilletage; Etude géométriques I*”. Publ, IRMA, Strasbourg .
- [6] **P.Molino, 1988.** “*Riemannian foliations*”. Birkhäuser.
- [7] **T.Masson, 2001.** “*Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*”, laboratoire de Physique Théorique, Université Paris XI, Bâtiment 210, 91405 Orsay Cedex France.
- [8] **B.Reinhart, 1959.** “*Foliated manifold with bundle-like metrics*”, Ann. of Math. 69 119-132.1