



HAL
open science

Notes: suites de Farey, fractions continues, arbres de Stern-Brocot, Calkin-Wilf, arbre dyadique, fonction de Minkowski

Laurent Regnier

► To cite this version:

Laurent Regnier. Notes: suites de Farey, fractions continues, arbres de Stern-Brocot, Calkin-Wilf, arbre dyadique, fonction de Minkowski. Master. France. 2023. hal-04189391

HAL Id: hal-04189391

<https://hal.science/hal-04189391>

Submitted on 28 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Notes: suites de Farey, fractions continues, arbres de Stern-Brocot, Calkin-Wilf, arbre dyadique, fonction de Minkowski

Laurent Regnier
Univ Aix-Marseille - CNRS - I2M

17 juin 2023

Table des matières

1	Fractions continues	2
1.1	Développement d'un réel	4
1.2	Développement d'un rationnel	5
2	Voisinage de Farey et médiane	6
2.1	Suite de Farey d'ordre n	9
2.2	Fractions continues et voisinage de Farey	10
3	L'arbre binaire infini	11
3.1	Parcours en largeur de l'arbre binaire	12
3.2	Ordre gauche-droite	13
4	L'arbre de Stern-Brocot	15
5	L'arbre de Calkin-Wilf	17
6	Fonctions génératrices	19
6.1	Une fonction de Gauss pas de Gauss (probablement)	19
6.2	La fonction de Stern	20
7	L'arbre dyadique et la fonction ? de Minkowski	21

Sauf mention explicite du contraire, tous les entiers considérés sont naturels, c'est-à-dire positifs ou nuls.

Fractions et rationnels. Une *fraction* est un couple de deux entiers a , le numérateur, et b , le dénominateur supposé non nul, noté a/b ; deux fractions sont égales si elles ont même numérateur et même dénominateur. Les rationnels (positifs) sont les fractions quotientées par la relation $a/b \sim a'/b'$ ssi $ab' = a'b$.

On notera abusivement a/b la classe des fractions équivalentes à a/b si bien que l'égalité $a/b = a'/b'$ peut se lire comme égalité de fractions ou de rationnels selon le contexte. Lorsque les deux fractions sont irréductibles (a et b premiers entre eux, a' et b' premiers entre eux), les deux égalités sont équivalentes, un fait que l'on utilisera implicitement dans la suite.

L'ensemble des fractions n'est pas ordonné; aussi lorsque l'on parlera d'ordre il s'agira de l'ordre sur les rationnels : $a/b < a'/b'$ signifie que $ab' < a'b$ (ce qui est un pré-ordre sur les fractions, un ordre sur les fractions irréductibles).

1 Fractions continues

Soient x_0, \dots, x_k des nombres réels strictement positifs (sauf éventuellement x_0 qui peut être nul); on note $[x_0, \dots, x_k]$ le nombre :

$$[x_0, \dots, x_k] = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{x_k}}}$$

Autrement dit $[x_0, \dots, x_k]$ est défini par récurrence sur k :

$$\begin{aligned} [x_0] &= x_0 \\ [x_0, \dots, x_{k+1}] &= [x_0, \dots, x_k + 1/x_{k+1}] \end{aligned}$$

Proposition 1. *Pour tout $k \geq 1$ on a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} [x_0, \dots, x_k] &= x_0 + \frac{1}{[x_1, \dots, x_k]}, \text{ et en particulier } [0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{[x_1, \dots, x_k]} \\ [x_0, \dots, x_k] + x &= [x_0 + x, \dots, x_k] \\ [x_0, \dots, x_k, x] &= [x_0, \dots, x_k + \frac{1}{x}], \text{ et en particulier } [x_0, \dots, x_k, 1] = [x_0, \dots, x_k + 1] \end{aligned}$$

Lorsque tous les x_i sont entiers on parle de *fraction continue*. Une fraction continue est donc un nombre rationnel; la fraction irréductible représentant ce rationnel est appelée la *réduite* de la fraction continue.

L'une des raisons de se restreindre aux entiers est que l'on obtient un résultat d'unicité :

Théorème 2. *Soient $(q_k)_{k \geq 0}$ et $(q'_k)_{k \geq 0}$ deux suites d'entiers non nuls sauf possiblement leur premier terme q_0 et q'_0 .*

- (1) *Pour tout n , $q_0 < [q_0, \dots, q_n, 1] \leq q_0 + 1$;*
- (2) *$[q_0, \dots, q_n, 1] = q_0 + 1$ ssi $n = 0$;*
- (3) *Pour tous entiers n et m , si $[q_0, \dots, q_n, 1] = [q'_0, \dots, q'_m, 1]$ alors $m = n$ et $q_k = q'_k$ pour $k = 0, \dots, n$.*

Si $n = 0$ alors $[q_0, \dots, q_n, 1] = [q_0, 1] = q_0 + 1$ ce qui démontre l'encadrement (1). Sinon $[q_0, \dots, q_n, 1] = q_0 + 1/[q_1, \dots, q_n, 1]$.

Par hypothèse de récurrence on a $q_1 < [q_1, \dots, q_n, 1] \leq q_1 + 1$. Comme q_1 est supposé non nul, on en déduit $[q_1, \dots, q_n, 1] > 1$ et par conséquent $0 < 1/[q_1, \dots, q_n, 1] < 1$ d'où finalement $q_0 < [q_0, \dots, q_n, 1] < q_0 + 1$.

(3) se démontre par récurrence sur $n+m$. Si $n+m = 0$ alors $n = m = 0$ donc $[q_0, \dots, q_n, 1] = [q_0, 1] = q_0 + 1$, $[q'_0, \dots, q'_m, 1] = [q'_0, 1] = q'_0 + 1$, d'où $q_0 = q'_0$.

Si $n+m > 0$ alors $n > 0$ et $m > 0$; sinon l'une des deux fractions continues est entière et ne peut être égale à l'autre. On a donc $q_0 < [q_0, \dots, q_n, 1] < q_0 + 1$ et $q'_0 < [q'_0, \dots, q'_m, 1] < q'_0 + 1$. Comme $[q_0, \dots, q_n, 1] = [q'_0, \dots, q'_m, 1]$ on en déduit $q_0 = q'_0$ et donc $[q_1, \dots, q_n, 1] = [q'_1, \dots, q'_m, 1]$; le résultat vient par hypothèse de récurrence. \square

Réduites d'une fraction continue. Soient $(q_i)_{i \geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs (sauf possible-ment q_0 qui peut être nul). On définit deux suites associées d'entiers $(a_k)_{k \geq -2}$ et $(b_k)_{k \geq -2}$ par :

$$\begin{aligned} a_{-2} &= 0, & a_{-1} &= 1, & a_{k+1} &= a_k q_{k+1} + a_{k-1} \\ b_{-2} &= 1, & b_{-1} &= 0, & b_{k+1} &= b_k q_{k+1} + b_{k-1} \end{aligned}$$

On a donc $a_0 = q_0$, $b_0 = 1$.

Théorème 3 (Propriétés élémentaires des fractions continues). *Pour tout entier $k \geq 0$ on a :*

(1) *la relation :*

$$a_{k+1}b_k - a_k b_{k+1} = (-1)^k;$$

(2) *si x est un réel strictement positif alors :*

$$[q_0, \dots, q_k, x] = \frac{a_k x + a_{k-1}}{b_k x + b_{k-1}};$$

(3) *la fraction a_k/b_k est la réduite de $[q_0, \dots, q_k]$:*

$$[q_0, \dots, q_k] = \frac{a_k}{b_k}.$$

(4) *les q_k s'expriment en fonction des réduites :*

$$q_{k+1} = (-1)^{k+1}(a_{k+1}b_{k-1} - a_{k-1}b_{k+1})$$

La première propriété s'obtient immédiatement par récurrence. La seconde s'obtient à peine moins facilement, par récurrence également : pour $k = 0$ on a $[q_0, x] = q_0 + \frac{1}{x} = \frac{q_0 x + 1}{x} = \frac{a_0 x + a_{-1}}{b_0 x + b_{-1}}$; sinon on a :

$$\begin{aligned} [q_0, \dots, q_k, q_{k+1}, x] &= [q_0, \dots, q_k, q_{k+1} + 1/x] \\ &= \frac{a_k(q_{k+1} + 1/x) + a_{k-1}}{b_k(q_{k+1} + 1/x) + b_{k-1}} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(a_k q_{k+1} + a_{k-1})x + a_k}{(b_k q_{k+1} + b_{k-1})x + b_k} \\ &= \frac{a_{k+1}x + a_k}{b_{k+1}x + b_k} \end{aligned}$$

La troisième se démontre directement : si $k = 0$ c'est immédiat, sinon en prenant $x = q_{k+1}$ la propriété précédente nous donne :

$$[q_0, \dots, q_k, q_{k+1}] = \frac{a_k q_{k+1} + a_{k-1}}{b_k q_{k+1} + b_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$$

Enfin cette dernière égalité nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} &= \frac{a_k q_{k+1} + a_{k-1}}{b_k q_{k+1} + b_{k-1}} \\ a_{k+1}(b_k q_{k+1} + b_{k-1}) &= (a_k q_{k+1} + a_{k-1})b_{k+1} \\ (a_{k+1}b_k - a_k b_{k+1})q_{k+1} &= a_{k-1}b_{k+1} - a_{k+1}b_{k-1} \\ q_{k+1} &= (-1)^{k+1}(a_{k+1}b_{k-1} - a_{k-1}b_{k+1}) \end{aligned}$$

□

On verra que la relation de Bezout $a_{k+1}b_k - a_k b_{k+1} = (-1)^k$ indique que les fractions a_k/b_k et a_{k+1}/b_{k+1} sont voisines de Farey d'ordre b_{k+1} , dans l'ordre croissant si k est pair, décroissant sinon. En particulier toutes les fractions a_k/b_k sont irréductibles.

1.1 Développement d'un réel

Théorème 4. Soit $(q_k)_{k \geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs (sauf éventuellement q_0), $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ les deux suites d'entiers telles que a_k/b_k est la réduite de $[q_0, \dots, q_k]$. Alors on a :

- (1) les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ sont strictement croissantes, minorées par la suite de Fibonacci;
- (2) les suites de réduites $(a_{2k}/b_{2k})_{k \geq 0}$ et $(a_{2k+1}/b_{2k+1})_{k \geq 0}$ sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante;
- (3) pour tout k :

$$\frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1}} - \frac{a_{2k}}{b_{2k}} = \frac{1}{b_{2k}b_{2k+1}}$$

Par conséquent les suites (a_{2k}/b_{2k}) et (a_{2k+1}/b_{2k+1}) sont adjacentes.

(1) est conséquence immédiate de la définition des a_k et des b_k et du fait que les q_k sont non nuls.

D'après le théorème 3 on a $a_{2k+1}b_{2k} - a_{2k}b_{2k+1} = (-1)^{2k} = 1$ donc $a_{2k+1}/b_{2k+1} - a_{2k}/b_{2k} = 1/b_{2k}b_{2k+1}$ ce qui donne (3). De même $a_{2k}/b_{2k} - a_{2k-1}/b_{2k-1} = -1/b_{2k-1}b_{2k}$. En ajoutant ces deux équations on obtient :

$$\frac{a_{2k+1}}{b_{2k+1}} - \frac{a_{2k-1}}{b_{2k-1}} = \frac{1}{b_{2k}} \left(\frac{1}{b_{2k+1}} - \frac{1}{b_{2k-1}} \right)$$

et comme $b_{2k+1} > b_{2k-1}$ on en déduit que $a_{2k+1}/b_{2k+1} < a_{2k-1}/b_{2k-1}$.

Comme $a_{2k+2}b_{2k+1} - a_{2k+1}b_{2k+2} = -1$, donc $a_{2k+2}/b_{2k+2} - a_{2k+1}/b_{2k+1} = -1/b_{2k+1}b_{2k+2}$ il vient également :

$$\frac{a_{2k+2}}{b_{2k+2}} - \frac{a_{2k}}{b_{2k}} = \frac{1}{b_{2k+1}} \left(\frac{1}{b_{2k}} - \frac{1}{b_{2k+2}} \right)$$

d'où l'on déduit que $a_{2k+2}/b_{2k+2} > a_{2k}/b_{2k}$. □

Partie entière et partie fractionnaire d'un réel. Si x est un réel on note $[x]$ la partie entière de x (le plus grand entier inférieur ou égal à x) et $\{x\}$ sa partie fractionnaire ($\{x\} = x - [x]$) qui est donc un réel positif et strictement plus petit que 1 ; par définition on a $x = [x] + \{x\}$.

Soit x un irrationnel strictement positif. Les *quotients complets* de x sont les nombres réels x_k définis par :

$$x_0 = x, \quad x_{k+1} = \frac{1}{\{x_k\}}$$

On note q_k la partie entière de x_k :

$$q_k = [x_k]$$

Du fait que x est irrationnel, les x_k sont irrationnels également et strictement plus grands que 1 dès que $k > 0$. Par conséquent $q_k > 0$ dès que $k > 0$.

Le *développement en fraction continue* de x est la suite de rationnels $([q_0, \dots, q_k])_{k \geq 0}$. On note a_k/b_k la réduite de $[q_0, \dots, q_k]$.

Proposition 5. Pour tout $k \geq 0$:

$$x = [q_0, \dots, q_k, x_{k+1}]$$

et donc :

$$x = \frac{a_k x_{k+1} + a_{k-1}}{b_k x_{k+1} + b_{k-1}}$$

En effet on a $[q_0, x_1] = q_0 + 1/x_1 = [x] + \{x\} = x$ et $[q_0, \dots, q_k, x_{k+1}] = [q_0, \dots, q_{k-1}, q_k + 1/x_{k+1}] = [q_0, \dots, q_{k-1}, [x_k] + \{x_k\}] = [q_0, \dots, q_{k-1}, x_k]$, ce qui donne le résultat par récurrence.

La seconde égalité est conséquence immédiate du théorème 3. □

Théorème 6. Pour tout $k \geq 0$ on a les propriétés suivantes :

$$x - \frac{a_k}{b_k} = \frac{(-1)^k}{b_k(b_k x_{k+1} + b_{k-1})}$$

$$\frac{1}{b_k(b_{k+1} + b_k)} < \left| x - \frac{a_k}{b_k} \right| < \frac{1}{b_k b_{k+1}}$$

$$\left| x - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right| < \left| x - \frac{a_k}{b_k} \right|$$

d'où l'on déduit que a_k/b_k est la meilleure approximation rationnelle de x au sens où si a/b est telle que $|x - a/b| < |x - a_k/b_k|$ alors $b > b_k$.

L'égalité s'obtient par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} x - \frac{a_k}{b_k} &= \frac{a_k x_{k+1} + a_{k-1}}{b_k x_{k+1} + b_{k-1}} - \frac{a_k}{b_k} \\ &= \frac{b_k(a_k x_{k+1} + a_{k-1}) - a_k(b_k x_{k+1} + b_{k-1})}{b_k(b_k x_{k+1} + b_{k-1})} \\ &= \frac{a_{k-1} b_k - a_k b_{k-1}}{b_k(b_k x_{k+1} + b_{k-1})} \\ &= \frac{(-1)^k}{b_k(b_k x_{k+1} + b_{k-1})} \end{aligned}$$

Comme $q_{k+1} = \lfloor x_{k+1} \rfloor$ on a $b_k x_{k+1} + b_{k-1} > b_k q_{k+1} + b_{k-1} = b_{k+1}$ d'où l'inégalité de droite de l'encadrement. Par ailleurs $x_{k+1} < q_{k+1} + 1$ donc $b_k x_{k+1} + b_{k-1} < b_k q_{k+1} + b_{k-1} + b_k = b_{k+1} + b_k$, d'où l'inégalité de gauche. La troisième inégalité s'obtient par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right| &< \frac{1}{b_{k+1} b_{k+2}} && \text{par l'inégalité droite de l'encadrement précédent} \\ &\leq \frac{1}{b_{k+1}(b_{k+1} + b_k)} && \text{car } b_{k+2} = b_{k+1} q_{k+2} + b_k \geq b_{k+1} + b_k \\ &< \frac{1}{b_k(b_{k+1} + b_k)} && \text{car } b_{k+1} > b_k \\ &< \left| x - \frac{a_k}{b_k} \right| && \text{par l'inégalité gauche de l'encadrement précédent} \end{aligned}$$

Finalement supposons que $|x - a/b| < |x - a_k/b_k|$. Alors a/b est compris entre $x \pm |x - a_k/b_k|$ et comme $|x - a_k/b_k| < |x - a_{k-1}/b_{k-1}|$ on en déduit que a/b est comprise entre a_k/b_k et a_{k-1}/b_{k-1} (laquelle des deux est la plus petite dépend de la parité de k). Mais on a vu que ces deux fractions sont voisines de Farey et on montrera dans la section suivante que cela a pour conséquence que toute fraction comprise entre les deux doit avoir un dénominateur au moins égal à $b_{k-1} + b_k$. \square

1.2 Développement d'un rationnel

Soit a et b deux entiers positifs premiers entre eux, b non nul. L'algorithme d'Euclide nous donne deux suites finies d'entiers $(q_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(r_k)_{-1 \leq k \leq n}$ définies par :

$$r_{-1} = a, \quad r_0 = b, \quad r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad (0 < r_{k+1} < r_k)$$

La suite des r_k étant strictement décroissante, n est le plus grand entier tel que $r_n \neq 0$ (on considérera que $r_{n+1} = 0$).

Par récurrence on a pour tout $k < n$:

$$\frac{a}{b} = [q_0, \dots, q_k, \frac{r_k}{r_{k+1}}]$$

$$\text{car } [q_0, \dots, q_{k-1}, q_k, \frac{r_k}{r_{k+1}}] = [q_0, \dots, q_{k-1}, q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}] = [q_0, \dots, q_{k-1}, \frac{q_k r_k + r_{k+1}}{r_k}] = [q_0, \dots, q_{k-1}, \frac{r_{k-1}}{r_k}].$$

Comme $r_{n+1} = 0$, on a $r_{n-1} = q_n r_n$, soit $r_{n-1}/r_n = q_n$. De plus comme $r_{n-1} > r_n$ on doit avoir $q_n > 1$ si bien que :

$$\frac{a}{b} = [q_0, \dots, q_{n-1}, q_n] = [q_0, \dots, q_{n-1}, q_n - 1, 1]$$

Vu la section précédente la suite de rationnels $([q_0, \dots, q_k])_{0 \leq k < n}$ produit donc des approximations successives de a/b . Cette technique pour approximer un rationnel de grand dénominateur est connue depuis l'antiquité.

Comme précédemment on note a_k/b_k la réduite de la fraction continue $[q_0, \dots, q_k]$.

Théorème 7. Pour tout $k \leq n$ on a :

$$r_{k+1} = (-1)^k (ab_k - a_k b)$$

Démonstration par récurrence : pour $k = -1$ on rappelle que $a_{-1} = 1$ et $b_{-1} = 0$ et comme $r_0 = b$ le résultat est immédiat ; pour $k = 0$ on a $a_0 = q_0$ et $b_0 = 1$ et comme $r_{-1} = a = q_0 r_0 + r_1 = a_0 b + r_1$ on obtient bien $r_1 = ab_0 - a_0 b$.

Pour la récurrence on a $r_{k+2} = r_k - q_{k+1} r_{k+1}$ par définition et en appliquant les hypothèses de récurrence à r_k et r_{k+1} on obtient :

$$\begin{aligned} r_{k+2} &= r_k - q_{k+1} r_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} (ab_{k-1} - a_{k-1} b - q_{k+1} (a_k b - ab_k)) \\ &= (-1)^{k+1} (a(q_{k+1} b_k + b_{k-1}) - (q_{k+1} a_k + a_{k-1})) b \\ &= (-1)^{k+1} (ab_{k+1} - a_{k+1} b) \end{aligned}$$

□

Pour $k = n$, on a $r_{n+1} = 0$ ce qui nous donne : $a/b = a_n/b_n$ comme attendu puisque $a_n/b_n = [q_0, \dots, q_n]$. Et pour $k = n - 1$ comme r_n est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide le résultat indique que a_{n-1} et b_{n-1} sont les coefficients de Bezout de a et b : $ab_{n-1} - a_{n-1} b = (-1)^{n-1} PGCD(a, b)$.

2 Voisinage de Farey et médiane

Voisines de Farey : deux fractions a/b et a'/b' sont *voisines de Farey* lorsqu'elles vérifient $|a'b - ab'| = 1$.¹ Dans ce cas a et b , de même que a' et b' , satisfont une relation de Bezout. On en déduit que si a/b et a'/b' sont voisines de Farey alors elles sont toutes deux irréductibles.

Fractions consécutives : deux fractions a/b et a'/b' sont *consécutives à l'ordre n* si elles sont irréductibles, $a/b < a'/b'$ et si pour toute fraction c/d telle que $a/b < c/d < a'/b'$ on a $d > n$.

Fraction médiane : la *médiane* des fractions a/b et a'/b' est la fraction $(a + a')/(b + b')$.

La médiane n'est pas définie sur les rationnels : les médianes de fractions équivalentes ne sont pas forcément équivalentes : $1/2 = 2/4$ (égalité rationnelle) pourtant la médiane de $1/2$ et $1/3$, à savoir $2/5$, n'est pas égale à la médiane de $2/4$ et $1/3$ qui est $3/7$. Pour cette raison la médiane est parfois appelée la *somme du cancre*.

1. On peut également dire, en les considérant comme des vecteurs, qu'elles sont de déterminant ± 1 , on dit alors qu'elles sont *unimodulaires*.

Proposition 8. Soient $a/b, a'/b'$ des fractions (non forcément irréductibles) telles que $a/b < a'/b'$ (en tant que rationnels). Alors on a

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$$

Si de plus deux de ces fractions sont voisines de Farey alors les trois le sont deux à deux.

De $a/b < a'/b'$ on déduit que $a'b - ab' > 0$ donc $(a+a')b - a(b+b') = a'b - ab' > 0$ ce qui donne $a/b < (a+a')/(b+b')$. De même on voit que $a'(b+b') - (a+a')b' > 0$ d'où l'on déduit que $(a+a')/(b+b') < a'/b'$. On a $(a+a')b - a(b+b') = a'(b+b') - (a+a')b' = a'b - ab'$. Si l'un des trois termes est égal à 1, alors les deux autres aussi; autrement dit si deux des trois fractions $a/b, (a+a')/(b+b')$ et a'/b' sont voisines de Farey alors les trois le sont deux à deux. \square

Proposition 9. Soit $a/b, c/d$ et a'/b' telles que a/b et c/d d'une part, c/d et a'/b' d'autre part sont voisines de Farey d'ordre n . Alors on a l'égalité rationnelle : $c/d = (a+a')/(b+b')$. De plus on a équivalence entre :

- (1) $c = a + a'$ et $d = b + b'$;
- (1') la fraction médiane $(a+a')/(b+b')$ est irréductible
- (2) $d > \max(b, b')$;
- (3) a/b et a'/b' sont voisines de Farey.

Par voisinage on a $cb - ad = 1$ et $a'd - cb' = 1$. Donc $cb - ad = a'd - cb'$, soit $c(b+b') = (a+a')d$ et finalement $c/d = (a+a')/(b+b')$.

L'équivalence entre (1) et (1') résulte du fait que par l'hypothèse de voisinage c/d est irréductible : si $c = a + a'$ et $d = b + b'$ alors $(a+a')/(b+b') = c/d$ (égalité de fractions) est irréductible. Réciproquement si $(a+a')/(b+b')$ est irréductible alors l'égalité rationnelle $c/d = (a+a')/(b+b')$ entraîne les égalités $c = a + a'$ et $d = b + b'$.

L'équivalence entre (1) et (3) est conséquence immédiate de la proposition 8.

(2) est conséquence évidente de (1). Réciproquement supposons $d > \max(b, b')$. Comme $c/d = (a+a')/(b+b')$ et c/d est irréductible on a un entier k strictement positif tel que $a + a' = kc$ et $b + b' = kd$. Donc $b + b' > k \max(b, b')$, soit $b + b' > kb$ et $b + b' > kb'$. On en déduit que $k < 1 + b'/b$ et $k < 1 + b/b'$ et comme $b'/b \leq 1$ ou $b/b' \leq 1$ on a $k < 2$ donc $k = 1$. \square

Théorème 10. Soient a/b et a'/b' deux fractions irréductibles telles que $0 \leq a/b < a'/b' \leq 1$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a/b et a'/b' sont consécutives à l'ordre $\max(b, b')$;
- a/b et a'/b' sont voisines de Farey.

Dans ce cas la fraction médiane $(a+a')/(b+b')$ est la première à venir s'intercaler entre a/b et a'/b' , autrement dit $a/b, (a+a')/(b+b')$ et a'/b' sont consécutives à l'ordre $b+b'$.

La deuxième partie du théorème est conséquence du fait que l'on vient de voir que, comme a/b et a'/b' sont voisines de Farey, la médiane est voisine de Farey de a/b et de a'/b' et donc, par la première partie, $a/b, (a+a')/(b+b')$ et a'/b' sont consécutives à l'ordre $b+b' = \max(b, b+b') = \max(b+b', b')$.

On va démontrer l'équivalence en deux temps; commençons par l'implication facile.

Proposition 11. Soient a/b et a'/b' deux fractions irréductibles comprises entre 0 et 1. Si $a'b - ab' = 1$ alors les fractions a/b et a'/b' sont consécutives à l'ordre $\max(b, b')$.

De $a'b - ab' = 1$ on déduit $a'/b - a/b = 1/bb' > 0$ donc $a/b < a'/b'$. Notons $n = \max(b, b')$. Soient c/d une fraction irréductible telle que $a/b < c/d < a'/b'$. Comme par hypothèse b et b' sont non nuls on a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{c}{d} < \frac{a'}{b'} \\ ab' &< \frac{bb'c}{d} < a'b \\ 0 &< \frac{bb'c}{d} - ab' < a'b - ab' = 1 \\ 0 &< bc - ad < \frac{d}{b'} \end{aligned}$$

Or $bc - ad$ est un entier ; comme il est strictement positif on a $bc - ad \geq 1$ donc $d/b' > 1$ soit $d > b'$.

Du deuxième encadrement ci-dessus on peut également déduire :

$$\begin{aligned} -1 = ab' - a'b &< \frac{bb'c}{d} - a'b < 0 \\ 0 &< a'bd - bb'c < d \\ 0 &< a'd - b'c < \frac{d}{b} \end{aligned}$$

et par un raisonnement analogue au précédent on obtient $d > b$. □

Embarquons nous maintenant pour la réciproque.

Lemme 12. *Soient $0 < c < d$ deux entiers premiers entre eux. Il existe a et b tels que : $0 \leq a < c$, $0 < b < d$ et $bc - ad = 1$.*

Par Bezout on a deux entiers (relatifs) a et b satisfaisant l'équation. Choisissons a minimum positif ; un tel a existe puisque les couples $(a + kc, b + kd)$ satisfont également l'équation pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Si $a = 0$ alors $bc = 1$ donc $b = c = 1$; comme $0 < c < d$ on a bien $0 < b < d$.

Si $a > 0$ alors comme $bc = 1 + ad$ on a $b > 0$. On a $a < c$ sinon comme $(a - c, b - d)$ est aussi solution on contredit la minimalité de a . Comme $c - a > 0$ et $d > 1$ (car $d > c > 0$) on a $(c - a)d > 1 = bc - ad$ donc $cd > bc$ et finalement comme c est non nul $b < d$.

Proposition 13. *Soit c, d deux entiers premiers entre eux tels que $0 < c < d$. Il existe a, b, a', b' positifs tels que :*

- $0 < b, b' < d$;
- $c = a + a', d = b + b'$;
- $a'b - ab' = 1$

donc tels que $a/b, c/d$ et a'/b' sont consécutives à l'ordre d .

On applique le lemme qui nous donne a et b . On pose $a' = c - a$ et $b' = d - b$. En vertu du lemme, a' et b' sont tous deux strictement positifs. De plus comme $0 < b < d$ on a $0 < b' < d$. Enfin on a $a'b - ab' = a'b + ab - ab - ab' = b(a + a') - a(b + b') = bc - ad = 1$. □

Proposition 14. *Soient n un entier strictement positif, c/d et c'/d' deux fractions irréductibles. Si c/d et c'/d' sont consécutives à l'ordre n alors on a $c'd - cd' = 1$.*

Démonstration par récurrence sur n . Si $n = 1$ il n'y a que deux fractions irréductibles de dénominateur inférieure ou égal à 1 : $0/1$ et $1/1$, pour lesquelles le résultat est immédiat.

Supposons le résultat vrai aux ordres inférieurs ou égaux à n et c/d et c'/d' consécutives à l'ordre $n + 1$.

Si $d, d' \leq n$ alors c/d et c'/d' sont consécutives à l'ordre n et le résultat vient par récurrence.

Supposons que $d = n + 1$. Si $c = 0$ alors $c/d = 0 = 0/1$ et comme c et d sont supposés premiers entre eux on doit avoir $d = 1$, soit $n = 0$ et donc c/d et c'/d' sont consécutives à l'ordre 1 ; ce cas a déjà été vu.

Si $c > 0$ alors $c < d$ sinon $c = d$ et on ne pourrait avoir $c/d < c'/d' \leq 1$. On applique la proposition précédente qui nous donne a/b et a'/b' telles que $c = a + a'$, $d = b + b'$, $a'b - ab' = a'd - cb' = cb - ad = 1$. Par conséquent les 3 fractions sont consécutives à l'ordre d . Mais comme c/d et c'/d' sont supposées consécutives aussi on doit avoir $c'/d' = a'/b'$, ce qui par irréductibilité entraîne $c' = a'$ et $d' = b'$ d'où $c'd - cd' = 1$.

Finalement supposons que $d' = n + 1$. Si $c' = n + 1$ alors $c' = d'$ et comme c' et d' sont supposés premiers entre eux on doit avoir $c' = d' = 1$, soit $n = 0$. Ce cas a déjà été vu.

Si $c' < n + 1 = d$, on remarque que $c' > 0$ sinon $c'/d' = 0$ et on ne pourrait avoir $c/d < c'/d'$. Par le théorème précédent on trouve a/b et a'/b' tels que $c' = a + a'$, $d' = b + b'$, $a'b - ab' = a'd' - c'b' = c'b - ad' = 1$ et a/b , c'/d' et a'/b' sont consécutives à l'ordre $d' = n + 1$. Comme c/d et c'/d' sont supposées consécutives, on a $a/b = c/d$ et donc $c'd - cd' = 1$. \square

2.1 Suite de Farey d'ordre n

Soit n un entier non nul. La *suite de Farey* d'ordre n est la suite finie ordonnée de toutes les fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 de dénominateur inférieur ou égal à n . Exemples :

$n = 1$: $0/1, 1/1$;

$n = 2$: $0/1, 1/2, 1/1$;

$n = 3$: $0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1$;

$n = 4$: $0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1$;

$n = 5$: $0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1$;

Par définition si a/b et a'/b' sont consécutives dans la suite d'ordre n , alors elles sont consécutives à l'ordre n , donc voisines de Farey.

On va maintenant donner une méthode pour générer la suite de Farey d'ordre n .

Proposition 15. *Soient a/b et a'/b' deux termes consécutifs de la suite d'ordre n . Pour tous entiers (relatifs) q et q' on a :*

- $(qa' - a)b' - a'(qb' - b) = 1$;

- $qa' - a$ et $qb' - b$ sont de même signe ;

- si $qb' - b > 0$ alors :

- $(qa' - a)/(qb' - b)$ est le successeur de a'/b' dans la suite d'ordre $\max(b', qb' - b)$;

- si $q < q'$ alors $(q'a' - a)/(q'b' - b) < (qa' - a)/(qb' - b)$

- si $qb' - b < 0$ alors :

- $(qa' - a)/(qb' - b)$ est le prédécesseur de a'/b' dans la suite d'ordre $\max(b', b - qb')$;

- si $q > q'$ alors $(q'a' - a)/(q'b' - b) > (qa' - a)/(qb' - b)$

Comme a/b et a'/b' sont consécutifs on a $a'b - ab' = 1$. De plus $a' \neq 0$, sinon $a'/b' = 0$ ne pourrait être consécutif à a/b .

La première équation est immédiate. Notons $a'' = qa' - a$ et $b'' = qb' - b$. Cette équation s'écrit donc $a''b' - a'b'' = 1$.

Comme a et a' (respectivement b et b') sont premiers entre eux grâce à l'équation $a'b - ab' = 1$, a'' et b'' sont tous deux non nuls ; et comme a' et b' sont également non nuls on voit que a'' et b'' sont de même signe, sinon $a''b' - a'b''$ serait une somme de deux entiers non nuls de même signe, qui ne pourrait donc être égale à 1.

Supposons $b'' = qb' - b > 0$. Alors il en est de même de $a'' = qa' - a$ et l'équation $a''b' - a'b'' = 1$ entraîne que a''/b'' est successeur de a'/b' à l'ordre $\max(b', b'')$. Soit maintenant $q' > q$; on a $(qa' - a)(q'b' - b) - (q'a' - a)(qb' - b) = q(ab' - a'b) + q'(a'b - ab') = q' - q > 0$ d'où l'on déduit que $(qa' - a)/(qb' - b) > (q'a' - a)/(q'b' - b)$. Supposons maintenant que $b'' = qb' - b < 0$. Alors il en est de même de $a'' = qa' - a$. L'équation $a''b' - a'b''$ peut s'écrire $a'(-b'') - (-a'')b' = 1$ ce qui entraîne que a'/b' est successeur de $(-a'')/(-b'') = a''/b''$ à l'ordre $\max(b', -b'')$. Finalement si $q' < q$ un calcul similaire au précédent montre que $(q'a' - a)/(q'b' - b) > (qa' - a)/(qb' - b)$. \square

Théorème 16. *Soient a/b et a'/b' deux termes consécutifs de la suite d'ordre n , $a'/b' \neq 1$. Alors le terme suivant est $(qa' - a)/(qb' - b)$ où q est le quotient de la division euclidienne de $n + b$ par b' .*

En effet on sait que pour tout q tel que $qb' - b > 0$, le terme $(qa' - a)/(qb' - b)$ est le successeur de a'/b' à l'ordre $\max(b', qb' - b)$. Pour trouver le successeur à l'ordre n il faut trouver le plus grand q tel que $qb' - b \leq n$ qui est précisément le quotient de $n + b$ par b' . \square

De ce dernier corollaire on déduit un algorithme très simple pour calculer les termes successifs de la suite de Farey d'ordre n .

Terminons avec une variante du théorème de Bezout.

Théorème 17. *Soient a/b et a'/b' deux termes consécutifs à l'ordre n . Soit c/d une fraction quelconque (pas nécessairement en forme irréductible). Alors il existe des entiers relatifs u et v tels que $c/d = (ua + va')/(ub + vb')$.*

En particulier si c/d est un successeur de a'/b' à l'ordre p , alors il existe q tel que $c = qa' - a$ et $d = qb' - b$.

La première propriété établit que le couple de vecteurs (a, b) et (a', b') est une base du réseau \mathbb{Z}^2 . Il suffit pour la prouver de résoudre les deux équations $c = ua + va'$ et $d = ub + vb'$. On peut noter que ces deux équations ont une solution dans \mathbb{Z}^2 puisque leur déterminant est égal à 1. On calcule la solution en multipliant la première par b , la seconde par a et en les soustrayant : on obtient $bc - ad = v(a'b - ab') = v$. De même en les multipliant respectivement par b' et a' on obtient $u = a'd - b'c$.

Si on suppose de plus que c/d est un successeur de a'/b' à l'ordre p alors on a $cb' - da' = 1$ ce qui donne $u = -1$. En notant $q = v$ on obtient donc $c/d = (qa' - a)/(qb' - b)$ comme annoncé. \square

2.2 Fractions continues et voisinage de Farey

On reprend les notations de la section précédente : $a/b = [q_0, \dots, q_n]$.

Théorème 18. *Soient a'/b' et a''/b'' les réduites respectives de $[q_0, \dots, q_n - 1]$ et $[q_0, \dots, q_{n-1}]$. On a :*

- $a = a' + a''$, $b = b' + b''$ c'est-à-dire a/b est la médiane de a'/b' et a''/b'' ;
- $ab' - a'b = a''b - ab'' = a''b' - a'b'' = (-1)^n$; les fractions a'/b' , a/b et a''/b'' sont voisines de Farey d'ordre b , dans l'ordre croissant si n est pair, décroissant sinon ;

Par définition des réduites et le théorème 3 on a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= [q_0, \dots, q_n] = \frac{a_{n-1}q_n + a_{n-2}}{b_{n-1}q_n + b_{n-2}}, \\ \frac{a'}{b'} &= [q_0, \dots, q_n - 1] = \frac{a_{n-1}(q_n - 1) + a_{n-2}}{b_{n-1}(q_n - 1) + b_{n-2}}, \\ \frac{a''}{b''} &= [q_0, \dots, q_{n-1}] = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}. \end{aligned}$$

d'où il ressort que a/b est bien la médiane de a'/b' et a''/b'' .

D'autre part comme $a/b = [q_0, \dots, q_n - 1, 1]$ et $a'/b' = [q_0, \dots, q_n - 1]$ on a, toujours par le théorème 3, $ab' - a'b = (-1)^n$, a'/b' et a/b sont voisines de Farey, et comme $a/b = [q_0, \dots, q_n]$ et $a''/b'' = [q_0, \dots, q_{n-1}]$ on a $a''b - ab'' = (-1)^n$, a/b et a''/b'' sont voisines de Farey. Par la proposition 8 on en déduit que a'/b' et a''/b'' sont également voisines de Farey. \square

3 L'arbre binaire infini

Mots binaires. Un *mot binaire* est une suite finie (possiblement vide) $v = (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq l}$ où les ε_k appartiennent à \mathbb{Z}_2 . On note $v = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l$, on dira que v est de longueur l ce que l'on notera $|v| = l$. Pour $l = 0$ le mot vide est noté ω .

On note vv' la concaténation des mots v et v' , opération qui fait de l'ensemble des mots un monoïde libre à 2 générateurs : 0 et 1. Si $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$ et q est un entier, on note :

$$\varepsilon^q = \underbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}_{q \times}$$

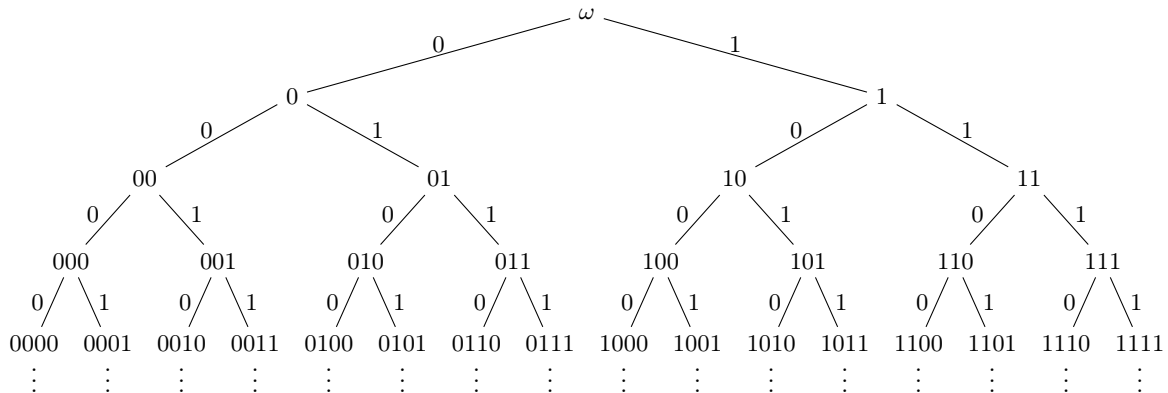
L'ensemble des mots de longueur l forme un algèbre de Boole de 2^l éléments ; en particulier le *complémentaire* de v est le mot $\bar{v} = \bar{\varepsilon}_1 \dots \bar{\varepsilon}_l$ où $\bar{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + 1$ (l'addition étant celle de \mathbb{Z}_2).

Si $v = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l$ on note v^* le renversé de v :

$$v^* = \varepsilon_l \dots \varepsilon_1$$

L'arbre binaire infini. L'*ordre préfixe* sur les mots est la relation $v \triangleleft w$ définie par : $\exists w'$ tel que $w = vw'$. L'arbre binaire infini complet \mathcal{B} est l'ensemble des mots binaires ordonnés par ordre préfixe². On parlera donc indifféremment de *mot de longueur l* ou de *nœud de profondeur l*.

Le mot vide ω est le nœud racine. Le mot $v = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l$ décrit le chemin issu de la racine menant à v : pour chaque $i = 1, \dots, l$ on passe de l'étage $i - 1$ à l'étage i en descendant à gauche si $\varepsilon_i = 0$, à droite si $\varepsilon_i = 1$.



Les fils gauche et droit d'un nœud v sont $v0$ et $v1$, tandis que v est le père de $v0$ et $v1$. Lorsque $v \triangleleft v'$ on dira que v' est un descendant de v ou que v' est dans le sous-arbre enraciné en v . Si de plus $v0 \triangleleft v'$ on dira que v' est dans le sous-arbre gauche de v et si $v1 \triangleleft v'$ que v' est dans le sous-arbre droit de v .

Représentation en base 2, décomposition en blocs et base 2 alternée. Soit $v = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l$ un mot binaire. On note $b(v)$ le nombre entier dont la représentation en base 2 est v , qui se définit par récurrence

2. L'ensemble de Cantor est parfois décrit comme l'arbre binaire infini. On va toutefois adopter ici un point de vue plus combinatoire que topologique ; en particulier l'arbre binaire infini que l'on décrit ici est un ensemble dénombrable.

par : $\mathbf{b}(\omega) = 0$ et $\mathbf{b}(\varepsilon v) = \varepsilon 2^{|v|} + \mathbf{b}(v)$. Il vient :

$$\mathbf{b}(v) = \mathbf{b}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_l) = \sum_{k=1}^l \varepsilon_k 2^{l-k}$$

Pour tout i on pose $\eta_i = i + 1 \pmod{2}$. Étant donné un mot binaire v , il existe un unique tuple d'entiers $\vec{q} = (q_0, \dots, q_n)$, tous non nuls sauf possiblement q_0 tel que $l = q_0 + \dots + q_n$ et

$$v = \eta_0^{q_0} \eta_1^{q_1} \dots \eta_n^{q_n} = \underbrace{\eta_0 \dots \eta_0}_{q_0} \underbrace{\eta_1 \dots \eta_1}_{q_1} \dots \underbrace{\eta_n \dots \eta_n}_{q_n}$$

On notera $v = v_{\vec{q}}$ et on appellera \vec{q} la décomposition en blocs de v .

Pour $i = 0, \dots, n$ et $q_0 + \dots + q_{i-1} + 1 \leq k \leq q_0 + \dots + q_i$ on a donc $\varepsilon_k = \eta_i$ ce qui nous permet de calculer l'écriture de $\mathbf{b}(v)$ en *base 2 alternée* :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(v) &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k 2^{l-k} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=q_0+\dots+q_{i-1}+1}^{q_0+\dots+q_i} \varepsilon_k 2^{l-k} \right) \quad \text{en supposant que } q_0 > 0 \\ &= \sum_{i=0}^n \eta_i 2^{l-q_0-\dots-q_i} \sum_{k=0}^{q_i-1} 2^k \\ &= \sum_{i=0}^n \eta_i 2^{q_{i+1}+\dots+q_n} (2^{q_i} - 1) \\ &= \sum_{i=0}^n \eta_i 2^{q_i+\dots+q_n} - \sum_{i=0}^n \eta_i 2^{q_{i+1}+\dots+q_n} \\ &= \eta_0 2^{q_0+\dots+q_n} + \sum_{i=0}^{n-1} (\eta_{i+1} - \eta_i) 2^{q_{i+1}+\dots+q_n} - \eta_n \\ &= 2^{q_0+\dots+q_n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} 2^{q_{i+1}+\dots+q_n} - \eta_n \quad \text{car } \eta_i = i + 1 \pmod{2} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^i) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i 2^{q_i+\dots+q_n} - \eta_n \end{aligned}$$

Si $q_0 = 0$ le calcul est identique mais en commençant la somme à $i = 2$ puisque $q_2 > 0$ par hypothèse et $\eta_1 = 0$. Ce que l'on résume par :

$$\mathbf{b}(v) = \sum_{i=\alpha}^n (-1)^i 2^{q_i+\dots+q_n} - \eta_n$$

où $\alpha = 0$ si $q_0 > 0$, 2 sinon.

3.1 Parcours en largeur de l'arbre binaire

Parcours en largeur. On définit une numérotation des nœuds de \mathcal{B} correspondant au parcours dit en largeur, c'est-à-dire, partant de la racine visiter les nœuds un étage après l'autre, chaque étage étant parcouru de gauche à droite.

L'étage l de l'arbre binaire est l'ensemble E_l ordonné par *ordre lexicographique* des 2^l mots de longueur l . L'ordre lexicographique est défini par récurrence sur l : $\varepsilon v \prec_{l+1} \varepsilon' v'$ ssi $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon' = 1$, ou $\varepsilon = \varepsilon'$ et $v \prec_l v'$. Concrètement si $v = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l$ et $v' = \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_l$ alors v est lexicographiquement plus petit que v' ssi il existe un $k < l$ tel que pour $i = 1, \dots, k$, $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$, $\varepsilon_{k+1} = 0$ et $\varepsilon'_{k+1} = 1$.

On démontre facilement par récurrence sur l que l'ordre lexicographique correspond à l'ordre sur les entiers : $v \prec v'$ ssi $\mathbf{b}(v) < \mathbf{b}(v')$.

On note B_l le sous-arbre maximal fini de hauteur l , c'est-à-dire l'ensemble $\bigcup_{k=0}^l E_k$ des mots de longueur inférieure ou égale à l ordonné par ordre préfixe. Par conséquent B_l contient $1 + \dots + 2^l = 2^{l+1} - 1$ mots et E_l est la liste de ses feuilles lues de gauche à droite.

Ordre et numérotation en largeur. L'ordre en largeur est l'extension de l'ordre lexicographique en un ordre total sur \mathcal{B} : v est avant v' ssi $|v| < |v'|$ (v est à un étage supérieur à v') ou $|v| = |v'|$ et $v \prec v'$ (v et v' sont au même étage, v est lexicographiquement inférieur à v').

L'ordre en largeur correspond à la numérotation des nœuds de \mathcal{B} dite *en largeur* définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ v &\rightarrow \mathbf{n}(v) = \mathbf{b}(1v) = 2^{|v|} + \mathbf{b}(v). \end{aligned}$$

qui vérifie : v est avant v' ssi $\mathbf{n}(v) < \mathbf{n}(v')$. On en déduit que \mathbf{n} est bijective et on notera \mathbf{v} la bijection réciproque de \mathbf{n} : $\mathbf{v}(n) = v$ ssi $n = \mathbf{b}(1v)$.

On peut également définir \mathbf{n} par récurrence sur l'arbre, ce qui est géométriquement moins parlant : $\mathbf{n}(\omega) = 1$, $\mathbf{n}(v0) = 2\mathbf{n}(v)$ et $\mathbf{n}(v1) = 2\mathbf{n}(v) + 1$.

3.2 Ordre gauche-droite

L'ordre gauche-droite est une autre façon d'étendre l'ordre lexicographique à tous les nœuds de l'arbre binaire, néanmoins très différent de l'ordre en largeur : ce dernier est isomorphe à l'ordre des entiers, tandis que l'ordre gauche-droite est dense et n'a pas de plus petit élément. On verra avec l'arbre de Stern-Brocot qu'il est isomorphe à l'ordre des rationnels strictement positifs.

Ordre gauche-droite. L'ordre gauche-droite est l'ordre du dictionnaire sur les mots : $v \ll v'$ ssi, x étant le plus long préfixe commun à v et v' , on a soit $x0 \triangleleft v$ (v est dans le sous-arbre gauche de x), soit $x1 \triangleleft v'$ (v' est dans le sous-arbre droit de x). Autrement dit l'ordre gauche-droite se définit par récurrence par :

Proposition 19. *Pour tout v, v' on a :*

- $0v \ll \omega \ll 1v'$;
- $\varepsilon v \ll \varepsilon v'$ ssi $v \ll v'$.

Comme l'ordre en largeur, l'ordre gauche-droite étend l'ordre lexicographique : si $|v| = |v'|$ alors $v \ll v'$ ssi $v \prec v'$.

Ancêtre gauche et droit. Soit q un entier. Un mot de la forme 0^q est dit *maximal à gauche*, un mot de la forme 1^q est dit *maximal à droite*. Remarquons que ω est maximal à gauche et à droite.

Si v est maximal à gauche (resp. à droite) et $v' \ll v$ (resp. $v \ll v'$) alors $|v'| > |v|$; autrement dit v est maximal pour l'ordre gauche-droite sur $B_{|v|}$.

L'*ancêtre gauche* ou *0-ancêtre* d'un nœud v est le plus grand préfixe v_0 de v tel que $v_0 \ll v$ s'il en existe. L'*ancêtre droit* ou *1-ancêtre* est le plus grand préfixe v_1 de v , s'il en existe, tel que $v \ll v_1$. Graphiquement on trouve l'ancêtre gauche (droit) en partant de v , en montant tant que l'on traverse des arêtes gauches (droites) et en s'arrêtant à la source de la première arête droite (gauche) rencontrée. Ainsi ω est l'ancêtre gauche de 1000 et droit de 0111.

Théorème 20. *L'ordre gauche-droite sur les nœuds de l'arbre binaire satisfait les propriétés suivantes.*

- (1) C'est un ordre strict total compatible avec la concaténation : $v \ll v'$ ssi $wv \ll wv'$ ssi $vw \ll vw'$.
- (2) v_0 est l'ancêtre gauche de v ssi $v = v_0 10^q$ pour un $q \geq 0$; v_1 est l'ancêtre droit de v ssi $v = v_1 01^q$ pour un $q \geq 0$.
- (3) Si la décomposition en blocs de v est $v = \eta_0^{q_0} \dots \eta_n^{q_n}$ ($\eta_i = i + 1 \pmod{2}$, q_i non nul sauf possiblement q_0) alors :
- v est maximal à gauche ssi $q_0 = 0$, $n \leq 1$ et dans ce cas v n'a pas d'ancêtre gauche ;
 - v est maximal à droite ssi $n = 0$ et dans ce cas v n'a pas d'ancêtre droit ;
 - les ancêtres de v s'ils existent sont :

$$\begin{aligned} v_{\bar{\eta}_n} &= \eta_0^{q_0} \dots \eta_n^{q_n-1} \\ v_{\eta_n} &= \eta_0^{q_0} \dots \eta_{n-1}^{q_{n-1}-1} \end{aligned}$$

- (4) $v \ll v'$ ssi $\bar{v}' \ll \bar{v}$; v_ε est l' ε -ancêtre de v ssi \bar{v}_ε est l' $\bar{\varepsilon}$ -ancêtre de \bar{v} .
- (5) Pour chaque l on note $\ell_l = (v_k^l)_{1 \leq k < 2^{l+1}}$ la liste des nœuds du sous-arbre fini B_l ordonnés de gauche à droite. Les listes ℓ_l satisfont les deux récurrences :

$$\begin{aligned} \ell_{l+1} &= (0.\ell_l, \omega, 1.\ell_l) \\ &= (v_1^l 0, v_1^l, v_1^l 1, v_2^l, \dots, v_{2^k-1}^l 0, v_{2^k-1}^l, v_{2^k-1}^l 1, v_{2^k}^l, \dots, v_{2^{l+1}-1}^l 0, v_{2^{l+1}-1}^l, v_{2^{l+1}-1}^l 1) \end{aligned}$$

où $\varepsilon.l$ dénote la suite des mots de ℓ tous préfixés par ε .

En particulier pour $1 \leq k < 2^{l+1}$:

- $|v_{2^k-1}^{l+1}| = l + 1$ (les nœuds de rang impair dans ℓ_{l+1} sont de profondeur $l + 1$) ;
 - $v_{2^k}^{l+1} = v_k^l$ (les nœuds de rang pair dans ℓ_{l+1} sont ceux de ℓ_l).
- (6) Les nœuds de rang pair dans ℓ_l sont ancêtres respectivement gauche et droit de leurs voisins droit et gauche dans ℓ_{l+1} :

$$(v_{2^k-1}^{l+1})_1 = v_{2^k}^{l+1} = (v_{2^k+1}^{l+1})_0$$

(1), (3), (2) et (4) sont conséquences immédiates des définitions.

(5) Comme ℓ_l contient tous les nœuds de B_l ordonnés de gauche à droite, $\varepsilon.\ell_l$ contient tous les nœuds de B_{l+1} commençant par ε , ordonnés de gauche à droite. Pour tout v et v' on a $0v \ll \omega \ll 1v'$, la liste $(0.\ell_l, \omega, 1.\ell_l)$ est donc ordonnée de gauche à droite, et contient tous les nœuds de B_{l+1} , elle est donc égale à ℓ_{l+1} .

Notons L_{l+1} le membre droit de la seconde égalité. Par récurrence on suppose que $\ell_l = L_l$ et en particulier que les $v_{2^k-1}^l$ sont de longueur l et parcourent tout l'étage E_l ; on en déduit que les $v_{2^k-1}^l \varepsilon$ sont de longueurs $l + 1$ et parcourent tout l'étage E_{l+1} , puis, comme les v_k^l sont les éléments de ℓ_l donc parcourent B_l , que L_{l+1} contient tous les nœuds de B_{l+1} . Mais par définition de l'ordre gauche-droite, pour tout $w \ll v \ll w'$ tels que $|w|, |w'| \leq |v|$, on a $w \ll v0 \ll v \ll v1 \ll w'$. On en déduit que L_{l+1} est ordonné par l'ordre gauche-droite, et donc que $L_{l+1} = \ell_{l+1}$.

(6) Remarquons que la notion d'ancêtre est stable par concaténation à gauche : si v_ε est l' ε -ancêtre de v alors xv_ε est l' ε -ancêtre de xv .

Soit $0 \leq k < 2^l$. Par récurrence $v_{2^k}^l$ est l'ancêtre droit de $v_{2^k-1}^l$ et gauche de $v_{2^k+1}^l$, donc $v_{2^k}^{l+1} = 0v_{2^k}^l$ est l'ancêtre droit de $v_{2^k-1}^{l+1} = 0v_{2^k-1}^l$ et gauche de $v_{2^k+1}^{l+1} = 0v_{2^k+1}^l$. De même $v_{2^l+2^k}^{l+1} = 1v_{2^k}^l$ est l'ancêtre droit de $v_{2^l+2^k-1}^{l+1} = 1v_{2^k-1}^l$ et gauche de $v_{2^l+2^k+1}^{l+1} = 1v_{2^k+1}^l$.

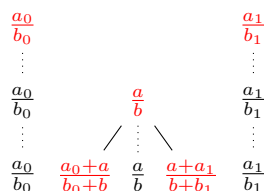
Reste le nœud $v_{2^{l+1}}^{l+1} = \omega$. On vérifie par récurrence sur l que les deux mots extrêmes de ℓ_l sont $v_1^l = 0^l$ et $v_{2^{l+1}-1}^l = 1^l$. Comme $v_{2^{l+1}-1}^{l+1} = 0v_{2^{l+1}-1}^l = 01^l$, ω est bien son ancêtre droit et comme $v_{2^{l+1}+1}^{l+1} = 1v_1^l = 10^l$, ω est bien son ancêtre gauche. \square

4 L'arbre de Stern-Brocot

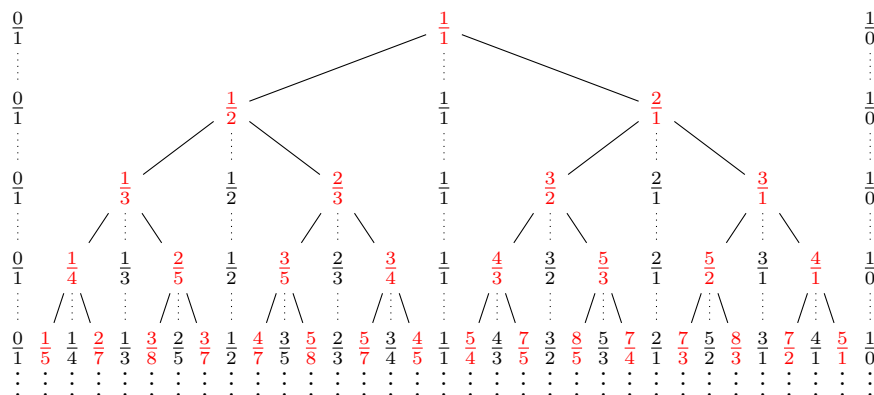
L'arbre de Stern-Brocot, aussi connu sous le nom d'arbre de Farey³, a été découvert indépendamment par Stern en 1858, puis par Brocot en 1861 [Ste58, Bro61]. C'est un étiquetage de l'arbre binaire \mathcal{B} par les fractions irréductibles positives, c'est-à-dire une application $\text{sb} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$. On va voir que cette application est injective (et même bijective), c'est pourquoi on se permet l'abus de langage consistant à identifier une fraction avec le nœud auquel elle est associée : on écrira « la fraction a/b apparaît dans l'arbre » pour « il existe un nœud v tel que $\text{sb}(v) = a/b$ », « l'ancêtre gauche de a/b » pour « la fraction associée à l'ancêtre gauche du nœud associé à a/b », « $a/b \ll a'/b'$ » pour « le nœud étiqueté par la fraction a/b est à gauche de celui étiqueté par a'/b' », etc.

L'arbre de Stern-Brocot. Soit a/b une fraction apparaissant dans l'arbre; si a/b est maximale à gauche on convient que $0/1$ est son ancêtre gauche, si a/b est maximale à droite on convient que $1/0$ est son ancêtre droit; ainsi toute fraction a/b de l'arbre admet deux ancêtres que l'on notera a_0/b_0 et a_1/b_1 .

L'étiquetage de l'arbre est défini par récurrence : $\text{sb}(\omega) = 1/1$ est (l'étiquette de) la racine et étant donnée une fraction a/b apparaissant dans l'arbre, sa fille gauche est la médiane de a_0/b_0 et de a/b , sa fille droite est la médiane de a/b et a_1/b_1 :



Les premiers étages de l'arbre sont :



où l'on a fait figurer $0/1$ comme ancêtre gauche des fractions maximales à gauche et $1/0$ comme ancêtre droit des fractions maximales à droite. On notera que ces deux fractions n'appartiennent pas à l'arbre (du reste $1/0$ n'est pas un rationnel).

Théorème 21 (Propriétés élémentaires de l'arbre de Stern-Brocot). *On note $\text{sb}(\ell_l) = (a_k^l/b_k^l)_{1 \leq k < 2^{l+1}}$ la liste des fractions du sous-arbre fini B_l ordonnées de gauche à droite.*

3. En fait l'arbre de Farey est le sous-arbre gauche de l'arbre de Stern-Brocot, c'est-à-dire le sous-arbre des fractions strictement inférieures à 1.

(1) Les listes $\text{sb}(\ell_l)$ satisfont les relations de récurrence :

$$\frac{a_{2^k}^{l+1}}{b_{2^k}^{l+1}} = \frac{a_k^l}{b_k^l}$$

$$\frac{a_{2^{k-1}}^{l+1}}{b_{2^{k-1}}^{l+1}} = \frac{a_{2^{k-2}}^{l+1} + a_{2^k}^{l+1}}{b_{2^{k-2}}^{l+1} + b_{2^k}^{l+1}} = \frac{a_{k-1}^l + a_k^l}{b_{k-1}^l + b_k^l}$$

où $1 \leq k < 2^{l+1}$, $a_0^l/b_0^l = 0/1$ et $a_{2^{l+1}}^l/b_{2^{l+1}}^l = 1/0$.

(2) Les fractions $1/(l+1)$ et $(l+1)/1$ sont maximales à gauche et à droite et de profondeur l :

$$\text{sb}(0^l) = \frac{1}{l+1} \quad \text{sb}(1^l) = \frac{l+1}{1}$$

(3) Les fractions apparaissant aux positions v et \bar{v} sont inverses l'une de l'autre : $\text{sb}(\bar{v}) = 1/\text{sb}(v)$.

(4) Si a/b et a'/b' sont consécutives dans $\text{sb}(\ell_l)$ alors $a'b - ab' = 1$, donc a/b et a'/b' sont voisines de Farey.

(5) Toutes les fractions apparaissant dans l'arbre sont irréductibles.

(6) La suite $\text{sb}(\ell_l)$ est strictement croissante pour l'ordre usuel des rationnels.

(7) Si a/b et a'/b' apparaissent dans l'arbre alors : $a/b \ll a'/b'$ ssi $a/b < a'/b'$.

(8) Une fraction apparaît au plus une fois dans l'arbre.

(9) Si a'/b' , a/b et a''/b'' sont consécutives dans $\text{sb}(\ell_l)$ alors a/b est égale à la médiane de ses deux voisines : $a/b = (a + a')/(b + b')$ (mais cette dernière fraction n'est pas forcément en forme irréductible).

(1) est conséquence immédiate des propriétés (5) et (6) du théorème 20 et de la définition de l'arbre de Stern-Brocot ; en particulier du fait que d'après (6) les fractions a_k^l/b_k^l et a_{k+1}^l/b_{k+1}^l sont les ancêtres gauche et droit de $a_{2^{k+1}}^{l+1}/b_{2^{k+1}}^{l+1}$.

(2) Résulte du fait que la fraction maximale gauche de l'étage l est obtenue par médiane de celle de l'étage $l-1$, $1/l$ par hypothèse de récurrence, et de $0/1$. Même argument pour les fractions maximales droites : $l/1$ est la médiane de $(l-1)/1$ et de $1/0$.

(3) Se démontre par récurrence sur l , le cas de base est immédiat. Pour $l > 0$ soit a/b une fraction à la position v de profondeur l ; si a/b est maximale alors le résultat est conséquence de la propriété précédente. Sinon a/b a deux ancêtres de profondeur strictement inférieure : a_0/b_0 à gauche à la position v_0 et a_1/b_1 à droite à la position v_1 .

Par hypothèse de récurrence on trouve b_0/a_0 et b_1/a_1 aux positions \bar{v}_0 et \bar{v}_1 , qui sont les ancêtres droit et gauche de la position \bar{v} , et dont la médiane est $(b_0 + b_1)/(a_0 + a_1) = b/a$, ce qui démontre (3)

(4) Se déduit des relations de récurrence (1) et de la proposition 8.

(5) Toute fraction de profondeur l vérifie une relation de Bezout avec sa suivante et/ou sa précédente dans $\text{sb}(\ell_l)$ donc est irréductible.

(6) Conséquence immédiate de (4) et du fait que $a'b - ab' = 1$ entraîne $a/b < a'/b'$.

(7) Est conséquence de (6) : si l est la plus grande profondeur de a/b et a'/b' alors a/b et a'/b' sont toutes les deux dans $\text{sb}(\ell_l)$.

(8) Résulte de (7) : si a/b et a'/b' sont à deux positions différentes, on doit avoir $a/b \ll a'/b'$ ou $a'/b' \ll a/b$ puisque l'ordre gauche-droite est total ; donc $a/b < a'/b'$ ou $a'/b' < a/b$.

(9) Démonstration identique à celle de la proposition 9. □

Remarquons que, malgré le fait que $\text{sb}(\ell_l)$ est une liste ordonnée de fractions deux à deux voisines de Farey, et même en lui ajoutant $0/1$ et en la tronquant à $1/1$, elle n'est pas une suite de Farey parcequ'elle ne contient pas toutes les fractions de dénominateurs inférieur ou égal à une quantité donnée ; par exemple $\text{sb}(\ell_3)$ contient $2/5$ mais pas $1/5$.

Théorème 22. *Le développement en fraction continue d'une fraction irréductible code la position de celle-ci dans l'arbre de Stern-Brocot :*

$$\text{sb}(v_{\vec{q}}) = \text{sb}(1^{q_0}0^{q_1} \dots \eta_n^{q_n}) = [q_0, q_1, \dots, q_n, 1] = [\vec{q}, 1]$$

pour tout tuple $\vec{q} = (q_0, \dots, q_n)$ d'entiers tous non nuls sauf possiblement q_0 .

La démonstration est par récurrence sur $l = q_0 + \dots + q_n$, la longueur du mot $v_{\vec{q}} = 1^{q_0}0^{q_1} \dots \eta_n^{q_n}$.

Si $q_n = 0$, comme tous les q_k sauf possiblement q_0 sont supposés non nuls, on doit avoir $n = 0$. Si $q_{n-1} = 0$ pour la même raison on doit avoir $n = 1$ et $q_0 = 0$. On commence donc par ces deux cas.

Si $n = 0$ alors $\vec{q} = (q_0)$. Notons que ce cas contient le cas de base $l = 0$ de la récurrence qui correspond à $n = 0$ et $q_0 = 0$. Dans ce cas on a $[\vec{q}, 1] = [q_0, 1] = q_0 + 1 = \text{sb}(1^{q_0})$ (propriété (2) du théorème 21).

Si $n = 1$ et $q_0 = 0$ alors $\vec{q} = (0, q_1)$, et on a $[\vec{q}, 1] = [0, q_1, 1] = 1/(q_1 + 1) = \text{sb}(1^0 0^{q_1})$.

On peut maintenant supposer que q_n et q_{n-1} sont non nuls. Considérons les deux suites :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (q_0, \dots, q_n - 1), \\ \vec{s} &= (q_0, \dots, q_{n-1} - 1) \end{aligned}$$

Noter qu'il se peut que $q_n - 1 = 0$ ou $q_{n-1} - 1 = 0$. D'après la propriété (3) du théorème 20, $v_{\vec{r}}$ est le $\bar{\eta}_n$ -ancêtre de v et $v_{\vec{s}}$ est l' η_n -ancêtre de v .

Par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} [q_0, \dots, q_n - 1, 1] &= \text{sb}(v_{\vec{r}}) \\ [q_0, \dots, q_{n-1} - 1, 1] &= \text{sb}(v_{\vec{s}}) \end{aligned}$$

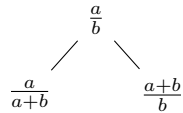
et comme $v_{\vec{r}}$ et $v_{\vec{s}}$ sont les 2 ancêtres de $v_{\vec{q}}$, par construction de l'arbre de Stern-Brocot, $\text{sb}(v_{\vec{q}})$ est leur médiane, mais d'après le théorème 18 celle-ci n'est autre que $[\vec{q}, 1]$. \square

Corollaire 23. *L'application $\text{sb} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ est un isomorphisme entre l'ordre gauche-droite de l'arbre binaire \mathcal{B} et l'ordre usuel des rationnels. En particulier toute fraction irréductible strictement positive apparaît une et une seule fois dans l'arbre de Stern-Brocot.*

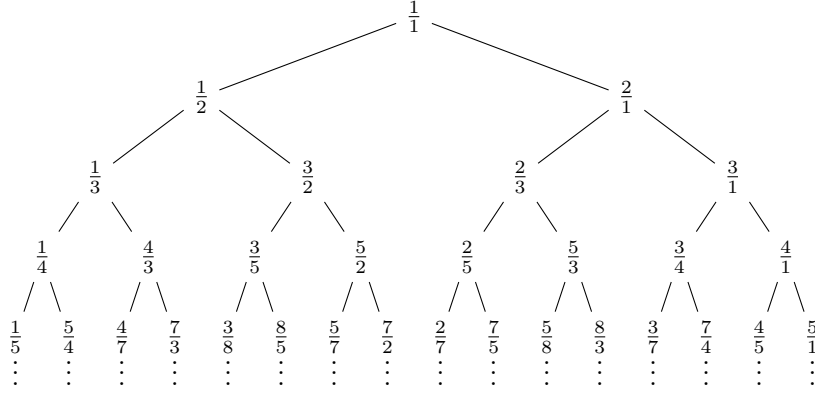
En effet comme tout rationnel admet un unique développement en fraction continue de la forme $[q_0, \dots, q_n, 1]$ (théorème 2), le théorème précédent implique que sb est bijective ; elle est de plus strictement croissante pour l'ordre gauche-droite grâce à la propriété (7) du théorème 21. \square

5 L'arbre de Calkin-Wilf

L'arbre de Calkin-Wilf, aussi connu sous le nom d'arbre d'Euclide, a été popularisé par Calkin et Wilf dans un article paru en 2000 [CW00]. Comme l'arbre de Stern-Brocot, c'est une énumération des rationnels positifs c'est-à-dire une application que l'on va voir bijective, $\text{cw} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_+^*$ définie par induction sur l'arbre : $\text{cw}(\omega) = 1$ et les deux filles de a/b sont respectivement $a/(a+b)$ et $(a+b)/b$:



Les premiers étages de l'arbre sont donc :



Algorithme d'Euclide. On peut voir les branches de l'arbre de Calkin-Wilf, parcourues en montant, comme décrivant les étapes de l'algorithme d'Euclide : on démarre avec un couple (a, b) que l'on remplace par le couple $(a - b, b)$ si $a > b$ (remontée par une branche droite), ou $(a, a - b)$ si $a < b$ (remontée par une branche gauche). Lorsque a et b sont premiers entre eux on termine à la racine de l'arbre, c'est-à-dire sur le couple $(1, 1)$.

Théorème 24. Soit $\vec{q} = (q_0, \dots, q_n)$ une suite finie d'entiers non nuls sauf possiblement q_0 . On a :

$$\text{cw}(v_{\vec{q}}^*) = \text{cw}(1^{q_0} 0^{q_1} \dots \eta_n^{q_n}) = [q_0, \dots, q_n, 1] = [\vec{q}, 1]$$

La démonstration se fait par récurrence sur la hauteur $l = q_0 + \dots + q_n$. Si $n = 0$ (cas qui contient le cas $l = 0$), on vérifie facilement par récurrence sur q_0 que $[\vec{q}, 1] = [q_0, 1] = q_0 + 1 = \text{cw}(1^{q_0})$.

Supposons donc que $n > 0$. Soient a et b premiers entre eux tels que $a/b = [\vec{q}, 1] = [q_0, \dots, q_n, 1]$; notons que $b > 1$ sinon $n = 0$ (théorème 2). Soit r le reste de a modulo b , qui est donc non nul. Par définition du développement en fraction continue de a/b , le quotient de la division euclidienne de a par b est q_0 , soit $a = bq_0 + r$, donc $a/b = q_0 + r/b = [q_0, b/r]$, d'où l'on déduit $b/r = [q_1, \dots, q_n, 1]$.

Si $q_0 > 0$ alors $a > b$ et on a $(a - b)/b = (q_0 - 1) + r/b = [q_0 - 1, b/r] = [q_0 - 1, q_1, \dots, q_n, 1]$. Par hypothèse de récurrence on a $(a - b)/b = \text{cw}(\eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 0^{q_1} 1^{q_0-1})$. Par définition de l'arbre de Calkin-Wilf sa fille droite $\text{cw}(\eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 0^{q_1} 1^{q_0})$ est $((a - b) + b)/b = a/b$.

Si $a < b$ alors $q_0 = 0$, $r = a$ donc $b/a = [q_1, \dots, q_n, 1]$ donc, comme $q_1 > 0$, $(b - a)/a = b/a - 1 = [q_1 - 1, q_2, \dots, q_n, 1]$. On considère deux cas :

$q_1 = 1$. Dans ce cas $(b - a)/a = [0, q_2, \dots, q_n, 1]$ donc $a/(b - a) = [q_2, \dots, q_n, 1]$. Par hypothèse de récurrence on a $a/(b - a) = \text{cw}(\eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 1^{q_2})$ et sa fille gauche, qui n'est autre que $a/(a + (b - a)) = a/b$, apparaît donc à la position $\eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 1^{q_2} 0 = \eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 1^{q_2} 0^{q_1} 1^{q_0} = v_{\vec{q}}^*$ puisque $q_0 = 0$.

$q_1 > 1$. Dans ce cas comme $q_1 - 1 > 0$ on a $a/(b - a) = [0, q_1 - 1, q_2, \dots, q_n, 1]$. Par hypothèse de récurrence $a/(b - a) = \text{cw}(\eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 1^{q_2} 0^{q_1-1})$ et sa fille gauche qui est a/b apparaît à la position $\eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 1^{q_2} 0^{q_1} = \eta_n^{q_n} \eta_{n-1}^{q_{n-1}} \dots 1^{q_2} 0^{q_1} 1^{q_0} = v_{\vec{q}}^*$. \square

Corollaire 25. L'arbre de Calkin-Wilf est une permutation involutive préservant les étages de l'arbre de Stern-Brocot; pour tout $v \in \mathcal{B}$:

$$\text{cw}(v) = \text{sb}(v^*)$$

En particulier tout rationnel strictement positif apparaît une et une seule fois dans l'arbre de Calkin-Wilf, au même étage que dans l'arbre de Stern-Brocot.

De plus l'arbre de Calkin-Wilf admet la même symétrie que l'arbre de Stern-Brocot : pour tout nœud v on a

$$\text{cw}(\bar{v}) = \frac{1}{\text{cw}(v)}$$

6 Fonctions génératrices

On rappelle (cf. section 3.1) que les nœuds de l'arbre binaire \mathcal{B} sont numérotés par la bijection $v : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathcal{B}$ définie par $v(n) = v$ ssi $n = \mathbf{b}(1v)$. Pour simplifier la notation on notera \mathbf{cw}_n la fraction $\mathbf{cw}(v(n))$. Remarquons que cette numérotation commence à 1.

6.1 Une fonction de Gauss pas de Gauss (probablement)

On note $[x]$ et $\{x\}$ respectivement les partie entière et partie fractionnaire du réel x . On définit la fonction⁴ $T : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ par :

$$T(x) = \frac{1}{2[x] + 1 - x} = \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$$

Théorème 26. *La fonction T engendre l'arbre de Calkin-Wilf au sens où pour tout entier n non nul, $\mathbf{cw}_n = T^n(0)$. On en déduit que la fonction $n \rightarrow T^n(0)$ est une bijection de \mathbb{N} sur \mathbb{Q}_+ .*

On rappelle que lorsque les fractions sont irréductibles, l'égalité entre deux fractions est équivalente aux égalités respectives du numérateur et du dénominateur. Comme les fractions de l'arbre de Calkin-Wilf sont irréductible, on utilisera ce fait sans le mentionner dans ce qui suit.

Pour $n = 1$ on a $\mathbf{cw}_1 = \mathbf{cw}(\omega) = 1/1 = T(0)$.

On montre par récurrence sur n que $\mathbf{cw}_{n+1} = T(\mathbf{cw}_n)$ ce qui donne $\mathbf{cw}_n = T^{n-1}(\mathbf{cw}_1) = T^n(0)$.

Pour $n = 1$ on a $T^2(0) = T(1) = 1/2 = \mathbf{cw}_2$.

Soit $n \geq 2$ et $a/b = \mathbf{cw}_n$ la fraction figurant au nœud $v(n)$ dans l'arbre de Calkin-Wilf. On note c/d la mère de a/b dans l'arbre, qui existe puisque a/b n'est pas à la racine. On note $a'/b' = \mathbf{cw}_{n+1}$ la fraction suivante de a/b dans l'arbre.

Si n est pair, alors par construction de l'arbre, a/b est une fille gauche, $a < b$, donc $a/b = c/(c+d)$, ce qui donne $c/d = a/(b-a)$. De plus a'/b' est la fille droite de c/d , donc $a'/b' = (c+d)/d = b/(b-a)$. Comme $a < b$ on a $[a/b] = 0$ et $\{a/b\} = a/b$ si bien que

$$T\left(\frac{a}{b}\right) = T\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{b}}\right) = \frac{b}{b-a}.$$

ce qui démontre que $\mathbf{cw}_{n+1} = a'/b' = T(a/b)$.

Si n est impair alors $a > b$ et a/b est la fille droite de c/d , donc $a/b = (c+d)/d$, ce qui donne $c/d = (a-b)/b$. Soit m le numéro de c/d , c'est-à-dire l'entier tel que $\mathbf{cw}_m = c/d$. Comme c/d est la mère de a/b , $m < n$ et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : si on note $c'/d' = \mathbf{cw}_{m+1}$ alors $c'/d' = T(c/d) = T((a-b)/b)$.

Effectuons la division euclidienne $a = bq + r$, si bien que $a - b = b(q-1) + r$. Alors on a $[a/b] = q$, $[(a-b)/b] = q-1$, $\{a/b\} = \{(a-b)/b\} = r/b$, d'où l'on déduit :

$$\frac{c'}{d'} = T\left(\frac{a-b}{b}\right) = \frac{1}{q-1 + 1 - \frac{r}{b}} = \frac{b}{bq-r}$$

On a vu que les fractions apparaissant dans l'arbre sont irréductibles, c'est donc le cas de c'/d' . Pour la même raison a/b est également irréductible et comme r est le reste de a modulo b on doit avoir $0 < r < b$ si bien que $b/(bq-r)$ est également irréductible. On en déduit que $c' = b$ et $d' = bq - r$.

4. Cette fonction me fut aimablement décrite par Dierk Schleicher au cours d'une discussion de café à Luminy en janvier 2020. Il la tient lui-même de Don Zagier qui la proposa à la sagacité des étudiants lors d'une école d'été en 2011 à Bremen. L'un d'entre eux (Aimeric Malter, 13 ans!) fit si bien avec qu'elle fut l'objet d'un article cosigné par Aimeric Malter, Dierke Schleicher et Don Zagier [MSZ13]. J'ai par la suite retrouvé cette fonction dans un papier de 2010 de Bruce Bates, Martin Bunder et Keith Tognetti [BBT10], peut-être la source de Don Zagier...

Par construction de l'arbre de Calkin-Wilf, a'/b' est la fille gauche de c'/d' si bien que l'on a :

$$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{c' + d'} = \frac{b}{b(q+1) - r}$$

Pour finir on calcule $T(a/b)$:

$$T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{q+1 - \frac{r}{b}} = \frac{b}{b(q+1) - r}$$

ce qui achève de démontrer que $\text{cw}_{n+1} = a'/b' = T(a/b)$. \square

6.2 La fonction de Stern

Remarquons que la démonstration précédente établit au passage que $T(a/b) = b/c$ pour un c approprié. Autrement dit si $\text{cw}_n = a/b$ alors $\text{cw}_{n+1} = b/c$: le dénominateur d'une fraction devient le numérateur de la suivante pour le parcours en largeur dans l'arbre.

Théorème 27. *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$\text{cw}_n = \frac{s_n}{s_{n+1}}$$

où les nombres s_n sont définis par la récurrence :

- $s_0 = 0, s_1 = 1$;
- $s_{2n} = s_n$;
- $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$.

Par définition de l'arbre de Calkin-Wilf on a $\text{cw}_1 = 1/1 = s_1/s_2$ donc $s_1 = 1$ et $s_2 = 1 = s_1$. D'autre part la fille gauche de $\text{cw}_n = s_n/s_{n+1}$ est $\text{cw}_{2n} = s_{2n}/s_{2n+1} = s_n/(s_n + s_{n+1})$, donc $s_{2n} = s_n$, et sa fille droite est $\text{cw}_{2n+1} = s_{2n+1}/s_{2n+2} = (s_n + s_{n+1})/s_{n+1}$, donc $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$. \square

Cette suite, connue de longue date sous le nom de *suite diatonique de Stern*, fut introduite par... Stern en 1858 [Ste58]. Dijkstra note $s_n = \text{fusc}(n)$, de l'anglais *obfuscate*, apparemment parcequ'il trouvait que sa définition récursive très simple masquait ses propriétés remarquables [Dij82a, Dij82b].

Retour sur Stern-Brocot. La suite de Stern génère également l'arbre de Stern-Brocot au sens suivant :

Théorème 28. *Pour tout l on a :*

$$\text{sb}(\ell_l) = \left(\frac{s_k}{s_{2^{l+1}-k}} \right)_{0 \leq k < 2^{l+1}}$$

On reprend les notations du théorème 21 : $\text{sb}(\ell_l) = (a_k^l/b_k^l)_{1 \leq k < 2^{l+1}}$ auxquelles on ajoute $a_0^l = b_{2^{l+1}}^l = 0$. D'après la propriété (1) du théorème on a : $a_{2^k}^{l+1} = a_k^l$, $a_{2^k-1}^{l+1} = a_{k-1}^l + a_k^l$, $b_{2^k}^{l+1} = b_k^l$ et $b_{2^k-1}^{l+1} = b_{k-1}^l + a_k^l$.

Pour $l = 0$ on a $\text{sb}(\ell_0) = (1/1)$ d'où $a_1^0 = 1 = s_1$ et $b_1^0 = 1 = s_{2^1-1}$.

Si on suppose par récurrence sur l que $a_k^l = s_k$ pour $0 \leq k < 2^{l+1}$ alors on a $a_{2^k}^{l+1} = a_k^l = s_k = s_{2^k}$ et $a_{2^k-1}^{l+1} = a_{k-1}^l + a_k^l = s_{k-1} + s_k = s_{2^k-1}$.

De même si on suppose que $b_k^l = s_{2^{l+1}-k}$ alors : $b_{2^k}^{l+1} = b_k^l = s_{2^{l+1}-k} = s_{2^{l+2}-2k}$ et $b_{2^k-1}^{l+1} = b_{k-1}^l + b_k^l = s_{2^{l+1}-k+1} + s_{2^{l+1}-k} = s_{2^{l+2}-2k+1}$. \square

Remarquons que le résultat sur les dénominateurs b_k^l s'obtient aussi à partir de celui sur les numérateurs a_k^l et de la symétrie $\text{sb}(\bar{v}) = 1/\text{sb}(v)$.

Développements hyperbinaires. Entre autres propriétés curieuses de la suite diatonique, Calkin et Wilf démontrent que s_n est le nombre de *développements hyperbinaires* de n [CW00].

Un développement hyperbinaire d'un entier n est une suite finie (η_0, \dots, η_p) d'entiers de \mathbb{Z}_3 , c'est-à-dire inférieurs ou égaux à 2, $\eta_p \neq 0$, tels que :

$$n = \sum_{k=0}^p \eta_k 2^k$$

Contrairement aux développements binaires, il y a plusieurs développements hyperbinaires de n ; on note $b(n)$ leur nombre.

Si n est impair alors $\eta_0 = 1$ et donc $n = 1 + 2 \sum_{k=1}^p \eta_k 2^{k-1}$. Comme (η_1, \dots, η_p) est un développement hyperbinaire de $(n-1)/2$ on obtient ainsi que $b(n) = b((n-1)/2)$.

Si n est pair alors $\eta_0 = 0$ ou $\eta_0 = 2$. Dans le premier cas on a $n = 2 \sum_{k=1}^p \eta_k 2^{k-1}$ et (η_1, \dots, η_p) est un développement hyperbinaire de $n/2$. Dans le second cas on a $n = 2(1 + \sum_{k=1}^p \eta_k 2^{k-1})$ et (η_1, \dots, η_p) est un développement hyperbinaire de $n/2 - 1$. On en déduit que $b(n) = b(n/2 - 1) + b(n/2)$.

À un décalage près, la fonction b satisfait donc la même récurrence que la suite de Stern :

- $b(0) = 1$;
- $b(2n) = b(n-1) + b(n)$.
- $b(2n+1) = b(n)$;

d'où l'on déduit

Théorème 29. *Pour tout $n \geq 1$, $s_n = b(n-1)$.*

7 L'arbre dyadique et la fonction ? de Minkowski

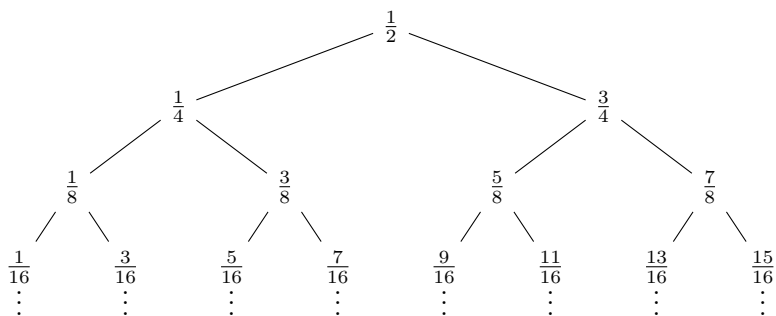
La fonction ? de Minkowski [Min04, Den38, Vep14] est une fonction aux propriétés remarquables : elle est continue, strictement croissante et même bijective de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ (mais on peut l'étendre à \mathbb{R} tout entier), presque partout dérivable et de dérivée presque partout nulle; c'est pourquoi on la connaît aussi sous le nom d'*escalier glissant du diable*.

La manière la plus simple de la définir est comme prolongement par continuité de la bijection entre l'arbre de Stern-Brocot et l'arbre dyadique [Vep14].

Arbre dyadique. L'arbre dyadique est encore un étiquetage de l'arbre binaire par des rationnels, mais cette fois par les *rationnels dyadiques*, c'est-à-dire les fractions irréductibles inférieures à 1 dont le dénominateur est une puissance de 2. Précisément si $v = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_l$ on définit :

$$\text{dy}(v) = \frac{b(v1)}{2^{l+1}} = \sum_{k=1}^l \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{1}{2^{l+1}}.$$

ce qui donne :



Il est intéressant de calculer $\text{dy}(v)$ en base 2 alternée : si $v = 1^{q_0} \dots \eta_n^{q_n}$ est la décomposition en blocs de v alors on a vu que $\mathbf{b}(v) = \sum_{i=\alpha}^n (-1)^i 2^{q_i + \dots + q_n} - \eta_n$ où $\alpha = 0$ ou 2 selon que $q_0 > 0$ ou pas. Comme $\mathbf{b}(v1) = 2\mathbf{b}(v) + 1$ on obtient :

$$\text{dy}(v) = \frac{1}{2^{l+1}} \left(\sum_{i=\alpha}^n (-1)^i 2^{q_i + \dots + q_n + 1} - 2\eta_n + 1 \right) = \sum_{i=\alpha}^n \frac{(-1)^i}{2^{q_0 + \dots + q_{i-1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_0 + \dots + q_n + 1}}$$

car $l = q_0 + \dots + q_n$ et $\eta_n = 1/2(1 + (-1)^n)$.

La fonction ? de Minkowski. D'après le corollaire 23, tout rationnel inférieur à 1 s'écrit de manière unique sous la forme $\text{sb}(0v)$ pour un mot v . La fonction ? de Minkowski est définie sur les rationnels inférieurs à 1 par :

$$?(\text{sb}(0v)) = \text{dy}(v)$$

Théorème 30. *La fonction ? vérifie la relation de récurrence :*

$$? \left(\frac{a + a'}{b + b'} \right) = \frac{1}{2} \left(? \left(\frac{a}{b} \right) + ? \left(\frac{a'}{b'} \right) \right)$$

lorsque a/b et a'/b' sont voisines de Farey : $a'b - ab' = 1$.

Lorsque a/b et a'/b' sont voisines de Farey on a vu qu'elles sont les deux ancêtres de leur médiane. Soit $v = v_{\bar{q}} = 1^{q_0} \dots \eta_n^{q_n}$ tel que $0v$ soit la position de $(a + a')/(b + b')$. Alors $n \geq 1$ et d'après la propriété (3) du théorème 20, a/b et a'/b' apparaissent aux positions respectives $0v_{\bar{\eta}_n}$ et $0v_{\eta_n}$ où $v_{\bar{\eta}_n} = 1^{q_0} \dots \eta_n^{q_n - 1}$ et $v_{\eta_n} = 1^{q_0} \dots \eta_{n-1}^{q_{n-1} - 1}$. En utilisant l'écriture en base 2 alternée on peut alors faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(? \left(\frac{a}{b} \right) + ? \left(\frac{a'}{b'} \right) \right) &= \frac{1}{2} (\text{dy}(1^{q_0} \dots \eta_n^{q_n - 1}) + \text{dy}(1^{q_0} \dots \eta_n^{q_n - 1})) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=\alpha}^n \frac{(-1)^i}{2^{q_0 + \dots + q_{i-1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_0 + \dots + q_n}} + \sum_{i=\alpha}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2^{q_0 + \dots + q_{i-1}}} + \frac{(-1)^n}{2^{q_0 + \dots + q_{n-1}}} \right) \\ &= \sum_{i=\alpha}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2^{q_0 + \dots + q_{i-1}}} + \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{2^{q_0 + \dots + q_{n-1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_0 + \dots + q_n}} + \frac{(-1)^n}{2^{q_0 + \dots + q_{n-1}}} \right) \\ &= \sum_{i=\alpha}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2^{q_0 + \dots + q_{i-1}}} + \frac{(-1)^n}{2^{q_0 + \dots + q_{n-1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_0 + \dots + q_n + 1}} \\ &= \sum_{i=\alpha}^n \frac{(-1)^i}{2^{q_0 + \dots + q_{i-1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_0 + \dots + q_n + 1}} \\ &= \text{dy}(1^{q_0} \dots \eta_n^{q_n}) = ? \left(\frac{a + a'}{b + b'} \right) \end{aligned}$$

□

Théorème 31. *L'ordre gauche-droite est compatible avec l'arbre dyadique : pour tout $v, v' \in \mathcal{B}$ on a : $v \ll v'$ ssi $\text{dy}(v) < \text{dy}(v')$.*

Par conséquent la fonction ? de Minkowski est un isomorphisme d'ordre de $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ sur les rationnels dyadiques. En particulier elle est continue et strictement croissante sur $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$.

La compatibilité de l'ordre gauche-droite avec l'arbre dyadique vient du fait que l'ordre sur les rationnels dyadiques est donné par l'ordre du dictionnaire sur leur développement binaire, c'est-à-dire l'ordre gauche-droite. Les propriétés de croissance et continuité de la fonction ? en découlent immédiatement. □

Formule explicite. Soit $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ une suite finie d'entiers non nuls ; d'après le théorème 22 on a $[0, q_1, \dots, q_n, 1] = \text{sb}(0^{q_1} 1^{q_2} \dots \eta_n^{q_n})$. Par conséquent, comme $q_0 = 0$ on a :

$$\begin{aligned} ?([0, q_1, \dots, q_n, 1]) &= \text{dy}(0^{q_1-1} 1^{q_2} \dots \eta_n^{q_n}) \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{2^{q_1+\dots+q_{i-1}-1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_1+\dots+q_n}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{q_1+\dots+q_{i-1}}} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{q_1+\dots+q_n}} \end{aligned}$$

Si l'on prend l'autre forme du développement en fraction continue : $[0, a_1, \dots, a_n] = [0, q_1, \dots, q_n, 1]$ où $a_i = q_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $a_n = q_n + 1$ alors cette expression s'écrit un peu plus joliment :

$$?([0, a_1, \dots, a_n]) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{2^{a_1+\dots+a_{i-1}}}$$

Le mérite de cette formule est de s'étendre facilement à tous les réels : si x a pour développement en fraction continue $x = [0, a_1, a_2, \dots]$ alors :

$$?(x) = ?([0, a_1, a_2, \dots]) = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{a_1+\dots+a_{i-1}}}$$

Références

- [BBT10] Bruce Bates, Martin Bunder, and Keith Tognetti. Linking the Calkin-Wilf and Stern-Brocot trees. *Eur. J. Comb.*, 31(7) :1637–1661, 2010.
- [Bro61] Achille Brocot. Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue chronométrique*, 3 :186–194, 1861.
- [CW00] Neil Calkin and Herbert S. Wilf. Recounting the rationals. *Am. Math. Mon.*, 107(4) :360–363, 2000.
- [Den38] Arnaud Denjoy. Sur une fonction réelle de Minkowski. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 17 :105–151, 1938.
- [Dij82a] Edsger W. Dijkstra. EWD570. An exercise for Dr. R. M. Burstall. In *Selected writings on computing : a personal perspective*. [Dij82c].
- [Dij82b] Edsger W. Dijkstra. EWD578. More about the function “fusc” (a sequel to EWD570). In *Selected writings on computing : a personal perspective*. [Dij82c].
- [Dij82c] Edsger W. Dijkstra. *Selected writings on computing : a personal perspective.*, volume XVII of *Texts and Monographs in Computer Science*. Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1982.
- [Min04] Hermann Minkowski. Zur geometrie der zahlen. In *Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg*, pages 164–173, Berlin, 1904.
- [MSZ13] Aimeric Malter, Dierk Schleicher, and Don Zagier. New looks at old number theory. *Am. Math. Mon.*, 120(3) :243–264, 2013.
- [Ste58] Moritz Abraham Stern. Ueber eine zahlentheoretische Funktion. *J. Reine Angew. Math.*, 55 :193–220, 1858.
- [Vep14] Linas Vepstas. The Minkowski question mark, $GL(2, \mathbb{Z})$ and the modular group (expository). Manuscrit, 2004 (revised 2014).