



HAL
open science

L'analyse dynamique et le second colloque international d'économétrie Paris 1955 et les transformations de l'analyse macrodynamique

Michaël Assous, Alain Raybaut

► To cite this version:

Michaël Assous, Alain Raybaut. L'analyse dynamique et le second colloque international d'économétrie Paris 1955 et les transformations de l'analyse macrodynamique. Journées Gide 2023 Les économistes français et les transformations de l'analyse économique: de Charles Gide à Esther Duflo, Jun 2023, Lyon, France. hal-04188724

HAL Id: hal-04188724

<https://hal.science/hal-04188724v1>

Submitted on 26 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

Journées Gide 2023 *Les économistes français et les transformations de l'analyse économique : de Charles Gide à Esther Duflou*

Lyon 8-10 juin 2023

**L'analyse dynamique et le second colloque international d'économétrie
Paris 1955 et les transformations de l'analyse macrodynamique**

Michaël Assous et Alain Raybaut

Université Lumière Lyon 2 Triangle Université Côte d'Azur, CNRS, Gredeg

(Version très provisoire et incomplète)

Introduction

Cette communication s'intéresse à la conférence internationale sur les modèles dynamiques en économétrie organisée à Paris en mai 1955 à l'Institut Poincaré¹.

L'intérêt porté par le CNRS pour l'économétrie dans l'immédiat après-guerre était double et concernait les problèmes économiques des entreprises et de la nation. Un premier colloque international en économétrie organisé en 1952 sur les fondements et applications de la théorie du risque renvoie essentiellement au premier objectif. La conférence de 1955 qui retient ici notre attention concerne essentiellement le second objectif et relève davantage de la macrodynamique de court et de long terme.

Parmi les économistes français, Maurice Allais, qui bénéficie dès 1946 de l'appui majeur de Georges Darmois directeur du Centre d'Economtrie créé par le CNRS en 1947 à l'Institut Poincaré, occupe la place centrale. Allais avait déjà joué le

1. Rappelons que l'Institut Henri Poincaré a déjà joué avant guerre un rôle central dans l'émergence d'une approche macrodynamique nonlinéaire. Sur ce point voir l'histoire des oscillateurs non linéaires en France par Jean Marc Ginoux (2017). Plus généralement pour l'introduction des oscillateurs nonlinéaires en macrodynamique, Michael Assous et Vincent Carret (2022) Jean Marc Ginoux et Franck Jovanovic 2022.

premier rôle lors de la conférence de 1952². D'une part, Allais est au cœur de l'organisation de cette conférence sur la dynamique aux côtés de Darmois³. D'autre part Allais va y exposer en détails sa théorie des fluctuations endogènes d'origine monétaire modélisée par une dynamique nonlinéaire à régulation retardée et participer, comme nous le verrons, activement aux différentes discussions. A l'instar de la conférence précédente, l'ensemble de ses contributions occuperont près du tiers de l'ouvrage regroupant les actes du colloque publiés par les Editions du CNRS en 1956.

Les thèmes abordés durant cette conférence concernent aussi bien l'analyse des dynamiques cycliques de court terme que la croissance et les dynamiques de plus long terme ou leurs interactions. En outre, comme nous le verrons le contenu des communications et des discussions est constamment parcouru une double préoccupation d'ordre théorique et empirique. D'un côté, il s'agit de rendre compte de validations empiriques de modèles dynamiques existants. D'un autre côté, il s'agit directement d'exposer de nouvelles approches de la dynamique ou techniques de validation et leurs possibles applications.

2. Rappelons que cette conférence lui a donné l'opportunité d'exposer longuement ses travaux sur la décision et le risque. Les actes, *Fondements et applications de la théorie du risque en économétrie*, publiés par le CNRS en 1953 contiennent un long mémoire qu'il a rédigé ultérieurement à cette occasion. Ainsi, Pierre Maillet souligne dans sa revue de l'ouvrage que "la thèse de M. Allais est exposée dans toute son ampleur, ainsi que sa tentative de réfutation des idées opposées, puisque ses communications et discussions occupent environ la moitié de l'ouvrage, l'exposé de la thèse opposée est beaucoup plus sommaire"(Maillet 1955 : 127).

3. Il s'occupe en particulier, comme nous l'illustrerons de l'invitation des principaux contributeurs internationaux. Allais professeur à l'Ecole des Mines est alors directeur de Séminaire au Centre d'Econométrie. René Roy, autre directeur de Séminaire est aussi membre du comité d'organisation de la conférence mais y joue un rôle effacé. Martine Bungenerer et Marie-Eve Joël (1989) font état de relations plus que difficiles entre Roy et Allais. Le dernier membre du comité d'organisation, Maurice Fréchet participe quant à lui activement aux discussions.

LISTE DES MEMBRES PARTICIPANTS

- M. ALLAIS, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines - Paris.
- W. J. BAUMOL, Professeur de Sciences Economiques, Université de Princeton (N.J.) États-Unis d'Amérique,
- CHAT, Anvers - Belgique,
- G. DARMOIS, Professeur de Calcul des Probabilités, Sorbonne-Paris,
- P. DIETERLEN, Centre d'Etudes Economiques - Paris
- F. DIVISIA, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers Paris,
- G. FAIVELEY, Ecole Polytechnique, Paris,
- R. FÉRON, Docteur ès Sciences, Paris,
- R. FLORIN, Ingénieur, Paris,
- R. FOURGEAUD, Docteur ès Sciences - Transports Région parisienne Paris
- M. FRÉCHET, Professeur honoraire à la Faculté des Sciences - Paris,
- R. FRISCH, Directeur de l'Institut de Sciences économiques, Université d'Oslo, Norvège,
- R.M. GOODWIN, Professeur de Sciences économiques, Université de Cambridge - Angleterre,
- T.G. GUILBAUD, Professeur à l'Ecole des Hautes Etudes, Sorbonne-Paris,
- H. QUITTON, Professeur à la Faculté de Droit, Paris,
- R. GÉRAT, Ingénieur en Chef au Corps des Mines, Paris,
- F.H. HAHN, Professeur Faculté du Commerce et des Sciences Sociales - Université Birmingham - Angleterre,
- S. ICHIMURA, Institut de Recherches sociales et économiques - Otsuka (Japon),
- L.R. KLEIN, Professeur de Sciences économiques, Université de Michigan - Ann Arbor (Mich.) États-Unis d'Amérique,
- Y. MAINGUY, Ingénieur au Gaz de France, Paris,
- G. MALINVAUD, Professeur, Faculté des Sciences - Université de Lyon - France,
- E. MALINVAUD, Administrateur à l'Institut National de la Statistique et des Etudes économiques - Paris
- G. DE MARIA, Professeur Université Commerciale Luigi Bocconi Milan (Italie),
- P. MASSÉ, Directeur Général adjoint - Electricité de France - Paris
- MATHIEU, Ingénieur au Corps des Mines, Paris,
- J. MILHAU, Professeur à la Faculté de Droit, Montpellier,
- A. NATAF, Docteur ès-Sciences, Ministère des Finances, Paris,
- R. RISSER, Docteur ès-Sciences, Actuaire, Paris,
- R. ROUQUET LA GARRIGUE, Professeur à la Faculté de Droit - Bordeaux,
- R. ROY, Inspecteur des Ponts et Chaussées, Paris,
- J. RUEFF, Inspecteur des Finances, Paris,
- H. THEIL, Bureau Central du Plan, La Haye (Pays-Bas)
- P. THIONET, Administrateur à l'Institut National de la Statistique et des Etudes économiques - Paris.

- 7 -

Dans cette perspective, ce texte est organisé de la façon suivante.

Une première section est consacrée à la modélisation des cycles par des équations nonlinéaires aux différences finies. Ces développements sont principalement centrés sur l'intervention de William Baumol et différents échanges subséquents entre Richard Goodwin, Ragnar Frisch, Lawrence Klein, Shinishi Ichimura, Franck Hahn, Allais ou Malinvaud sur cette thématique ⁴.

Une deuxième section s'intéresse à la portée opérationnelle et empirique de ces théories nonlinéaires du cycle discutée plus spécifiquement lors du colloque à travers deux exemples. Le premier porte sur les aspects empiriques du modèle de cycle de Kaldor qui font l'objet de la communication de Lawrence Klein. La seconde revient sur la confrontation par Allais des résultats de son modèle nonlinéaire du cycle aux "données de l'expérience" qui occupe une place importante dans sa contribution.

4. La conférence regroupait plusieurs contributeurs internationaux de premier plan invités par Darmois et Allais, en particulier Ragnar Frisch, William Baumol, Richard Goodwin, Lawrence Klein, Shinishi Ichimura, Franck Hahn, Georges Theil et Giovanni Demaria - Alvin Hansen, Paul Samuelson et Michal Kalecki, empêchés, furent excusés.

Une troisième section sera plus particulièrement dédiée aux avancées méthodologiques et techniques de validation exposées par les contributeurs français confirmés ou en devenir. Il s'agit là principalement des contributions de Gustave Malecot sur l'introduction de chocs aléatoires dans un cadre linéaire stable, de Georges Théodule Guilbaud sur les dynamiques aléatoires de réseau, de Robert Féron et sa suggestion de test d'un modèle économique ou encore de l'emploi de modèles à erreurs sur les variables par Malinvaud⁵.

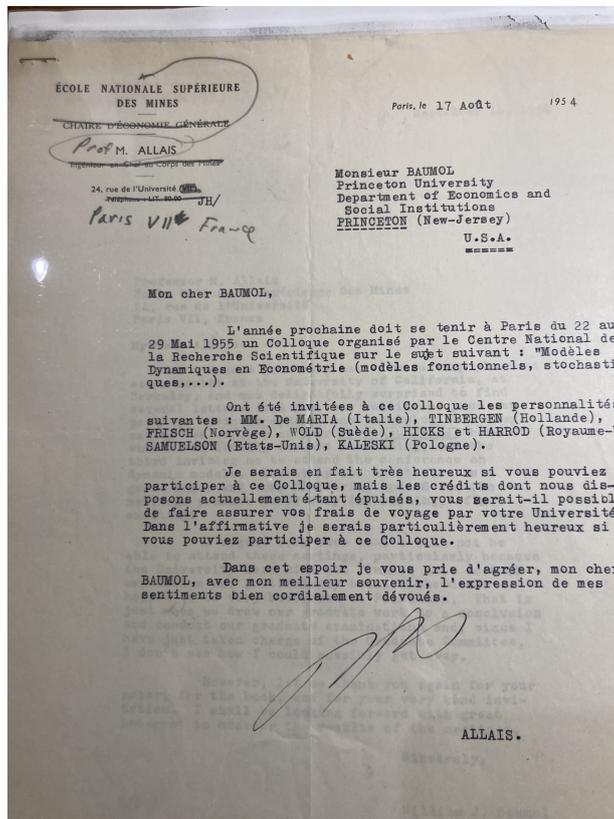
Dynamiques en temps discret, non linéarité et cycles

William Baumol et l'analyse graphique

La partie scientifique de la conférence s'ouvrait avec une communication de Baumol portant sur l'analyse graphique des dynamiques non linéaires en temps discret du premier ordre. Comme nous le verrons cette méthode rend possible la comparaison dans un cadre simple unifié des propriétés dynamiques de différents modèles de cycles non linéaires⁶.

5. Les contributions mentionnées n'épuisent pas le contenu du programme de la conférence. Il convient de mentionner la contribution microéconomique de Pierre Massé sur l'optimum d'une firme dans un processus aléatoire et les communications de Ragnar Frisch, Richard Goodwin, Henri Theil ou Gabriel Faiveley relevant de la problématique de la programmation convexe, de la planification ou du développement.

6. Rappelons que Baumol avait publié la première édition d' *Economic Dynamics : An Introduction* en 1951. Baumol est invité personnellement par Allais, comme l'indiquent les archives Baumol



Formellement, la contribution s'intéresse aux dynamiques représentées par toute relation du type

$$Y_{t+1} = f(Y_t)$$

où f est une fonction nonlinéaire quelconque à valeurs dans \mathbb{R} .

Baumol commence par exposer les principes généraux de l'approche graphique de ce type de système dynamique. Il rappelle qu'il est très simple de visualiser, pour toute condition initiale Y_0 , l'évolution temporelle de la variable Y après avoir tracé la première bissectrice et la représentation de $f(Y_t)$ dans le plan $Y_t - Y_{t+1}$. Cette démarche offre selon lui l'avantage de produire une visualisation de la dynamique "analogue à la représentation d'un parcours dans le temps dans l'espace de phases engendré par une équation différentielle, mais d'une conception plus simple"⁷.

Baumol rappelle, mentionnant Frisch, Hicks et Goodwin, que contrairement aux systèmes linéaires, les modèles nonlinéaires "peuvent avoir un comportement os-

7. Baumol, 1955 in *Les modèles dynamiques en économétrie*, p.17.

cillatoire stable"⁸ et ce pour un ensemble de mesure non nulle⁹. En outre, une caractéristique intéressante d'un modèle nonlinéaire est qu'il peut passer d'un type de comportement dynamique à un autre"¹⁰. Dans cette perspective, il revient dans sa communication deux cas fondamentaux.

Le premier cas de figure est associé à une relation f dont la pente est "positive d'une manière prédominante" mais qui comporte deux régimes, l'un explosif, l'autre amorti. Dans ce cas de figure, la dynamique peut être sans oscillations mais néanmoins fluctuer de façon auto-contenue. Ainsi, Y peut commencer à augmenter sans oscillations, puis rencontrer un plafond et se déplacer vers le bas de façon amortie toujours sans oscillations.

Ce cas de figure est illustré par Baumol par la figure suivante où $f(Y_t)$ prend la "forme d'un coeur"¹¹.

8. Baumol, 1955 Op cit. p. 18

9. Sur ce point Baumol renvoie à son ouvrage de 1951.

10. Baumol, 1955 Op cit. p. 18.

11. Ibid.

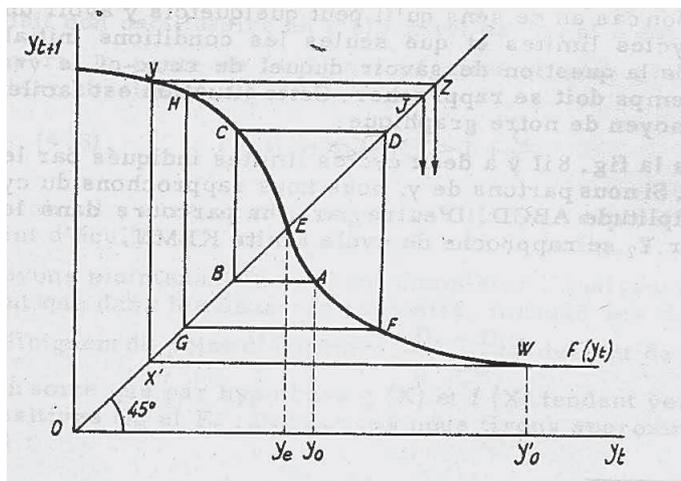
Baumol voit dans cette approche "d'un tel modèle nonlinéaire changeant son parcours son parcours dans le temps d'un type à l'autre" une possibilité de reformuler l'argument développé par Hicks en 1950.¹²

Dans un deuxième temps, Baumol considère l'existence de cycles limites au voisinage d'un état stationnaire instable. Dans ce cas de figure, il explique que " $f(Y_t)$ a une pente négative raide au voisinage du point où elle coupe la droite à 45⁰"¹³. Ce qui implique d'abord des oscillations explosives. Mais, si l'on suppose que dans la région à droite du point stationnaire la pente de f devient plus faible en valeur absolue, les oscillations y seront amorties. De sorte que pour des conditions initiales au voisinage du point stationnaire, la dynamique finira par converger vers un cycle limite.

Ce cas de figure est illustré par Baumol à partir des parcours ABCDFGHJ et WXYZ sur le graphique suivant :

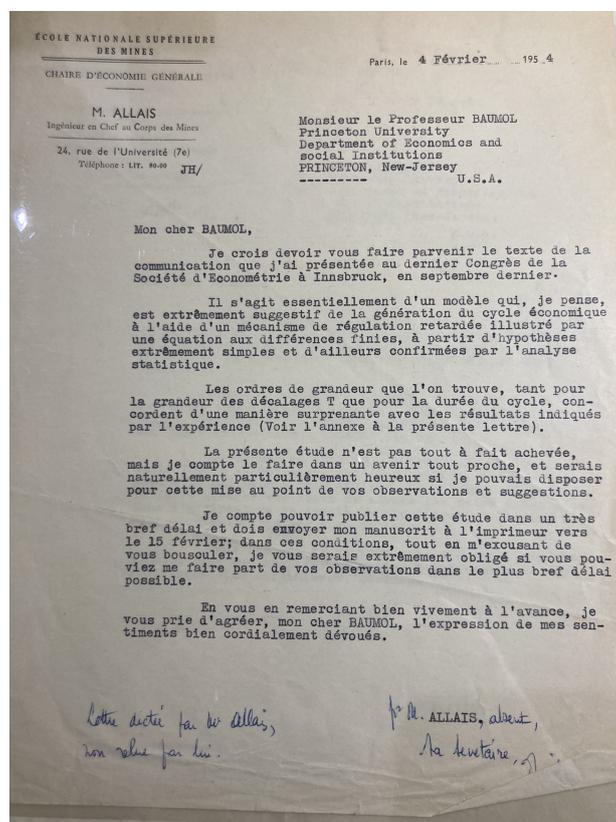
12. Ibid.

13. Les modèles dynamiques en économétrie, p.19



L'illustration économique retenue par Baumol est précisément l'analyse nonlinéaire du cycle développée par Allais que ce dernier exposera en détails lors de l'avant dernière session de la conférence. Rappelons que pour Allais il s'agit de montrer qu'il est possible d'expliquer rigoureusement l'existence de cycles endogènes de la dépense globale par le seul jeu de l'interaction entre les variations de l'offre de monnaie scripturale et de l'encaisse désirée¹⁴.

Baumol est parfaitement au fait de ces travaux et connaît en détails les différentes versions de cette modélisation complexe que développée par Allais dès le début des années 50 et que lui a fait parvenir Allais¹⁵.



Cependant, afin de pouvoir utiliser son approche graphique, il considère une version très simplifiée dans laquelle la dynamique peut être directement décrite par

14. La dépense, notée D_t , est toujours égale au revenu global R_t , comme expliqué par Allais dans ses *Fondements comptables de la macroéconomie*, PUF, 1954. Pour Allais, la simplicité du raisonnement n'est qu'apparente et ne concerne que l'argument économique, "car du point de vue mathématique, statistique et calculs d'applications numériques, la mise au point de ce modèle a exigé des milliers d'heures de travail" Allais, 1955, *Memoire principal*, p 183.

15. Ces différentes versions sont examinées en détails in Raybaut (2104).

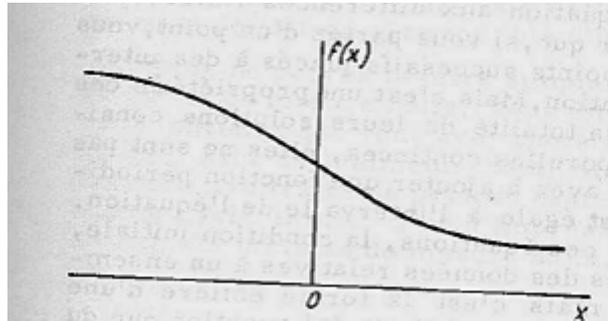
une équation aux différences finies du premier ordre.

Dans cette perspective, Baumol retient la configuration la plus simple possible comportant un décalage unique T et unitaire. Ainsi, le coeur de la théorie monétaire du cycle de Allais se ramène aux deux grandes hypothèses suivantes.

En premier lieu, le rapport entre l'encaisse désirée M_{D_t} et la dépense globale D_t est fonction du taux de variation de la dépense globale entre t et $t + 1$. En posant $X_t = \frac{D_{t+1}-D_t}{D_t}$, il vient

$$M_{D_t} = D_t f(X_t)$$

où f est une fonction positive, monotone décroissante¹⁶.

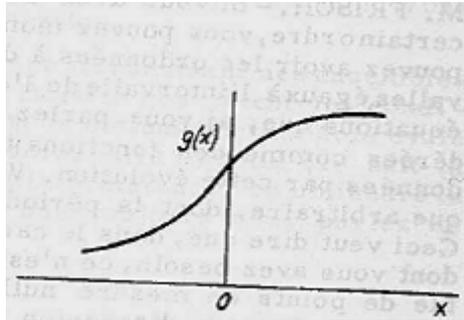


En second lieu, la quantité de monnaie en circulation M_t varie en relation directe avec le taux de variation des dépenses globales, X_t . Ainsi,

$$M_t = g(X_t)$$

où g est une fonction monotone positive croissante. Cette fonction est de la forme suivante

16. Notons que dans cette version simplifiée, le "taux d'expansion économique psychologique individuel", défini par Allais comme une moyenne pondérée du taux d'accroissement annuel de la dépense globale avec affaiblissement exponentiel progressif de l'éloignement dans le temps $t - \theta$, se ramène simplement à X_t . Il en va de même pour le "taux d'expansion économique psychologique bancaire" du côté de l'offre de monnaie.



Enfin, Baumol reprend l'équation dynamique fondamentale d'Allais qui relie la dynamique des dépenses globales à l'écart entre offre de monnaie et encaisse désirée. Avec un unique décalage unitaire, il vient

$$D_{t+1} - D_t = M_t - M_{D_t}$$

En utilisant les deux premières relations, cette équation dynamique s'écrit

$$D_{t+1} - D_t = g\left(\frac{D_{t+1} - D_t}{D_t}\right) - D_{t+1}f\left(\frac{D_{t+1} - D_t}{D_t}\right)$$

Il s'agit d'une équation aux différences première non linéaire implicite qu'il n'est pas aussi simple de traiter directement de façon graphique¹⁷. Pour contourner cette difficulté, Baumol s'appuie sur l'appendice mathématique rédigé par les deux élèves d'Allais, Jacques Lesourne et Jean Noel Mathieu¹⁸. La solution retenue consiste à raisonner sur le ratio de la dépense à son niveau d'équilibre, D^e , solution stationnaire de la dynamique et à approximer les fonctions f et g par des droites¹⁹. On se ramène ainsi au second cas de figure considéré précédemment par Baumol. Partant d'un équilibre instable E, "le mouvement vers le cycle limite en s'éloignant de E fait partie de la même variante"²⁰. Il en va de même explique Baumol pour les domaines extérieurs où les trajectoires convergent vers le cycle limite.

Cette démarche permet donc à Baumol de définir un cadre formel lui permettant de comparer sa reformulation de l'analyse de Hicks et le modèle de cycles d'Allais.

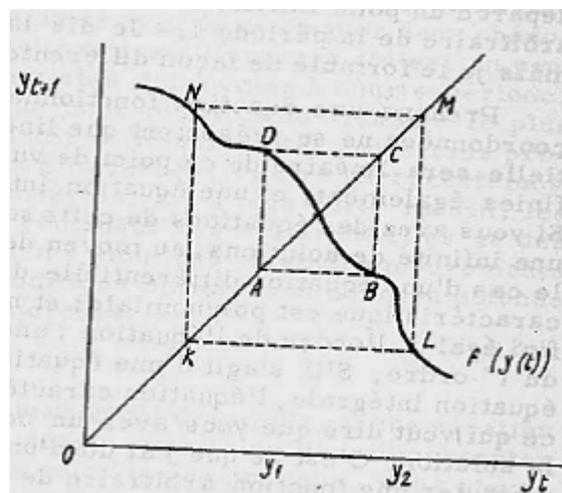
17. Baumol, 1955 in *Les modèles dynamiques en économétrie*, p.23.

18. Cet appendice "Étude mathématique du modèle. Conditions d'instabilité" est présenté par Jean Noel Mathieu à la suite de la communication d'Allais.

19. Avec, au voisinage du point stationnaire une pente K_f et K_g et une ordonnée à l'origine C . Le point stationnaire est localement instable si $1 + \frac{C}{2} < K_f + K_g$. Compte tenu de la forme des fonctions f et g , pour les valeurs extrêmes, f et g sont approximées par deux constantes positives F_m et G_m . La dynamique s'écrit alors $D_{t+1} = \frac{G_m}{1+F_m} + \frac{D_t}{1+F_m}$. Comme $0 < \frac{1}{1+F_m} < 1$, les trajectoires sont, pour ces valeurs, monotones convergentes.

20. Baumol, 1955, op cit p. 25.

Enfin, Baumol discute du rôle des conditions initiales et de la question de l'unicité du cycle limite dans les modèles nonlinéaires. Pour ce faire, il renvoie à Goodwin et aux simulations par analogie électrique de son modèle par Strotz, McAnulty et Naines²¹. Comme souligné par Goodwin, l'amplitude d'un cycle limite dans un modèle nonlinéaire est indépendante des conditions initiales. Cependant, il ajoute que "Goodwin a exagéré son cas en ce sens qu'il peut y avoir une multiplicité de cycles limites"²² et dans ce cas, seules les conditions initiales peuvent déterminer vers quel cycle la dynamique effective convergera. Cette remarque est illustrée par le graphique suivant :



Dans cet exemple, il existe deux cycles limites. Partant d'une condition initiale y_1 , on convergera vers le cycle ABCD de plus faible amplitude, tandis que le cycle KLMN de plus forte amplitude sera atteint pour y_2 .

La présentation de Baumol s'achève sur cette remarque qui débouche directement sur une longue et intéressante discussion sur la nature des solutions en présence de processus discrets.

Les débats sur la caractérisation des solutions et leur multiplicité

Goodwin intervient immédiatement pour minimiser la portée de cette remarque de Baumol sur son modèle. Il rappelle tout d'abord que du point de vue formel,

21. Cette approche et les résultats de Strotz, McAnulty et Naines (1953) sont examinés en détails in Raybaut 2021.

22. Baumol, 1955, op cit. p.25.

l'existence d'une infinité de solutions est "une conséquence universelle" de l'utilisation d'équations aux différences finies linéaires ou nonlinéaires²³. Ainsi, dans le cas d'un système cyclique, "il y aura naturellement une infinité de cycles."²⁴. C'est bien ajouté t'il ce que ce Strotz a mis en évidence sur son modèle. Mais, ces cycles sont par construction de période inférieure au décalage du moèle et sont donc pour Goodwin sans grande importance". Ils n'ont en tous cas, "rien à voir avec les cycles structuraux possibles indiqués par le professeur Baumol"²⁵. Goodwin précise qu'il a pu démontrer que ces cycles disparaissaient lorsque l'on considèrait un modèle "avec un genre de délai continu au lieu d'un décalage précis et simple"²⁶. Par conséquent, conclut-il, il est possible et "sage" de les négliger.

Cette remarque rejoint directement les commentaires formulés différemment par Frisch sous-tendus par des préoccupations de portée plus économétrique.

Il rappelle que l'usage des équations aux différences finies, implique si l'on veut parler de "la totalité de leurs solutions considérées comme des fonctions temporelles continues"²⁷, elles ne sont pas données par l'évolution des ordonnées successives de l'équation considérée comme semble le suggérer Baumol. Il convient d'ajouter une fonction périodique arbitraire dont la période est égale à l'intervalle de l'équation'²⁸. Frisch s'interroge ainsi sur la définition d'un cycle limite et la nature des conditions initiales chez Baumol. Comment définir une des trajectoires ? "Vous devez la définir en ajoutant plus d'information ... Vous ne pouvez le faire simplement en introduisant des ensembles de points de mesure nulle ... j'ai l'impression que toujours vous parlez de conditions initiales de mesure nulle"²⁹. Cette remarque sur la nécessité "d'accumuler des composantes pour avoir la solution du point de vue pratique" est réitérée par Frisch durant la discussion.

Dans un second temps, Frisch souligne aussi que toute analyse précise requiert faire une distinction claire entre conditions nécessaires et suffisantes. Or selon lui la démarche de Baumol ne met l'accent que sur des conditions suffisantes d'existence d'une dynamique cyclique.

Allais, intervient alors pour souligner que la dynamique dans le modèle dont il parlera par la suite peut être décrite alternativement par une équation aux dif-

23. Les modèles dynamiques en économétrie, p.28.

24. Ibid.

25. Ibid.

26. Ibid.

27. Les modè dynamiques en économétrie, p.28.

28. Ibid.

29. Les modè dynamiques en économétrie, p.29.

férences finies ou une équation différentielle, sans qu'il y ait là à pour lui une différence notable. Puis, ne mentionnant toujours pas explicitement la contribution de Baumol, ses interrogations portent d'emblé sur le modèle de Goodwin. Ce modèle présente à ses yeux une difficulté dont il ne perçoit pas vraiment la raison, mais qu'il attribue "à la forme spéciale de l'équation"³⁰.

Puis Klein reformule le problème posé par Goodwin et Frisch selon lequel il convient d'ajouter une fonction périodique arbitraire à la solution classique des équations aux différences finies. Il suggère qu'une possibilité pour que cette fonction périodique arbitraire n'importe pas consiste à prendre comme solution une moyenne sur un intervalle de temps égal à l'unité³¹.

Malinvaud qui intervient dans la discussion synthétise clairement cette question de la multiplicité des cycles dans les équations aux différences finies ou mixtes. Il rappelle tout d'abord qu'il est toujours possible d'obtenir à partir des conditions initiales différents cycles courts "de période égale à un sous multiple du décalage le plus faible"³². Ces cycles qui peuvent être persistants "viennent se surajouter aux cycles propres engendrés par l'équation aux différences"³³. Mais, cette propriété doit être soigneusement distinguée de l'existence pour certaines équations non linéaires ou mixtes d'une multiplicité de solutions cycliques stables. Dans ce cas, comme l'a souligné Baumol, la dynamique tendra bien vers l'un ou l'autre de ces cycles en fonction du choix conditions initiales.

Dans sa réponse, Baumol accepte sans justification les commentaires critiques de Goodwin "qui montrent le danger de réflexions hâtives faites apres coup"³⁴. Faisant amende honorable, il ajoute que la possibilité d'existence d'une multiplicité de cycles limites dans le modèle de Goodwin sur laquelle il vient d'attirer l'attention pourrait laisser penser à tort que l'article original de Goodwin n'est pas totalement rigoureux. Naturellement, conclut-il, "ceci n'est rien de plus que de l'ergotage dont on aurait pu tenir compte par une anotation"³⁵.

Sa réponse à Frisch est en revanche plus nuancée. S'il accepte l'idée selon laquelle la question de la nécessité ou de la suffisance de ses conditions d'existence d'une dynamique cyclique aurait dû être éclaircie, Baumol prend sur ce point le contre-pied de Frisch. Pour lui, les conditions sur la pente des fonctions sont néces-

30. Les modèles dynamiques en économétrie, p.29.

31. *Les modèles dynamiques en économétrie* :30

32. Les modèles dynamiques en économétrie, p.29.

33. Ibid.

34. Baumol 1955, in *Les modèles dynamiques en économétrie*, p.31.

35. ibid.

saires, mais non suffisantes car elles ne sont que locales. Ainsi, par exemple, "si la pente n'est jamais négative nous n'aurons pas d'oscillations ; mais elle pourra être négative pour une partie du domaine sans qu'il ait jamais d'oscillations"³⁶.

Ichimura revient sur la question de l'unicité du cycle. Rappelant que Goodwin a "semble t-il" obtenu dans son article d'*Econometrica* un cycle limite unique, il souligne qu'il n'est pas du tout certain que ce résultat puisse, d'une manière ou d'une autre, être généralisé de façon à nous donner la condition nécessaire et suffisante pour avoir un cycle limite unique³⁷. Il serait donc selon lui très intéressant de poursuivre les investigations afin d'obtenir des résultats en ce sens³⁸.

En réponse Goodwin rappelle que son modèle initial comportait un décalage, source potentielle d'une infinité de solutions. Il n'est donc pas étonnant qu'une machine analogue comprenant un décalage comme celle utilisée par Strotz, McNulty et Naines produise une multiplicité de solutions. Goodwin conclut fort justement que "la question de savoir combien d'entre elles sont des cycles limites est un problème mathématique difficile auquel je ne suis pas préparé à répondre en ce moment"³⁹.

Soulignons que la caractérisation des solutions des équations et des systèmes aux différences finies du premier et second ordre en économie est aussi discutée de façon spécifique par Giovanni Demaria dans la dernière communication du colloque⁴⁰. Frisch, tout en estimant toute sa sympathie pour ce travail, souligne qu'il s'agit cependant d'un mode d'exposition didactique qui "ne résoud en aucune façon les problèmes qui nous intéressent."(*Les modèles dynamiques en économétrie*, p.375).

A l'issue de ces débats sur l'utilisation de modèles dynamiques en temps dis-

36. *ibid.*

37. *ibid.*

38. Ichimura est alors à la pointe de question puisqu'il discute dans son article publié en 1955 "Nonlinear macrodynamic theory" des conditions d'existence d'un unique cycle limite sur la base des travaux de Levinson et Smith (1942) sur les oscillations de relaxation.

39. *Ibid.* On sait en effet qu'il s'agit d'un problème ardu. Depuis la définition d'un cycle limite énoncée par Poincaré, la formulation du 16ème problème de Hilbert et les résultats de Dulac (1923), cette question a fait jusqu'à aujourd'hui l'objet de nombreux travaux. Pour une synthèse simple voir Etienne Ghys "L'histoire mouvementée des cycles limites", *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012.

40. Ces éléments sont notamment tirés de son ouvrage récent *Matériaux pour une logique du mouvement économique*, La Goliardica Milan, 1953. Sa communication clôt la partie scientifique du colloque, suivie d'une réception au Château de Gif-sur-Yvette propriété depuis 1946 du CNRS.

cret, Franck Hahn pose une question générale se demandant si "nous ne mettons pas des obstacles sur notre route en nous servant d'équations aux différences finies?"⁴¹. Cette démarche prédomine en économie pour deux raisons principales : les données statistiques sont discontinues et elle sont a priori plus faciles à résoudre. Mais à ses yeux, les inconvénients soulevés dans la discussion l'emportent. Formellement, il semblerait préférable d'employer des méthodes d'analyse qui nous permettent de décrire un champs plus étendu d'expériences"⁴². Du point de vue formel, la théorie des équations différentielles est "bien plus développée"⁴³. En outre, les méthodes employées par les ingénieurs telles que les transformées de Fourier permettent de traiter de cycles et de décalages temporels plus complexes en évitant les solutions cycliques artificielles telles que les cycles à une ou deux périodes.

Pour Baumol les deux approches sont a priori légitimes. Il relève de la stratégie du modélisateur de décider cas par cas en fonction du problème analysé et des théorèmes les plus appropriés quelle représentation employer. Au contraire Frisch dans sa réponse à Hahn reste partisan de l'usage des équations aux différence finies. Se référant à sa connaissance des faits et prenant l'exemple d'une relation du type $y_{t+\theta} = A + By_t$, il conclut que se focaliser sur les difficultés liés au décalage θ , revient à s'occuper des aspects "purement académiques du problème"⁴⁴.

La relation entre cycles et croissance est aussi abordée par Ichimura dans sa communication. Il y discute la possibilité d'existence de cycles dans les approches de type Harrod-Domar⁴⁵ Pour Ichimura la relation entre cette représentation de la croissance et les théories nonlinéaires des cycles est si claire qu'il ne lui semble pas nécessaire de discuter en détails les conditions formelles d'existence de ces cycles induits par l'instabilité de la croissance régulière⁴⁶.

Mais la contribution d'Ichimura donne lieu à une discussion plus générale sur l'origine des fluctuations cycliques.

Baumol commence par faire remarquer que plusieurs modèles de cycles ont été

41. *Les modèles dynamiques en économétrie*, 1956 : 378

42. Ibid.

43. Ibid.

44. *Les modèles dynamiques en économétrie*, 1956 : 379

45. Pour ce faire Ichimura introduit une fonction de production homogène de degré 1, $Y = f(\frac{N}{K})K$, où K et N désignent les quantités de travail et de capital utilisés et une fonction d'investissement croissante du taux d'utilisation des capacités productives $\delta = \frac{Y}{X} - 1$, où X désigne le niveau maximal de capacité de production.

46. Sa courte note ne traite en effet que des conditions de stabilité monotone. *Les modèles dynamiques en économétrie*, 1956 : 323-26

présentés durant cette conférence, chaque contributeur ayant insisté sur "le degré de supériorité et d'exclusivité" de son propre modèle"⁴⁷. Mais il convient selon lui d'adopter un point de vue plus éclectique. Ainsi "nous ne devrions pas être surpris qu'il existe un certain nombre de modèles de cycles différents, dont chacun s'applique évidemment à différents cycles"⁴⁸. Ce n'est pas là qu'une question de nature empirique. Par exemple, la théorie développée par Allais propose une explication monétaire nécessaire et suffisante des fluctuations de la dépense globale fondée sur l'excédent de demande de liquidité. Mais, les théories réelles, comme celles reposant sur le mécanisme de l'accélérateur, ont aussi leur intérêt en montrant "implicitement et explicitement" comment des éléments réels peuvent produire ces fluctuations.

Hahn argumente dans la même direction. Une dynamique monotone et continue à lui semble quasiment invraisemblable⁴⁹ Mais ceci "ne suffit pas pour spécifier un modèle unique du cycle"⁵⁰. Il souligne ainsi que l'identité de Walras mise en avant par Allais n'est "qu'une affirmation tautologique disant qu'un élément essentiel de toute théorie des cycles est une fluctuation de la dépense totale"⁵¹.

Allais accepte l'idée selon laquelle la plupart des théories des cycles contiennent certains éléments explicatifs. Mais, certains lui paraissent essentiels et d'autres plus accessoires. Les premiers sont nécessaires et définissent "les facteurs *sine qua non* du cycle en ce sens qu'il ne pourrait y avoir de cycles si ces facteurs n'existaient pas"⁵². La suppression des seconds n'entraîne pas la disparition des cycles. Ce sont des "facteurs simplement accélérateurs"⁵³. A titre d'exemple, Allais mentionne le mécanisme de l'accélérateur "qui est si à la mode" mais qui "ne lui paraît pas être un facteur *sine qua non*"⁵⁴. Allais ne voit en effet aucune raison pour que les facteurs accélérateurs réels jouent dans le même dans les différents secteurs de l'économie. Ainsi, si la dépense globale en termes monétaires reste constante, "toute dépression provoquée dans un secteur par le jeu de ces facteurs sera nécessairement compensée par l'expansion dans un autre"⁵⁵. Il en

47. *les modèles dynamiques en économétrie*, 1956 : 328

48. Ibid.

49. Hahn fait ici explicitement mention de "la variable du Professeur Baumol", c'est à dire $X_t = \frac{D_{t+1} - D_t}{D_t}$, expression empruntée à Allais ("*Les modèles dynamiques en économétrie*", 1956 : 328.).

50. Ibid.

51. Ibid.

52. *Les modèles dynamiques en économétrie*, 1956 : 329

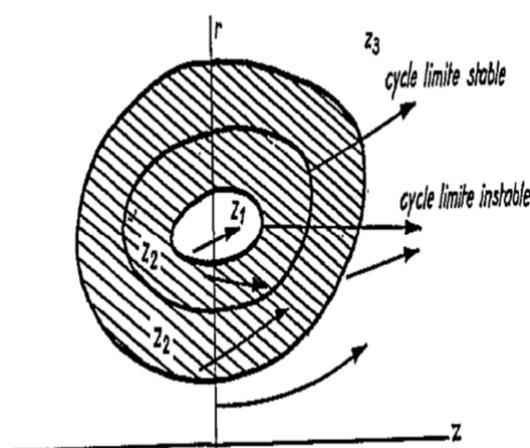
53. Ibid.

54. Ibid. Il ajoute qu'il ici rejoint le point de vue de Tinbergen "qui pense que l'effet d'accélération a été tout à fait exagéré" (*Les modèles dynamiques en économétrie*, 1956 : 329)

55. Ibid.

résulte qu'aucun cycle ne pourrait exister selon Allais si, sur le plan monétaire, on assurait la constance de la dépense globale.

Ces débats témoignent de l'importance accordée au début des années 50 aux travaux d'Allais sur la modélisation non linéaires des cycles. Son modèle est alors reconnu et placé par les principaux experts sur le même plan que celui de Goodwin ou Hicks. Nous ne reviendrons pas ici sur le contenu et détails de cette analyse⁵⁶, soulignons simplement le caractère original et novateur pour l'époque de ses travaux. Ce point peut être illustré par l'utilisation faite par Allais de la multiplicité des cycles limites mentionnée précédemment. Loin de constituer pour Allais une faiblesse, l'existence de plusieurs cycles limites est au contraire exploitée et mise en avant. Après plusieurs tentatives il parvient à construire un modèle comportant trois cycles limites, l'un stable et deux instables. Allais discute ce cas de figure à partir du schéma suivant :



Ce résultat lui permet de rendre compte de plusieurs régimes à partir d'un même modèle. Ainsi, "on a un équilibre stable au voisinage de l'équilibre, un cycle limite stable dès qu'on s'en écarte notablement et une zone d'hyperinflation dès que le taux d'expansion dépasse une certaine valeur envisagée". Allais ajoute que le passage d'un régime à un autre peut être obtenu par l'introduction de choc aléatoire ϵ_t ⁵⁷. Cette caractéristique correspond clairement à une forme de corridor de stabilité que l'on retrouve pas dans les modèles de Hicks et Goodwin. Ce ré-

56. Voir Raybaut 2014

57. Allais 1955. Notons que cette dimension visant à combiner cycles endogènes et chocs sera poursuivie par Allais à jusqu'à son édition de ses oeuvres complète à la fin de sa vie

sultat s'inscrit dans la continuité du premier modèle nonlinéaire de de Tinbergen, qu'Allais ne mentionne pas sur ce point ⁵⁸.

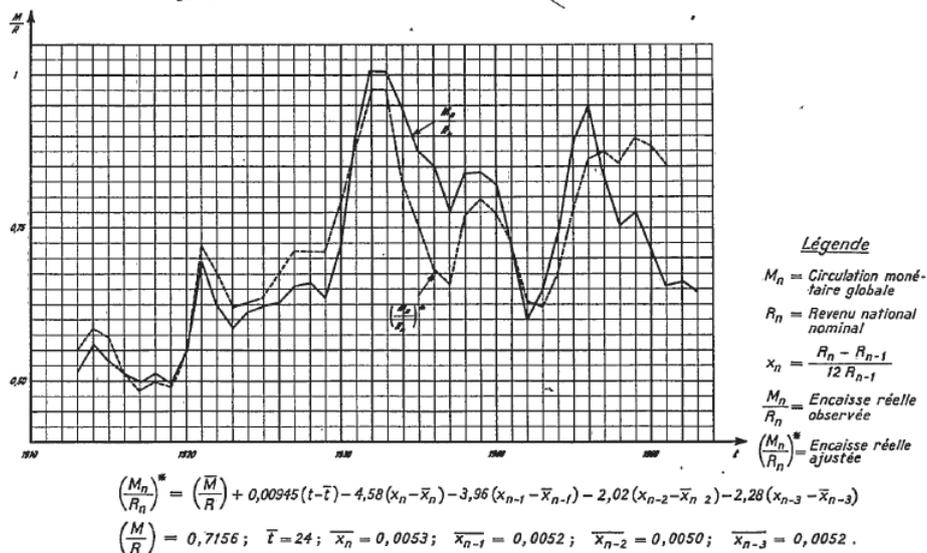
Nonlinéarité et cycles : les perspectives empiriques

Allais et "les données de l'expérience"

L'analyse du cycle ne se résume pas pour Allais à la résolution mathématique des différentes versions de son modèle monétaire. Une fois les conditions formelles d'existence de cycles limites rigoureusement établies, il convient de confronter ces résultats aux "données de l'expérience".

ANNEXE I

Fig. 2.- ENCAISSE RÉELLE DÉTENUE AUX ÉTATS-UNIS 1919-1951.

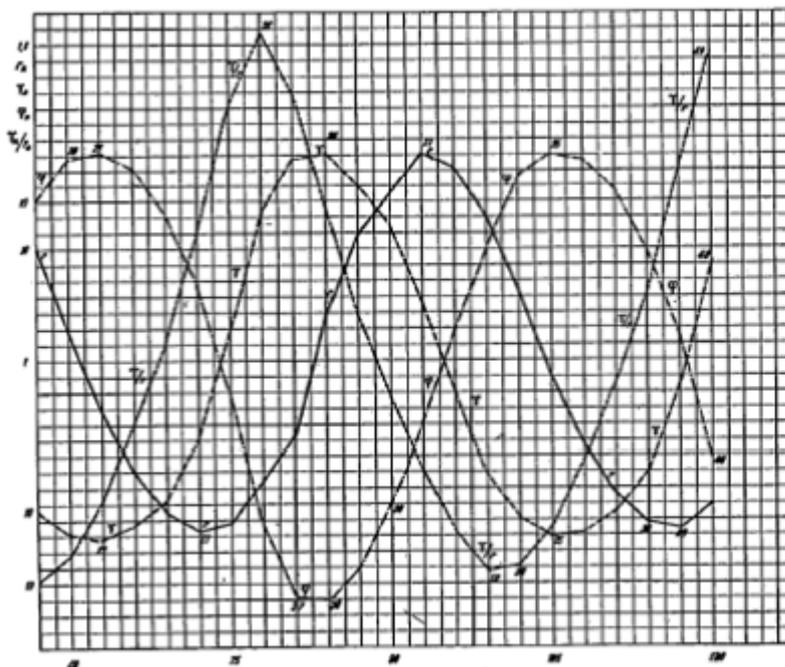


Représentation de l'encaisse réelle détenue M/R en fonction de t , x_{n-1} , x_{n-2} et x_{n-3} , par la méthode de corrélation multiple, pour la période 1909-1951 des États-Unis.

58. Il est probable qu'Allais ne connaissait alors pas ces travaux de Tinbergen non mentionnés dans son abondante bibliographie sur les dynamiques nonlinéaires. Sur ce modèle de Tinbergen, voir Assous et Carret 2022.

ANNEXE I

Fig. 3. - MODÈLE A UN DÉCALAGE - REPRÉSENTATION EN FONCTION DU TEMPS DES PARAMÈTRES DU MODÈLE (MODELE G 6)



Valeurs des constantes

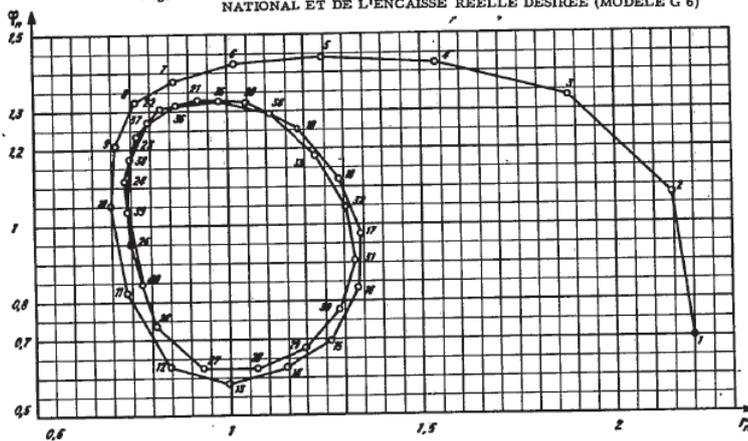
$V = 1,75$ $T = 3$
 $K_0 = 9$ $K'_0 = 9$
 $K_a = 4,5$ $K'_a = 4,5$
 $K_b = 4,5$ $K'_b = 4,5$
 $a = 1,3$ $a' = 0,8$
 $b = 0,7$ $b' = 1,2$
 Période $\Theta = 43,5$

Légende

— r Revenu national
 - - γ Circulation monétaire
 - · - q Encaisse réelle désirée
 - · · - γr Encaisse réelle détenue
 Les numéros représentent les mois successifs

ANNEXE I

Fig. 4. - MODÈLE A UN DÉCALAGE - REPRÉSENTATION DANS L'ESPACE DU REVENU NATIONAL ET DE L'ENCAISSE RÉELLE DÉSIREE (MODELE G 6)



Valeurs des constantes

Période $\Theta = 43,5$
 $V = 1,75$ $T = 3$
 $K_0 = 9$ $K'_0 = 9$
 $K_a = 4,5$ $K'_a = 4,5$
 $K_b = 4,5$ $K'_b = 4,5$
 $a = 1,3$ $a' = 0,8$
 $b = 0,7$ $b' = 1,2$

Les numéros représentent les mois successifs

Lawrence Klein et les propriétés empiriques du modèle de cycle de Kaldor

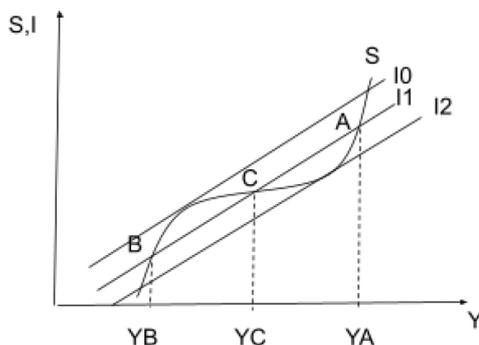
Lorsque Klein participe à la conférence de 1955, il possède déjà une solide expérience dans le domaine de la modélisation macro-économétrique matérialisée par la construction de deux modèles : un premier modèle "prototype" développé à la Cowles Commission entre 1944 et 1947 qu'il fait évoluer (en collaboration avec Arthur Goldberger à l'université du Michigan) et un second modèle entre 1951 et 1953. A chaque fois, sur la base d'un ensemble d'équations structurelles estimées empiriquement, Klein s'efforce d'obtenir (conformément à la méthode introduite par Tinbergen dans ses travaux de 1939) une "équation finale" à partir de laquelle sont étudiées les propriétés de stabilité de l'économie américaine.

Klein était bien placé pour savoir que les données qu'il utilise (et c'est en fait ce que révèlent la plupart des estimations empiriques qu'il réalise sur données américaines) obéissent généralement à des équations non linéaires. En l'absence d'ordinateurs, estimer de telles relations s'est révélé dans un premier temps particulièrement difficile. La solution a donc consisté à raisonner au voisinage de la position stationnaire du système et à procéder à diverses "linéarisations". A une époque où l'économie américaine semble définitivement sortie de l'épisode de la crise de 1929 et que les risques d'instabilité globale paraissent écartés, une telle simplification semblait assez naturelle. De surcroît, une telle méthode présentait l'avantage de produire tout un ensemble d'énoncés opérationnels relatifs aux politiques macroéconomiques et au calcul des multiplicateurs tout en facilitant le travail de prévision économique de court terme (2-3 ans).

C'est après son départ des Etats-Unis (suite aux pressions du maccarthysme) et son installation en Angleterre (Oxford) que Klein s'interroge pour la première fois sur la possibilité d'estimer un modèle non linéaire. A cette fin, il choisit de s'appuyer sur le modèle de Kaldor de 1940. Comme il l'explique dans les premiers paragraphes des actes de la conférence de 1955, le principal mérite de ce modèle de cycle résidait dans sa capacité, en raison du caractère non linéaire des fonctions d'investissement et d'épargne qu'il mobilise, à rendre compte du caractère auto-entretenu des oscillations. Nul besoin toutefois de supposer la double non linéarité des fonctions pour parvenir à un tel résultat. En annexe de son article de 1940, Kaldor avait déjà montré que le modèle de Kalecki de 1939 pouvait générer des cycles auto-entretenus en raison de la seule non linéarité de la fonction d'investissement (Assous 2003). Klein examine quant à lui le cas d'une fonction d'épargne non linéaire couplée à une fonction d'investissement linéaire.

Le mécanisme qu'il envisage peut être représenté aisément dans le repère (investissement-

épargne, revenu) utilisé par Kaldor.



Conformément à l'analyse de Kaldor, Klein s'écarte du principe d'accélération et admet que l'investissement est positivement lié au niveau de revenu (et non à ses variations) et négativement au stock de capital. Pour trois niveaux de stock de capital, il est ainsi possible de tracer trois courbes d'investissement croissantes, I_0 , I_1 , et I_2 , chacune étant respectivement associée à un stock de capital plus faible que celle située au-dessous d'elle. En présence d'une fonction d'épargne non linéaire dont la pente (mesurant la propension marginale à consommer) est forte pour des niveaux "extrêmes" de revenu mais faible pour des niveaux intermédiaires, trois équilibres pourront alors être définis. C'est le cas ici pour le stock de capital associé à la courbe I_1 .

A supposer que les ajustements opèrent par le revenu et que tout excès d'offre de biens (excès d'épargne) se manifeste par une contraction du revenu et tout excès de demande (excès d'investissement) se manifeste par une expansion du revenu, l'économie ne pourra se stabiliser qu'en B (équilibre bas) ou en A (équilibre haut), le point d'équilibre C étant un équilibre instable. Aucune des ces deux positions ne pourra toutefois se maintenir durablement en raison des variations du stock de capital résultant des flux d'investissement. A mesure que les ajustements par le revenu opéreront, les courbes d'investissement se déplaceront en effet verticalement déplaçant les points d'intersection A et B.

Supposons, par exemple, que l'économie se trouve initialement en A et qu'à l'issue du processus d'expansion l'y ayant conduit, le stock de capital ait augmenté. En conséquence, la courbe d'investissement se déplacera vers le bas jusqu'à ce que le point de tangence avec la courbe d'épargne soit atteint. Une fois ce point atteint, toute hausse supplémentaire du stock de capital fera alors basculer l'économie vers une position d'équilibre "bas" proche de B. Si, au terme ce processus,

le stock de capital se contracte, la courbe d'investissement se délacera au bout d'un certain temps vers le haut, ce qui finira par déplacer l'économie vers le point de tangence de la courbe d'épargne et enclenchera un processus d'expansion jusqu'à ce qu'elle atteigne un nouvel équilibre proche de l'équilibre A, le processus se répétant sans fin en l'absence de tout choc sur les courbes.

Dans le but d'estimer un modèle de ce type, Klein élabore un système composé de trois équations et trois identités comptables. L'équation (1) d'ordre 3 décrit le comportement de l'épargne par tête en fonction du revenu par tête. L'équation (2) décrit une fonction d'investissement selon laquelle l'expansion en pourcentage du capital est une fonction linéaire du rapport du revenu disponible en $t - 1$ et du stock de capital en 2. L'équation (3), enfin, rend compte des ajustements de la production résultant des écarts entre investissement et épargne. Pour le reste, l'équation (4) définit la dépréciation du capital, l'équation (5) décrit les stocks comme l'écart entre l'épargne et l'investissement public et privé tandis que l'équation (6) décrit l'investissement comme la variation du stock de capital entre t et $t - 1$.

$$\frac{S_t}{N_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{S_t}{N_t}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{S_t}{N_t}\right)^3 + \alpha_{01}Q_{1t} + \alpha_{02}Q_{2t} + \alpha_{03}Q_{3t} + U_{1t} \quad (1)$$

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} = \beta_0 + \beta_1 \frac{Y_{t-1}}{K_{t-2}} + \beta_{01}Q_{1t} + \beta_{02}Q_{2t} + \beta_{03}Q_{3t} + U_{2t} \quad (2)$$

$$\frac{(Y + T + D)_t}{(Y + D + T)_{t-1}} = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{H_{t-1}}{(Y + T + D - \Delta H)_{t-1}} + \gamma_{01}Q_{1t} + \gamma_{02}Q_{2t} + \gamma_{03}Q_{3t} + U_{3t} \right) \quad (3)$$

$$D_t = \delta_0 + \delta_1 K_{t-1} + U_{3t} \quad (4)$$

$$S_t = I_t + \Delta H_t + G_t - T_t \quad (5)$$

$$K_t - K_{t-1} = I_t \quad (6)$$

où S_t désigne l'épargne réelle des ménages, Y_t le revenu des disponible des ménages, N_t le nombre de personnes employées, I_t l'investissement productif, K_t le stock de capital fixe, $Y + T + D$ la production nationale brute, ΔH_t les variations de stock, D la dépréciation du capital fixe, G les dépenses gouvernementales en

biens et services augmentée du solde de la balance commerciale, Q_{it} un indicateur saisonnier et U_{it} un i -ième écart aléatoire, les indices t indiquant le trimestre auquel se réfère la variable associée.

A partir de plusieurs méthodes de régressions, Klein aboutit à l'estimation suivante :

$$\frac{S_t}{N_t} = 9.52 + 0.53\left(\frac{Y_t}{N_t} - 333\right)^3 10^{-4} - 0.52Q_{1t} + 16.27Q_{2t} + 15.57Q_{3t}$$

$$\frac{I_{t-1}}{K_{t-1}} = -0.00463 + 0.076\frac{Y_{t-1}}{K_{t-2}} - 0.00277Q_{1t} + 0.00124Q_{2t} + 0.0007Q_{3t} + U_{2t}$$

$$\frac{(Y + T + D)_t}{(Y + T + D)_{t-1}} = 1.012 - 0.070\frac{H_{t-1}}{(Y + T - \Delta H)_{t-1}} + 0.090Q_{1t} + 0.091Q_{2t} + 0.150Q_{3t}$$

$$D_t = -12.16 + 0.057K_{t-1}$$

Klein souligne le caractère embryonnaire de cette démarche et évoque plusieurs facteurs qui, selon lui, pourraient venir neutraliser le mécanisme de cycle décrit.

Le premier concerne l'évolution de l'épargne en présence d'un effet richesse. Dans le cas où l'épargne serait une fonction croissante du stock de capital, une "course" pourrait alors s'enclencher avec la fonction d'investissement : "si le point de vue moderne de la relation épargne-richesse [relation croissante et non pas décroissante comme le suggère Kaldor entre épargne et stock de capital] devait dominer, il y aurait une course entre le mouvement d'épargne et les fonctions d'investissement, amenant à une chute d'activité seulement si la relation investissement-richesse est plus importante que la relation épargne-richesse."⁵⁹. En l'absence d'un tel effet, le cycle se révèle principalement dû aux variations exogènes de la population et à son effet négatif sur le niveau d'épargne. Klein doute cependant de la pertinence d'un tel ajustement. "Dans les années récentes ; le taux élevé de l'accroissement de la population aux Etats-Unis" semblerait ainsi avoir largement neutralisé les ajustements passant par les variations du stock de capital. "Evidemment nous pouvons apprendre beaucoup en ce qui concerne le comportement cyclique du système, en expérimentant à la machine les solutions

59. Klein 1955

ayant différents taux exogènes d'accroissement de la population." Dans le même esprit, Klein pense que les dépenses publiques ont certainement exercé un fort effet sur la dynamique de l'économie par son action sur les déplacements de la fonction d'investissement.

Bibliographie

Allais M. "Explication des cycles économiques par un modèle nonlinéaire à régulation retardée", 2ème Colloque International d'Econométrie 23-28 Mai, in "*Les modèles dynamiques en économétrie*", 1956 : 170-278.

Assous M. et Carret V. 2022, *Modeling Economic Instability A History of Early Macroeconomics*, Springer Studies in the History of Economic Thought, Springer.

Baumol W. J. 1955, "Analyse graphique de modèles de cycles nonlinéaires de premier ordre", 2ème Colloque International d'Econométrie 23-28 Mai, in "*Les modèles dynamiques en économétrie*", 1956 : 17-27.

Bungenerer M. et Joël M.E 1989, "L'essor de l'économétrie au CNRS", Cahiers pour l'histoire du CNRS 4.

Ginoux J.M. 2017, *History of Nonlinear Oscillations Theory in France* Springer Verlag.

Ginoux J.M. et Jovanovic F. 2022, "Why relaxation oscillations are a dead end for modelling business cycles", Communication ESHET 9-11 June.

Guilbaud G.TH. 1955, "Circulation aléatoire dans un réseau", 2ème Colloque International d'Econométrie 23-28 Mai, in "*Les modèles dynamiques en économétrie*", 1956 : 117-23.

Guitton H. 1962, "Revue, Les modèles dynamiques en économétrie", *Revue économique*, Vol. 13(6) : 975-976.

Ichimura S. 1955, "Expansion économique et cycles", 2ème Colloque International d'Econométrie 23-28 Mai, in "*Les modèles dynamiques en économétrie*", 1956 : 323-26.

Klein L.R. 1955, "Quelques aspects empiriques du modèle de cycle économique de Kaldor", 2ème Colloque International d'Econométrie 23-28 Mai, in "*Les mo-*

dèles dynamiques en économétrie", 1956 : 127-44.

Maillet P. 1955, "Revue Colloques internationaux, Econométrie 1952 ", *Revue d'économie politique*, Vol. 65(1) : 127-128.

Mathieu M. 1955, "Les aspects mathématiques du modèle de M. Allais", 2ème Colloque International d'Econométrie 23-28 Mai, in "*Les modèles dynamiques en économétrie*", 1956 : 279-290.

Raybaut A. 2014, "Toward a non-linear theory of economic fluctuations : Allais's contribution to endogenous business cycle theory in the 1950s", *The European Journal of the History of Economic Thought* 21(5) 899-919.

Raybaut A. 2020, "Analog Computing Simulations and the Production of Theoretical Evidence in Economic Dynamics", *Æconomia* 10(2) : 309-29.

Strotz, Robert H., James C. McAnulty, and Joseph B. Naines Jr. 1953. "Goodwin's Nonlinear Theory of the Business Cycle : An Electro-Analog Solution". *Econometrica*, 21(3) : 390-411.

Colloques Internationaux du CNRS 1956, Actes du colloque "*Les modèles dynamiques en économétrie*", Editions du CNRS.