



HAL
open science

Géométrie dynamique, un instrument pour la construction de sens sur le concept de droite tangente vue sous le prisme de la limite : une étude de cas auprès des lycéens de classe de première scientifique au Cameroun

Giscard Nguembou Nana

► To cite this version:

Giscard Nguembou Nana. Géométrie dynamique, un instrument pour la construction de sens sur le concept de droite tangente vue sous le prisme de la limite : une étude de cas auprès des lycéens de classe de première scientifique au Cameroun. APPROCHE INTERDISCIPLINAIRE DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES : QUELS PROJETS ET QUELS ENJEUX POUR L'AFRIQUE, Adolphe Cossi ADIHOUE; FAIZA CHELLOUGUI, Aug 2022, HAMMAMET -TUNISIE, Tunisie. <hal-04183672>

HAL Id: hal-04183672

<https://hal.science/hal-04183672v1>

Submitted on 24 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Géométrie dynamique, un instrument pour la construction des sens sur le concept de droite tangente vue sous le prisme de la limite : une étude de cas auprès des lycéens de classe de première scientifique au Cameroun

Giscard NGUEMBOU NANA

Université de Yaoundé 1- Cameroun. Centre de Recherche et de Formation Doctorale en Sciences Humaines, Sociales et Éducatives. Unité de Recherche et de Formation Doctorale en sciences de l'Éducation et Ingénierie Éducative.

RÉSUMÉ. Grâce à l'environnement de géométrie dynamique, notamment grâce à la coordination des fonctionnalités déplacement, zoom et réduction, nous rendons opérationnel une technique de construction de la droite tangente, centrée sur l'articulation d'une vision dynamique et d'une vision statique de la limite. L'article montre comment la mise en œuvre de ladite technique par un lycéen peut lui permettre de construire des connaissances prédictives sur la notion de position limite. Et comment, le transfert de cette technique au-delà du cadre géométrique, pour le cadre analytique, peut permettre au lycéen de construire des connaissances opératoires et prédictives sur la notion de droite tangente, susceptibles de l'aider à produire une équation algébrique de la droite tangente en adoptant une vision dynamique de la limite. Cette étude montre également que la mise en œuvre de la technique sus-évoquée, peut aider à provoquer chez l'apprenant, le développement des perspectives locales fortement décrites par la recherche (Dufour, 2019; Delgadillo et al., 2016) comme absentes chez ce dernier.

Mots-clés. Droite tangente, limite, perspective locale, géométrie dynamique, champ conceptuel.

INTRODUCTION

Certains chercheurs à l'instar de (Panero, 2018; Delgadillo et al., 2016; Dufour, 2019) relèvent chez les lycéens, l'absence de vision locale sur le concept de droite tangente. Pourtant nécessaire pour sa compréhension, lorsque l'on se réfère à la théorie des perspectives sur les fonctions (Vandebrouck, 2011). En classe de première, les concepts de tangente et de limite sont enseignés par exemple en, physique, chimie, économie et en géographie. Dans le cours de physique, la vitesse instantanée vue comme une limite est souvent un objet d'étude. Ainsi, la construction de nouvelles connaissances sur ces concepts dans le cadre de la discipline mathématique pourrait provoquer un transfert de compétences vers les autres disciplines.

Au moment où les technologies numériques sont introduites progressivement dans toutes les disciplines au Cameroun, il nous semble opportun de mettre à profit le caractère dynamique de certains outils technologiques pour enseigner les aspects dynamiques associés aux concepts sus-évoqués. En effet, le déplacement d'un point sur la courbe pour le faire confondre avec le futur point de tangence, est une expérience dont le but poursuivi, nous semble atteignable, davantage dans les environnements dynamiques. Notamment dans les environnements de géométrie dynamique (Restrepo, 2008; Laborde & Capponi, 1994).

Par ailleurs, d'autres recherches dont celle de (Alory et al., 2015) soulèvent la difficulté à trouver des exercices susceptibles de provoquer le développement des perspectives locales sur la droite tangente. Dès lors, nous postulons que les tâches mathématiques fondées sur le point de vue proposé par la dérivation permettent difficilement de construire des tâches avec pour vocation aider le lycéen à développer lesdites perspectives. La limite étant une notion locale, rendre opérationnel le point de vue de la droite tangente qui la présente comme une limite, serait sans doute, un début de solution aux problèmes sus évoqués.

Nous articulons cette communication en cinq moments. Nous revenons sur la qualité du travail mathématique actuellement proposé au lycéen en lien avec le concept de droite tangente. En second lieu, nous expliquons pourquoi ce concept, vue sous l'angle de limite peut enrichir le travail mathématique du lycéen. Ces explications sont assorties des difficultés à surmonter pour rendre ce point de vue opérationnel. La proposition d'une technique de construction de la droite tangente dans l'environnement GeoGebra, constitue le troisième temps fort. Elle contribue à expliquer le choix de notre théorie explicative et le choix de notre méthode. La partie expérimentale nous donne l'occasion de présenter d'autres formes de tâches centrées sur le concept de droite tangente. Aussi de mettre en évidence, comment lesdites tâches peuvent aider à enrichir le travail mathématique et à provoquer le développement des perspectives locales chez un lycéen. Nous terminons ce travail avec la question de l'interdisciplinarité. Je nomme dans ce travail, relation de « *sécance* », une relation liant une courbe et une droite par des points d'intersections simples uniquement.

1 PROBLÉMATISATION DE L'OBJET DE RECHERCHE

1.1 Un travail mathématique pauvre sur la notion de tangente : le point de vue proposé par la dérivation

Au Cameroun, la notion de droite tangente est travaillée en classe de première principalement avec le point de vue que propose la dérivation. Cependant, ce point de vue ne donne pas beaucoup de possibilités pour enrichir l'activité mathématique de l'apprenant. En effet, sur deux décennies, précisément entre 2000 et 2020 la notion de droite tangente apparaît exactement deux fois aux examens nationaux du probatoire série « D ». Sur les deux années, les questions sont semblables aussi bien sur le fond que sur la forme. Elles invitent le candidat d'une part, à déterminer une équation algébrique de la droite tangente en un point de la courbe, connaissant son abscisse et l'expression algébrique de la fonction dérivée, et d'autre part, à tracer son représentant dans le registre graphique. Ce type de tâche réduit le travail mathématique du candidat à la notion de dérivation. Cette question, déjà soulevée par certains chercheurs (Delgadillo et al., 2016) reste encore d'actualité.

1.2 La droite tangente sous l'angle de la limite : un enrichissement du travail mathématique.

La droite tangente travaillée sous l'angle de la limite repose sur une constellation de concepts. Nous pouvons citer entre autres les notions de, point d'intersection simple, point d'intersection multiple, droite sécante, droite tangente, suite de droites sécantes, limite dynamique, limite statique, covariation, et de convergence. La mise en articulation et en fonctionnement des concepts suscités nous semble être une possibilité pour enrichir le travail mathématique du lycéen en termes de concepts à mobiliser lors de la résolution des tâches relatives à la notion de droite tangente. Mais aussi, donnerait des occasions au sujet de développer les perspectives locales sur les relations de tangences.

1.3 Les difficultés soulevées par la recherche pour rendre ce point de vue opérationnel dans le registre graphique

Plusieurs chercheurs (Panero, 2018; Balhan et al., 2015; Gantois, 2012; Vivier, 2010) entre autres, soulèvent les difficultés pour l'apprentissage de la notion de droite tangente sous l'angle de la limite. Ils sont d'accord sur la difficulté pour les lycéens d'appréhender le passage de la droite sécante à sa position limite, dans l'environnement papier crayon. Une des explications proposées est décrite par (Schneider, 1988), lorsqu'elle dit « cette définition est, elle aussi, purement géométrique, en ce sens qu'elle ne suppose aucun détour par les pentes, mais, contrairement à la perception des élèves, elle évoque plus une possibilité de *dépassement* qu'une réalisation effective. » (p.327). Gantois argumente en disant que : « Finalement, ce qui pose problème chez les élèves est que la limite est pensée dans un

univers inadéquat. » (p.137). Vivier fait un constat en lien avec les difficultés sus évoquées, lorsqu'il dit : « cette approche C3 par limite de droites, qui fait, l'unanimité dans les manuels, n'est pas explicitement au programme, n'est pas opérationnelle, ne permet pas de résoudre des problèmes [...] » (p.176). A la lumière des travaux évoqués nous soutenons que l'environnement papier-crayon ne serait pas propice pour penser la notion de limite dynamique. Cependant, comme nous verrons dans la section suivante, les milieux dynamiques offrent des possibilités.

2 UNE TECHNIQUE DE CONSTRUCTION DE LA DROITE TANGENTE VUE SOUS LE PRISME DE LA LIMITE

La technique consiste à construire en premier lieu une droite sécante passant par le point de tangence. De façon à former avec la courbe des points d'intersections simples, parmi lesquels un point mobile B sur la courbe à déplacer vers le futur point de tangence A. Le reste des points sont des points non attrapables dont les déplacements dépendent de celui du point B.

2.1 Coordination des fonctionnalités déplacement et zoom : une vision dynamique limite

Suite à cette étape, la construction se poursuit par le rapprochement du point mobile B vers le futur point de tangence jusqu'à ce que la figure atteigne un point de saturation. Il est atteint lorsqu'une portion de la droite sécante et une portion de la courbe se confondent à l'écran et apparaissent comme un segment de droite, avec les points A et B bien distincts dans la fenêtre géométrie. Une démarche non experte mobiliserait la fonctionnalité déplacement toute seule. Elle conduirait au dépassement du point A par le point B ou à la superposition à l'écran de leurs représentants. Ce dernier cas fait disparaître la droite tangente de l'écran. Pour surmonter cette difficulté liée à l'environnement GeoGebra, la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement est une possibilité. L'on rapproche le point B à proximité du point A à l'aide de la fonctionnalité déplacement. Ensuite on agrandit à l'écran le représentant de la distance entre les points A et B grâce à la fonctionnalité zoom. Puis on utilise à nouveau la fonctionnalité déplacement pour un autre rapprochement tel que décrit ci-dessus. Exceptées les limites du logiciel, on peut réitérer la même opération autant que nécessaire et autant que l'on veut. De cette façon, on peut construire une suite de points $(B_n)_n$ de la courbe, deux à deux distincts et qui converge vers le point A. Chaque rapprochement du point B vers le point A, rapproche la droite sécante de la droite tangente. Ainsi, on obtient un moyen de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante vers droite tangente. Par la même occasion, on peut construire une suite de droites $(AB_n)_n$ sécantes à la courbe, deux à deux distinctes et qui convergent vers la droite tangente. En adaptant la définition de la limite proposée par D'Alembert, nous utiliserons la « définition » suivante : **Si l'on peut trouver une technique permettant de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, un objet géométrique vers un autre de même nature, sans que le premier ne puisse coïncider, ni surpasser le deuxième, alors le deuxième est limite du premier.**

2.2 Le passage de la droite sécante à sa position limite : une vision statique de la limite

Au point de saturation, les points A et B sont bien distincts à l'écran. Une possibilité de faire coïncider leurs représentants, consiste à utiliser la fonctionnalité zoom inverse. Dans la pratique on effectue des zooms inverses consécutifs entre les représentants des points A et B jusqu'à ce qu'ils se superposent à l'écran. En ce moment la droite sécante est passée à sa position limite qui correspond à la droite tangente. La courbe et sa tangente forment alors à la position du point A, une intersection dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à deux (vision statique de la limite). La poursuite de zooms inverses renforce l'image de superposition des représentants des points. Ce qui pourrait faire émerger l'idée de « position limite ».

2.3 Technologie sur la technique

La fonctionnalité déplacement se comporte comme une rotation centrée en A, lors de chaque rapprochement du point A vers le point B. Pendant que le zoom se comporte comme une homothétie de rapport strictement supérieur à 1, lorsqu'il grossit à l'écran l'écart angulaire entre les droites ou lorsqu'il agrandit la distance entre les points A et B. Par suite, le passage de la droite sécante à sa position limite serait le fruit de la composée de rotation centrée en A et d'homothéties. Par ailleurs, les zooms font varier l'échelle de l'unité de longueurs sur les axes. Ceci se manifeste soit par l'agrandissement soit par la réduction à l'écran des objets géométriques en jeu. On peut donc repérer l'échelle de départ avant les transformations, et par suite, retrouver cette échelle lors du processus de réduction.

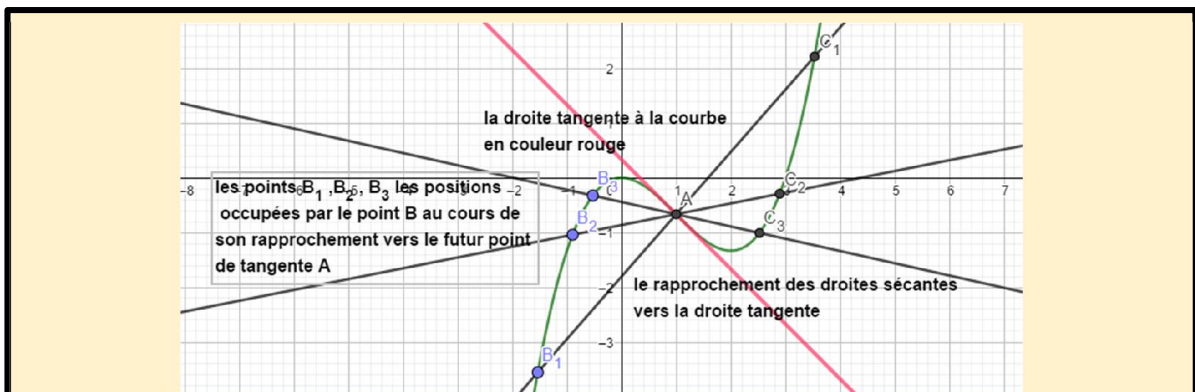


Figure1 : Les points d'intersections simples lient la courbe aux droites sécantes (B_1A) , (B_2A) , (B_3A)

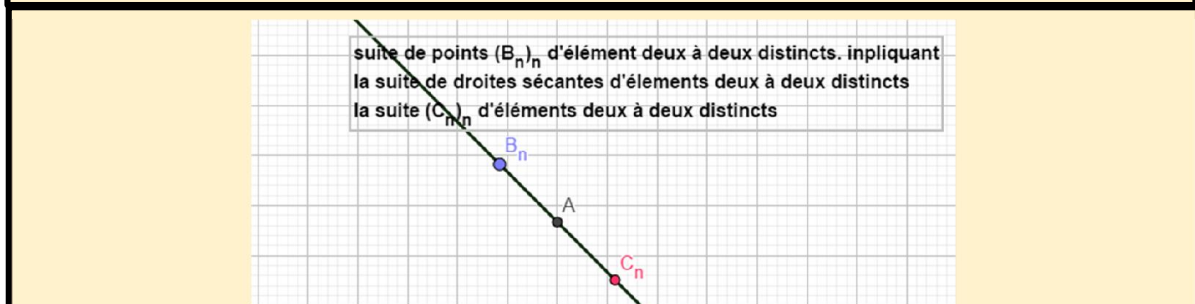


Figure 2 : la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement permet de construire la suite de points $(B_n)_n$ qui converge vers le futur point de tangence A. par la même occasion, elle permet de construire une suite de droites sécantes $(AB_n)_n$ qui converge vers la droite tangente.

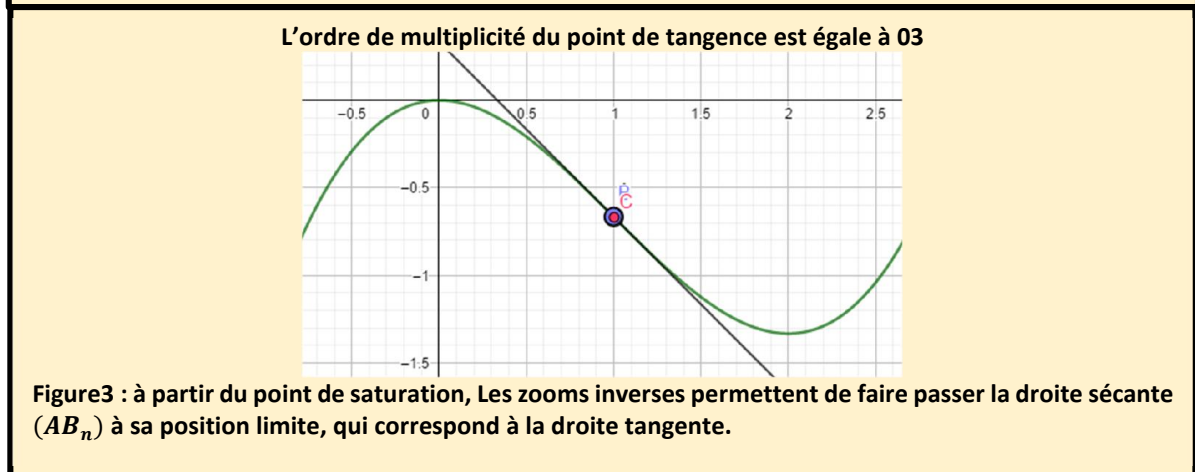


Figure3 : à partir du point de saturation, Les zooms inverses permettent de faire passer la droite sécante (AB_n) à sa position limite, qui correspond à la droite tangente.

3 CADRE THEORIQUE

Au regard, des difficultés pour le lycéen à construire des sens sur le concept de position limite lorsqu'il concerne la droite tangente, nous avons choisi d'inviter le participant à construire lui-même des connaissances prédicatives sur ce concept, à partir, des connaissances acquises sous la forme opératoire, dans l'environnement de géométrie, lors des constructions graphiques de la droite tangente, à l'aide de la technique sus-décrite. Au cours des différentes activités dans ce milieu, les participants pourraient construire des sens géométriques et dynamiques sur le concept de droite tangente et sur ses concepts secondaires. Notamment sur le concept de position limite. Nous cherchons aussi à faire en sorte que le sujet construise des sens analytiques sur le concept de position limite. Grâce au transfert des connaissances construites dans le cadre géométrique. La réussite de la conversion des unités signifiantes (Duval, 1994), pourrait être un indicateur de ce que l'environnement de géométrie dynamique aurait été un milieu propice pour penser les concepts en jeu.

Ainsi, le concept de schème de Piaget tel que revisité par (Vergnaud, 2001) semble alors être un bon outil pour analyser et comprendre comment le sujet construit dans l'action ses nouvelles connaissances. Car, selon ces chercheurs, la construction des nouveaux schèmes prend toujours appui sur des schèmes antérieurs. Cette théorie de l'adaptation va nous permettre de vérifier ou de confirmer si les schèmes de constructions de la droite tangente, développés dans l'environnement de géométrie dynamique seraient efficaces pour le développement de nouveaux schèmes, permettant de produire une équation algébrique de la droite tangente.

4 METHODE

4.1 Technique de collecte de donnée

Notre technique de collecte de données est le *teaching Experiment* (TE). Il est centré sur des séances d'enseignement orchestrées par l'enseignant-chercheur. Selon l'objectif visé, celui-ci occasionne des interactions entre les sujets ou entre les sujets et lui-même, en vue d'évaluer, d'orienter et de réguler les connaissances construites par les sujets. Dans le but de s'assurer que le sujet surmonte la difficulté annoncée par la recherche et surtout, comprendre et expliquer comment celui-ci y parvient. Les autres acteurs du (TE) : le chercheur-témoin et deux lycéens volontaires. Le chercheur-témoin participe à l'élaboration des tâches à proposer aux sujets, donne son avis sur l'interprétation des données, dans le but de renforcer l'objectivité du chercheur-enseignant. Les participants ont été choisis de manière raisonnée en collaboration avec l'enseignant de la classe qui est par ailleurs le chercheur-témoin. Le (TE) est propre à la didactique des mathématiques. Il a principalement été développée à l'école Russe et plus récemment aux États-Unis par (Steffe et al., 2000; Steffe & Thompson, 2000), entre autres.

4.2 Méthode d'analyse de donnée.

La séance que nous avons choisie de présenter et d'analyser s'inscrit dans une séquence d'enseignement visant à faire évoluer les conceptions actuelles des lycéens sur la notion de droite tangente. Notre méthode d'analyse des données est qualitative. Elle suit la démarche : choix du moment de la séance à analyser ; justification dudit choix, description dudit moment, interprétations des données sous l'angle des théories explicatives et enfin, appuyer ces interprétations par des extraits de transcription ou des figures provenant des cahiers des participants. Ces étapes sont inspirées par le modèle de (Powell et al., 2003) et récemment utilisées par (Dufour, 2019).

5 L'ENVIRONNEMENT DE GÉOMETRIE DYNAMIQUE EST PROPICE POUR PENSER LE CONCEPT DE DROITE TANGENTE SOUS LE PRISME DE LA LIMITE

Nous choisissons d'analyser ce moment au regard de la difficulté des lycéens à appréhender le passage de la droite sécante à sa position limite. Difficulté fortement soulignée par la littérature. Ce moment est centré sur la production d'une équation algébrique de la droite tangente, vue sous l'angle de la limite. Nous avons placé les participants dans l'environnement GeoGebra. Ceux-ci ont construit avec succès la droite tangente à la courbe de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ au point $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, à partir de la technique sus-décrite. Dans le milieu papier nous avons formulé une tâche avec le même objectif : en désignant par p la nième position du point B au cours du rapprochement inépuisable de celui-ci vers le point A, écrire en fonction de p , les coordonnées d'un point B_p sur (c), telle que le paramètre p puisse permettre de rapprocher ledit point vers le futur point de tangence A, autant que l'on veut.

Nous allons centrer notre analyse sur le travail du participant X, car il ressort le mieux, sa vision dynamique de la notion de limite. Les principales étapes dudit travail sont résumées ci-dessous.

Stratégie du participant X.

Production du participant X

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{p} \\ \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{3p^3} \end{pmatrix}$ (2) $AB_p: y_p = \left(3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{3p^2}\right)(x - 3)$

(3) $q_p(x) = (f(x) - y_p) = \frac{1}{3}(x - 3)\left(x - 3 - \frac{1}{p}\right)$. (4) $q(x) = f(x) - y = \frac{1}{3}(x - 3)^2(x + 3)$
est obtenue lorsque l'on fait tendre p vers l'infini dans (3). (5) (T) : $y = 3x - 9$ est la droite tangente à (c) en A, car elle forme avec la courbe, à la position du point A, une intersection dont l'ordre de multiplicité est égal à 2 (**vision statique de la limite**)

5.1 L'environnement de géométrie dynamique est propice pour le développement d'une vision statique de la limite

Les enregistrements vidéos obtenus révèlent que le participant X a repris 4 fois la construction de la droite tangente toujours à l'aide de la même technique. Nous déduisons que pour développer des nouveaux schèmes de production d'une équation algébrique, le sujet a sollicité comme schèmes prérequis, les schèmes de constructions graphiques, développés dans l'environnement de géométrie dynamique. En effet, il se donne un représentant de la droite sécante dans le registre analytique (voir étape 2). Il agit sur le paramètre p pour faire coïncider les points A et B (voire étape 4). Puis, conclut alors que la droite sécante est devenue la droite tangente (voire l'étape 5).

Au vu de cette démarche, nous disons que les composantes prise d'information, invariants opératoires et inférences du schème ont permis au sujet de repérer ces étapes comme incontournables pour transformer la relation de « *sécance* » en relation tangence. Le fait pour le participant de penser la relation de tangence en termes d'intersections multiples, nous laisse croire que la technique de géométrie sus-évoquée lui a aussi permis de développer une vision statique de la limite relativement au cadre géométrique (voire ligne (II)). Car cette vision intègre l'idée que la limite est atteinte. Le développement d'une technique lui ayant permis de faire coïncider les points dans le cadre analytique, nous invite à soutenir que la technique géométrique sus-décrite est transférable dans le cadre analytique, et que ce transfert peut permettre au lycéen de produire une algébrique de la droite en adoptant une vision statique de la limite relativement au cadre analytique.

Par ailleurs, sa stratégie de résolution ne nous donne pas d'informations sur son aptitude à modéliser ou pas, le rapprochement inépuisable du point B vers le futur point de tangence A. L'Enseignant-Chercheur (EC) revient sur ce point lors de la mise en commun.

Extrait1 : d'une mise en commun et d'une institutionnalisation locale

- I. EC : pouvez-vous rappeler ce que nous avons appelé l'ordre de multiplicité du point de tangence dans le milieu informatique ?
- II. Le participant Y : le nombre de points d'intersections simples qui partent se superposer avec le futur point de tangence. Et transforme la relation de *sécance* en relation de tangence.
- III. EC : à quoi correspond-t-il dans le cadre analytique ?
- IV. Le participant X : ça correspond au nombre de fois que $(x - x(A))$ apparaît dans la forme factorisée de l'expression $f(x) - y$.
- V. EC : très bien ! Avez-vous essayé de justifier que la droite tangente est limite d'une suite de droites sécantes à déterminer ?
- VI. Participant Y : oui mais je n'ai pas pu aller jusqu'au bout.
- VII. Participant X : puisque la $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{3p^2} \right) = 0$, on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, les termes de la suites $\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{3p^2} \right)$ du réel 0, sans jamais l'atteindre, ni le surpasser, en donnant à p des valeurs de plus en plus grandes. Par suite, on peut rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante $(AB_p): y_p = \left(3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{3p^2} \right) (x - 3)$ de la droite fixe (D): $y = 3(x - 3)$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser, en donnant à p des valeurs de plus en plus grandes. Par conséquent, cette droite fixe (D) est la droite tangente (T).

EC : très bien !

5.2 L'environnement de géométrie dynamique est propice pour le développement d'une vision dynamique de la limite

Le participant X a développé une technique algébrique lui ayant permis de montrer que l'on peut rapprocher de façon inépuisable la droite sécante de la droite tangente (voir la ligne VII). La bonne exploitation de cette technique pour résoudre la tâche proposée, témoigne que le participant a construit des nouveaux sens algébriques sur le concept de limite dynamique. Ces connaissances construites sur le concept de limite dynamique seraient le fruit d'une adaptation des connaissances antérieures d'après la théorie des champs conceptuels. Ce qui nous laisse penser que le sujet a construit des sens géométriques et dynamique sur le concept de limite dynamique dans l'environnement GeoGebra. Comme le témoigne son intervention : «...on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante $AB_p: y_p = \left(3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{3p^2} \right) (x - 3)$ de la droite d'équation $y = 3(x - 3)$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser ».

Ce qui nous invite à soutenir que, la technique mise en œuvre dans l'environnement GeoGebra, a un potentiel élevé d'activer une vision dynamique de la limite.

5.3 Le concept d'ordre de multiplicité du point de tangence : un outil efficace pour provoquer le développement des perspectives locales

Le participant X a construit des sens géométriques et dynamique sur le concept d'ordre de multiplicité dans l'environnement de géométrie dynamique (voir la ligne II). Celui-ci pense la notion de tangente en termes de points d'intersections simples qui partent se superposer sur le

futur point de tangence. Ce travail centré autour des voisinages décroissants du point de tangence, aurait permis au sujet de développer dans l'environnement GeoGebra, des perspectives locales sur la notion de droite tangente. Car, en se superposant sur le futur point de tangence, ces points transforment la relation de « sécance »¹ en relation de tangence. Ainsi, dans l'environnement dynamique, le participant reconnaît d'abord la relation de tangence (à partir des points qui se superposent), pour ensuite accepter que les objets géométriques en présence, sont des objets tangents.

Aussi, le participant a construit un sens analytique sur le concept d'ordre de multiplicité (voir la ligne IV). Ce qui lui permet de reconnaître dans le cadre analytique une relation tangence. Ce schème de reconnaissance de la relation de tangence dans le registre analytique, a sans doute pour schème prérequis, le schème de reconnaissance de la relation de tangence développée dans l'environnement de géométrie dynamique.

Le participant a développé une technique analytique lui permettant de transformer, la relation de « sécance » ($q_p(x) = (f(x) - y_p) = \frac{1}{3}(x - 3) \left(x - 3 - \frac{1}{p}\right) \left(x + 3 + \frac{1}{p}\right)$) en relation de tangence ($q(x) = f(x) - y = \frac{1}{3}(x - 3)^2(x + 3)$). En utilisant le passage à la limite, Il a trouvé dans le cadre analytique un moyen de faire tendre le point d'intersection simple d'abscisse $x = 3 - \frac{1}{p}$ vers le futur point de tangence d'abscisse $x = 3$. Puisque la situation est inédite, la technique mise œuvre par le participant, qui consiste à faire tendre certains points d'intersections simples vers le futur point de tangence pour obtenir une droite tangente, montre que celui a développé en situation, une vision locale sur la notion de droite tangente.

6 DISCUSSION ET INTÉRÊT POUR LA RECHERCHE

6.1 Sur le plan de la transposition didactique

Dans cet article nous proposons des exercices rentrant dans les programmes et dont les résolutions nécessitent impérativement d'adopter des perspectives locales sur les relations de tangentes, comme observés chez le participant X lors de la résolution des tâches proposées dans le cadre de l'analyse. Les chercheurs dont (Alory et al., 2015) ont soulevé la difficulté de trouver de tels exercices. Par ailleurs, dans lesdits exercices la droite tangente, vue sous le prisme de la limite, n'a pas une valeur ostensive comme dans nombre de manuels. Elle est un objet premier par rapport à sa pente. Ainsi, l'apprenant peut travailler sur cet objet géométrique en restant dans le cadre géométrique ou avec des schèmes de pensée développés entièrement dans le cadre géométrique. Les auteurs dont (Balhan et al., 2015) ont relevé les difficultés pour les lycéens à considérer la droite tangente comme un objet second par rapport à sa pente.

6.2 Sur le plan épistémologique

Nous proposons une technique opérationnelle dans l'environnement de géométrie dynamique et qui aurait un potentiel local élevé. En effet, le participant X a bien adapté les schèmes développés dans l'environnement GeoGebra, pour produire équation algébrique de la droite tangente, en adoptant une vision locale et dynamique. Certaines recherches (Delgadillo et al., 2016) soulignent que le concept de droite tangente est trop riche pour le penser uniquement avec le point vue proposé par la dérivation. D'où l'intérêt du développement des nouveaux schèmes de pensée du concept de droite tangente.

La même technique a permis au sujet de développer des nouveaux schèmes de pensée du concept de limite. Lesdits schèmes lui ont permis de discriminer la tâche à résoudre en adoptant une vision dynamique de la limite, de celle à résoudre en adoptant une vision statique. Elle

¹ Comme déjà précisé à l'introduction, Je nomme ici par relation de « sécance », une relation liant une courbe et une droite par des points d'intersections simples uniquement.

serait donc un bon moyen pour surmonter la difficulté des lycéens à comprendre la dualité de la limite. Cette difficulté est mentionnée par (Dufour, 2019) entre autres.

Lien avec l'interdisciplinarité

Dans l'enseignement de la physique en classe de première, la notion de vitesse instantanée, vue sous le prisme de la limite est travaillée, comme le montre cet extrait du manul « les majors » à la page 124 :

Une mangue située en un point O, situé à 12 m du sol se détache du manguier. La distance parcourue par la mangue à la date t est $d(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$, l'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le mètre.

On conçoit que la mangue en mouvement possède, à chaque instant une vitesse dite instantanée. Le problème est de définir et de calculer cette vitesse. A la date $t = 1$, par exemple, nous la noterons $v(1)$

1.b) En continuant le calcul des vitesses moyennes pour des valeurs de h de plus en plus proche de 0, on peut obtenir des approximations meilleures de $v(1)$. Mais aucune des valeurs n'est la valeur exacte de la vitesse instantanée à la date 1, car elle doit évidemment être exprimée par un seul nombre. **La façon d'y parvenir est de dire que $v(1)$ est la limite de la fonction $h \mapsto \frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ en 0.** Calculer $v(1)$.

Le texte 1.b) montre que l'absence d'une « définition » de la limite ne facilite pas la construction d'une définition intelligible de la vitesse instantanée, à partir des vitesses moyennes. Car, ici on part d'une approche intuitive de la limite pour construire un nouveau concept. Il nous semble alors que la compréhension de la définition de la limite proposée par d'Alembert, sur laquelle nous avons donné des occasions au participant de construire des sens dans l'environnement GeoGebra peut, être d'un apport important pour faire travailler les apprenants sur la notion de vitesse instantanée, dans le cours de physique, en classe de première.

Nous avons alors proposé cette tâche au participant X. En reformulant la question de la manière suivante : détermine en fonction de t , la valeur limite $v(t)$, des valeurs prises par les vitesses moyennes entre les dates t et $t' = t + h$, où h prend des valeurs proches de zéro. Le participant X à procéder comme suit :

$\frac{d(t+h)-d(t)}{h} = t + 2 + \frac{1}{2}h$. Puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h} = t + 2$, on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut la valeur $t + 2 + \frac{1}{2}h$, de la valeur $t + 2$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser, en donnant à h des valeurs de plus en plus proches de 0. Par conséquent, la valeur $t + 2$ est la limite des valeurs prises par les vitesses moyennes entre les dates t et $t' = t + h$. Ce qui permet de conclure que la vitesse instantanée $v(t) = t + 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h}$.

Partant d'une vision dynamique de la limite le participant X, est arrivé à établir la relation qui existe entre la vitesse instantanée et les vitesses moyennes du mobile. Ceci nous invite à soutenir que, les connaissances opératoires sur la notion de limite dynamique, acquises dans l'environnement GeoGebra, sont efficaces pour la construction de sens sur la notion de vitesse instantanée, telle appréhendée en classe de première dans le cours de physique.

Conclusion

Cette étude visait, entre autres, la proposition des nouvelles formes de tâches, dont les résolutions sont susceptibles de provoquer la construction de nouveaux sens sur le concept de droite tangente, ainsi que sur les concepts sur lesquels il repose. Orienté par le caractère local du concept de limite, nous avons rendu opérationnel, dans l'environnement GeoGebra, le point de vue qui présente la droite tangente sous le prisme de la limite. Au vu des difficultés soulevées par la recherche pour rendre ce point de vue accessible aux apprenants dans l'environnement papier-crayon, nous avons choisi de commencer par faire acquérir les connaissances sur ce concept sous la forme opératoire, dans un environnement de géométrie dynamique. Grâce à une technique centrée sur la coordination des fonctionnalités zoom, déplacement et réduction. Elle a permis aux sujets de développer des schèmes de construction de droites tangente en adoptant une vision dynamique et statique de la limite. Ces schèmes, ont permis au participant de développer de nouveaux schèmes, lui ayant permis de produire une équation algébrique de la droite tangente en adoptant une vision dynamique et statique de la limite. Pour produire cette équation le participant X a mis en articulation et fonctionnement les notions de, limite, voisinage, convergence et de position limite. Ce qui nous invite à soutenir que, le sujet a développé dans l'environnement de géométrie dynamique des perspectives locale, globale et ponctuelle sur la notion de droite tangente. Aussi, en termes de concepts mobilisés pour travailler ladite notion, l'activité mathématique des participants ont été plus riches que celles proposées actuellement aux lycéens. Par ailleurs, cette vision dynamique de la limite a permis au participant X de montrer que la vitesse instantanée est limite d'une famille de vitesses moyennes.

BIBLIOGRAPHIE

- ALORY, S., CHORLAY, R., DEROUET, C., JOSSE, V., LEGRIS, C., LOENG, R., PANERO, M., ROGALSKI, M., & VIVIER, L. (2015). *Autour de la notion de dérivée en classe de première*. IREM de Paris 7. 101.
- BALHAN, K., KRYSINSKA, M., & SCHNEIDER-GILOT, M. (2015). Quelle définition du concept de tangente? Pour quelles raisons? *Repères IREM*. 101. <https://orbi.uliege.be/handle/2268/178081>
- DELGADILLO, E. M., MURILLO, R. P., & VIVIER, L. (2016). *Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université*. first conference of International Network for Didactic Research11 in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France. " hal-01337886".
- DUFOUR, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : Un Teaching Experiment autour de la dérivée*. [Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal]. L'archive de publication électroniques de l'UQAM. <https://archipel.uqam.ca/12668/>
- Duval, R. (1994). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(1), 126-143.
- Gantois, J.-Y. (2012). *Un milieu graphico-cinématique pour l'apprentissage des dérivées dans une praxéologie « modélisation » : Potentialités et limites*. Thèse de Doctorat en Sciences, sous la direction du professeur Maggy Schneider, soutenue à l'université de Liège.392.

- Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 38(1), 1-15.
- PANERO, M. (2018). *Les pratiques enseignantes concernant la dérivée dans le secondaire*. Séminaire National de Didactique des mathématiques, Novembre 2016, At Paris (France). 304-324. <https://ardm.eu/manifestations/seminaire-ddm-ardm/>
- POWELL, A. B., FRANCISCO, J. M., & MAHER, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 405-435. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002>
- RESTREPO, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6eme* [Phd thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00334253>
- STEFFE, L., THOMPSON, P., & GLASERSFELD, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underling principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.
- VANDEBROUCK, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : Activités des élèves et pratiques des enseignants*. Histoire et Perspectives sur les Mathématiques. Université Denis Diderot - Paris 7, 2011. Tel - 01267429. Archives- ouvertes.137.
- VERGNAUD, G. (2001). *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*. Conférence Publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001.22.
- VIVIER, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume 15, 28, p.173-199.