



HAL
open science

Après “Le hasard et la nécessité”, la nécessité conceptuelle du hasard et des présences plus générales des mathématiques dans la mécanique quantique

Thierry Paul

► **To cite this version:**

Thierry Paul. Après “Le hasard et la nécessité”, la nécessité conceptuelle du hasard et des présences plus générales des mathématiques dans la mécanique quantique. *Intersecting paths across mathematics, biology, and epistemology: A colloquium in honor of Giuseppe Longo and Ana Soto*, Oct 2022, Paris, France. hal-04180110

HAL Id: hal-04180110

<https://hal.science/hal-04180110>

Submitted on 23 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**APRÈS “LE HASARD ET LA NÉCESSITÉ”, LA NÉCESSITÉ
CONCEPTUELLE DU HASARD ET DES PRÉSENCES PLUS
GÉNÉRALES DES MATHÉMATIQUES DANS LA MÉCANIQUE
QUANTIQUE**

par

Thierry PAUL

J’ai essayé de montrer dans un précédent article [12] comment la seule vision raisonnable du “monde quantique” passait par une mathématisation *absolue* des objets quantiques, seule description viable à mes yeux. Les autres tentatives de la soi-disant interprétation de la mécanique quantique menant inexorablement à l’apparition de paradoxes. Paradoxes du langage utilisé, et non pas de la théorie elle-même. Mon argumentation consistait alors à remarquer que, si “après presque un siècle”, la mécanique quantique n’avait toujours pas trouvé son langage disons vernaculaire, alors il fallait se résoudre à ce que les objets quantiques soient des objets strictement mathématiques. Un pas vers une deuxième révolution copernicienne.

Je voudrais dans les lignes qui suivent, en hommage à Giuseppe qui m’a tant apporté, placer ce tournant ontologique vers les mathématiques dans un raisonnement strictement interne à la théorie quantique : une nécessité théorique de mathématisation du discours quantique et non plus la nécessité de résignation par défaut du paragraphe précédent.

Le schéma logique, logique qui n’est pas sans me rappeler tant de discussions longoiennes, en est le suivant : la nécessité du caractère intrinsèque de l’aléatoire advenant lors de la mesure quantique détruit la mathématisation phénoménologique de cette dernière, et ce contrairement à l’aléatoire classique, i.e. provenant d’un manque d’information. Mais cette démathématisation de la dynamique quantique crée à son tour une exclusivité de la description mathématique des objets quantiques : un point matériel est une planète chez Newton parce que cette planète est en mouvement habitant le même espace théorique mathématisé. Voit-on des points, voit-on des courbes continues ? On ne voit en tout cas l’un sans l’autre. Que la courbe disparaisse, qu’elle devienne aléatoire, discontinue et tout s’écroule : le point matériel, vu, par exemple, comme intersection de deux courbes disparaît comme être

palpable, matériel, vécu. La dynamique de la mesure quantique est aléatoire et discontinue, justement. Il n’y a donc plus de place à un langage des objets quantiques qui ne se réduirait pas aux seules mathématiques.

On le voit, la perte d’une dynamique toute classique, solution d’équations, mathématique donc, entraîne une surenchère mathématique de la cinématique qui n’est alors *que* mathématique. Une particule n’est *qu’un* espace vectoriel, un point matériel *qu’un* vecteur lui-même. Il y a dans cette dualité dynamique/cinématique une espèce de loi de conservation épistémologique, en quelque sorte. Un jeu subtil entre une a priori irraisonnable inefficacité des mathématiques pour la dynamique créant elle-même une non moins irraisonnable efficacité et suffisance des mathématiques que sont, in fine, les objets quantiques.

Mais nous voyons là, aussi, un positionnement des mathématiques pour le quantique inverse à celui qu’elles occupent dans d’autres domaines, en particulier en biologie. Alors que on conçoit bien qu’un modèle mathématique de description des objets biologiques est une grossière fantaisie, on est souvent plus clément pour les approximations mathématisées des dynamiques de la vie - pas dans l’audience de ce colloque néanmoins. La mécanique quantique, de son côté, joue à l’opposé. L’absence intrinsèque de mathématisation de la dynamique crée une espèce de mathématisation ontologique du quantique : puisque tu ne te mouvras pas mathématiquement, tu seras mathématique ou tu ne seras pas. Je finirai ce texte en commentant cette assertion à la Breton, ne serait que pour taquiner Ana et Giuseppe.

1. Aléatoire quantique ; la nécessité de l’intrinsèque

Hasard et nécessité, voilà bien une dialectique qui fait toujours recette. En mécanique quantique ce couple n’a rien à voir avec le livre du fameux biologiste, mais au contraire convoque ces deux mots dans le sens ‘nécessité du hasard quantique’ et, nous allons le voir, plus précisément nécessité d’une propriété fondamentale de l’aléa quantique : celle d’être intrinsèque⁽¹⁾

Le hasard quantique a été établi par de nombreuses expériences depuis une trentaine d’années - c’est là sa nécessité contemporaine - mais son introduction dès l’avènement de la mécanique quantique s’est avérée se marier délicieusement avec l’axiomatique dite de Copenhague. Mais elle suggéra aussi immédiatement de faire une analogie entre un système (a priori simple) quantique et un système complexe classique, pour lequel l’aléa pâlie le

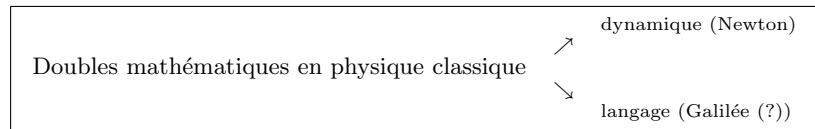
⁽¹⁾Rappelons, [13, 14] que la dynamique quantique contient deux parties irréconciliables : d’une part l’équation de Schrödinger, son aspect newtonien, et d’autre part le phénomène de la mesure qui produit aléatoirement un résultat, une valeur, et projette “brutalement” la fonction d’onde du système vers une autre, différente, associée au résultat obtenu (elle aussi aléatoirement donc).

manque d'information. De là à se repaître des fantômes des fondements et de réveiller cette bonne vieille incomplétude : on ne nous dirait pas tout.

Ce débat n'a plus lieu d'être au XXIème siècle. Non seulement l'expérience a tranché, qui nous ont construit des générateurs aléatoires quantiques qui battent tous les ordinateurs, mais aussi des expériences de pensée à évènement unique qui ont toutes donné raison à l'intrinsèque : une seule mesure et tout est dépeuplé..... de mathématique. Plus d'équation à résoudre, le paradigme dynamique de Newton s'effondre et la mesure n'est pas, mais alors pas du tout contenue dans l'équation de Schrödinger.

Mais c'est plus que cela, c'est toute la subtile double présence (dans la dynamique et dans la définition, le langage cinématique des objets) qui se trouve d'un seul coup balayée.

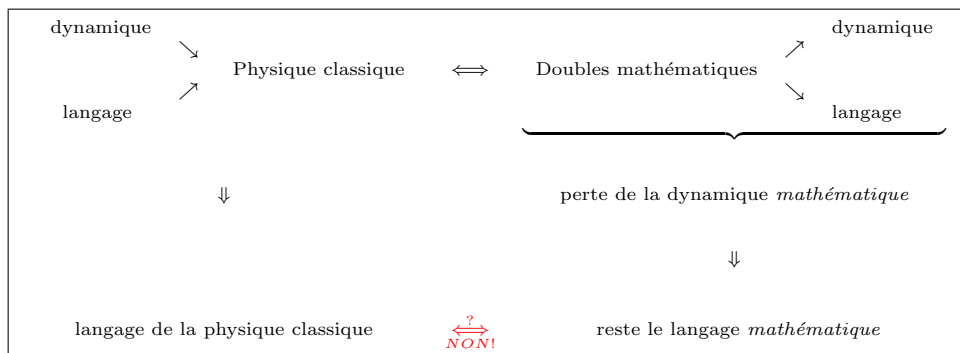
Le subtil diagramme suivant n'a plus lieu:



Nous allons voir comment, en mécanique quantique, la démathématisation de l'étage supérieur (dynamique) va renforcer la mathématisation de l'étage inférieur.

2. De l'irraisonnable inefficacité des mathématiques

La place des mathématiques dans la physique classique et dans la physique quantique peut être représentée par la boucle logique suivante si particulière, que nous allons commenter.



Non seulement la double présence des mathématiques au niveau du langage et de la dynamique est une propriété de la mécanique classique, elle en est caractéristique. C'est cette ubiquité qui fournit au classique un langage non-mathématique des objets, imagé, imaginatif, acquis grâce à la dynamique bien posée mathématiquement. S'il faut résoudre des équations comme nous (aurait) dit Newton, c'est bien parce que c'est cette mobilité calculée, non hasardeuse justement, qui donne une description des planètes comme points matériels. Et qui vice versa incarne le point matériel en planète, molécule ou autre objet de tous les jours.

Que la dynamique déterministe disparaisse, comme c'est le cas quantiquement (lors de la mesure), alors tout se brouillerait classiquement aussi. Les atomes des grecs disparaîtraient, l'astronomie redeviendrait astrologie...

C'est bien pourtant ce qui se passe en mécanique quantique. Le langage des objets y disparaît donc comme faiseur d'images, il ne reste que le langage mathématique, immuable, irremplaçable.

Cela pourrait sembler une mauvaise nouvelle - et c'en serait une en mécanique classique - si ne venait nous sauver une merveilleuse nouvelle : contrairement aux mathématiques du classique, les mathématiques du quantique sont simples, claires, limpides⁽²⁾.

3. De la non moins irraisonnable efficacité des mathématiques quantiques

Les mathématiques quantiques sont essentiellement algèbre, Heisenberg nous l'a montré. Et l'algèbre, s'il peut poser des questions très difficiles, vit, contrairement à l'analyse, dans un substrat simple. Une matrice est un tableau *discret*, fini même, de nombres. Son spectre (ensemble des résultats possibles d'une mesure) aussi. Que l'on pense à l'analyse dans le continu nécessaire aux équations de Newton et sa si difficile élaboration mathématique !

Le premier avantage, fondamental, de cet ensemble discret, voire fini, de possibles est son aide cruciale pour définir l'identité. On est le même ou on ne l'est pas, mais on ne l'est pas "presque". C'est cette existence d'une identité absolue, d'un "le même" sans ambiguïté qui autorise, tant au niveau axiomatique qu'expérimental, le caractère intrinsèque de l'aléa quantique. On ne connaît pas le résultat d'une mesure a priori parmi le jeu des possibles autorisés, mais on sait que l'on peut effectuer cette mesure sur des objets qui sont dans le même état, c'est-à-dire quantiquement sur le même objet.

⁽²⁾Ma démarche ici n'est peut-être pas (humblement) sans lien avec la vision de la place des mathématiques en relativité dans [2].

Pour paraphraser Giuseppe, en mécanique quantique le “restart” existe (je l’ai rencontré)⁽³⁾.

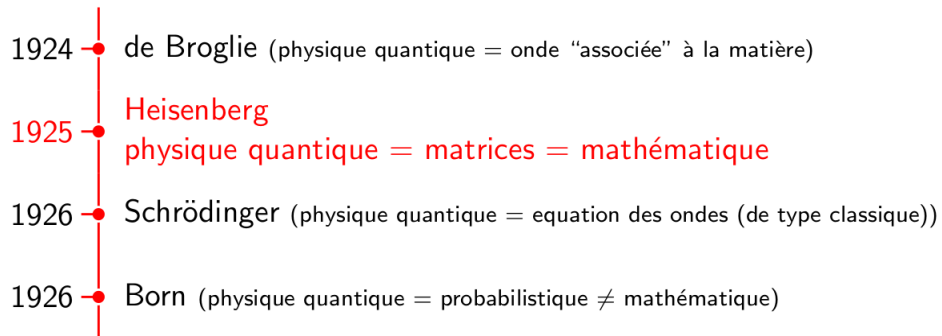
4. Comment en est-on arrivé là ?

Nous l’avons vu, la langage vernaculaire si cher à la physique classique dérive de cette double mathématique de la dynamique ET des objets (cinématique) :

langage
une planète est/devient un point par sa DYNAMIQUE !
mathématique

Mais tout cela se casse s’il n’y a plus de dynamique mathématisée, comme c’est le cas dans l’expérience des deux fentes. Ne reste alors qu’une, et seulement une, “ontologie mathématique”. On voit bien la différence avec ce que nous (aurait) dit Galilée, il ne s’agit plus d’écrire, de lire un langage mathématique, mais bien de ne pouvoir donner qu’un statut mathématique aux objets quantiques. Une seconde révolution copernicienne, encore une fois.

A ce stade, il semble utile, en tous cas intéressant de se rappeler comment on en est “arrivé là”.



1924 : après qu’Einstein [7] en 1905 ait donné aux ondes un statut de particule (photon) et Bohr [4] en 1913 ait construit un modèle d’atome en accord avec la loi de Planck [18] de 1900, de Broglie [6] donne à la matière un statut d’onde.

⁽³⁾Il suffit pour le voir de sélectionner, après plusieurs mesures, les états (en fait il n’y en a qu’un) consécutifs à l’obtention du même résultat (ce qui a une sens précis puisque l’ensemble de ces résultats est discret).

1925 : Heisenberg [8] exprime la dynamique quantique sur des matrices, objets fondamentalement DISCRETS ontologiquement mathématiques.

1926 : Schrödinger [19] établit l'équation des ondes de de Broglie par un retour néoclassique, rendue populaire à la fois par de (fausses) interprétations mais aussi de (vraies) applications.

1926 : Born donne une interprétation probabiliste : la solution (son module au carré plutôt) de l'équation de de Broglie-Schrödinger est la probabilité de présence lors d'une mesure de la position.

Ce que l'on obtient lors de l'expérience des deux fentes "électron par électron" est ceci, en accord avec Heisenberg :



La soi-disant interprétation de Born, en fait un des quatre axiomes dits de Copenhague, ne dit rien, mais absolument rien, sur ce qui se passe lors d'une mesure unique. Ou même lors d'une succession finie de telles mesures est un ensemble de points de chute disposés de façon parfaitement aléatoire.

Ce que nous dit Born est que, après un grand, voir infini, nombre de mesures, alors ces points se disposent en dessinant des "franges d'interférence" qui sont le graphe du module de la fonction d'onde à l'arrivée aux deux fentes :



un objet tout à fait calculable et déterministe.

On a donc la ‘dualité suivante:



On a pu se satisfaire d’une vision mathématico-probabiliste de la mécanique quantique jusqu’à la fin du siècle dernier : la théorie serait statistique (comme l’est la théorie cinétique des gaz à la Boltzmann) point ! Mais l’expérience a depuis clos le débat : lors d’expériences de mesure isolées l’intrinsèque de l’aléatoire quantique s’impose, incontournable.

5. Du statut ontologique des mathématiques quantiques : complétion de l’incomplétude classique

un piccolo regalo di compleanno per Giuseppe

Ce texte ne serait pas complet si l’on ne parlait pas d’incomplétude.

La mécanique classique est incomplète par bien des aspects sur lesquels je ne reviendrai pas ici. Mais elle l’est aussi par son incapacité “en amont” à pouvoir décrire le côté intrinsèque de mesures isolées. Les variables cachées ne se cachent pas, elle n’existent pas. Cela a été montré par Alain Aspect il y a plus de quarante ans !

Le quantique complète le classique, là aussi par bien des aspects (sans jeu de mots) mais en particulier aussi parce que le quantique provoque l’aléa intrinsèque, impossible à formaliser classiquement par “des équations”, par l’abandon de la dynamique mathématique, l’abandon de la terminologie classique. C’est l’adieu au langage.

Mais il reste les mots mathématiques, riches, précis et simples. Et seulement eux.

*”Il faut peindre **que** l’on ne voit pas.”*
L’adieu au langage, Jean-Luc Godard.

6. Du statut mathématique de l'ontologique : vers une philosophie quantique (et non *du* quantique) ?

Il en va de la mécanique quantique comme il en va (ou allait) du dodécaphonisme : on en parle beaucoup mais on l'écoute peu.

Par écouter le quantique, je veux dire par là faire, lire le quantique dans et exclusivement dans son formalisme, c'est à dire les quatre axiomes de Copenhague/von Neumann [11]. Sans regard extérieur, sans comparaison avec le classique. En soi, tout simplement.

Une philosophie quantique (terme généralement utilisé en place de "philosophie *du* quantique", e.g. dans (à mon sens) [3]) devrait donc s'ancrer dans le formalisme mathématique (rappelons que c'est le seul à nos yeux) quantique.

La pensée quantique se rapproche donc ainsi de la pensée de l'incomplétude/indécidabilité qui prend toute sa saveur dans le strict, abstrait formalisme gödélien⁽⁴⁾.

C'est ce que font subliminalement les physiciens qui disent : "Alice part avec son qubit et reste intriquée à Bob" et pensent, en fait, (et font) : "on effectue une translation sur la partie spatiale de la fonction d'onde du qubit d'Alice dont la partie spinorielle est intriquée à celle de Bob".

La version parlée fait référence à un espace paradoxalement global, alors que la version pensée ne présente aucun paradoxe.

7. Je t'aime, moi non plus

"Le cauchemar de Giuseppe"

Les mathématiques et leurs limites
(à paraître)

J'ai essayé dans ces notes d'exhiber un statut épistémologique très particulier des mathématiques dans la théorie quantique : un jeu à la "je t'aime, moi non plus" qui les voit disparaître de la dynamique pour renaître, exhaustives, dans la statique. Ce jeu peut tout d'abord sembler pervers si l'on pense aux limites, réelles, des sciences telles que Giuseppe les a étudiées, par exemple dans [10].

Mais je tiens ce jeu pour beaucoup plus subtil qu'il n'y paraît. Plus subtil parce que plus extrême tout d'abord : la limite des mathématiques dans la dynamique (quantique) est totale et absolue - c'est une disparition pure et

⁽⁴⁾Giuseppe et moi-même l'avons expérimenté dans nos "Six leçons sur l'incomplétude : logique, mécanique quantique" à l'École Normale Supérieure en 2008-2009 dans le cadre du GHPS, leçons données dans la salle prémonitoirement nommée "U ou V" - <https://caphes.ens.fr/six-lecons-sur-lindécidabilité-logique-et-laléatoire-physique/>.

simple) - tout comme est totale et absolue leur renaissance dans les objets - totale et absolue parce qu'occupant exhaustivement tout le sens⁽⁵⁾

Objets quantiques inanimés, avez-vous donc une âme mathématique ?

Il me semblerait absurde de le penser si leurs mouvements aussi était mathématiques/mathématisés. Toute la physique quantique se réduirait alors à la discipline (dans les deux sens du mot) mathématique et le mathématicien serait maître du monde. Heureusement la mesure (dans tous les sens du terme encore) lui échappe, tout comme les objets classiques acquièrent leur sens propre hors mathématiques.

Sans la rébellion salvatrice de la mesure, les objets quantique auraient quand même mathématiquement une âme, mais ce serait l'âme d'un canon.

Références

- [1] G. Bachelard, "La philosophie du non", Essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique. Paris: Les Presses universitaires de France, 1966,
- [2] G. Bachelard, "La valeur inductive de la relativité, Vrin (1929, réédité en 2014 (enfin !)).
- [3] M. Bitbol "Philosophie quantique", Mimésis (2023).
- [4] N. Bohr, "On the constitution of atoms and molecules", Philosophical Magazine, 26, 1-25, 1913.
- [5] M. Born, "Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik", Zeitschrift für Physik 40, 167-192, 1926
- [6] L. de Broglie, "Ondes et quanta" C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, 177 (1923), pp. 507-510.
- [7] A. Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" Annalen der Physik. 17 (1905) 132;
- [8] W. Heisenberg, "Matrix mechanics", Zeitschrift für Physik, 33, 879-893, 1925.
- [9] G. Longo, "Le jeu difficile entre rigueur et sens", RIGUEUR, Spartacus, Paris,
- [10] G. Longo, "Le cauchemar de Prométhée", PUF (2023).
- [11] J. von Neumann, "Mathematical Foundation of Quantum Mechanics", Princeton University Press, 1955.
- [12] T. Paul, "Fragments d'un questionnement amoureux : la rigueur en musique et philosophie interrogée par un mathématicien", RIGUEUR, Spartacus, Paris,
- [13] T. Paul, "La mécanique quantique vue comme processus dynamique", dans "Logique, dynamique et cognition" (dir. J.-B. Joinet), collection "Logique, langage, sciences, philosophie", Publications de la Sorbonne, Paris, 2007.
- [14] T. Paul, "A propos du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique", "Logique et Interaction : Géométrie de la cognition" Actes du colloque et école thématique du CNRS "Logique, Sciences, Philosophie" à Cerisy, Hermann, 2009.
- [15] T. Paul, "Mathematical entities without objects - On the realism in mathematics and a possible mathematization of the (non)platonism", Proceedings of the conference "Symmetry, Proportions and Seriality", European Review. **29** (2), April 2021.

⁽⁵⁾Sur "Rigueur et sens" on pourra consulter [9].

- [16] T. Paul, “La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme incomplète”, en préparation.
- [17] T. Paul et M. Schmidt, ‘La rigueur commune et diverse des mathématiques, musique et philosophie,’ , RIGUEUR, Spartacus, Paris 2021.’
- [18] M. Planck, “Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum ” Annalen der Physik vol. 4, p. 553 ff (1901)
- [19] E. Schrödinger, “Quantisierung und eigenvalues”, Ann. der Physics, 79, 1926 et (voir aussi “Mémoires sur la Mécanique Quantique,” Editions J. Gabay, Paris, 1994). [

*Communication au colloque “Intersecting paths across mathematics, biology, and epistemology” a colloquium in honor of. **Giuseppe Longo and Ana Soto** 21 & 22 octobre 2022*

THIERRY PAUL, CNRS, Sorbonne Université, Université Paris Cité, Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL), F-75005 Paris, France • *E-mail* : thierry.paul@sorbonne-universite.fr