



HAL
open science

Modèle markovien de prêt groupé en microfinance

Philibert Andriamanantena, Issouf Abdou, Mamy Raoul Ravelomanana, Rivo Rakotozafy

► **To cite this version:**

Philibert Andriamanantena, Issouf Abdou, Mamy Raoul Ravelomanana, Rivo Rakotozafy. Modèle markovien de prêt groupé en microfinance. 2023. hal-04177855

HAL Id: hal-04177855

<https://hal.science/hal-04177855>

Preprint submitted on 9 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle markovien de prêt groupé en microfinance

Philibert ANDRIAMANANTENA* - ABDOU Issouf** - RAVELOMANANA Mamy Raoul***
- RAKOTOZAFY Rivo****

*Lycée Jean RALAIMONGO

Lycée Jean RALAIMONGO, Ankofafa Andrefana, 301 Fianarantsoa, Madagascar

andriphilibert@gmail.com

**Université de Comores

abdouissouf8631@gmail.com

***Université d'Antananarivo

Présidence de l'Université d'Antananarivo, Ankatso, 101 Antananarivo, Madagascar

ironmamy@outlook.fr

****Université de Fianarantsoa

BP 1264, Andrainjato, 301 Fianarantsoa, Madagascar

rakotoz@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous proposons un modèle de prêt solidaire qui répond au mieux au contexte de la microfinance. En s'inspirant du modèle de Osman Khodr et Francine Diener [4], nous utilisons les chaînes de Markov qui se basent sur le passé récent pour prédire le futur. Une charge transférable $q = \phi(1 + r)$ est traité ici au cas par cas selon les situations des membres du groupe d'emprunteurs. Le modèle permet donc de fournir à l'institution de microfinance des données statistiques plus précises en stigmatisant les emprunteurs d'un état à un autre. Notre modèle se démarque à celui Osman Khodr et Francine Diener par l'ajout des hypothèses supplémentaires qui incorporent pas à pas, de façon naturelle toutes les caractéristiques d'une population pauvre à faible niveau de sureté matérielle et avec tolérance en cas de défaut partiel de remboursement de prêt groupé.

ABSTRACT. In this paper, we propose a solidarity loan model that best responds to the context of microfinance. Inspired by the model of Osman Khodr and Francine Diener [4], we use Markov chains based on the recent past to predict the future. A transferable charge $q = \phi(1 + r)$ is treated here on a case-by-case basis according to the situations of the members of the group of borrowers. The model therefore makes it possible to provide the microfinance institution with more precise statistical data by stigmatizing borrowers from one state to another. Our model differs from that of Osman Khodr and Francine Diener by adding additional hypotheses that incorporate step by step, in a natural way, all the characteristics of a poor population with a low level of material security and with tolerance in the event of a partial lack of group loan repayment.

MOTS-CLÉS : Microfinance, charge transférable, chaîne de Markov, Prêt groupé, Incitation dynamique, Profit espéré actualisé

KEYWORDS : Microfinance, transferable charge, Markov chain, group loan, dynamic incentive, discounted expected profit

1. Introduction

L'accès au crédit de financement est toujours sujette aux cautions matérielles. Ce qui exclut largement une fraction de la population mondiale et surtout celle des pays en développement. Or, selon Alex Counts, président de la Fondation Grameen, " les actifs les plus importants des institutions de microfinance ne sont pas leurs portefeuilles, mais la bonne qualité de leurs relations avec les plus pauvres de ce monde ". Ainsi, pour rejoindre ces clientèles pauvres et construire une relation avec elles, les institutions de microfinance ont adopté un modèle de prêt à des conditions plus avantageuses par rapport au prêt individuel. Plus avantageuses d'une part puisqu'il permet de remplacer les cautions matérielles en cautions immatérielles et d'autre part puisqu'il permet de réduire les coûts opérationnels du prêteur. Ce modèle présentant des caractéristiques avantageuses non seulement pour l'emprunteur mais aussi pour le prêteur est appelé prêt groupé.

Choisir les clients pauvres les plus rentables pour les institutions de microfinance n'est pas chose facile puisqu'elles n'ont pas l'information nécessaire pour ce faire. Le choix ainsi fait conduit donc aux problèmes de la sélection adverse (problèmes d'asymétrie d'information). Justement, les méthodes de prêt groupé sont utilisées pour annihiler ces problèmes. Lors de la formation des groupes, les membres se connaissent entre eux et sont mieux informés que le prêteur. Une personne n'a pas intérêt à s'associer qu'avec une personne qu'elle connaît parfaitement et dont elle peut répondre. Quand les groupes sont formés, chaque membre est responsable de remboursement effectif du crédit et surveille les faits et gestes de ses pairs. Cette responsabilité conjointe consiste à réduire l'aléa moral et les coûts de surveillance du prêteur. Ce qui entraîne alors le partage de risque. C'est cette assurance que prend les institutions de microfinance dans les groupes.

Dans le prêt groupé, la capacité du prêteur à contraindre ses emprunteurs à honorer leurs engagements est parfois faible. Pour palier à cette faiblesse, les institutions ont mis l'accent sur ce que nous appelons "capital social". Par définition, le capital social est l'ensemble des accords, des catégories, des valeurs qui sont partagés par une collectivité et permettent la vie commune de gens différents. Il permet une certaine stabilité des rapports entre individus et entre groupes, une certaine régularité dans leurs interactions, une certaine prévisibilité des comportements. Le capital social est donc une condition de maîtrise des paramètres fondamentaux de l'activité économique. Une enquête de moralité sur le lieu de travail et/ou au domicile d'un demandeur de crédit peut révéler le degré du capital social, condition sine qua none d'octroi de crédit en matière de prêt groupé. La communauté intervient alors comme une agence de notation de chaque membre du groupe qui a alors intérêt à préserver son capital social.

Pour un groupe ainsi constitué, le prêteur va accorder individuellement aux membres du groupe des crédits de financement. Pourtant, le groupe tout entier va assurer le remboursement intégral des sommes perçues. A cet égard, les membres du groupe doivent sanctionner l'emprunteur défaillant en cas de défaut de remboursement pour dissuader de tels comportements qui mineraient le groupe et l'accès au crédit. Une sanction qui s'apparente aux pertes du capital social du défaillant. La dissuasion au sein du groupe est alors un mécanisme de renforcement de la coopération. Le coût de la dissuasion d'un défaut particulier peut être sans commune mesure avec le prêt en souffrance, juste pour renforcer la crédibilité des menaces et éviter un effet domino.

Nous nous permettons de nous poser des questions : le modèle de notre prédécesseur, si bien présenté logiquement et articulé mathématiquement dans la règle de l'art, incorpore-t-il vraiment toutes les spécificités des parties contractantes ? Devrions-nous apporter, nous aussi, notre vision pour qu'il soit ainsi ? Allant du modèle de prêt groupé de Osman Khodr et Francine diener [4], notre contribution dans cet article est d'explorer toutes les éventualités possibles et plausibles que peuvent survenir après signature et réalisation du projet de l'emprunteur afin de construire un modèle robuste capable d'interagir avec son environnement (interaction entre emprunteur et prêteur, entre les emprunteurs eux-mêmes, les caractéristiques des emprunteurs à faible niveau de garanties matérielles, les exigences de l'institution de microfinance pour pérenniser à double sens l'activité de crédit).

Nous allons essayer d'apporter quelques éléments des réponses à ces questions en divisant cet article en cinq sections. La seconde section fixe les règles et conditions assignées aux parties prenantes dans une activité de crédit sous la dénomination commune d'hypothèse. La section qui suit, qui constitue bien sûr le coeur de cet article, présente la modélisation mathématique de prêt groupé. La quatrième section met en lumière la discussion portée sur le modèle de prêt groupé ainsi construit. La dernière section concerne la conclusion. Et c'est uniquement dans cette dernière section que nous allons répondre clairement à la problématique posée.

2. Hypothèses

Si nous assimilons l'activité de crédit comme un double jeu répété, d'une part entre prêteur et groupe d'emprunteurs et d'autre part au sein du groupe, il est indispensable de définir des règles strictes pour que ce jeu soit équitable et équilibré. Nous n'allons surtout pas entrer dans le vif du sujet concernant ce que nous appelons "la théorie des jeux", loin de là, mais seulement nous voulons mettre sur la table quelques règles de base. Ainsi, les hypothèses suivantes sont établies afin que le contrat de prêt groupé soit apte à produire les effets désirés des contractants.

– **(H1)** : L'IMF ne finance que les activités existantes. Toute demande de crédit pour un projet nouveau n'est pas recevable.

– **(H2)** : Les richesses brutes espérées, au temps t et étant à l'état s , $w_t(s) = (w_1(s), w_2(s), \dots, w_t(s))$ des projets des emprunteurs sont indépendantes.

– **(H3)** : Le taux d'intérêt r , ($0 < r \leq 1$) peut être réduit à un taux faible pour un emprunteur qui entre dans le cercle du bénéficiaire permanent (état I). Notons \bar{r} ce taux d'intérêt réduit pour un état $s = I$ de la nature.

– **(H4)** [4] : Si les emprunteurs remboursent la totalité de leurs prêts à l'échéance finale, chargé d'un taux d'intérêt r fixé au moment du contrat, ils bénéficieront automatiquement chacun d'eux d'un nouveau prêt d'une unité supplémentaire ou de la même unité pour la période suivante.

– **(H5)** [4] : Si l'un des emprunteurs est en échec et si les autres sont en succès, celui qui échoue n'effectue aucun remboursement, alors que ceux qui réussissent remboursent leurs part plus la part du membre défaillant. Dans ce cas, chacun des emprunteurs en succès bénéficiera d'un nouveau prêt avec un autre partenaire et celui qui est en échec sera exclu pendant i périodes. La durée d'exclusion i est inférieure à T ($i \leq T$) puisque les membres du groupe non défaillants remboursent la part du défaillant.

– **(H6)** [4] : Si les emprunteurs, membres du groupe, n'ont pas honoré leurs engagements de remboursement à la fin leur contrat, ils ne bénéficieront pas chacun d'eux d'un nouveau prêt durant T ($T \geq 1$) périodes suivantes. Ils seront donc exclus durant ces périodes.

– **(H7)** [4] : Après la phase d'exclusion, les exclus peuvent demander un nouveau prêt et leur chance dépend du nombre de demandeurs admissibles et de la limite du nombre d'emprunteurs dans le portefeuille de prêt de l'institution. Nous notons γ ($0 \leq \gamma \leq 1$), la probabilité que leur demande soit acceptée la première période qui suit la phase d'exclusion, alors que $1 - \gamma$ est la probabilité que leur candidature sera reportée pour la période suivante. Notons toutefois que la probabilité d'obtenir un prêt à la deuxième période suivant la phase d'exclusion est $\gamma(1 - \gamma)$, et ainsi de suite.

– **(H8)** : C'est uniquement dans le premier contrat que l'IMF tolère, au plus, d ($1 \leq d \leq 3$) défauts partiels de remboursement moyennant une somme forfaitaire p de pénalité pécuniaire pour chaque défaut. Si l'emprunteur dépasse le nombre d de défauts autorisés, il sera exclu pendant un bout de temps. Dans le cas contraire, une reconduction d'un nouveau prêt de même taille sera possible.

En tenant compte de ces hypothèses et de la logique que l'emprunteur prévoit toujours son futur à partir de son état présent mais non pas de son passé, nous modélisons les différents états possibles d'un emprunteur de prêt groupé par une chaîne de Markov.

3. Le modèle de prêt groupé

3.1. Revue de la littérature

Le modèle de prêt groupé dès son apparition chez la Banque Grameen au Bangladesh, sous toutes ses formes, a fait l'objet de diverses études. Armendariz et Gollier [11], Laffont et N'guessan [15] et Ghatak [10] publièrent des articles qui étudient les effets des prêts de groupe comme moyen discriminant des entrepreneurs. Ces auteurs visent à résoudre le rationnement du crédit en présence d'une sélection adverse en utilisant la responsabilité conjointe des emprunteurs comme moyen incitatif. [13] présente une solution pour résoudre partiellement les problèmes de la sélection adverse. Ghatak [10] poursuit ses travaux en supposant que les prêts de groupe permettent d'obtenir l'équilibre de premier rang si les entrepreneurs se connaissent entre eux. Par contre, Armendariz et Gollier [11] ont montré que les prêts de groupe n'ont aucun effet sur la sélection des projets si les entrepreneurs ne se connaissent pas.

Besley et Coate [18] et Conning [16] ont étudié l'effet des sanctions sociales sur les problèmes d'aléa moral. A cet égard, les auteurs étendent les travaux de Bester [20] et [21] sur l'effet d'une garantie morale par opposition à une garantie financière de Bester. Des articles analysant les problèmes d'aléa moral ont été publiés respectivement par Ghatak et Guinnane [14], et Stiglitz [19].

Une littérature importante de Osman Khodr et Francine Diener [4] s'intéresse à la détermination de profit intertemporel de prêt groupé. Par rapport à cette étude et aux courants de la littérature existante, le modèle de prêt groupé que nous allons présenter ici constitue une extension, d'une part, du modèle de prêt groupé de Osman Khodr et Francine Diener en ajoutant quelques états d'un emprunteur afin d'apporter plus de souplesse au modèle existant, d'autre part, du modèle de prêt individuel [1], [4], [5]. Ce modèle est basé sur le même principe du prêt individuel. Il s'agit du principe d'incitation dynamique au remboursement qui consiste à renouveler le prêt de façon automatique pour l'emprunteur remboursant sa dette à l'échéance. De plus, tout comme le prêt individuel, le modèle tolère d défauts partiels de remboursement ($d \leq 3$) et interdit l'accès à un nouveau prêt de l'emprunteur défaillant pendant un certain temps.

3.2. Objectif principal

Le modèle de prêt groupé permet aux institutions de microfinance :

- de transférer la surveillance d'utilisation de crédit aux membres du groupe. Ce qui entraîne une forte pression au sein du groupe qui signifie une exclusion des mauvais emprunteurs et une incitation des bons emprunteurs. Tout cela concourt à minimiser le risque de défaut de crédit ;

- de pallier à l'exclusion financière faute des suretés matérielles des populations pauvres ;

- d'éviter le rationnement de crédit ;

- d'annihiler les problèmes de la sélection adverse et d'aléa moral.

Le modèle de prêt groupé que nous essayons de construire ici vise à apporter plus de souplesse que ce soit du point de vue prêteur qu'emprunteur.

3.3. La formation du groupe

Compte tenu de l'hypothèse d'asymétrie d'information, l'institution de microfinance a du mal à choisir les clients les plus rentables. Il est donc très judicieux de laisser à la communauté des emprunteurs le pouvoir et le droit de former des groupes d'emprunteurs dans lequel chaque membre du groupe ainsi formé a

intérêt à ne s'associer qu'avec une personne qu'il connaît parfaitement bien. Autrement dit, les membres d'un groupe donné sont proches, voire très proches, les uns des autres. Faire partie d'un groupe d'emprunteurs incombe pour chaque membre une responsabilité appelée "responsabilité conjointe". Cette proximité de chaque membre avec ses pairs et la responsabilité conjointe permettent de résoudre les problèmes de la sélection, de la mise en pool du risque de défaut de crédit et de la taille optimale des groupes auxquels fait face l'institution. Nous supposons, dans ce modèle, que le groupe est formé bien avant de la négociation avec l'institution. Par contre, lors d'un défaut d'un membre bénéficiaire d'un crédit, le groupe est formé lors de la négociation avec l'institution. L'institution joue donc un double rôle : un rôle d'intermédiaire relationnel (faire rencontrer les survivants des contrats groupés de la période d'avant) et un rôle d'intermédiaire financier.

Pour les emprunteurs à faibles suretés matérielles ou quasi sans suretés matérielles, le groupe est une condition nécessaire et suffisante pour accéder au crédit de financement. Avant la formation de groupe, chaque emprunteur candidat est étiqueté emprunteur sûr ou emprunteur risqué. Ces types de membres peuvent avoir un impact positif ou négatif au prêteur. Impact positif si le groupe permet de minimiser le risque de défaut de remboursement (groupe constitué uniquement par des emprunteurs sûrs). Impact négatif si le groupe est constitué des emprunteurs qui font une coalition sachant à l'avance qu'ils ne rembourseront pas. De ce fait, nous supposons que chaque emprunteur connaît le risque lié à son projet qui le classera en type sûr ou risqué, et celui attaché aux projets des autres. Compte tenu de la stratégie d'incitation dynamique, de la responsabilité conjointe, de la perte du capital social et de l'hypothèse **H1**, nous supposons que les groupes, clients de l'institution de microfinance, ne sont constitués que des emprunteurs de type sûr. Si non, les mauvais types (emprunteurs risqués) vont améliorer leurs efforts pour pouvoir adhérer à un groupe et bénéficier de crédit de financement. Nous supposons, de plus, que les projets et les revenus de chaque emprunteur d'un groupe donné sont indépendants. Dans le groupe, les projets sont supposés représenter le même niveau de risque.

Pour l'institution de microfinance, le groupe est une stratégie de diversification de risque. Comme les projets des membres ne sont pas corrélés, l'hétérogénéité que cherche l'institution permet la mise en pool du risque qui réduit le risque global. Cette hétérogénéité ne réside pas dans le risque a priori qui porte sur les projets, mais bien sûr dans le risque a posteriori qui porte sur les projets et les interactions au sein du groupe. Ainsi, les projets qui ont le même risque a priori peuvent avoir, dans le temps et selon les états de la nature, des réalisations différentes avec la caution solidaire à raison des effets de surveillance, d'audit et d'exécution internes au sein du groupe. C'est dans cette optique de micro-assurance que prend l'institution de microfinance dans les groupes.

Notons toutefois que le prêt de groupe ne prétend pas à résoudre tous les problèmes d'information, mais à réduire davantage ces problèmes. Vu sous cet angle, il n'empêche qu'un groupe de coalition en vue d'un défaut stratégique qui consiste à ne pas vouloir rembourser le prêt alors que le résultat du projet le permet puisse exister.

3.4. Modèle de prêt groupé à deux membres

3.4.1. Le contrat de prêt proposé par l'institution

Nous supposons qu'avec le principe d'incitation dynamique (interaction entre emprunteur et prêteur, et interaction au sein du groupe aussi), l'institution s'intéresse à attribuer aux différents groupes de contrats lui permettant de minimiser l'échec des projets de chaque emprunteur. L'institution cherche donc à octroyer à ses clients des contrats les mieux adaptés à leur situation. Outre les caractéristiques purement financières propres à l'institution pour ses clients, chaque contrat consiste à prêter aux membres de groupe qui ont remboursé la totalité des créances du prêteur et à exclure au crédit ceux qui ont fait défaut. L'institution de microfinance propose donc un contrat $C(r, q, i, T)$ où :

- r est le taux d'intérêt que l'emprunteur doit payer au titre de la responsabilité individuelle limitée ;

- q est le montant de la charge transférable que l'emprunteur doit acquitter au titre de la responsabilité conjointe pour la défaillance de son coéquipier ;
- T est la durée de la phase d'exclusion en cas de défaillance de deux membres du groupe ;
- i est la durée de la phase d'exclusion pour un emprunteur défaillant sachant que son partenaire en succès a honoré sa dette, avec $i \leq T$.

3.4.2. Espace d'états et différentes transitions possibles des emprunteurs

3.4.2.1. Espace d'états

Par une chaîne de Markov $(X_t, t \geq 1, t \in T)$ indexée par un paramètre t qui décrit un sous-ensemble T de \mathbb{N} , définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans un ensemble S , appelé espace d'états de la nature. Nous représentons cet ensemble des états qui décrivent les différents états possibles d'un emprunteur comme suit :

$$S = \{B_1, B_2, B_3, I_1, I_2, A^T, A^{(T-1)}, \dots, A^i, A^{i-1}, \dots, A^1\}. \quad (1)$$

Après avoir formé un groupe constitué de deux emprunteurs, ceux-ci se placent dans l'état A^1 qui est l'état initial du système où les membres de groupe demandent pour la première fois un contrat de crédit de financement de leur projet, ou après une phase d'exclusion, les membres d'un nouveau groupe demandent leur réintégration dans le système. Au moment de la signature du contrat de prêt entre l'institution et les membres de groupe, les emprunteurs bénéficiaires de crédit changent de statut en passant à l'état B_1 . L'état B_1 représente donc l'état d'un bénéficiaire de prêt avec son partenaire.

Étant à l'état B_1 , trois cas de figures peuvent se présenter : soit chacun des membres du groupe rembourse la totalité de la dette (remboursement global effectif), soit l'un des membres fait défaut et l'autre en succès rembourse, en une partie ou en totalité, la dette du groupe, soit les deux emprunteurs font simultanément défaut. Dans le premier cas (les deux emprunteurs qui sont en succès remboursent effectivement leur dette), le groupe de deux emprunteurs passent à l'état B_2 qui représente l'état d'un bénéficiaire de prêt avec le même partenaire de la période d'avant. Cet état regroupe tous les groupes bénéficiaires de crédit ne faisant aucun défaut de paiement durant la première période de contrat. Dans le deuxième cas, l'emprunteur en succès poursuit son activité de prêt en passant à l'état B_3 et mettant avec un autre partenaire de la période d'avant pour former un nouveau groupe. L'état B_3 représente donc l'état dans lesquels les emprunteurs en succès et ne faisant pas défaut de la première période forment des nouveaux groupes. Le partenaire en échec qui sera exclu pendant i périodes atterrira à l'état A^i . Ce dernier représente l'état d'un exclu pour les i prochaines périodes de prêt, avec $i \leq T$ du fait de remboursement effectué par son partenaire. Dans le dernier cas, les deux emprunteurs défaillants seront exclus pendant T périodes et atterriront à l'état A^T . L'état A^T représente l'état d'un exclu pour les T prochaines périodes de prêt. En cas de défaut partiel de remboursement, deux cas de figures peuvent encore se présenter : soit l'un fait défaut et l'autre rembourse sans faire défaut, ou soit simultanément les deux font défauts. L'emprunteur qui fait défaut partiel reste dans l'état B_1 avec un autre partenaire de même type que lui tandis que l'emprunteur ne faisant pas défaut passe à l'état B_3 en formant un groupe avec un autre partenaire de la période d'avant. Dans le cas où les deux emprunteurs font simultanément défauts mais arrivent à rembourser l'intégralité de leur dette à l'échéance, le groupe de deux emprunteurs reste à l'état B_1 . Ces cas illustrent la tolérance que prévoit notre modèle en cas de défaut partiel de remboursement (Hypothèse **H8**).

A l'état B_2 ou à l'état B_3 , aucun défaut de remboursement n'est toléré. Les emprunteurs défaillants atterriront soit à l'état A^i du fait de remboursement effectué par son partenaire en succès, soit à l'état A^T . Par contre, les emprunteurs en succès passent soit à l'état I_1 , soit à l'état I_2 . L'état I_1 représente l'état d'un groupe d'emprunteurs composé uniquement des mêmes membres de la période d'avant. Quant à l'état I_2 , il regroupe les emprunteurs en succès des états B_2 et B_3 dont leurs partenaires de la période d'avant sont exclus. A^j représente l'état d'un exclu pour les j prochaines périodes de prêt, avec $j = \{T, T-1, \dots, i, i-1, \dots, 1\}$.

3.4.2.2. Différentes transitions possibles des emprunteurs

Supposons que chaque emprunteur en succès rembourse son prêt à l'échéance. Le montant de remboursement s'élève à $1 + r$ pour un emprunteur. Ce qui signifie que nous avons donc un remboursement total de $2(1 + r)$ pour le groupe de deux emprunteurs. Suite à ce remboursement, les deux emprunteurs bénéficieront d'un nouveau contrat de prêt de même montant ou d'un montant supérieur au premier contrat. Dans le cas où l'un des membres du groupe est en échec et qui ne pourra plus faire face à ses engagements pour payer sa dette, son partenaire en succès payera à sa place la somme q , à raison de la responsabilité conjointe. Ainsi, le partenaire en succès acquittera au total une somme de $1 + r + q$.

Pour un couple (X_k, Y_k) qui se met ensemble à la $k^{\text{ième}}$ période de prêt, les tableaux qui suivent représentent les résultats possibles à l'échéance des emprunteurs et ainsi que leurs différentes transitions possibles.

Tableau 1. Résultat et transition possibles à l'échéance de la première période

X_k	Y_k	Défaut X_k	Défaut Y_k	Paiement X_k	Paiement Y_k	X_{k+1}	Y_{k+1}
Succès	Succès	$d = 1$	$d = 0$	$1 + r$	$1 + r$	B_1	B_3
Succès	Succès	$d = 0$	$d = 1$	$1 + r$	$1 + r$	B_3	B_1
Succès	Succès	$d = 0$	$d = 0$	$1 + r$	$1 + r$	B_2	B_2
Succès	Échec	$d = 1$	$d \geq 4$	$1 + r + q$	0	B_1	A^i
Succès	Échec	$d = 0$	$d \geq 4$	$1 + r + q$	0	B_3	A^i
Échec	Succès	$d \geq 4$	$d = 1$	0	$1 + r + q$	A^i	B_1
Échec	Succès	$d \geq 4$	$d = 0$	0	$1 + r + q$	A^i	B_3
Échec	Échec	$d \geq 4$	$d \geq 4$	0	0	A^T	A^T

Tableau 2. Résultat et transition possibles à l'échéance de la deuxième période

X_{k+1}	Y_{k+1}	Défaut X_{k+1}	Défaut Y_{k+1}	Paiement X_{k+1}	Paiement Y_{k+1}	X_{k+2}	Y_{k+2}
Succès	Succès	$d = 0$	$d = 0$	$1 + r$	$1 + r$	I_1	I_1
Succès	Échec	$d = 0$	$d \geq 4$	$1 + r + q$	0	I_2	A^i
Échec	Succès	$d \geq 4$	$d = 0$	0	$1 + r + q$	A^i	I_2
Échec	Échec	$d \geq 4$	$d \geq 4$	0	0	A^T	A^T

Tableau 3. Résultat et transition possibles à l'échéance de la troisième période

X_{k+2}	Y_{k+2}	Défaut X_{k+2}	Défaut Y_{k+2}	Paiement X_{k+2}	Paiement Y_{k+2}	X_{k+3}	Y_{k+3}
Succès	Succès	$d = 0$	$d = 0$	$1 + r$	$1 + r$	I_1	I_1
Succès	Échec	$d = 0$	$d \geq 4$	$1 + r + q$	0	I_2	A^i
Échec	Succès	$d \geq 4$	$d = 0$	0	$1 + r + q$	A^i	I_2
Échec	Échec	$d \geq 4$	$d \geq 4$	0	0	A^T	A^T

3.4.3. Probabilités de transition, matrice de transition et graphe de Markov

3.4.3.1. Probabilités de transition

Nous attribuons à notre modèle de prêt groupé de chaque état de transition possible d'un emprunteur les probabilités ci-après.

A l'état initial A^1 , et avant d'accorder un prêt aux membres du groupe, l'IMF procède à l'étude minutieuse du dossier de chaque emprunteur et estime par la suite une probabilité α de réussite future de chaque projet de l'emprunteur candidat. Après avoir estimé cette probabilité, l'IMF prend sa décision d'octroi de crédit par le biais d'un paramètre λ , avec $\lambda = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha \neq 1$ (voir [1]). Comparé celui-ci aux valeurs-seuils subjectives fixées selon la politique de l'agence, deux cas peuvent se présenter. Soit, chaque emprunteur

candidat membre du groupe atterrit dans l'état B_1 avec une probabilité de transition γ ($\mathbb{P}_{A^1, B_1} = \gamma$), où $\gamma = 1 - \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$, soit, le groupe d'emprunteurs reste dans l'état A^1 avec une probabilité $1 - \gamma$ ($\mathbb{P}_{A^1, A^1} = 1 - \gamma$). Cette probabilité γ , une fois déterminée, pour chaque emprunteur et pour tout temps $t \in T$, est unique jusqu'à ce que l'emprunteur sera exclu de l'activité de prêt. Comme il s'agit d'un prêt groupé, le groupe sera formé de deux types d'emprunteurs. La probabilité de réussite du projet de l'un est α_1 et celle de l'autre est α_2 . En gardant l'indépendance des projets des emprunteurs, et en supposant qu'il existe toujours deux emprunteurs ayant le même profil avec une probabilité α , alors un emprunteur de ce profil peut toujours trouver un partenaire du même profil que lui pour constituer, ensemble, un groupe. Ce qui revient à dire que nous attribuons aux deux emprunteurs une même probabilité α , pour simplifier les calculs qui vont suivre. Nous pouvons toujours considérer que α peut être la moyenne arithmétique des deux probabilités α_1 et α_2 .

Arrivant au terme du contrat dans l'état B_1 , l'emprunteur présentant un défaut partiel ($d \leq 3$) reste dans cet état avec une probabilité α^l ($\mathbb{P}_{B_1, B_1} = \alpha^l$). L'emprunteur en succès, sans faire défaut, passe à l'état B_3 avec une probabilité de passage $\alpha^h(1 - \alpha)$ ($\mathbb{P}_{B_1, B_3} = \alpha^h(1 - \alpha)$). Si l'un des membres fait défaut et n'effectue aucun remboursement, il sera exclu avec une probabilité $\alpha^l(1 - \alpha)$ ($\mathbb{P}_{B_1, A^i} = \alpha^l(1 - \alpha)$). Si le groupe de deux emprunteurs fait défaut, la probabilité de l'exclusion est $(1 - \alpha)^2$ ($\mathbb{P}_{B_1, A^T} = (1 - \alpha)^2$). La probabilité de la réussite du groupe ne présentant aucun défaut de remboursement de l'état B_1 vers l'état B_2 est α^h ($\mathbb{P}_{B_1, B_2} = \alpha^h$).

En quittant l'état B_2 , l'emprunteur passera à l'un des quatre états suivants $\{I_1, I_2, A^i, A^T\}$ assignés respectivement aux probabilités suivantes $\{\beta^2, \beta(1 - \beta), \beta(1 - \beta), (1 - \beta)^2\}$ ($\mathbb{P}_{B_2, I_1} = \beta^2$, $\mathbb{P}_{B_2, I_2} = \beta(1 - \beta)$, $\mathbb{P}_{B_2, A^i} = \beta(1 - \beta)$, $\mathbb{P}_{B_2, A^T} = (1 - \beta)^2$). De la même façon, en quittant l'état B_3 , l'emprunteur devra passer à l'un des quatre états suivants $\{I_1, I_2, A^i, A^T\}$ dont les probabilités de passage d'un état à un autre sont respectivement $\{\theta(1 - \theta), \theta^2, \theta(1 - \theta), (1 - \theta)^2\}$ ($\mathbb{P}_{B_3, I_1} = \theta(1 - \theta)$, $\mathbb{P}_{B_3, I_2} = \theta^2$, $\mathbb{P}_{B_3, A^i} = \theta(1 - \theta)$, $\mathbb{P}_{B_3, A^T} = (1 - \theta)^2$).

Étant à l'état d'inclusion financière $I = \{I_1, I_2\}$, l'emprunteur reste en I_1 avec la probabilité $\mathbb{P}_{I_1, I_1} = \Gamma^2$ ou en I_2 avec la probabilité $\mathbb{P}_{I_2, I_2} = \Delta^2$. Le changement de partenaire en vue de former un nouveau groupe entraîne le déplacement de l'état I_1 vers l'état I_2 avec la probabilité $\mathbb{P}_{I_1, I_2} = \Gamma(1 - \Gamma)$. Par contre, le maintien des mêmes membres du groupe ne faisant pas défaut permet le déplacement du groupe de l'état I_2 vers l'état I_1 avec la probabilité $\mathbb{P}_{I_2, I_1} = \Delta(1 - \Delta)$. Les probabilités d'exclusion financière des emprunteurs dans l'état I_1 sont respectivement $\{\mathbb{P}_{I_1, A^i} = \Gamma(1 - \Gamma), \mathbb{P}_{I_1, A^T} = (1 - \Gamma)^2\}$. En ce qui concerne l'état I_2 , ces probabilités sont respectivement $\{\mathbb{P}_{I_2, A^i} = \Delta(1 - \Delta), \mathbb{P}_{I_2, A^T} = (1 - \Delta)^2\}$.

Dès que l'emprunteur atterrira dans l'un des états fermés $\{A^i, A^T\}$, il y restera pendant i ou T périodes selon le cas. La probabilité d'un état fermé à un autre état fermé est de 1 ($\mathbb{P}_{A^i, A^{i-1}} = 1, \mathbb{P}_{A^T, A^{T-1}} = 1$), c'est-à-dire, en un mot $\mathbb{P}_{A^j} = 1$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

3.4.3.2. Matrice de transition

Définition 1. *Étant donné une chaîne de Markov $(X_t, t \geq 1)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans S , nous lui associons une matrice appelée matrice de transition, notée $P = p(x, y)$ pour tous $x, y \in S$, dont les coefficients, $p(x, y) = P[X_2 = y | X_1 = x]$, sont les probabilités de transiter de l'état x vers l'état y .*

Ainsi, la matrice stochastique P de la chaîne d'un état à un autre de notre modèle se présente comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha^l & \alpha^h & \alpha^h(1-\alpha) & 0 & 0 & (1-\alpha)^2 & 0 & \dots & \alpha^l(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 & \beta(1-\beta) & (1-\beta)^2 & 0 & \dots & \beta(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta(1-\theta) & \theta^2 & (1-\theta)^2 & 0 & \dots & \theta(1-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma^2 & \Gamma(1-\Gamma) & (1-\Gamma)^2 & 0 & \dots & \Gamma(1-\Gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta(1-\Delta) & \Delta^2 & (1-\Delta)^2 & 0 & \dots & \Delta(1-\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

Cette matrice de transition résume toutes les proportions de bénéficiaires et de demandeurs de prêt dans les différents états de la nature. Calculer la puissance n de cette matrice revient à expliciter le comportement asymptotique de la chaîne de Markov de prêt groupé. Nous nous posons alors les questions suivantes :

- quel est son comportement à long terme lorsque la distribution initiale est arbitraire ?;
- pour une distribution initiale donnée, la chaîne de Markov de prêt groupé est-elle en régime stationnaire ?

Les réponses à ces questions ne feront pas l'objet de cet article.

3.4.3.3. Vérification des aspects stochastiques de la matrice de transition

A noter que la matrice de transition que nous venons de présenter est appelée aussi matrice stochastique parce que ses coefficients sont tous compris entre 0 et 1 et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, c'est-à-dire, pour tous $x, s \in S$, $\sum_{s \in S} P(x, s) = 1$. Si de plus, les sommes des toutes les colonnes vérifient aussi cette propriété, la matrice de transition est bistochastique. Mais ce qui n'est pas vrai en général pour les colonnes. Ainsi, nous allons vérifier que la matrice de transition de prêt groupé ci-dessus a bel et bien les caractéristiques d'un processus stochastique. Pour cela, nous allons sommer toutes les lignes de la matrice. Nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha^l + \alpha^h + \alpha^l(1-\alpha) + \alpha^h(1-\alpha) + (1-\alpha)^2 &= 2\alpha^l + 2\alpha^h - \alpha(\alpha^l + \alpha^h) - 2\alpha + \alpha^2 + 1 \\ &= 2\alpha - 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^2 + 1 & ; \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^2 + \beta(1-\beta) + (1-\beta)^2 + \beta(1-\beta) &= \beta^2 + \beta - \beta^2 - 2\beta + \beta^2 + \beta - \beta^2 + 1 \\ &= 2\beta - 2\beta + \beta^2 - \beta^2 + 1 & ; \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta^2 + \theta(1-\theta) + (1-\theta)^2 + \theta(1-\theta) &= \theta^2 + \theta - \theta^2 - 2\theta + \theta^2 + \theta - \theta^2 + 1 \\ &= 2\theta - 2\theta + \theta^2 - \theta^2 + 1 & ; \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2 + \Gamma(1-\Gamma) + (1-\Gamma)^2 + \Gamma(1-\Gamma) &= \Gamma^2 + \Gamma - \Gamma^2 - 2\Gamma + \Gamma^2 + \Gamma - \Gamma^2 + 1 \\ &= 2\Gamma - 2\Gamma + \Gamma^2 - \Gamma^2 + 1 & ; \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 + \Delta(1-\Delta) + (1-\Delta)^2 + \Delta(1-\Delta) &= \Delta^2 + \Delta - \Delta^2 - 2\Delta + \Delta^2 + \Delta - \Delta^2 + 1 \\ &= 2\Delta - 2\Delta + \Delta^2 - \Delta^2 + 1 & ; \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma + 1 - \gamma &= \gamma - \gamma + 1 \\ &= 1 \end{aligned} ;$$

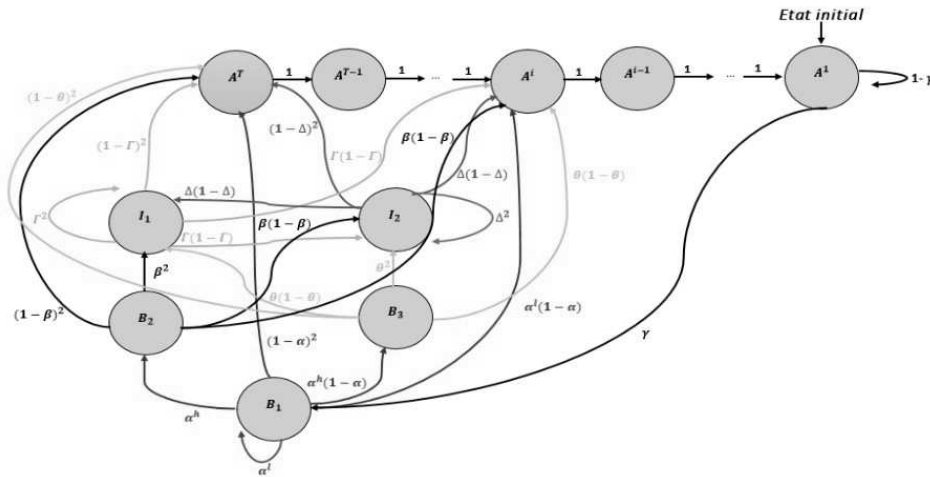
3.4.3.4. Graphe de transition

Cette représentation matricielle de la chaîne de Markov de prêt groupé nous conduit à la représentation graphique ci-après qui a l'avantage d'être plus lisible et compréhensible.

Définition 2. Étant donnée une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 1}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans S , le graphe de la chaîne de prêt groupé est le graphe construit à partir de la matrice de transition. Ainsi, les sommets sont l'ensemble des états $S = \{B_1, B_2, B_3, I_1, I_2, A^T, A^{(T-1)}, \dots, A^i, A^{i-1}, \dots, A^1\}$ et les arêtes avec orientations au dessus duquel nous écrivons les probabilités de transition représentent les transitions possibles d'un état vers un autre.

Le diagramme ci-après représente donc le graphe de la chaîne de Markov associé au modèle de prêt groupé.

Figure 1. Diagramme de transition de prêt groupé



Rappelons que $\alpha = \alpha^l + \alpha^h$ et que $\alpha^h > \alpha^l$.

3.5. Les contraintes imposées aux variables du modèle de prêt groupé

Comme il s'agit d'une extension du modèle de prêt individuel, les contraintes des précédents articles[1], [4], [5] sont toujours valables et reprises avec une certaine modification pour mieux adapter au modèle de prêt groupé.

Soit $u(s)$ la somme empruntée de l'entrepreneur à l'état $s \in S$ de la nature. Supposons que cette somme réalise au bout d'une année d'exercice comptable un cash flow brut $W_t(s)$ au temps t et à l'état s de la nature, en cas de succès de son projet. Soit α_1 la probabilité de succès du projet de l'entrepreneur. Celui-ci va former un groupe avec un entrepreneur partenaire dont la probabilité de réussite est α_2 . Le gain espéré au cours d'un exercice comptable, d'une unité $u(s)$ prêtée, en tenant compte de sa consommation incompressible C pour le premier est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{r,q} &= \alpha_1 \alpha_2 (W_t(s) - (1+r+C)) + \alpha_1 (1-\alpha_2) (W_t(s) - (1+r+C+q)) \\ &= \alpha_1 (W_t(s) - (1+r+C) - (1-\alpha_2)q) \end{aligned}$$

Remarquons que la quantité $(1-\alpha_2)q$ converge vers zéro lorsque la probabilité de réussite de son partenaire est très proche de 1. Ainsi, l'espérance de gain est une fonction croissante en α_2 . De ce fait,

un entrepreneur-emprunteur préfère toujours se mettre en groupe avec un partenaire plus sûr. Dans une communauté d'emprunteurs, ce type d'entrepreneur, nous supposons, existe toujours. Alors, nous pouvons supposer qu'un groupe d'emprunteurs est d'ores et déjà constitué de partenaires de même type. Ceci nous permet de dire que nous pouvons considérer la même probabilité de succès des projets d'investissement des entrepreneurs. Par voie de conséquence, l'équation ci-dessus devient :

$$\mathbb{E}_{r,q} = \alpha(W_t(s) - (1 + r + C) - (1 - \alpha)q)$$

3.5.1. La contrainte de rationalité individuelle

Dans un contrat de prêt groupé, la responsabilité conjointe liée au contrat incombe qu'un membre du groupe n'est à l'abri du montant de la charge transférable de son partenaire. Ainsi, le seul moyen d'échapper à cette sanction financière est d'avoir un partenaire avec une probabilité de réussite égale à 1. Dans ce cas, la contrainte de participation n'est autre que celle du modèle de prêt individuel (c'est-à-dire $W_t(s) \geq 1 + r$). Mais, en matière de prêt groupé, cette supposition est presque impossible. Alors, pour mettre l'institution de microfinance à l'abri de risque quel qu'il soit, la contrainte de participation doit prendre en compte la situation probable d'un partenaire d'être en défaut de paiement. Par voie de conséquence, et en supposant que la richesse brute espérée dans l'état $s \in S$ de la nature, d'une unité investie, est $W_t(s)$, ($W_t(s) \geq 0$) positive en cas de succès et nulle sinon, la contrainte de participation se présente comme suit :

$$W_t(s) \geq 1 + r + q$$

3.5.2. La contrainte de continuité

L'activité de l'institution de microfinance n'est pas une activité saisonnière du fait qu'elle constitue un levier très important pour réduire la pauvreté. Elle se doit donc de pérenniser son activité par tous les moyens qui ne pénalisent pas trop ses partenaires. Dans ce cadre, une unité prêtée qui nécessite non seulement beaucoup de temps mais aussi un déplacement fréquent coûte à l'agence une certaine somme z . Pour pérenniser l'activité de prêt, le montant de remboursement espéré doit couvrir le coût du prêt. Ainsi, la contrainte de continuité en résulte :

$$\alpha(1 + r) + \alpha(1 - \alpha)q \geq 1 + z$$

3.5.3. La contrainte d'empêchement de stratégie de défaut

L'activité d'octroi de crédit est une activité à risque, voire à haut risque. Or, tous les agents économiques que ce soit prêteur ou emprunteur sont "riscophobes" ou averses au risque. De plus, le risque moral survient toujours lorsque les états de la nature et les actions et/ou les comportements des emprunteurs sont imprévisibles par l'institution. Notons que ce qui est observable au terme d'un contrat, c'est le fait qu'un défaut de remboursement suite à un échec du projet peut se produire. Dans ces conditions, l'institution cherche toujours à mettre en oeuvre un mécanisme par lequel elle peut convaincre l'emprunteur à honorer ses engagements. Comme il s'agit d'un modèle de prêt groupé, il existe une relation d'arbitrage entre le partage des risques et les incitations. Alors, afin de contraindre l'emprunteur à payer sa dette lorsque sa situation le permet, le refus par l'institution de renouveler le contrat en cas de défaut de remboursement peut influencer les incitations des emprunteurs à produire de la prévention dans la gestion du crédit. En conséquence, le coût d'opportunité du refus de renouvellement pour j prochaines périodes doit être largement supérieur au gain de non remboursement.

Soient $A = \{A^T, A^{(T-1)}, \dots, A^i, A^{(i-1)}, \dots, A^1\}$ et $B = \{B_1, B_2, B_3, I_1, I_2\}$ deux sous ensembles de S . Et soit $A' = \{A^i, A^{(i-1)}, \dots, A^1\}$ un sous ensemble de A ($A' \in A$). Selon la situation de chaque membre du groupe, plusieurs contraintes d'incitation sont à imposer sur un emprunteur pour le dissuader d'une stratégie de défaut. Les contraintes concernent les éventualités suivantes : "avoir un partenaire qui déclare à son homologue son succès" ou "avoir un partenaire qui déclare à son homologue son échec". Dans

ces deux éventualités, l'institution minimise le risque de défaut en insistant à présenter pour chaque nouveau contrat l'incitation dynamique. Supposons qu'un groupe de deux emprunteurs est constitué à l'instant k . Notons (X_k, Y_k) ce couple d'emprunteurs. Ainsi, les contraintes d'empêchement en vue d'inciter X à rembourser sa dette sont :

1) Supposons que X déclare son échec et que Y déclare son succès. Dans ce cas de figure, X étant défaillant est incapable de rembourser sa dette. X n'a rien donc versé à son agence de microfinance. Par contre, le remboursement d'un montant de $1 + r$ de la part de Y est sûr. Mais suite à la défaillance de X , Y doit déboursier la somme q plus sa part pour honorer la dette de son partenaire. Par conséquent, X sera exclu de l'activité de crédit pour i périodes. La contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut correspondant à cette situation se présente alors :

$$W_k(s) - (1 + r + C) + \delta V'(s \in B) \geq W_k(s) + \delta V'(s \in A')$$

Où C représente la consommation incompressible, δ le taux d'actualisation, $V'(s \in B)$ le profit net futur espéré d'un bénéficiaire d'un prêt, et $V'(s \in A')$ est celui d'un exclu pour i périodes.

2) Supposons que X déclare son succès et que Y déclare son échec. Dans ce cas de figure, Y étant défaillant est incapable de payer sa dette. Y n'a rien donc versé à son agence de microfinance. Par conséquent, le remboursement de X s'élève à un montant équivalent de $1 + r + q$. Ce montant incorpore la charge de dette imputable à Y . Si X ne débourse pas la somme sus-mentionnée, le groupe de deux emprunteurs sera exclu de l'activité de crédit pour T périodes. La contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut relative à cette situation se présente alors :

$$W_k(s) - (1 + r + C + q) + \delta V'(s \in B) \geq W_k(s) + \delta V'(s \in A)$$

Où $V'(s \in A)$ représente le profit net futur espéré d'un exclu pour T périodes.

3.6. Le Profit espéré pour un emprunteur de prêt groupé

Comme il a été déjà dit, nous avons considéré de prime abord que chaque groupe, client de l'institution, est composé de deux emprunteurs. Ces derniers sont identiques au niveau de risque encouru de leurs projets. Cette ressemblance au niveau de risque nous permet d'assigner à chaque emprunteur une probabilité unique α de réussite de leurs projets. Dans cette sous section, nous allons essayer de déterminer le profit d'un emprunteur qui contracte un prêt groupé. Pour y arriver, nous allons calculer au premier temps l'espérance de son profit d'investissement pour une période et ensuite, nous calculons l'espérance de son profit intertemporel compte tenu d'une dynamique d'incitation conduisant au renouvellement automatique du prêt en cas de remboursement effectif de la dette. La détermination de ces deux profits se font en respectant les règles bien définies dans la section 2 de cet article.

3.6.1. Profit d'une période d'investissement

Nous savons bien qu'un entrepreneur-emprunteur, chef de famille, que ce soit une femme ou un homme, doit nourrir et entretenir sa famille du minimum vital. La disponibilité courante du revenu à consommer commande ses actions et ses comportements qui auront, sans aucun doute, un impact important dans la réalisation de son projet. C'est la raison pour laquelle, il est important d'introduire dans le modèle la variable relative aux dépenses courantes familiales de l'emprunteur. Ce variable, notée C , est la consommation incompressible du ménage de l'emprunteur. Ainsi, si nous attribuons une probabilité α de réussite future de son projet, l'espérance de son profit d'une période d'investissement est :

$$\mathbb{E}_{r,q=\alpha}(W_t(s) - (1 + r + C) - (1 - \alpha)q)$$

Rappelons que cette espérance de profit est une fonction croissante en α . Ce qui signifie que si la valeur de α est grande, plus la quantité $(1 - \alpha)q$ est négligeable. Cette équation met en exergue la caractéristique d'un contrat de prêt groupé où la responsabilité de remboursement est à la fois individuelle et collective. Individuelle si la quantité $q = \phi(1 + r) = 0$ qui est le montant du remboursement de son partenaire.

Où ϕ ($0 \leq \phi \leq 1$) est le degré de risque du projet de son partenaire. Dans ce cas, le contrat de prêt groupé s'identifie au contrat de prêt individuel si l'institution pratique le même taux d'intérêt pour ces deux contrats. Collective si à valeur très élevée de ϕ qui signifie que $q \neq 0$, l'emprunteur en succès acquittera au terme de leur contrat sa part de remboursement et celle de son partenaire. Dans ce dernier cas, le contrat de prêt individuel est plus rentable que celui du prêt groupé sous l'hypothèse, bien sûr, de pratiquer le même taux d'intérêt. De ce fait, pour éviter ce genre d'arbitrage et de promouvoir l'accès des populations les plus démunies au crédit de financement, nous sollicitons la pratique du taux d'intérêt différent pour ces deux contrats de prêt.

3.6.2. Profit total espéré

La stratégie d'incitation dynamique prévoit le renouvellement automatique de prêt en cas de remboursement. Par contre, la défaillance coûte aux emprunteurs une exclusion financière, soit pour i périodes selon le cas où un partenaire est en échec, soit pour T périodes selon le cas où les deux emprunteurs sont tous deux en échec. Ainsi, pour un emprunteur qui a signé un contrat de prêt groupé, pour tout instant t , nous pouvons évaluer son profit total espéré. Pour cela, nous définissons une fonction $f : S * S \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$f(x, s) = \begin{cases} W_t(s) - (1 + r + C + (p * d)) & \text{si } (x, s) = (B_1, B_1), d = 1 \text{ à } 3 \\ W_t(s) - (1 + r + C) & \text{si } (x, s) = (B_1, B_2), \text{ ou } (B_k, I_1) k = 2, 3 \\ W_t(s) - (1 + r + C + q) & \text{si } (x, s) = (B_1, B_3), \text{ ou } (B_k, I_2) k = 2, 3 \\ W_t(s) - (1 + \bar{r} + C) & \text{si } (x, s) = (I_k, I_1), k = 1, 2 \\ W_t(s) - (1 + \bar{r} + C + q) & \text{si } (x, s) = (I_k, I_2), k = 1, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

Où $f(x, s)$ décrit le profit de passage d'une période d'investissement de l'état x vers l'état s de la chaîne, pour tous $x, s \in S$. Et \bar{r} est le taux d'intérêt réduit d'un bénéficiaire arrivant à construire une relation stable de confiance avec l'institution de microfinance (avec $\bar{r} \leq r$).

La fonction $f(x, s)$ décrit les situations des membres du groupe. Compte tenu de la réalité, nous supposons dorénavant que si les deux membres du groupe présentent des difficultés de remboursement et font simultanément d défauts partiels de paiement et que l'un deux déclare son échec total, le partenaire en difficulté sans déclarer son échec abandonne aussi pour éviter la charge de transfert. Ainsi, le groupe de deux emprunteurs sera exclu. Le premier cas indique que soit les deux emprunteurs font d défauts partiels, soit l'un des membres les fait. Dans ce cas, la sanction imposée par l'institution est, outre la pénalité pécuniaire p de retard de remboursement, le renouvellement du contrat pour un même montant de crédit de la période d'avant (les emprunteurs présentant d défauts de remboursement restent donc à son état). Le deuxième cas regroupe les groupes d'emprunteurs qui ne font aucun défaut de remboursement en gardant les mêmes membres du groupe de la période d'avant. Le troisième cas s'interprète comme suit : l'un des membres du groupe fait défaut et l'autre qui ne fait pas défaut se sépare de son partenaire et passe à l'état suivant pour former un nouveau groupe. Ce qui incombe à l'emprunteur en succès la charge de payer la dette de son partenaire pour pouvoir rester dans le système. Le quatrième cas est similaire au second cas à une nuance près du fait que, à ce stade de relation, les emprunteurs pourront éventuellement bénéficier d'un taux d'intérêt réduit. Le dernier cas est semblable au troisième cas aussi à la différence du taux d'intérêt pratiqué.

Les méthodes de calcul et le raisonnement mathématique pour la détermination du profit total espéré en matière de prêt groupé sont très très semblables à ceux de prêt individuel. De ce fait, nous allons emprunter certains contenus des articles des auteurs sus-référencés [1], [4], [5]. Pour mieux expliciter les démarches nécessaires qui nous mèneront aux équations du profit total espéré, nous allons énoncer la propriété de Markov. Pour cela, nous faisons appel à la notion de tribu et de probabilité conditionnelle à une tribu. Étant donnée une variable aléatoire markovienne X définie sur (Ω, \mathbb{F}) , nous utiliserons la notation classique $\sigma(X)$ pour la sous-tribu de \mathbb{F} engendrée par X , plus particulièrement, pour tout $t \geq 1$, nous utiliserons la notation $\mathbb{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$. Alors $(\mathbb{F}_t, t \geq 1)$ est une suite croissante de tribus qui porte le nom de filtration

naturelle ou canonique sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Pour un temps t fixé, \mathbb{F}_t représente l'information disponible à l'instant t .

Définition 3. : Soit $(X_t, t \geq 1)$ une chaîne de Markov définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, et soit $\mathbb{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$ dans \mathbb{F} la tribu des événements déterminés par X_1, \dots, X_t . Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est appelée temps d'arrêt si $\{\tau \leq t\} \in \mathbb{F}_t$, pour tout $t \in T$ dans \mathbb{N} . A chaque instant t , nous savons si τ est survenu.

Soit $B = \{B_1, B_2, I\} \in S$, le temps du premier passage de la chaîne par B ,

$$\tau_B = \begin{cases} \inf\{t \geq 1 / X_t \in B\} & \text{si un tel } t \text{ existe} \\ +\infty & \text{si } X_t \notin B \text{ pour tout } t \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

est un temps d'arrêt, parce que $\{\tau_B \leq t\} = \cup_{m=1}^t \{X_m \in B\} \in \mathbb{F}_t$. τ_B est donc le premier instant où la demande de crédit de financement de l'emprunteur est acceptée pour être un bénéficiaire de crédit pour la première fois. Sachant toutes les valeurs passées jusqu'au temps t (y compris la valeur de X_t), la chaîne se comporte à partir du temps t comme une nouvelle chaîne de Markov issue de X_t .

Définition 4. : Soient $B = \{B_1, B_2, B_3, I_1, I_2\}$ et \mathbb{P} une matrice de transition sur S , nous disons que $(X_t, t \geq 1)$ une chaîne de Markov sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ par rapport à une filtration $(\mathbb{F}_t, t \geq 1)$ si c'est un processus adapté à cette filtration tel que nous avons : $\mathbb{P}(X_{t+1} \in B / \mathbb{F}_t) = \mathbb{P}(X_t, B)$, avec $\mathbb{P}(x, B) = \sum_{s \in B} \mathbb{P}(x, s)$, pour tous $x, s \in S$.

Proposition 1. : Soient $B = \{B_1, B_2, B_3, I_1, I_2\} \in S$ et $A = \{A^T, A^{(T-1)}, \dots, A^i, A^{(i-1)}, \dots, A^1\} \in S$. Soit $(X_t, t \geq 1)$ une chaîne de Markov par rapport à la filtration $\mathbb{F}_t, t \geq 1$, alors $\mathbb{P}(X_{t+1} = B / X_t = A, \dots, X_1 = A) = \mathbb{P}(A, B)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1} = B / X_t = A, \dots, X_1 = A) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_{\{X_{t+1}=B\}} 1_{\{X_t=A, \dots, X_1=A\}} / \mathbb{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}(1_{\{X_t=A, \dots, X_1=A\}} \mathbb{E}(1_{\{X_{t+1}=B\}} / \mathbb{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}(1_{\{X_t=A, \dots, X_1=A\}} \mathbb{P}(A, B)) \\ &= \mathbb{P}(A, B) \mathbb{P}(X_t = A, \dots, X_1 = A) \\ &= \mathbb{P}(A, B) \end{aligned}$$

Proposition 2. : Propriété de Markov forte Soit $(X_t, t \geq 1)$ une chaîne de Markov de matrice de transition \mathbb{P} par rapport à la filtration $(\mathbb{F}_t, t \geq 1)$, alors $\mathbb{E}(f(X_{m+t}, m \geq 0) / \mathbb{F}_t) = \phi(X_t)$, avec $\phi(X) = \mathbb{E}_X(f(X_{m+1}, m \geq 0))$.

Nous écrivons souvent cette relation sous la forme : $\mathbb{E}(f(X_{m+t}, m \geq 0) / \mathbb{F}_t) = \mathbb{E}_{X_t}(f(X_{m+1}, m \geq 0))$.

Soit m un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathbb{F}_t, t \geq 1)$, avec $\mathbb{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$. Ce qui signifie que pour tout entier t , $\{m \leq t\}$ est un ensemble de \mathbb{F}_t ou de façon équivalente $\{m = t\}$ est un ensemble de \mathbb{F}_t . Nous supposons, de plus, que $\mathbb{P}(m < +\infty) = 1$.

Nous allons donc identifier la loi de la suite $(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)_{m \geq 0}$. Pour cela, nous devons calculer, pour toute fonction positive $f : \mathbb{E}(f(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) / \mathbb{F}_m)$.

Or nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) / \mathbb{F}_m) &= \mathbb{E}(\sum_{k \geq 1} 1_{\{m=k\}} f(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) / \mathbb{F}_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(1_{\{m=k\}} f(X_k, X_{k+1}, \dots) / \mathbb{F}_k) \end{aligned}$$

Nous notons que $\{m = k\}$ est dans \mathbb{F}_k et que $f(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots)$ est une variable aléatoire indépendante de \mathbb{F}_k et nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) / \mathbb{F}_m) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(1_{\{m=k\}} f(X_k, X_{k+1}, \dots) / \mathbb{F}_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(m = k) \mathbb{E}(f(X_k, X_{k+1}, \dots) / \mathbb{F}_k) \\ &= (\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(m = k)) \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_t) / \mathbb{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_t) / \mathbb{F}_t) \end{aligned}$$

Ceci prouve que la suite $(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)_{m \geq 0}$ a la même loi que la suite (X_1, \dots, X_t) et nous pouvons donc en déduire que la suite $(X_{m+k}, k \geq 1)$ a la même loi que $(X_k, k \geq 1)$.

A présent, pour chaque trajectoire $(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)_{m \geq 0}$ de la chaîne de Markov, nous définissons : $F(X_m, X_{m+1}, \dots) = \sum_{t \geq 1} \delta^{t-m-1} f(X_t, X_{t+1})$ [5].

En effet,

$$\begin{aligned} F(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots) &= f(X_{m+1}, X_{m+2}) + \delta F(X_{m+2}, X_{m+3}, \dots) \\ &= f(X_m, X_{m+1}) + \delta(f(X_{m+1}, X_{m+2}) + \delta F(X_{m+2}, X_{m+3}, \dots)) \\ &= f(X_{m+1}, X_{m+2}) + \delta f(X_{m+2}, X_{m+3}) + \delta^2 F(X_{m+3}, X_{m+4}, \dots) \\ &= f(X_{m+1}, X_{m+2}) + \delta f(X_{m+2}, X_{m+3}) + \delta^2 f(X_{m+3}, X_{m+4}) + \delta^3 F(X_{m+4}, X_{m+5}, \dots) \\ &= \sum_{t \geq 1} \delta^{t-m-1} f(X_t, X_{t+1}) \end{aligned}$$

Notons que F et f sont bien définies et bornées et que la série $\sum_{k \geq 0} \delta^k$ est convergente puisque le taux d'actualisation δ est compris entre 0 et 1 ($0 < \delta < 1$).

Nous définissons finalement le profit total espéré au temps t et à l'état $s \in S$ de la nature ($X_t = s$) par $V'_t : S \mapsto \mathbb{R}$, tel que $V'_t(s) = \mathbb{E}[F(X_t, X_{t+1}, \dots) / \mathbb{F}_t, X_t = s]$.

En effet, soit m un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathbb{F}_t, t \geq 1)$. $\{m = t\}$ est un ensemble de \mathbb{F}_t . Si nous notons que $\{m = k\}$ est dans \mathbb{F}_k et que $F(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots)$ est une variable aléatoire indépendante de \mathbb{F}_k , nous avons vu que $(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)_{m \geq 0}$ et (X_1, \dots, X_t) ont la même loi.

De ce fait, le profit total espéré, en partant de l'état x au temps t s'exprime ainsi, pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} V'_t(s/x) &= \mathbb{E}[F(X_m, X_{m+1}, \dots) / X_m = x] / \mathbb{F}_m \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(\mathbb{P}(m = k) F(X_k, X_{k+1}, \dots) / X_k = m) / \mathbb{F}_k \\ &= (\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(m = k)) (\mathbb{E}(F(X_1, X_2, \dots, X_t) / X_1 = x) / \mathbb{F}_k) \\ &= \mathbb{E}(F(X_1, X_2, \dots, X_t) / X_1 = x) / \mathbb{F}_k \\ &= V'_1(s/x) \end{aligned}$$

Corollaire 1. D'après ce qui précède, la suite de variables $(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)_{m \geq 0}$ a la même loi que la suite (X_1, X_2, \dots, X_t) . Nous pouvons donc en déduire que la valeur du profit total espéré $V'_t(s/x)$ au temps t et à l'état s sachant que la chaîne démarre à l'état x est égale à sa valeur $V'_1(s/x)$ au temps $t = 1$ (c'est-à-dire $V'_t(s/x) = V'_1(s/x)$), et ce pour tout état $s \in S$ de la nature.

3.6.2.1. Calculs du profit espéré pour chaque état $s \in S$

D'après le corollaire (1), le profit total espéré à l'état s de la nature, pour tout instant t , s'obtient en calculant la valeur du profit $V'_1(s/x)$ au temps $t = 1$ pour tout état $s \in S$ de la nature.

Calcul du profit espéré au temps $t = 1$

Au vu des résultats précédents, nous avons :

$$V'_1(s/x) = \mathbb{E}((f(X_1, X_2) + \delta F(X_2, X_3, \dots) / X_1 = x)) / \mathbb{F}_1$$

En appliquant l'espérance conditionnelle et la propriété de Markov, nous obtenons :

$$V'_1(s/x) = \sum_{s \in S} (f(x, s) + \delta V'_1(s/x)) * \mathbb{P}_{x,s}$$

Avec $\mathbb{P}_{x,s} = \mathbb{P}((X_{t+1} = s) / X_t = x)$ est la probabilité de passage, en une étape, de l'état x à l'état s .

Expression du profit espéré pour chaque état s d'un emprunteur

Dans cette partie, nous nous intéressons au profit espéré individuel du groupe d'emprunteurs. Nous allons étudier alors cas par cas les transitions possibles d'un des membres du groupe d'emprunteurs.

Rappelons que $B = \{B_1, B_2, I_1, I_2\}$ et $A' = \{A^T, A^{(T-1)}, \dots, A^1\}$ et $A'' = \{A^i, A^{i-1}, \dots, A^1\}$, pour déterminer la quantité $V'_1(s/x)$ pour tous $(s, x) \in B \cup A'$, avec $A'' \in A'$, cinq cas de figures peuvent se présenter :

1) Pour $\{x = B_1\}$, deux cas peuvent se présenter :

- **Premier cas** : Si l'emprunteur et son partenaire font simultanément défaut que ce soit partiel ou total, les deux emprunteurs restent ensemble à l'état B_1 ou atterrissent à l'état A^T et (*i.es* = B_1 ou $s = A^T$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \alpha^l & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = B_1 \\ (1 - \alpha)^2 & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^T \end{cases} \quad (4)$$

avec α^l la probabilité associée au remboursement partiel de la dette.

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(B_1, B_1) &= (f(B_1, B_1) + \delta V_1'(B_1, B_1))\mathbb{P}_{B_1, B_1} + (f(B_1, A^T) + \delta V_1'(A^T, B_1))\mathbb{P}_{B_1, A^T} \\ &= \alpha^l(W_t(s) - ((1+r) + C + (p * d))) + \delta V_1'(B_1, B_1) + (1 - \alpha)^2(\delta V_1'(A^T, B_1)) \\ &= \alpha^l(W_t(s) - ((1+r) + C + (p * d))) + (1 - \alpha)^2\delta V_1'(A^T, B_1) \end{aligned}$$

En rapprochant l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \alpha^l)\delta V_1'(B_1, B_1) = \alpha^l(W_t(s) - ((1+r) + C + (p * d))) + (1 - \alpha)^2(\delta V_1'(A^T, B_1))$$

- **Deuxième cas** : Cas mixte

En supposant que l'emprunteur est en succès et que son partenaire soit en défaut partiel ou total, le partenaire en succès passe à l'état B_3 , tandis que son partenaire atterrit dans l'état A^i , avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \alpha^h(1 - \alpha) & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = B_3 \\ \alpha^l(1 - \alpha) & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^i \end{cases} \quad (5)$$

En supposant qu'aucun des membres du groupe n'a fait défaut, le groupe de deux emprunteurs passe, en restant dans le même groupe, à l'état B_2 , avec une probabilité de transition $\mathbb{P}_{B_1 B_2} = \alpha^h$ si bien sûr $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = B_3$. Le seul état accessible à partir de l'état B_1 est B_2 avec une probabilité de transition associée au remboursement total de la dette $\mathbb{P}_{B_1 B_2} = \alpha^h$ si bien sûr $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = B_2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(B_3, B_1) &= (f(B_1, B_3) + \delta V_1'(B_3, B_1))\mathbb{P}_{B_1 B_3} + (f(B_1, A^i) + \delta V_1'(A^i, B_1))\mathbb{P}_{B_1, A^i} \\ &= \alpha^h(1 - \alpha)(W_t(s) - ((1+r) + C)) + \delta V_1'(B_3, B_1) + \delta \alpha^l(1 - \alpha)V_1'(A^i, B_1) \end{aligned}$$

En rapprochant l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta \alpha^h(1 - \alpha))V_1'(B_3, B_1) = \alpha^h(1 - \alpha)(W_t(s) - ((1+r) + C)) + \alpha^l(1 - \alpha)(\delta V_1'(A^i, B_1))$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(B_2, B_1) &= (f(B_1, B_2) + \delta V_1'(B_2, B_1))\mathbb{P}_{B_1 B_2} \\ &= \alpha^h(W_t(s) - ((1+r) + C)) + \delta V_1'(B_2, B_1) \\ &= \alpha^h(W_t(s) - ((1+r) + C)) + \delta \alpha^h V_1'(B_2, B_1) \\ &= \frac{\alpha^h}{1 - \delta \alpha^h} (W_t(s) - ((1+r) + C)) \end{aligned}$$

2) Pour $\{x = B_2\}$, deux cas peuvent se présenter :

- **Premier cas** : Soit le groupe fait défaut ou non. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état B_2 sont I_1 , et A^T (*i.es* = I_1 , ou $s = A^T$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \beta^2 & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_1 \\ (1 - \beta)^2 & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^T \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_1, B_2) &= (f(B_2, I_1) + \delta V_1'(I_1, B_2))\mathbb{P}_{B_2, I_1} + f(B_2, A^T) + \delta V_1'((A^T, B_2))P_{B_2, A^T} \\ &= \beta^2(W_t(s) - (1 + r + C)) + \delta V_1'(I_1, B_2) + (1 - \beta)^2(\delta V_1'(A^T, B_2)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\beta^2)V_1'(I_1, B_2) = \beta^2(W_t(s) - (1 + r + C)) + (1 - \beta)^2(\delta V_1'(A^T, B_2))$$

- **Deuxième cas** : L'un fait défaut et l'autre en succès. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état B_2 sont I_2 , et A^i (i.e $s = I_2$, ou $s = A^i$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \beta(1 - \beta) & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_2 \\ \beta(1 - \beta) & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^i \end{cases} \quad (7)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_2, B_2) &= (f(B_2, I_2) + \delta V_1'(I_2, B_2))\mathbb{P}_{B_2, I_2} + f(B_2, A^i) + \delta V_1'((A^i, B_2))P_{B_2, A^i} \\ &= \beta(1 - \beta)(W_t(s) - (1 + r + C + q)) + \delta V_1'(I_2, B_2) + \beta(1 - \beta)(\delta V_1'(A^i, B_2)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\beta(1 - \beta))V_1'(I_2, B_2) = \beta(1 - \beta)(W_t(s) - (1 + r + C + q)) + \beta(1 - \beta)(\delta V_1'(A^i, B_2))$$

3) **Pour $\{x = B_3\}$, deux cas peuvent se présenter :**

- **Premier cas** : Soit le groupe fait défaut ou non. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état B_3 sont I_1 , et A^T (i.e $s = I_1$, ou $s = A^T$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \theta(1 - \theta) & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_1 \\ (1 - \theta)^2 & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^T \end{cases} \quad (8)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_1, B_3) &= (f(B_3, I_1) + \delta V_1'(I_1, B_3))\mathbb{P}_{B_3, I_1} + f(B_3, A^T) + \delta V_1'((A^T, B_3))P_{B_3, A^T} \\ &= \theta(1 - \theta)(W_t(s) - (1 + r + C)) + \delta V_1'(I_1, B_3) + (1 - \theta)^2(\delta V_1'(A^T, B_3)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\theta(1 - \theta))V_1'(I_1, B_3) = \theta(1 - \theta)(W_t(s) - (1 + r + C)) + (1 - \theta)^2(\delta V_1'(A^T, B_3))$$

- **Deuxième cas** : L'un fait défaut et l'autre en succès. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état B_3 sont I_2 , et A^i (i.e $s = I_2$, ou $s = A^i$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \theta^2 & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_2 \\ \theta(1 - \theta) & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^i \end{cases} \quad (9)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_2, B_3) &= (f(B_3, I_2) + \delta V_1'(I_2, B_3))\mathbb{P}_{B_3, I_2} + f(B_3, A^i) + \delta V_1'((A^i, B_3))P_{B_3, A^i} \\ &= \theta^2(W_t(s) - (1 + r + C + q)) + \delta V_1'(I_2, B_3) + \theta(1 - \theta)(\delta V_1'(A^i, B_3)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\theta^2)V_1'(I_2, B_3) = \theta^2(W_t(s) - (1 + r + C + q)) + \theta(1 - \theta)(\delta V_1'(A^i, B_3))$$

4) **Pour $\{x = I_1\}$, deux cas peuvent se présenter :**

- **Premier cas** : Soit le groupe fait défaut ou non. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état I_1 sont I_1 , et A^T (i.e $s = I_1$, ou $s = A^T$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \Gamma^2 & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_1 \\ (1 - \gamma)^2 & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^T \end{cases} \quad (10)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_1, I_1) &= (f(I_1, I_1) + \delta V_1'(I_1, I_1))\mathbb{P}_{I_1, I_1} + f(I_1, A^T) + \delta V_1'((A^T, I_1))P_{I_1, A^T} \\ &= \Gamma^2(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C)) + \delta V_1'(I_1, I_1) + (1 - \Gamma)^2(\delta V_1'(A^T, I_1)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\Gamma^2)V_1'(I_1, I_1) = \Gamma^2(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C)) + (1 - \Gamma)^2(\delta V_1'(A^T, I_1))$$

- **Deuxième cas** : L'un fait défaut et l'autre en succès. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état I_1 sont I_2 , et A^i (i.e $s = I_2$, ou $s=A^i$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \Gamma(1 - \Gamma) & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_2 \\ \Gamma(1 - \Gamma) & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^i \end{cases} \quad (11)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_2, I_1) &= (f(I_1, I_2) + \delta V_1'(I_2, I_1))\mathbb{P}_{I_1, I_2} + f(I_1, A^i) + \delta V_1'((A^i, I_1))P_{I_1, A^i} \\ &= \Gamma(1 - \Gamma)(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C + q)) + \delta V_1'(I_2, I_1) + \Gamma(1 - \Gamma)(\delta V_1'(A^i, I_1)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\Gamma(1 - \Gamma))V_1'(I_2, I_1) = \Gamma(1 - \Gamma)(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C + q)) + \Gamma(1 - \Gamma)(\delta V_1'(A^i, I_1))$$

5) Pour $\{x = I_2\}$, deux cas peuvent se présenter :

- **Premier cas** : Soit le groupe fait défaut ou non. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état I_2 sont I_1 , et A^T (i.e $s = I_1$, ou $s=A^T$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \Delta(1 - \Delta) & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_1 \\ (1 - \Delta)^2 & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^T \end{cases} \quad (12)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_1, I_2) &= (f(I_2, I_1) + \delta V_1'(I_1, I_2))\mathbb{P}_{I_1, I_2} + f(I_2, A^T) + \delta V_1'((A^T, I_2))P_{I_2, A^T} \\ &= \Delta(1 - \Delta)(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C)) + \delta V_1'(I_1, I_2) + (1 - \Delta)^2(\delta V_1'(A^T, I_2)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\Delta(1 - \Delta))V_1'(I_1, I_2) = \Delta(1 - \Delta)(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C)) + (1 - \Delta)^2(\delta V_1'(A^T, I_2))$$

- **Deuxième cas** : L'un fait défaut et l'autre en succès. Dans ce cas, les seuls états accessibles de la chaîne à partir de l'état I_2 sont I_2 , et A^i (i.e $s = I_2$, ou $s=A^i$), avec les probabilités de transition suivantes :

$$\mathbb{P}_{x,s} = \begin{cases} \Delta^2 & \text{si } \lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \Rightarrow s = I_2 \\ \Delta(1 - \Delta) & \text{si } \lambda < \lambda_{min} \Rightarrow s = A^i \end{cases} \quad (13)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_1'(I_2, I_2) &= (f(I_2, I_2) + \delta V_1'(I_2, I_2))\mathbb{P}_{I_2, I_2} + f(I_2, A^i) + \delta V_1'((A^i, I_2))P_{I_2, A^i} \\ &= \Delta^2(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C + q)) + \delta V_1'(I_2, I_2) + \Delta(1 - \Delta)(\delta V_1'(A^i, I_2)) \end{aligned}$$

En rapprochant aussi l'expression identique de côté et d'autre de l'égalité, nous obtenons :

$$(1 - \delta\Delta^2)V_1'(I_2, I_2) = \Delta^2(W_t(s) - (1 + \bar{r} + C + q)) + \Delta(1 - \Delta)(\delta V_1'(A^i, I_2))$$

6) **Pour** $\{x = A^T, T = j \text{ à } 2\}$, la chaîne reste durant $j - 1$ périodes dans son état actuel avant de le quitter. Ainsi, le seul état accessible à partir de l'état A^T est A^{T-1} , avec une probabilité presque sûre qui vaut 1 ($\mathbb{P}_{A^T, A^{T-1}} = 1$). Au vu et d'après les résultats obtenus des articles sus-référencés [1], [4], [5], dans le cadre de prêt individuel, nous en déduisons :

$$V_1'(A^T, x) = \frac{\gamma^{\delta^{T-1}}}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \text{ et } V_1'(A^i) = \frac{\gamma^{\delta^{i-1}}}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x).$$

La valeur du profit espéré pour chaque état s

Passons maintenant à la détermination de chaque valeur du profit espéré pour chaque état s de la nature du prêt groupé. La valeur de chaque profit espéré à l'état s se présente comme suit :

1) **La quantité** $V_1'(s/x)$, **avec** $x = B_1, s = B_1, /B_2, /B_3$:

$$(1 - \delta\alpha^l)V_1'(s/x) = \alpha^l(W_t(s) - ((1+r) + C + (p * d))) + \frac{(1-\delta\alpha^l)(1-\delta(1-\gamma)) - (1-\alpha)^2\gamma\delta^T}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \quad (14)$$

$$(1 - \delta\alpha^h(1 - \alpha))V_1(s/x) = \alpha^h(1 - \alpha)(W_t(s) - ((1+r) + C + q)) + \frac{(1-\delta\alpha^h(1-\alpha))(1-\delta(1-\gamma)) - \alpha^l(1-\alpha)\gamma\delta^i}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \quad (15)$$

$$(1 - \delta\alpha^h)V_1'(s/x) = \alpha^h(W_t(s) - ((1+r) + C)) \quad (16)$$

2) **La quantité** $V_1'(s/x)$, **avec** $x = B_2, s = I_1, \text{ ou } s = I_2$:

$$(1 - \delta\beta^2)V_1'(s/x) = \beta^2(W_t(s) - ((1+r) + C)) + \frac{(1-\delta\beta^2)(1-\delta(1-\gamma)) - (1-\beta)^2\gamma\delta^T}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \quad (17)$$

$$(1 - \delta\beta(1 - \beta))V_1'(s/x) = \beta(1 - \beta)(W_t(s) - ((1+r) + C + q)) + \frac{(1-\delta\beta(1-\beta))(1-\delta(1-\gamma)) - \beta(1-\beta)\gamma\delta^i}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \quad (18)$$

3) **La quantité** $V_1'(s/x)$, **avec** $x = B_3, s = I_1, \text{ ou } s = I_2$:

$$(1 - \delta\theta(1 - \theta))V_1'(s/x) = \theta(1 - \theta)(W_t(s) - ((1+r) + C)) + \frac{(1-\delta\theta(1-\theta))(1-\delta(1-\gamma)) - (1-\theta)^2\gamma\delta^T}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \quad (19)$$

$$(1 - \delta\theta^2)V_1'(s/x) = \theta^2(W_t(s) - ((1+r) + C + q)) + \frac{(1-\delta\theta^2)(1-\delta(1-\gamma)) - \theta(1-\theta)\gamma\delta^i}{1-\delta(1-\gamma)} V_1'(s/x) \quad (20)$$

4) **La quantité** $V_1'(s/x)$, **avec** $x = I_1, s = I_1, \text{ ou } s = I_2$:

$$(1 - \delta\Gamma^2)V_1'(s/x) = \Gamma^2(W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C)) + \frac{(1 - \Gamma^2\delta)(1 - \delta(1 - \gamma)) - (1 - \Gamma)^2\gamma\delta^T}{1 - \delta(1 - \gamma)}V_1'(s/x) \quad (21)$$

$$(1 - \delta\Gamma(1 - \Gamma))V_1'(s/x) = \Gamma(1 - \Gamma)(W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C + q)) + \frac{(1 - \delta\Gamma(1 - \Gamma))(1 - \delta(1 - \gamma)) - \Gamma(1 - \Gamma)\gamma\delta^i}{1 - \delta(1 - \gamma)}V_1'(s/x) \quad (22)$$

5) **La quantité** $V_1'(s/x)$, **avec** $x = I_2$, $s = I_1$, **ou** $s = I_2$:

$$(1 - \delta\Delta(1 - \Delta))V_1'(s/x) = \Delta(1 - \Delta)(W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C)) + \frac{(1 - \delta\Delta(1 - \Delta))(1 - \delta(1 - \gamma)) - (1 - \Delta)^2\gamma\delta^T}{1 - \delta(1 - \gamma)}V_1'(s/x) \quad (23)$$

$$(1 - \delta\Delta^2)V_1'(s/x) = \Delta^2(W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C + q)) + \frac{(1 - \delta\Delta^2)(1 - \delta(1 - \gamma)) - \Delta(1 - \Delta)\gamma\delta^i}{1 - \delta(1 - \gamma)}V_1'(s/x) \quad (24)$$

4. Résultat obtenu

En regroupant toutes les valeurs calculées du profit espéré pour chaque état possible s de la nature, le profit total espéré d'un emprunteur au temps t est finalement :

Théorème 1. : Dans le modèle de prêt groupé défini par la chaîne de Markov $(X_t, t \geq 1)$ qui est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans un espace d'états S , le profit total espéré d'un emprunteur participant au contrat de prêt groupé qui est à l'état $s \in S$ au temps t est donné par :

$$V_t'(s/x) = \begin{cases} \frac{1 - \delta(1 - \gamma)}{(1 - \delta\alpha^l)(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma(1 - \alpha)^2\delta^T} \alpha^l (W_t(s) - ((1 + r) + C + (p * d))) & \text{si } (s, x) = (B_1, B_1), \\ & d = 1 \text{ à } 3 \\ \frac{\alpha^h(1 - \alpha)(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\alpha^h(1 - \alpha))(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma\alpha^l(1 - \alpha)\delta^i} (W_t(s) - ((1 + r) + C + q)) & \text{si } (s, x) = (B_3, B_1) \\ \frac{\alpha^h}{1 - \delta\alpha^h} (W_t(s) - ((1 + r) + C)) & \text{si } (s, x) = (B_2, B_1) \\ \frac{\beta^2(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\beta^2)(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma(1 - \beta)^2\delta^T} (W_t(s) - ((1 + r) + C)) & \text{si } (s, x) = (I_1, B_2) \\ \frac{\beta(1 - \beta)(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\beta(1 - \beta))(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma\beta(1 - \beta)\delta^i} (W_t(s) - ((1 + r) + C + q)) & \text{si } (s, x) = (I_2, B_2) \\ \frac{\theta(1 - \theta)(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\theta(1 - \theta))(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma(1 - \theta)^2\delta^T} (W_t(s) - ((1 + r) + C)) & \text{si } (s, x) = (I_1, B_3) \\ \frac{\theta^2(1 - \delta(1 - \delta))}{(1 - \delta\theta^2)(1 - \delta(1 - \gamma)) - \theta(1 - \theta)\gamma\delta^i} (W_t(s) - ((1 + r) + C)) & \text{si } (s, x) = (I_2, B_3) \\ \frac{\Gamma^2(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\Gamma^2)(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma(1 - \Gamma)^2\delta^T} (W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C)) & \text{si } (s, x) = (I_1, I_1) \\ \frac{\Gamma(1 - \Gamma)(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\Gamma(1 - \Gamma))(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma(1 - \Gamma)^2\delta^T} (W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C + q)) & \text{si } (s, x) = (I_2, I_1) \\ \frac{\Delta(1 - \Delta)(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\Delta(1 - \Delta))(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma(1 - \Delta)^2\delta^T} (W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C)) & \text{si } (s, x) = (I_1, I_2) \\ \frac{\Delta^2(1 - \delta(1 - \gamma))}{(1 - \delta\Delta^2)(1 - \delta(1 - \gamma)) - \gamma\Delta(1 - \Delta)\delta^i} (W_t(s) - ((1 + \bar{r}) + C + q)) & \text{si } (s, x) = (I_2, I_2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque les probabilités de transition ne dépendent pas du temps, le profit total espéré d'un contrat de prêt groupé constitué de quatre variables (r, q, i, T) est une fonction à variable aléatoire dépendante des états envisageables $s \in S$ de la nature, avec T la durée de la phase d'exclusion, $r \in [0, 1]$, $q \in [0, 1 + r]$ et $i \in [0, T]$.

5. Discussion

5.1. La stratification de la population d'emprunteurs

Le modèle de prêt groupé que nous avons construit comporte 5 états bénéficiaires. Les trois premiers états peuvent être classifiés comme des états d'apprentissage des emprunteurs. Tandis que les deux derniers états bénéficiaires sont les états d'inclusion financière. La raison d'étendre à cinq états le modèle à deux états bénéficiaires de prêt groupé de Osman Khodr et Francine Diener est, non seulement de mieux surveiller du point de vue agence les activités de prêt mais aussi, de stigmatiser les emprunteurs. La stigmatisation permet à l'agence de microfinance d'avoir des données statistiques précises de leurs clients pour mieux les aider à prendre une meilleure décision en matière d'octroi de crédit. Ainsi, ce modèle stratifie la population d'emprunteurs et la classe dans deux strates différentes.

La première strate regroupe les emprunteurs qui ne font aucun défaut durant le cycle de crédit. Dans cette strate, le groupe de deux emprunteurs quitte ensemble l'état B_1 et passe à l'état B_2 . Si aucun membre du groupe n'a fait aucun défaut, le groupe passe toujours ensemble à l'état I_1 . Ainsi, les deux états $\{B_2, I_1\}$ classifient les emprunteurs dont leur parcours dès l'apprentissage à l'état d'inclusion les considère comme des clients purs de l'institution de microfinance.

La deuxième strate regroupe les emprunteurs dont l'un des membres du groupe fait défaut d'un état à un autre. Ainsi, les emprunteurs en succès passent à l'état suivant en se mettant deux à deux pour former un nouveau groupe. Ce sont les états $\{B_3, I_2\}$ qui mettent sur le même panier les emprunteurs dont leurs partenaires de la période d'avant sont en échec. Les emprunteurs de cette strate, malgré leur courage et dévouement, supportent une partie ou la totalité de la charge transférable $q = \phi[1 + r]$ de leur partenaire en échec du fait de la caution solidaire ou la responsabilité conjointe. Ce qui rend parfois vulnérable certains micro-entrepreneurs. D'où l'intérêt de la stratification. Notre modèle permet alors de minimiser la dispersion à l'intérieur du groupe (Le critère d'homogénéité qui prévaut la formation de groupe est-il respecté lors de la formation de groupe ? Il permet alors de prévenir le comportement "cavaliste"¹ et "complotiste"² des emprunteurs.) et de maximiser la dispersion entre les groupes.

5.2. Prêt groupé versus prêt individuel

L'institution propose simultanément deux types de contrats : contrat de prêt groupé et contrat de prêt individuel. L'emprunteur choisira le type de contrat qui lui procurera l'utilité espérée maximale. Nous allons donc comparer lequel de ces deux contrats choisira l'emprunteur pour espérer une utilité maximale. La comparaison que nous présentons ne tient pas compte de la sanction sociale mais de la valeur que peut prendre la charge transférable q du fait de la responsabilité conjointe.

Pour deux contrats de prêt proposés par l'institution, pratiqués au même taux d'intérêt r , un contrat de prêt individuel $C(r, T)$ et un contrat de prêt groupé $C'(r, q, i, T)$, un emprunteur préférera choisir le contrat individuel si et seulement si $V(s/x) \geq V'(s/x)$ $\{(s, x) = (I, B_2)$ pour le prêt individuel et $(s, x) = (I_2, B_2)$ pour le prêt groupé $\}$, avec

1. Comportement cavaliste : sachant qu'il ne remboursera pas sa dette car son partenaire le fera à sa place, il accepte quand même de former un groupe.

2. Comportement complotiste : sachant que les deux emprunteurs ne rembourseront pas leur dette, le groupe sollicite quand même son accès à un crédit de financement.

$$V(s/x) = \frac{\beta(1-\delta(1-\gamma))}{(1-\delta\beta)(1-\delta(1-\gamma))-\gamma(1-\beta)\delta^T} (W_t(s) - ((1+r) + C))[1] \text{ et}$$

$$V'(s/x) = \frac{\beta(1-\beta)(1-\delta(1-\gamma))}{(1-\delta\beta(1-\beta))(1-\delta(1-\gamma))-\gamma\beta(1-\beta)\delta^i} (W_t(s) - ((1+r) + C + q)).$$

Où V (voir [1]) est le profit total espéré pour un bénéficiaire d'un contrat de prêt individuel $C(r, T)$ et V' est celui pour un bénéficiaire d'un contrat de prêt groupé $C'(r, q, i, T)$. En effet, après nécessaire fait, il vient $(1-\beta)(1-\delta\beta)(1-\delta(1-\gamma))-\gamma(1-\beta)^2\delta^T \leq (1-\delta\beta(1-\beta))(1-\delta(1-\gamma))-\gamma\beta(1-\beta)\delta^i - \frac{1}{\beta(1-\beta)q}$.

Or, q est strictement positive, donc

$$(1-\beta)(1-\delta\beta)(1-\delta(1-\gamma))-\gamma(1-\beta)^2\delta^T \leq (1-\delta\beta(1-\beta))(1-\delta(1-\gamma))-\gamma\beta(1-\beta)\delta^i.$$

Après simplification de part et d'autre de l'inégalité, il vient $(1-\beta)^2\delta^T \geq \beta(1-\beta)\delta^i$. Négligeons la quantité $\text{Log}(\frac{1-\beta}{\beta})$, il vient alors $T \geq i$. Donc pour une charge transférable q strictement positive, il est naturel de supposer que la durée de la phase d'exclusion partielle i est inférieure ou égale à la durée de la phase d'exclusion totale T ($i \leq T$).

Supposons maintenant que $i = T$. D'après l'inégalité ci-dessus, nous avons

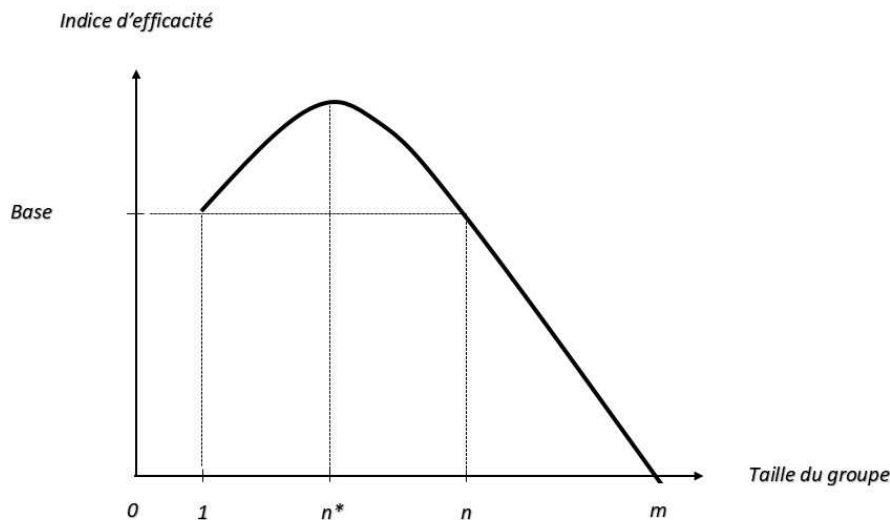
$$(1-\beta)^2\delta^T - \beta(1-\beta)\delta^i \geq -\frac{1}{\beta(1-\beta)q}.$$

Après nécessaire fait, $\delta^T \geq -\frac{1}{\beta(1-\beta)q}$. Or, la limite de δ^T quand T tend vers ∞ est égale à 0, alors $-\frac{1}{\beta(1-\beta)q} \leq 0$. Avec $\beta(1-\beta) \neq 0$, nous avons finalement alors $q \leq 0$. Alors pour $T = i$, nous avons $q \leq 0$, la valeur maximale que peut prendre la charge transférable q sera nulle ($q = 0$). Dans ce cas, l'emprunteur choisit le contrat de prêt groupé.

Théorème 2. : D'après les valeurs que peuvent prendre les profits V d'un contrat de prêt individuel et V' d'un contrat de prêt groupé, pour un même taux d'intérêt pratiqué r , le contrat de prêt individuel $C(r, T)$ prédomine toujours le contrat de prêt groupé $C'(r, q, i, T)$, si et seulement si la charge transférable q est strictement positive, avec bien sûr $i \leq T$.

5.3. La taille du groupe [6]

Dans cet article, nous nous limitons à $n = 2$ pour la taille du groupe d'emprunteurs. Ceci est motivé afin de garder la proximité maximale des membres du groupe, car au fur et à mesure que la taille augmente cette proximité diminue. Celle-ci permet donc d'attribuer aux emprunteurs un même niveau de risque de leur projet. La figure, continue et uni-modale, ci-après résume l'efficacité de deux types de contrats suivant la taille du groupe.



Nous n'allons surtout pas entrer dans le détail de la figure ci-dessus, mais un bref survol nous permet de constater, à un clin d'oeil, qu'en prenant comme base le prêt individuel, le prêt groupé reste performant tant que le nombre de membres est inférieur au nombre optimal (n^*). Au delà cette valeur, l'efficacité diminue jusqu'à ce qu'il devienne négative. Entre n^* et m se situe une valeur n qui égalise l'efficacité du contrat de prêt individuel et du contrat de prêt groupé. L'étude approfondie de cette efficacité qui constitue la généralisation de notre modèle de prêt groupé à n emprunteurs fera ultérieurement l'objet d'un autre article. Cette généralisation peut entraîner éventuellement un changement non seulement au niveau des paramètres mais aussi au niveau des états de la chaîne.

5.4. Notre modèle de prêt groupé versus modèle d'Osman Khodr et Francine Diener

Avec leur modèle à deux états bénéficiaires $\{B^1, B^2\}$ et $\{E^i\}$ état d'exclusion, $i = 1, \dots, T$, Osman Khodr et Francine Diener[4] ont abouti à deux valeurs du profit total espéré $W_t(x)$ au temps t étant à l'état x . En partant du même principe, quant à nous, nous avons trouvés 11 valeurs du profit total espéré $V'_t(s/x)$, au temps t étant à l'état s sachant l'état de départ x . C'est un modèle pas à pas qui incorpore toutes les spécificités de la population pauvre à faible niveau de sureté matérielle. Dans notre modèle, une tolérance est admise en cas de défaut partiel suite aux difficultés rencontrées lors de la réalisation du projet. Le nombre d'équations trouvé coïncide parfaitement au nombre d'arêtes de notre graphe de transition où la valeur future du profit total espéré d'un état bénéficiaire à un autre état bénéficiaire doit être strictement positive. Ce qui explique que ce ne sont pas tous les emprunteurs qui font défaut mais probablement certains d'entre eux. De ce fait, les emprunteurs ne faisant pas défaut n'ont pas à subir la charge transférable q et la durée de la phase d'exclusion. C'est pourquoi, les phases d'exclusion i et T sont exprimées séparément dans nos équations, contrairement au résultat trouvé par Osman Khodr et Francine Diener.

6. Conclusion

Le modèle de prêt groupé présenté dans cet article qui ne prétend pas intégrer absolument toutes les spécificités des cocontractants est un modèle robuste pas à pas. Sa robustesse réside dans le fait qu'il essaie de prendre en considérations toutes les éventualités possibles des parties concernées. Malgré cette robustesse, un autre angle de vision des chercheurs intéressés pourra certainement compléter cette étude.

Cet article ne traite que le cas où $n = 2$ emprunteurs. La généralisation à n emprunteurs rend ce modèle plus complexe. Ce qui va entraîner d'un important changement. Nous poursuivrons donc cette étude dans des travaux de recherche ultérieure.

7. Bibliographie

- [1] PHILIBERT ANDRIAMANANTENA , ISSOUF ABDOU , MAMY RAVELOMANANA, RIVO RAKOTOZAFY, « Modèle markovien d'octroi de crédit en microfinance », <https://hal.science/hal-01324501> 2020.
- [2] DIENER FRANCINE , DIENER MARC , DHIB NAHLA, « Valeur espérée d'un microcrédit dans un modèle de chaîne de Markov », <https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-01324501> 2016.
- [3] DHIB NAHLA, DIENER FRANCINE , DIENER MARC « Modélisation mathématique du flux espéré d'un micro-entrepreneur », *Econometrica*, 2013.
- [4] OSMAN KHODR, DIENER FRANCINE , « Mathematical models for individual and group lending in microfinance », *Université de Nice, Laboratoire de Mathématiques*, 2008.
- [5] OSMAN KHODR , « Modèles dynamiques des innovations du microcrédit », *In thèse de Doctorat, EDSA Laboratoire J-A Dieudonné, UNS, Parc Valrose, 06108 Nice, France pages 1-61*, 2011.

- [6] MAGLOIRE LAHNA , « Le Prêt de Groupe de Caution Solidaire : Efficacité et Jeux », *Revue d'Economie Théorique et Appliquée* : 41-52, vol. 1 , n° 2 , 2011.
- [7] LANSANA BANGOURA , « Contrat de crédit, risque moral, sélection adverse et incitation à l'effort pour le remboursement en Microfinance », *Centre de Recherche sur les Stratégies Economiques*, pages 1-38 , 2010.
- [8] S. GHOSH AND E. VAN TASSEL , « Microfinance, subsidies and dynamic incentives », *Working Papers 07001, Department of Economics, College of Business, Florida Atlantic University*, 2007.
- [9] G. A. TEDESCHI , « Here today, gone tomorrow : can dynamic incentives make microfinance more flexible », *Journal of Department Economics* : 84-105, n° 80, 2006
- [10] M. GHATAK , « Screening by the Company You Keep : Joint Liability Lending and the Peer Selection Effect », *The Economic Journal*, vol. 110 , n° , 2000.
- [11] B. ARMENDARIZ DE AGHION AND C. GOLLIER , « Peer Group Formation in An Adverse Selection Model », *The Economic Journal* : 632-642, vol. 110 , n° 465 , 2000.
- [12] B. ARMENDARIZ DE AGHION AND J. MORDUCH , « Microfinance beyond group lending », *Blackwell Publishers* : 401-420, vol. 8 , n° 2 , 2000.
- [13] M. GHATAK , « Group lending, local information and peer selection », *Journal of Development* : 27-50, vol. 60 , n° 1 , 1999.
- [14] M. GHATAK AND T. GUINNANE , « The economics of lending with joint liability : theory and practice », *Journal of Development Economics* : 195-228, vol. 60 , n° 1 , 1999.
- [15] LAFFONT J.J. AND N'GUESSAN T.T. , « Group lending with adverse selection », *Forth-coming in the European Economic Review*, vol. , n° , 1999.
- [16] J. CONNING , « Rural informal Moneylenders in Chile. Where have they gone ? », *mimeo, article présenté à la réunion de la Western Economic Association à San Francisco*, 1996.
- [17] D. HULME AND MOSLEY , « Finance Against Poverty », *Routledge New York*, 1996.
- [18] T. BESLEY AND S. COATE , « Group lending, repayment incentives and social collateral », *Journal of Development* : 1-18, vol. 46 , n° , 1995.
- [19] J.E. STIGLITZ , « Peer monitoring and credit markets », *World Bank Economic Review* : 351-366, vol. 4 , n° 3 , 1990.
- [20] H. BESTER , « The role of collateral in credit markets with imperfect information », *European Economic Review*, vol. 31 , n° , 1987.
- [21] H. BESTER , « Screening vs. rationing in credit markets with imperfect information », *American Economic Review*, vol. 75 , n° , 1985.
- [22] E. GREEN AND R. PORTER , « Non-cooperative collusion under imperfect price information », *Econometrica*, 87-100 , n° 52, 1984.