

Rupture et Chargement cyclique

C. Stolz - IMSIA-UMR 9219

26 Janvier 2023

"Nihil est in intellectu, quod non fuerit in sensu"

Leibnitz

- Mécanique de la rupture en transformations finies
- Problème d'initiation de défaut
- Chargement cyclique

Energie libre : Φ polyconvexe de \mathbf{F} , \mathcal{W} convexe de ses arguments.

$$\Phi(\mathbf{F}) = \mathcal{W}(\mathbf{F}, \text{adj}(\mathbf{F}), \det \mathbf{F})$$

Equation d'état

$$\Theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{F}}$$

Equilibre

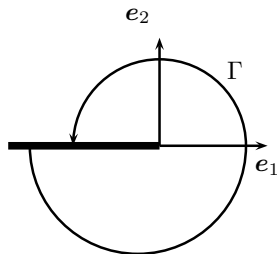
$$\text{Div } \Theta^T = 0$$

Eshelby tensor

$$\Psi = \Phi \mathbf{I} - \Theta^T \cdot \mathbf{F}$$

Conservation

$$\text{Div } \Psi^T = 0, \quad \int_C \mathbf{N} \cdot \Psi \, dS = 0$$



Si champs singuliers

$$J = \int_{\Gamma} \Phi N_1 - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Theta}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 \, dS \neq 0$$

Même signification : taux de restitution d'énergie potentielle

$$J = G = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l}$$

Invariance par contour

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Theta}^T = 0, \text{ sur } S^{\pm}$$

Intégrale J

$$J = \int_{\Gamma} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{e}_1 \, dS$$

- Suivant la configuration, C_o ou C_t
- Choix du champ \mathbf{u} , \mathbf{F} , Θ , σ
- Choix de la loi de comportement

Peu d'étude des champs

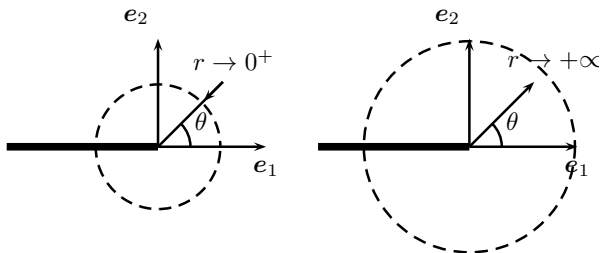
(Knowles-Sternberg, Abeyaratne, Geubelle- Knauss, Stolz...)

Mode ouverture I, II, III

D'autres modèles apparentés : endommagement (Benallal, Chen, ...)

Approches équations similaires : champ HRR, ...

Etude asymptotique : exemple Mode III



- Extérieur : $W(r, \theta) = \frac{2K_{III}}{\mu_o} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \theta/2$
- Intérieur : $w(r, \theta)$
- Compatibilité : $\lim_{r \rightarrow \infty} w(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} W(r, \theta)$

Énergie : $\Psi(I_1, I_2)$ milieu hyperélastique isotrope incompressible

Cinématique du mode antiplan

- Transformation : $C_o \rightarrow C_t$: $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + w(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$
- Gradient de transformation et isochorie

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + w_{,i}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - w_{,i}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_i \quad J = \det \mathbf{F} = 1$$

- Cauchy-Green tenseur à gauche

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + w_{,i}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_3) + (w_{,x_1}^2 + w_{,x_2}^2)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

Trois invariants principaux :

$$I_1 = \text{Tr } \mathbf{B}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{Tr}(\mathbf{B}^2)), \quad I_3 = J^2 = 1$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{B} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} + \eta \mathbf{I}$$

Posons $R = \|\nabla w\|$.

$$l_1 = l_2, \quad \Psi(l_1) = \mathcal{W}(l_1, l_1) = \Psi(3 + R^2)$$

Sur C_0 les contraintes nominales

$$\Theta = 2\Psi'(l_1)\mathbf{F}^T - \eta\mathbf{F}^{-1}, \quad \sigma = 2\Psi'(l_1)\mathbf{B} - \eta\mathbf{I}$$

Equilibre sur C_0 : équation aux dérivées partielles

$$\text{Div } \Theta^T = 2(\Psi'(l_1)w_{,\beta})_{,\beta} = 0,$$

$\sigma \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, élimination de η

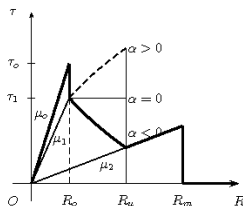
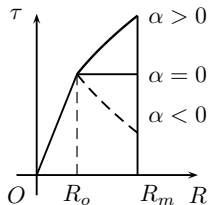
$$\Theta = 2\Psi'(\mathbf{F}^T - \mathbf{F}^{-1})$$

Équation aux dérivées partielles est elliptique si

$$2\Psi' + 4R^2\Psi'' \geq 0$$

Équivalent à $\tau(R) = 2R\Psi'(R) = R\mu(R)$ est une fonction croissante de R .

Loi puissance fragile en mode anti-plan



$$\begin{cases} R \leq R_o & \tau = \mu_o R \\ R_o \leq R \leq R_m & \tau = \mu_o R_o \left(\frac{R}{R_o}\right)^\alpha = \hat{\mu} R^\alpha \\ R_m \leq R & \tau = 0 \end{cases}$$

Pour $R \leq R_o$ ellipticité des équations du mouvement.

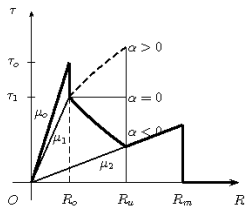
$R_m \geq R \geq R_o$ ellipticité pour $\alpha \geq 0$ sinon hyperbolicité.

Cas particuliers de la loi

- Elasticité linéaire : $\alpha = 1$, $R_m \rightarrow \infty$.
- Elastique fragile : $R_m = R_o$, (Bui, Ehrlacher, 1980)
- Knowles and Sternberg : $\alpha = -1/2$, $R_m \rightarrow \infty$.
- Matériaux plus généraux : Abeyaratne (90), CS 2010-2015

Deux classes de solution :

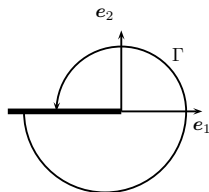
- fissures ($R_m = \infty$)
- quasi-fissures (R_m fini).



Étude de la transition endommagement-fissure par changement d'échelle !

Fissure

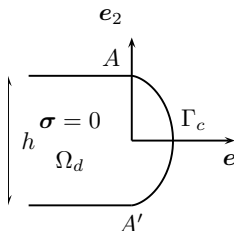
$r \rightarrow 0$



$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{r}} f(\theta)$$

Quasi-fissure

$r \rightarrow \infty$



Global \rightarrow local

Forme de la solution

- Déterminer la forme du front Γ_c et h en fonction de K
- Méthode de résolution analytique par la méthode "hodographe".
 $U(R, \Theta)$
- Γ_c est une cycloïde ! (Neuber (1969) $\alpha > 0$, CS(2010) α quelconque)
- $\alpha \geq 0$ la dissipation implique $K^2 = h\Psi_c$, milieu élastique $\Psi_c \rightarrow \infty$

Cas particulier : le matériau Néo-Hookéen

- Paramètres : $\alpha = 1$, $R_m = \infty$ i.e $\Psi_c \rightarrow \infty$
- Equation d'équilibre : pb de Poisson identique à l'élasticité linéaire HPP
- Pour la fissure ($-\infty \leq X_1 \leq 0, X_2 = 0$) : solution d'Irwin classique
- (r, θ) polaire au front de fissure

$$w \rightarrow \frac{2K}{\mu_o} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad r \rightarrow \infty$$

Transformation "hodographe"

Transformation des coordonnées physiques en celles du gradient ∇w

$$(x_1, x_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_\alpha = w_{,\alpha}(x_1, x_2), \quad (\xi_1 = R \cos \Theta, \xi_2 = R \sin \Theta)$$

w devient un potentiel ($dw = \xi_\alpha dx_\alpha$) !

Inverser : si le jacobien $H = w_{,11}w_{,22} - (w_{,12})^2$ ne s'annule pas .

Soit U la transformation de Legendre de w par rapport à ξ_α

$$U(\xi_1, \xi_2) = x_\alpha w_{,\alpha}(x_1, x_2) - w(x_1, x_2)$$

Relations de conjugaison : $x_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \xi_\alpha}$, $w = \xi \cdot \nabla U - U$

Contrainte : $\sigma_{13} = \mu(R)R \cos \Theta$, $\sigma_{23} = \mu(R)R \sin \Theta$

Les équations d'équilibre dans le plan (R, Θ) sont linéaires

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\mu(R)R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{(\mu(R)R)'}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} = 0.$$

w devient

$$w = R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{U}{R} \right)$$

Solution est

$$U(R, \Theta) = A \cos \Theta R I_o(R) \quad R \geq 0, \quad 0 \leq \Theta \leq \pi$$

où

$$I_o(R) = \int_R^\infty \frac{dt}{\mu(t)t^3}.$$

Le module est constant $\mu(t) = \mu_o$ et w devient

$$U(R, \Theta) = \frac{A}{2\mu_o R} \cos \Theta, \quad w = -\frac{A}{\mu_o R} \cos \Theta$$

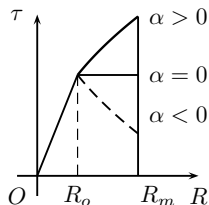
Les images de la fissure ($\theta = \pm\pi$) sont les demi-droites ξ_1 axis $\Theta = 0$ et $\Theta = \pi$. Les conditions aux limites en contraintes

$$\frac{\partial U}{\partial \Theta} = 0, \quad \forall R, \quad \Theta = 0 \text{ et } \Theta = \pi$$

Donc la solution d'Irwin s'écrit dans le plan d'hodographe

$$\Theta = \frac{1}{2}(\pi + \theta), \quad A = \frac{K^2}{\pi\mu_o}.$$

Cas de la loi puissance



Solution

$$U(R, \Theta) = AR \cos \Theta \int_R^{R_o} \frac{dt}{\hat{\mu}_o t^{\alpha+2}}$$

satisfait l'équation aux dérivées partielles pour $\alpha \neq -1$.
+ Solutions particulières

$$R\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1} \log R \cos \Theta - \Theta \sin \Theta\right), \quad R \cos \Theta, \quad R \sin \Theta$$

- Condition à l'infini : Irwin
- Condition sur le front : $R = R_m$ et bord libre
- Condition sur la bande : bord libre $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$

Construction par morceaux

$$\begin{cases} 0 \leq R \leq R_o, & U = U_o(R, \Theta) \\ U_o = A_o R \cos \Theta \int_R^{R_o} \frac{dt}{\mu_o t^3} - B_o R (\log R \cos \Theta - \Theta \sin \Theta) + C_o R \cos \Theta \\ R_o \leq R \leq R_m & U_1 = \hat{U}(R, \Theta) \\ U_1 = A_1 R \cos \Theta \int_R^{R_o} \frac{dt}{\hat{\mu}_o t^{\alpha+2}} - B_1 R \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1} \log R \cos \Theta - \Theta \sin \Theta \right) + C_1 R \cos \Theta \end{cases}$$

$(A_o, A_1, B_o, B_1, C_o, C_1)$ déterminées par

- (a) continuité du potentiel en $R = R_o$,
- (b) continuité du déplacement partout w ,
- (c) comportement en $R \rightarrow 0$, ($r \rightarrow \infty$)
- (d) condition de frontière libre sur la bande

L'énergie en R_m est

$$\mathcal{W}(R_m) = \int_0^{R_m} \tau(t) dt = \frac{1}{\mu_o} \frac{\tau_o^2}{\alpha + 1} \left(\rho_m^{\alpha+1} + \frac{\alpha - 1}{2} \right)$$

Relation entre h et K : $\rho_m = R_m/R_o$

$$\frac{1}{2} a \pi = \frac{h}{\alpha + 1} \left(\rho_m^{\alpha+1} + \frac{\alpha - 1}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{\tau_o^2}$$

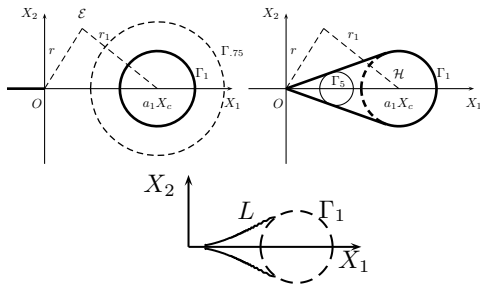
Le flux d'énergie le long de la cycloïde est

$$D_d = h \mathcal{W}(R_m) = \pi a \frac{\tau_o^2}{2\mu_o} = \frac{K^2}{2\mu_o}$$

Relation qui lie h à K^2

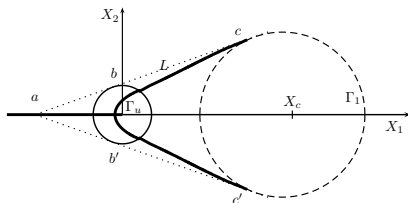
Propriétés de la solution pour $\alpha \leq 0$

Solution plus complexe : domaines d'ellipticité et d'hyperbolicité sont d'intersection non vide dans le plan physique.

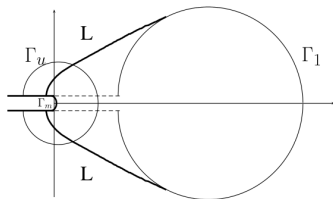


Présence de ligne de discontinuité du gradient du déplacement

Matériau trilineaire et trilineaire fragile



Solution Abeyaratne



Solution CS-2015

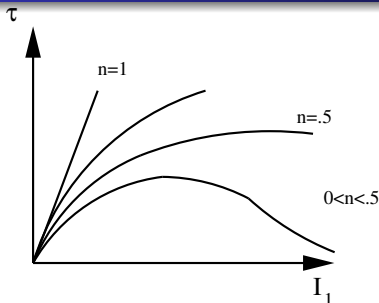
$$J = \int_L [[\Phi]]_{\mathbf{r}} n_x - \mathbf{n} \cdot \theta \cdot [[\mathbf{F}]]_{\mathbf{r}} dS$$

$$+ \frac{K^2}{2\mu_1}$$

$$w = \frac{K}{2\mu_1} \sqrt{r} \sin(\theta/2)$$

$$J = \int_L [[\Phi]]_{\mathbf{r}} n_x - \mathbf{n} \cdot \Theta \cdot [[\mathbf{F}]]_{\mathbf{r}} dS$$

$$+ H\Phi(R_m)$$



Loi GNH

$$\Phi(I_1) = \frac{\mu}{2b} \left(\left[1 + \frac{b}{n} (I_1 - 3) \right]^n - 1 \right)$$

Résultat :

Recherche déformée

$$x_1 = r^{m_1} v_1(\theta), \quad x_2 = r^{m_2} v_2(\theta)$$

champ x_2 (ouverture) plus singulier que x_1

$$m_2 = 1 - \frac{1}{2n}, \quad v_2 = a_2 f(\theta, n), \quad k = \frac{n-1}{n}, \quad \omega(\theta, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}$$

$$f = (\omega(\theta, k) + k \cos \theta)^{k/2} \sin(\theta/2) \left(1 - 2k^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + \omega(\theta, k)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le problème singulier à partir de v_2 on trouve v_1 où m_1 est différent de m_2 , puis les fonctions angulaires

$$J = \frac{1}{2} \pi \mu \left(\frac{b}{n} \right)^{n-1} a_2^{2n} m_2^{2n-1}$$

Singularité gradient de déplacement \neq contraintes

$$\theta \cdot \mathbf{F} \sim \frac{1}{r} \rightarrow J \neq 0$$

Autres cas : présence de lignes de choc

$$J = \int_{\Gamma} \mathbf{N} \cdot \llbracket \boldsymbol{\Psi} \rrbracket_{\Gamma} \cdot \mathbf{E}_1 \, dS + \text{Singularités}$$

Analyse locale doit être menée.

Norme ASTM ne peuvent être pas utilisées !

Initiation de défaut

Sphère sous traction hydrostatique : solution universelle

$$(R, \Theta, \Phi) \rightarrow (r = f(R), \theta = \Theta, \phi = \Phi)$$

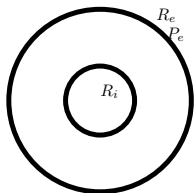
Isochorie $\det \mathbf{F} = 1 \rightarrow f' r^2 = R^2$

$$(\lambda_i^3 - 1)R_i^3 = (\lambda_e^3 - 1)R_e^3 = (\lambda(R)^3 - 1)R^3 = A$$

Energie

$$\Psi(\lambda) = W(I_1, I_2) \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \frac{r}{R}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$$

Equilibre



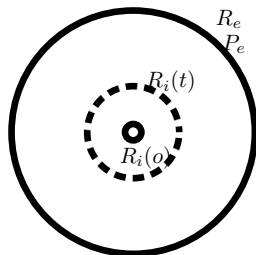
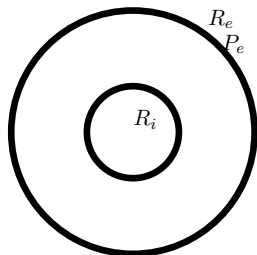
$$P_e = \int_{\lambda_i}^{\lambda_e} \frac{d\Psi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^3 - 1} = I(\lambda_i, \lambda_e)$$

$$P_e = \int_{\lambda_i}^{\lambda_e} \frac{d\Psi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda^3 - 1} = I(\lambda_i, \lambda_e), \quad \Psi \sim \lambda^\alpha$$

"Ductile"

$$R_i \rightarrow 0^+$$

"Fragile"



$$\lambda_i \rightarrow \infty, \lambda_e \rightarrow 1$$

$$-1 < \alpha < 2$$

$$I(\lambda_i, \lambda_e)$$

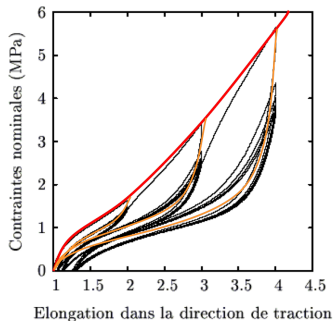
$$\lambda_i = \lambda_c$$

$$P_e^c = I(\lambda_c, 1)$$

Analyse Stabilité-bifurcation pour un défaut infinitésimal !

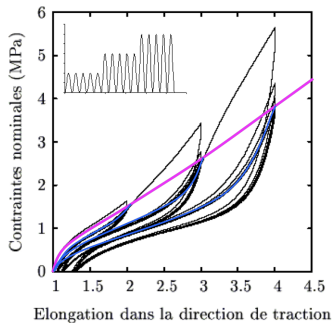
- Effet Mullins et comportement cyclique
- Etat stabilisé / nombre de cycles
- Courbe cyclique
- Comportement et anisotropie
- Loi et simulation

Comparaison monotone cyclique



Courbe monotone et décharge Effet Müllins
Aspect cyclique : à élongation maximale imposée

Courbe cyclique



Stabilisation à faible nombre de cycles.

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t); \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

Modèle statistique

$$\Phi = \int_{\Omega} \sum_n p(n, d\Omega) w(n, \lambda) dn d\Omega, \quad \lambda^2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} \in d\Omega$$

Projection sur N directions, \mathbf{d}_i ,

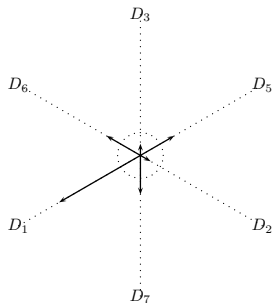
$$\Phi = \sum_N p_i w(\lambda_i, \lambda_i'), \quad p_i$$

Identification comme la réponse d'un cylindre en extension simple,...

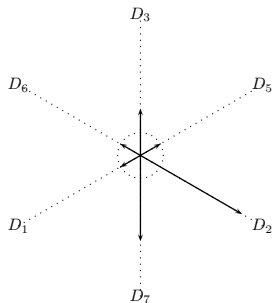
Direction du cube

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_x, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_y, \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{E}_z$$

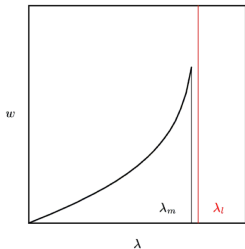
$$\mathbf{D}_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \mathbf{D}_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \mathbf{D}_7 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



Extension



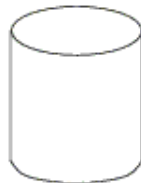
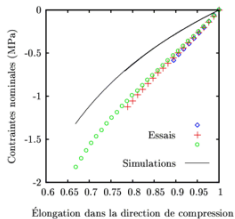
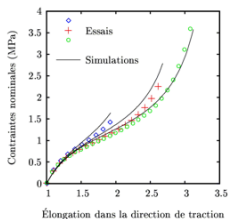
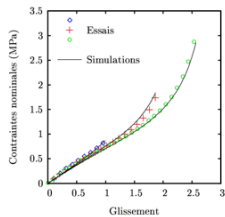
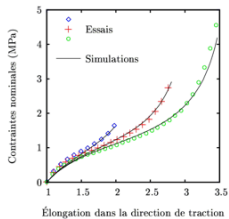
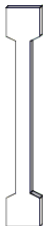
Glissement



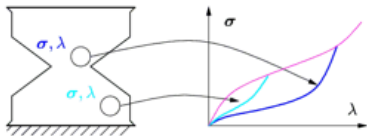
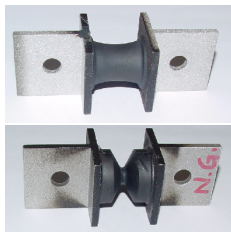
$$w = -\frac{G}{2} \left(\lambda' - \frac{1}{\lambda'} \right) \log \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' + \lambda} \frac{\lambda' + 1}{\lambda' - 1} \right)$$

$$\lambda'_i = \sqrt{(\lambda_i^m)^2 + a}$$

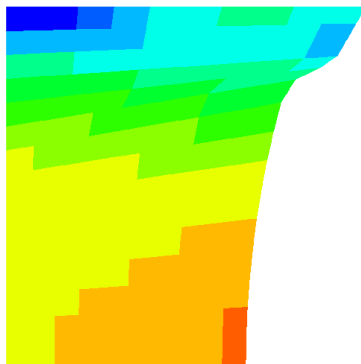
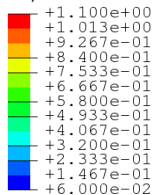
$$\theta_i(\lambda, \lambda_l) = \frac{\partial w}{\partial \lambda} = \frac{G}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda_l^2 - 1}}$$



Exemple



NE, Max. Principal



Formulation d'une loi standard

$$\Phi(\lambda, \lambda_m) = \mu(\lambda_m)(\lambda^2 - \lambda_m^2) + g(\lambda) + h(\lambda_m)$$

$$A = -\mu'(\lambda^2 - \lambda_m^2 + \mu(\lambda_m)\lambda_m - h'(\lambda_m))$$

$$h = \int_1^{\lambda_m} l\mu(l)dl$$

Condition de charge décharge

$$A \leq 0, \quad \lambda \leq \lambda_m$$

Courbe cyclique

$$A = 0, \quad \Theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_m, \lambda_m), \quad \Theta = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{1} \cdot \sigma$$

Chaîne de modélisation

- Décrire l'état stabilisé: direction la plus sollicitée, $\Psi, I_1(x, t), I_2(x, t), p(x, t)$
- Ecrire un critère de fatigue : identifier la (les) variable(s) d'intérêt.
Intersection des polytopes $\lambda_i^j(t)$ réduits aux D_i .
Définir un modèle d'endommagement : $(d) = f(\lambda_m^i)$
- Loi de cumul d'endommagement et triaxialité : $N_c = F(N_k)$

Problème supplémentaire pour le dimensionnement

Température - Hygrométrie- Vieillessement

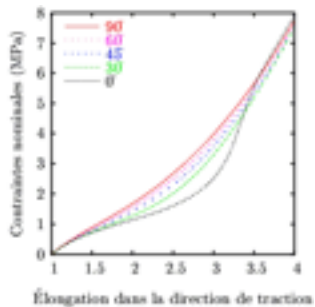
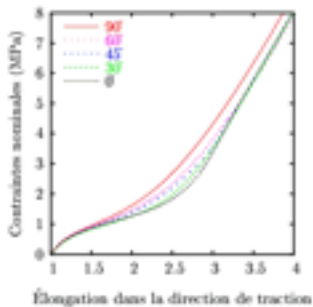
Eviter la perte de fonctionnalité.

Modèles plus complexes \rightarrow évaluer les marges

Ex : utiliser des modèles d'endommagement plus riches, étudier diagramme de Haigh

Anisotropie

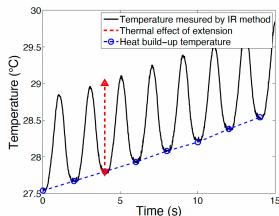
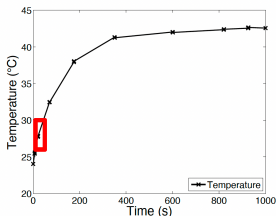
Prédéformation d'élongation



Essai - Simulation



Sous chargement cyclique le matériau s'échauffe



Condition d'échange : dépend de la configuration

Difficulté de mesure

$$\mathbf{Q} = K(C_o) : \mathbf{F}, \quad K(C_t) : \mathbf{F}^{-T} . k . \mathbf{F}^{-1} \det \mathbf{F}$$

$$\text{Div } \mathbf{Q} + \rho R = \rho C_o \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\mathbf{Q} . \mathbf{N} = h \frac{ds}{dS} = h \sqrt{\mathbf{N} . \mathbf{C}^{-1} . \mathbf{N}} \det \mathbf{F}$$

Intégration par période : jusqu'à stabilisation

Un ensemble de propriétés en TF

Modèles avec des déformations rémanentes et les effets de précharge

Mécanique de la rupture : sujet ouvert

Mécanique de l'endommagement : effet ductile ou fragile

Matériau très riche en propriétés, approches diverses statistique, modèle local, phénoménologique, approche par homogénéisation

Nécessité d'avoir des dispositifs expérimentaux adaptés :

Thermographie, X-ray, Tomographie, mesures sous charges,...

Diversité des matériaux : choix des charges, vulcanisation,...

Remerciements

- J. Ball, Arch.Rat.Mech.Anal, 63-pp: 337-403
- R.W. Ogden, Non Linear elastic deformation, Ellis Horwood
- Rivlin, Ericksen, année 1970
- Knowles- Sternberg- Abeyaratne
- Knauss- Geubelle
- C. Stolz, Mechanics of Materials, 2015, 90-pp 102-110
- I. Raoult, M. Bourgeois, C. Stolz, CSMA, 1998
- J.C. Halpin, F. Bueche, J. Appl. Phys., Vol 35 (11):3142-3149,1964
- P.D. Wu, E. Van der Giessen, J. Mech. Phys. Solids, 41(3):427-456, 1993
- S. Govindjee, J.C. Simo, J. Mech. Phys. Solids, 39(1):87-112,1991

Remerciements:

A. Ouakka (1993), Le Chenadec(2008), Raoult Ida (2005), Martin-Borret Guy (1998)...

GTFE : E. Ostoja-Kuckzynski, B. Le Cam, E. Verron, L. Gornet, M. Bourgeois, P. Charrier,PSA-Trelleborg-CETIM (Nantes),