



Ecoulement de l'univers le long d'un gradient de Morse

Jean Louis Jonot

► To cite this version:

Jean Louis Jonot. Ecoulement de l'univers le long d'un gradient de Morse : Ecoulement. 2023. hal-04174377

HAL Id: hal-04174377

<https://hal.science/hal-04174377>

Preprint submitted on 31 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ÉCOULEMENT DE L'UNIVERS LE LONG D'UN GRADIENT DE MORSE

JONOT JEAN LOUIS

A la mémoire de David Spring

ABSTRACT. Un écoulement de Morse est un procédé de représentation des événements d'un univers donné. Cette méthode de représentation est calquée sur la théorie de Morse. L'idée d'une telle représentation est de photographier l'univers en un temps d'écoulement régulier définie par une chronologie fixée sur l'univers.

1. LES CHAMPS DE MORSE

On rappelle qu'un univers $\mathcal{W}$ est une C^∞ -variété connexe de dimension 4 qui admet un recouvrement localement fini de cartes dont les points sont des événements. Sur chaque univers on peut définir une métrique riemannienne, notée $\mathbf{g}$.

Definition 1. *Un gradient de Morse, pour la métrique $\mathbf{g}$, est un champ de la forme*

$$T = \text{grad } \phi$$

où ϕ est une fonction de Morse sur $\mathcal{W}$.

L'existence d'un gradient de Morse sur un univers, muni d'une métrique riemannienne $\mathbf{g}$, est donnée par le théorème de densité de Milnor,

Theorem 1. *L'ensemble des applications de Morse est un ouvert partout dense pour la C^∞ -topologie fine de Whitney sur $C^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{R})$.*

Pour les valeurs régulières t , chaque composante connexe de $\phi^{-1}(t)$ est une sous-variété connexe de dimension 3 qui sépare l'univers $\mathcal{W}$ en plusieurs composantes connexes, la composante connexe de $\phi^{-1}(t)$ contenant w est une photographie de l'univers au temps d'écoulement t en l'événement w . L'univers observable en l'événement w est une sous-variété connexe de cette composante qui contient w .

Le théorème de Sard permet de photographier l'univers comme une sous-variété de dimension 3 en la valeur t appartenant à un ensemble résiduel de $\mathbb{R}$.

Theorem 2. *L'ensemble des valeurs régulières de ϕ est un ensemble résiduel de $\mathbb{R}$.*

Pour une valeur régulière t le champ $\text{grad } \phi$ est "orthogonal" à la photographie de l'univers au temps d'écoulement t .

Date: June 30, 2023.

1991 Mathematics Subject Classification. 53C42, 57R40, 53825.

Key words and phrases. Application de Morse, champ gradient, chirurgie de type $(\lambda, 4 - \lambda)$, métrique Lorentzienne, transversalité de Thom.

2. MÉTRIQUE LORENTZIENNE ASSOCIÉE À UN ÉCOULEMENT DE MORSE

En dehors des événements critiques le gradient de Morse ne s'annule pas, on peut définir une métrique lorentzienne sur l'univers formé des événements réguliers comme suit

$$g(T, T) = -\mathbf{g}(T, T) \text{ et } g(X, X) = \mathbf{g}(X, X)$$

pour tout champ X orthogonal à T . Les événements critiques sont isolés, ils forment une suite finie si $\mathcal{W}$ est compact ou une suite qui peut être infinie si l'univers n'est pas compact. Pour cette métrique, T est un champ chronologique en dehors des événements critiques de $\mathcal{W}$ et les champs orthogonaux à T , qui ne s'annulent pas, sont des champs espaces. Aux champs X pour lesquels

$$[X, T] = aX + bT \text{ et } \dim \text{Vect} \{X, T\} = 2$$

on associe le champ en corde complexe

$$Z = X + iT,$$

la fonction d'onde associée est donnée par

$$\varkappa = a + ib.$$

Pour les champs en corde $Z = X + iT$ pour lesquels X est orthogonale à T , la représentation en corde d'une particule est donnée par une intégrale première du champ X , c'est donc une corde de la photographie de $\mathcal{W}$ en t et les surfaces d'univers sont les intégrales premières du système de Pfaff $\{X, T\}$.

Definition 2. *Les champs en corde $Z = X + iT$, pour lesquels X est orthogonal à T , sont les champs de Morse associés à ϕ .*

Pour chaque valeur régulière t , on note g_t la métrique induite par g sur $\phi^{-1}(t)$. Cette métrique est riemannienne sur la photographie de l'univers en t . L'horloge chronologique est définie par la fonction de Morse ϕ et l'évolution de l'univers $\mathcal{W}$ est donnée par les photographies $\mathcal{W}_t = \phi^{-1}(t)$. Pour analyser l'univers on est amené à décrire l'évolution de la métrique g_t pendant un écoulement de temps $[\alpha, \beta]$. On rappelle la définition d'une horloge,

Definition 3. *Une horloge sur un univers $\mathcal{W}$, de chronologie ϕ , est la donnée d'une fonction de Morse*

$$\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R},$$

si l'horloge est sans événement critique, on dit que l'horloge globale sur $\mathcal{W}$.

L'existence d'horloge sur un univers $\mathcal{W}$ n'est pas, en général, vérifiée. Pour une fonction de Morse ϕ , la fonction ϕ restreint aux événements réguliers de l'univers, noté $\mathcal{W} \setminus \Sigma_\phi$, est une horloge globale de chronologie $\phi|_{\mathcal{W} \setminus \Sigma_\phi}$.

Remark 1. *Les événements critiques sont isolés, l'univers privé des événements critiques est connexe si $\mathcal{W}$ est connexe. On peut comparer avec les définitions données dans [2].*

Si l'univers $\mathcal{W}$ est un univers dont le bord est formé par l'union disjointe de deux sous-variétés $\partial_0 \mathcal{W}$ et $\partial_1 \mathcal{W}$

$$\partial \mathcal{W} = \partial_0 \mathcal{W} \cup \partial_1 \mathcal{W}$$

pour lesquelles il existe un champ X de classe C^∞ sur une variété sans bord contenant $\mathcal{W}$, qui entre transversalement dans $\partial_0 \mathcal{W}$ et sort en $\partial_1 \mathcal{W}$ transversalement

$$X \lrcorner \partial_0 \mathcal{W}, X \lrcorner \partial_1 \mathcal{W}$$

en temps fini,

$$\sup_{w \in \mathcal{W}} \{ |t| : \chi_t(w) \in \text{Int } \mathcal{W} \} < +\infty$$

où χ_t est le flot local associé au champ X , alors

$$\mathcal{W} \text{ est difféomorphe à } \partial_0 \mathcal{W} \times [0, 1],$$

on en déduit le théorème suivant

Theorem 3. *Pour tout univers compact $\mathcal{W}$ muni d'une horloge, de chronologie ϕ alors $\phi^{-1}([\alpha, \beta])$ est difféomorphe à*

$$\mathcal{W}_\alpha \times [\alpha, \beta] \approx \mathcal{W}_\beta \times [\alpha, \beta], \mathcal{W}_\alpha = \phi^{-1}(\alpha) \text{ et } \mathcal{W}_\beta = \phi^{-1}(\beta), \quad (2.1)$$

en particulier, $\mathcal{W}_\alpha$ et $\mathcal{W}_\beta$ sont difféomorphes.

Le théorème d'analyse suivant donne l'existence d'un groupe local de difféomorphismes en chaque événement w de l'univers $\mathcal{W}$.

Theorem 4. *Soit X un champ sur $\mathcal{W}$ alors pour tout événement $w_0 \in \mathcal{W}$ il existe un groupe local de difféomorphismes en w_0 ,*

$$\chi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \rightarrow \mathcal{W}, w_0 \in W$$

tel que

$$\frac{d\chi}{dt}(t, w) |_{t=0} = X(w), \forall w \in W \quad (2.2)$$

χ est unique, c'est le flot associé au champ X .

Le théorème précédent permet de décrire l'évolution de la métrique par écoulement de Morse. L'application

$$t \rightarrow \chi_t(w) = \chi(t, w)$$

est la courbe intégrale de X en w . On peut toujours supposer que l'origine des temps est 0 en w_0 , en remplaçant ϕ par $\phi - \phi(w_0)$. Si l'événement w_0 suit le flot du champ T associé, du point de vue de la corde l'espace $\mathcal{W}_0$ est l'espace référent, la métrique riemannienne sur cet espace va évoluer. Comment évolue cette métrique, le champ T est chronologique sur un voisinage ouvert de w_0 ,

$$\sigma(w) = g(w)(T(w), T(w)) < 0$$

pour tous les événements w appartenant à ce voisinage, on pose

$$\mathcal{T}(w) = \frac{1}{\sigma(w)} T(w) \quad (2.3)$$

alors

$$g(w)(T(w), \mathcal{T}(w)) = 1$$

si l'univers $\mathcal{W}$ est fermé, il existe un unique groupe local de difféomorphismes

$$\chi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \rightarrow \mathcal{W}, w \in W$$

tel que

$$\frac{d\chi}{dt}(t, w) |_{t=0} = \mathcal{T}(w), \forall w \in W.$$

On peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi(\chi(t, w)) &= \frac{d}{ds} \phi(\chi(t + s, w)) \big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \phi(\chi(s, w_t)) \big|_{s=0}, \quad w_t = \chi(t, w) \\ &= d\phi(w) \left(\frac{d\chi}{ds}(s, w_t) \big|_{s=0} \right) = g(w_t)(T(w_t), \mathcal{T}(w_t)) = 1 \end{aligned}$$

et

$$\phi(\chi(t, w)) = t + \phi(w).$$

Soit $W_t = \mathcal{W}_t \cap W$ alors

$$\chi_t(W_0) \subset W_t, \quad \chi_t(w) = \chi(t, w) \in W_t, \quad \forall w \in W_0$$

la métrique riemannienne g_t sur W_t induit une métrique riemannienne sur W_0 qui est le "pullback de g_t par χ_t ", notée

$$\mathbf{g}(t) = \chi_t^* g_t,$$

vérifiant

$$\mathbf{g}(t)(w)(Y(w), Z(w)) = g_t(\phi_t(w))(T_w \phi_t Y(w), T_w \phi_t Z(w))$$

où Y et Z sont des champs locaux au voisinage W_0 de l'événement w_0 . Avec cette notation, l'évolution de la métrique s'écrit

$$t \rightarrow \mathbf{g}(t) \text{ avec } \mathbf{g}(0) = g|_{W_0} \text{ et } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Localement, tout événement qui suit le flot du champ chronologique $T = \text{grad}(\phi)$ est décrit par son espace référent à l'origine $\mathcal{W}_0$ et l'évolution de la métrique riemannienne $\mathbf{g}(t)$ sur $\mathcal{W}_0$ est donnée par l'image réciproque par χ_t , c'est-à-dire χ_{-t} , de la métrique g_t qui est la trace sur $\mathcal{W}_t$ de la métrique lorentzienne g , c'est aussi la trace de la métrique riemannienne $\mathbf{g}$. L'évolution peut être décrite de la façon suivante. On se fixe un repère local dans un voisinage W_0 de w_0 , contenant la corde pointée en w_0 , noté $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$. Ce repère se transporte par le flot χ_t sur W_t

$$\partial_i(w_t) = T_w \chi_t \partial_i(w)$$

ou encore

$$\partial_i(w) = T_{\chi_{-t}(w)} \chi_t \partial_i(\chi_{-t}(w)) \text{ avec } \phi(w) = t$$

et on pose $\partial_0 = \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est le champ défini en 2.3, $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ est un repère dans un voisinage de $w_0 \in \mathcal{W}$. Dans ce repère local, on a les résultats suivants,

Lemma 1.

$$\mathbf{g}'_{ij}(t) = \mathcal{L}_{\partial_0} \mathbf{g}_{ij}(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \mathcal{L}_T \mathbf{g}_{ij}(t)$$

où $\mathcal{L}_{\partial_0}$, $\mathcal{L}_T$ sont les dérivées de Lie le long des champs ∂_0 et T avec

$$\sigma(t)(w) = \sigma(w_t)$$

pour tout $w \in W_0$.

Proof. On a, pour tout $w \in W_0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij}(t)(w) &= g_t(w_t)(\partial_i(w_t), \partial_j(w_t)) \\ &= g(w_t)(\partial_i(w_t), \partial_j(w_t)) = g_{ij}(w_t) \text{ avec } w_t = \phi_t(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{ij}(t)(w) &= \mathcal{L}_{\partial_0} g_{ij}(w_t) = \frac{d\mathfrak{g}_{ij}(t)(T(w_t))}{\sigma(w_t)} \\ \mathfrak{g}'_{ij}(t) &= \mathcal{L}_{\partial_0} \mathfrak{g}_{ij}(t) = \frac{1}{\sigma(t)} \mathcal{L}_T \mathfrak{g}_{ij}(t)\end{aligned}$$

où

$$\sigma(t)(w) = \sigma(w_t), \quad w \in W_0.$$

□

Si ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g , on a

$$\mathcal{L}_{\partial_0} \mathfrak{g}_{ij}(t) = g(\partial_i, \nabla_{\partial_0} \partial_j) + g(\nabla_{\partial_0} \partial_i, \partial_j)$$

et en posant

$$\nabla_{\partial_0} \partial_i = \Gamma_{0i}^k \partial_k \text{ et } \nabla_{\partial_0} \partial_j = \Gamma_{0j}^l \partial_l$$

on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{ij}(t) &= g(\partial_i, \Gamma_{0j}^l \partial_l) + g(\Gamma_{0i}^k \partial_k, \partial_j) = \Gamma_{0j}^l g_{il} + \Gamma_{0i}^k g_{kj} \\ \mathfrak{g}'_{ij}(t)(w) &= (\Gamma_{0j}^l g_{il} + \Gamma_{0i}^l g_{lj})(w_t), \quad w_t = \phi(t, w) \\ &= \Gamma_{0j}^l(w_t) \mathfrak{g}_{il}(t)(w) + \Gamma_{0i}^l(w_t) \mathfrak{g}_{lj}(t)(w), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{ij}(t)(w) &= \Gamma_{0j}^l(t)(w) \mathfrak{g}_{il}(t)(w) + \Gamma_{0i}^l(t)(w) \mathfrak{g}_{lj}(t)(w), \\ \forall w \in W_0 \text{ avec } \Gamma_{0j}^l(t)(w) &= \Gamma_{0j}^l(\phi(t, w))\end{aligned}$$

et $g_{i0} = g(\partial_i, \partial_0) = 0, \forall i = 1, 2, 3$. Pour une métrique d'Einstein g sur l'univers $\mathcal{W}$,

$$g = \lambda R + \mu T$$

où R est le tenseur de Ricci et T est le tenseur énergie-impulsion alors

$$\mathfrak{g}'_{ij}(t) = \lambda(w_t) (\Gamma_{0j}^l R_{il} + \Gamma_{0i}^l R_{lj})(w_t) + \mu(w_t) (\Gamma_{0j}^l T_{il} + \Gamma_{0i}^l T_{lj})(w_t)$$

avec $w_t = \chi(t, w)$, R_{il} est le tenseur de Ricci et Γ_{ij}^l sont les symboles de Christoffel de la connexion ∇ . Le tenseur de Ricci associé, en l'événement w au temps t , est

$$\mathfrak{R}_{ij}(t)(w) = (\Gamma_{0j}^l R_{il} + \Gamma_{0i}^l R_{lj})(w_t) \text{ avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

et le tenseur énergie-impulsion en l'événement w au temps t est définie par

$$\mathfrak{T}_{ij}(t)(w) = (\Gamma_{0j}^l T_{il} + \Gamma_{0i}^l T_{lj})(w_t). \quad (2.5)$$

Remark 2. Pour la métrique relativiste d'Einstein, les fonctions λ et μ sont

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{2}R - \Lambda} \text{ et } \mu = -\frac{\kappa}{\frac{1}{2}R - \Lambda},$$

$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, R est la courbure scalaire et Λ est la constante cosmologique.

Theorem 5. L'équation d'évolution de la métrique pour un événement qui suit le flot associé à une horloge chronologique est donnée par le flot de Ricci

$$\mathfrak{g}'_{ij}(t) = \lambda(t) \mathfrak{R}_{ij}(t) + \mu(t) \mathfrak{T}_{ij}(t) \quad (2.6)$$

avec $\lambda(t)(w) = \lambda(w_t)$, $\mu(t)(w) = \mu(w_t)$ et $\mathfrak{g}_{ij}(t)$ est le tenseur de la métrique riemannienne associée au tenseur de Ricci $\lambda(t) \mathfrak{R}_{ij}(t) + \mu(t) \mathfrak{T}_{ij}(t)$.

Si le tenseur T est nul alors l'équation d'évolution s'écrit

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \lambda \mathfrak{R} \quad (2.7)$$

si $\mathfrak{R}$ est défini dans le repère local $\{\partial_j\}$, pour déterminer $\mathbf{g}$ on est amené à résoudre l'équation 2.7 qui est donné par un flot de Ricci [1]. Peut-on reconstruire la métrique de l'univers à partir de l'équation d'évolution 2.7? Si oui, on peut étudier le flot de Ricci pour une variété fermée $\mathcal{V}$ de dimension 3 à partir la métrique construite sur le compactifié de l'univers $\mathbb{R}^1 \times \mathcal{V}$ ou sur l'univers compact $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{V}$. On peut résumer les résultats obtenus par le théorème suivant,

Theorem 6. *Si ϕ est une horloge chronologique, pour laquelle la métrique est une métrique d'Einstein, l'équation locale d'évolution dans l'espace référent s'écrit*

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \lambda \mathfrak{R} + \kappa \mathfrak{T},$$

avec $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{T}$ sont les tenseurs définis en 2.4 et 2.5.

La notion de temps est une notion locale, non linéaire si les courbes intégrales sont fermées. Les boucles temporelles pour une horloge ϕ sont les courbes intégrales fermées définies par $\text{grad } \phi$.

3. CHANGEMENT D'HORLOGE

On se fixe deux fonctions de Morse sur un univers fermé $\mathcal{W}$, notées ϕ et ψ . En dehors des événements critiques de ϕ et ψ , l'horloge associée à ϕ et celle associée à ψ sont définies. Les valeurs qui sont à la fois régulières pour ϕ et ψ forment un ensemble résiduel. Pour un événement w_0 régulier pour ϕ et ψ , on suppose qu'il existe des intervalles ouverts I contenant $t_0 = \phi(w_0)$, J contenant $s_0 = \psi(w_0)$ et une paire de difféomorphismes (θ, Θ) donnée par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Theta} & W \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ I & \xrightarrow{\theta} & J \end{array}, \theta(t_0) = s_0, \quad (3.1)$$

W est une carte contenant w_0 , $\phi(W) = I$ et $\psi(W) = J$.

Definition 4. *Un changement d'horloge, en un événement w_0 régulier pour les chronologies ϕ et ψ , est la donnée d'une paire (θ, Θ) pour laquelle le diagramme 3.1 est commutatif et qui conserve le gradient,*

$$T\Theta(\text{grad } \phi) = \text{grad } \psi. \quad (3.2)$$

Theorem 7. *Si (θ, Θ) est un changement d'horloge alors*

$$\theta' \circ \phi = \frac{\|\text{grad } \psi\|^2}{\|\text{grad } \phi\|^2}. \quad (3.3)$$

Proof. On a pour tout champ local X , avec les notations précédentes,

$$\theta'(\phi(w)) \times \mathbf{g}(w)(\text{grad } \phi(w), X(w)) = \mathbf{g}(w)(\text{grad } \psi(w), T_w \Theta(X(w))), \forall w \in W \quad (3.4)$$

en particulier pour $X = \text{grad } \phi$,

$$\theta' \circ \phi = \frac{\|\text{grad } \psi\|^2}{\|\text{grad } \phi\|^2}.$$

□

Remark 3. La fonction θ est strictement croissante sur I et si Θ est une isométrie alors θ se prolonge en une translation sur $\mathbb{R}$.

On peut généraliser la définition de changement d'horloge en introduisant dans l'équation 3.2 une fonction λ de classe C^∞

$$\lambda : W \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

vérifiant

$$T\Theta(\text{grad } \phi) = \lambda \text{ grad } \psi,$$

sous cette hypothèse l'équation 3.3 s'écrit

$$\theta' \circ \phi = \lambda \frac{\|\text{grad } \psi\|^2}{\|\text{grad } \phi\|^2},$$

localement sur W la fonction λ est donnée par

$$\lambda(w) = \frac{\|\text{grad } \phi(w)\|^2}{\|\text{grad } \psi(w)\|^2} \theta'(\phi(w)), \forall w \in W.$$

Avec cette définition, on peut changer l'orientation de l'écoulement pour des fonctions $\lambda < 0$. Pour une section de bases locales $\partial = \{\partial_\mu\}$ où

$$\partial_0 = \text{grad } \phi \text{ et } \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_0) = 0 \text{ avec } \mu = 1, 2, 3,$$

la section des matrices de $T\Theta$ relativement à la section locale de bases ∂ est notée $M_\partial(w)$. Pour un événement w dans W , l'application $\exp$ est définie pour la métrique riemannienne $\mathbf{g}$, on a

$$w = \exp(\mathbf{u})$$

où $\mathbf{u}$ est un unique vecteur de $T_{w_0}W$. En l'événement w_0 , les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans la base $\partial(w_0) = \{\partial_\mu(w_0)\}$ sont les coordonnées de l'événement w pour l'horloge de chronologie ϕ et les coordonnées de $\mathbf{u}$ dans $\{T_{w_0}(\partial_\mu(w_0))\}$ sont les coordonnées de l'événement w pour l'horloge de chronologie ψ . Le changement de variable en w_0 relativement à la base $\partial(w_0)$, pour passer d'une horloge à une autre, est donné par la matrice $M_\partial(w_0)$.

Remark 4. L'équation 3.4 permet d'affirmer que si X est un champ local sur W orthogonal à $\text{grad } \phi$ alors $T\Theta(X)$ est orthogonal à $\text{grad } \psi$. La photographie au temps d'écoulement t , pour l'horloge ϕ , s'envoie par Θ sur une photographie au temps d'écoulement $s = \theta(t)$ pour l'horloge ψ .

4. HORLOGES TRANSVERSALES ET INDÉPENDANTES

La transversalité des horloges de chronologies ϕ et ψ est définie par la transversalité des chronologies.

Definition 5. Deux fonctions de Morse ϕ et ψ sont transversales si

$$\phi^{-1}(t) \pitchfork \psi^{-1}(s), \forall t, s \in \mathbb{R} \setminus \phi(\Sigma_\phi) \cap \mathbb{R} \setminus \psi(\Sigma_\psi)$$

et une famille de fonctions de Morse est transversale si les fonctions de Morse sont transversales deux à deux. Les horloges associées sont dites transversales.

L'indépendance d'une famille d'horloge est définie à partir de l'indépendance des gradients des chronologies associées comme suit,

Definition 6. Une famille d'horloges de chronologies $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ est famille indépendante ou libre d'horloges si, pour tout événement régulier w de l'ensemble des horloges, la famille $\{\text{grad } \phi_\mu(w)\}$ est une famille libre de $T_w \mathcal{W}$.

Remark 5. Une famille indépendante d'horloges est de cardinale $\leq \dim \mathcal{W}$.

Definition 7. Une famille d'horloges de chronologies $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ est une famille génératrice si, pour tout événement régulier w de l'ensemble des horloges, la famille $\{\text{grad } \phi_\mu(w)\}$ est une famille génératrice de $T_w \mathcal{W}$.

On peut définir la notion de base d'horloges comme une famille indépendante et génératrice d'horloges. Cela signifie que pour tout événement régulier w de cette famille des gradients en w est une base de $T_w \mathcal{W}$. Pour un univers $\mathcal{W}$ et une famille transversale d'horloges de chronologies $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ on a le théorème suivant,

Theorem 8. Si t_μ est une valeur régulière de ϕ_μ pour tout μ et si la famille d'horloges, associées aux chronologies ϕ_μ , est une famille transversale alors

$$\bigcap_{\mu=1}^4 \phi_\mu^{-1}(t_\mu)$$

est une suite d'événements sans point d'accumulation.

Proof. C'est une conséquence du théorème de transversalité de Thom [6]. $\square$

Theorem 9. Une famille d'horloges de cardinal $\dim \mathcal{W}$ est transversale si et seulement si c'est une base d'horloges.

Proof. En chaque événement régulier w pour toutes les chronologies ϕ_μ , l'espace tangent $T_w(\phi_\mu^{-1}(\phi_\mu(w)))$ est l'orthogonal pour $\mathbf{g}(w)$ de $\mathbb{R} \text{grad } \phi_\mu(w)$, la transversalité est équivalente à

$$\cap_\mu T_w(\phi_\mu^{-1}(\phi_\mu(w))) = o_w$$

ce qui est encore équivalent à l'indépendance de la famille $\{\text{grad } \phi_\mu(w)\}$. $\square$

Pour une famille $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ de chronologies, en dehors des événements critiques pour l'une des chronologies ϕ_μ , la famille

$$\{\text{grad } \phi_\mu\}$$

est une section de bases sur

$$\cap_\mu \mathcal{W} \setminus \Sigma(\phi_\mu) = \mathcal{W} \setminus \cup_\mu \Sigma(\phi_\mu),$$

$\cup_\mu \Sigma(\phi_\mu)$ est un ensemble discret comme réunion finie d'ensembles discrets, on peut définir un système local de coordonnées $\cap_\mu \mathcal{W} \setminus \Sigma(\phi_\mu)$ en posant, dans un voisinage W de w_0 suffisamment petit pour que l'application $\exp$ existe, les coordonnées de $w \in W$ est donné par un quadruplet (x^1, x^2, x^3, x^4) vérifiant

$$\mathbf{x} = x^\mu \text{grad } \phi_\mu \quad (4.1)$$

où w est défini par

$$w = \exp(\mathbf{x}).$$

Definition 8. Le système de coordonnées défini par 4.1 est dit système de coordonnées gradient relatif à une famille transversale d'horloges de chronologies $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$.

Pour deux événements w_1 et w_2 suffisamment proche de w_0 , le changement de coordonnées est donné par

$$(x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4) \longrightarrow (x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4)$$

avec $w_i = \exp(\mathbf{x}_i)$ et $\mathbf{x}_i = x_i^\mu \text{grad } \phi_\mu$. Si les événements w_i sont génériques, le déplacement de w_1 par rapport à w_2 pour l'observateur situé en w_0 est une C^∞ -application

$$V \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4) \longrightarrow (x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4).$$

5. TOPOLOGIE DES UNIVERS PAR ÉCOULEMENT

La topologie d'un univers connexe peut être décrite par une horloge de chronologie ϕ . Les singularités de ϕ forment un ensemble discret $\{w_\mu\}$ de $\mathcal{W}$, pour chaque événement singulier on définit une boule fermée B_μ , de bord ∂B_μ , deux à deux disjointes et suffisamment petites pour que $\mathcal{W}_\phi = \mathcal{W} \setminus \sum_\mu B_\mu$ soit connexe. La restriction de ϕ à $\mathcal{W}_\phi$ est sans événement singulier. Pour une singularité w_0 de type $(\lambda, 4 - \lambda)$, il existe une carte W de w_0 ,

$$\alpha : W \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

pour laquelle si $\alpha_\mu(w) = (x_\lambda, x_{4-\lambda})$ avec $x^\lambda = (x^1, \dots, x^\lambda)$ et $x_{4-\lambda} = (x^{\lambda+1}, \dots, x^4)$

$$\phi(w) = \phi(w_0) - \|x_\lambda\|^2 + \|x_{4-\lambda}\|^2, \alpha_\mu(w) = (x_\lambda, x_{4-\lambda})$$

et

$$T\alpha_\mu(\text{grad } \phi(w)) = (-x^1, \dots, -x^\lambda, x^{\lambda+1}, \dots, x^4) = (-x_\lambda, x_{4-\lambda}).$$

Pour obtenir l'univers $\mathcal{W}$, on prend l'univers $\mathcal{W}_\phi$ qui est muni d'une horloge globale de chronologie $\phi|_{\mathcal{W}_\phi}$ et on recolle par chirurgie de type $(\lambda, 4 - \lambda)$ les boules B_μ si w_μ est une singularité de type $(\lambda, 4 - \lambda)$. Cette chirurgie se fait comme suit, si $0 \leq \lambda \leq 4$ on prend un plongement

$$\beta_\mu : S^{\lambda-1} \times B^{4-\lambda} \longrightarrow \partial B_\mu, \beta_\mu = \alpha_\mu^{-1}|_{S^{\lambda-1} \times B^{4-\lambda}}$$

l'espace obtenu, en lissant les angles, est l'univers

$$\chi(\mathcal{W}_\phi, \beta_\mu) \approx \frac{\mathcal{W}_\phi \cup B^4}{\sim}$$

avec si

$$w \in \partial B_\mu \text{ et } x \in \partial B^4 = S^{\mu-1} \times B^{4-\mu} \cup B^\mu \times S^{4-\mu-1}$$

on a

$$\beta_\mu(w) = x.$$

On a ajouté par chirurgie à $\mathcal{W}_\phi$ l'événement singulier de type $(\mu, 4 - \mu)$. Pour une famille de plongement $\{\beta_\mu\}$ on obtient par chirurgie l'univers $\mathcal{W}$. La topologie d'un univers par écoulement est la topologie d'un univers muni d'une horloge globale auquel on a ajouté par chirurgie des singularités. Si $\mathcal{W}$ est un univers fermé muni que de deux événements singuliers, on a le théorème suivant,

Theorem 10. *Si $\mathcal{W}$ est un univers fermé pour lequel il existe une horloge ayant exactement deux événements singuliers alors $\mathcal{W}$ est homéomorphe à S^4 .*

Proof. C'est une conséquence directe de la théorie de Morse [3] □

Pour avoir une approche globale de certains résultats énoncés précédemment, on peut consulter [4] ou [5].

Definition 9. *Un écoulement est connexe si l'horloge de chronologie ϕ vérifie la propriété de connexité suivante, $\phi^{-1}(t)$ est connexe pour toute valeur régulière t de la chronologie ϕ .*

On la théorème suivant,

Theorem 11. *Si $\mathcal{W}$ est univers fermé muni d'une horloge de chronologie ϕ et une sous-variété $\mathcal{V}$ de dimension 4 de bord $\partial\mathcal{V}$ dont les événements critiques sont dans $\text{int } \mathcal{V} = \mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$ est connexe alors*

$$\mathcal{W} \setminus \text{int } \mathcal{V} \text{ est difféomorphe à } V \times [0, 1]$$

où V est une variété fermée homéomorphe à une photographie quelconque au temps d'écoulement t . En particulier, $\partial\mathcal{V}$ est l'union disjointe de deux exemplaires de V .

Proof. C'est une conséquence de 2.1. □

Remark 6. *La chronologie ϕ d'une horloge sur un univers $\mathcal{W}$ permet de définir un écoulement sans événement critique sur $\mathcal{W} \setminus \Sigma_\phi$. Avec les notations précédentes, peut-on transformer ϕ en un écoulement de l'univers $\mathcal{W}$ qui soit connexe sur $\mathcal{W}_\phi$. Si oui, on peut représenter l'univers par un écoulement connexe auquel on a recollé des boules B_μ par chirurgie de type $(\mu, 4 - \mu)$.*

6. CONCLUSION

Un écoulement, le long d'un champ gradient, est une représentation simple de l'univers. L'univers s'écoule le long d'une chronologie ϕ , un observateur O en l'événement w se déplace le long de l'intégrale première du champ grad ϕ contenant w . Pour une photographie de l'univers en $t = \phi(w)$, les événements se déplacent le long des intégrales première de grad ϕ . La photographie en $t + \Delta t$, avec $[t, t + \Delta t]$ ne contient aucune valeur critique, donne un déplacement relatif des événements entre eux si aucun phénomène physique intervient. Pour un déplacement d'un événement w_0 à w_1 , le long d'une courbe paramétrée par w_t , la courbe obtenue dans la photographie $\phi^{-1}(\phi(w_1))$ sera donnée par la projection le long du champ gradient des événements w_t sur $\phi^{-1}(\phi(w_1))$. Observer l'univers au temps d'écoulement t revient à projeter sur $\phi^{-1}(t)$, le long des intégrales premières du champ gradient de ϕ , les événements de l'univers observable.

REFERENCES

- [1] Anderson M.T., "Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci", Publications Gazette 2005, smf gazette 103, page 24-40
- [2] Jonot J.L., "Géométrisation des univers quantifiables", hal-04116617
- [3] Milnor J., "Morse Theory", Princeton University Press, 1963.
- [4] Spring D., "The Golden Age of Immersion Theory in Topology: 1959-1973", Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005).
- [5] Spring D., Poénaru V., "Questions de géométrie et théorie de Gromov", Cours de DEA ParisXI
- [6] Thom R., "Quelques propriétés globales des variétés différentiables". Comm. Math. Helv. 28 (1): 17-86.

E-mail address: j.jonot@gmail.com