

Les problèmes pour chercher : peut-on dépasser la mise en activité des élèves ?

Le cas des problèmes « Poules - Lapins »

Magali HERSANT



Cette présentation a été effectuée lors des 6^è colloque de l'ARCD en juin 2023 à Genève. Elle reprend en partie, en prolongeant, un exposé de mes travaux en juin 2022 lors d'un séminaire invité par l'équipe de didactique des mathématiques de l'Université de Genève.

Dans une basse-cour, il n'y a que des poules et des lapins. On compte 8 têtes et 22 pattes. Combien y'a t-il de poules ? Combien y'a t-il de lapins ?

Documents d'accompagnement, 2002

- essais - ajustements numériques
- les élèves utilisent une méthode d'essais et ajustements pour résoudre ces problèmes ou une procédure d'« essais systématiques »
- mettre en évidence « la nécessité de faire des essais et de rectifier les choix en fonction des résultats »
- permettre de « remarquer combien il faut être méthodique, organisé, qu'il ne faut pas avoir peur d'écrire des résultats provisoires qui peuvent s'avérer inutiles pour la réponse mais en revanche très utiles pour la recherche » et qu'il « est utile de contrôler sa proposition pour vérifier si elle respecte les contraintes du problème. »

Ressources actuelles (MENJS, 2021)

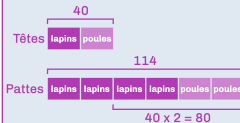
- problèmes « atypiques » ; « problèmes algébriques »
- « développer des compétences transversales, comme l'autonomie, la prise de décisions, la créativité, etc., qui leur seront utiles pour la suite de la scolarité et dans leur vie quotidienne »
- « permettre de rencontrer un certain nombre de stratégies et de types de raisonnements qu'ils pourront transposer, en les adaptant autant que nécessaire, dans la résolution d'autres problèmes atypiques »
- « il est crucial de mettre l'accent sur des indices pertinents susceptibles de guider la mémorisation puis l'évocation de ces problèmes. »

Comme il y a 40 têtes,
il y a 40 animaux.
On peut commencer par supposer
que la moitié sont des lapins.
 $40 - 20 = 20$

S'il y a 20 lapins, alors il y a 20 poules.
 $20 \times 4 \text{ pattes} + 20 \times 2 \text{ pattes} =$
 120 pattes
Le nombre de pattes est alors de 120.
Cela fait trop de pattes; 20 lapins,
c'est donc trop de lapins.

On recommence en supposant
qu'il y a 15 lapins, etc.

Un rectangle foncé représente
le nombre de lapins et un rectangle
clair le nombre de poules.



Les 4 rectangles sur la droite
représentent deux fois le nombre
de lapins plus deux fois le nombre
de poules, soit 2×40 .

$114 - 80 = 34$
 $34 \div 2 = 17$
Il y a 17 lapins.

$40 - 17 = 23$
Il y a 23 poules.

Comme il y a 40 têtes, il y a
40 animaux, on peut commencer
par supposer que la moitié sont
des lapins.
S'il y a 20 lapins, alors il y a
 $40 - 20 = 20$ poules.

Le nombre de pattes est alors
 $20 \times 4 \text{ pattes} + 20 \times 2 \text{ pattes}$
 $= 120 \text{ pattes}$.
 $120 \text{ pattes} - 114 \text{ pattes} = 6 \text{ pattes}$
Cela fait 6 pattes en trop.

En remplaçant un lapin par
une poule, cela fait deux pattes
en moins. Il faut donc remplacer
3 lapins par 3 poules.
Il y a 17 lapins et 23 poules.

Extraits de MENJS 2021

Écueils possibles

- se contenter de faire chercher les élèves (Choquet, 2014)
- se contenter de trouver une solution : la résolution du problème est anecdotique, non ancrée dans une pratique des mathématiques

(Hersant, 2010, 2012)

Écueils possibles

- se contenter de faire chercher les élèves (Choquet, 2014)
- se contenter de trouver une solution : la résolution du problème est anecdotique, non ancrée dans une pratique des mathématiques

Construire des savoirs mathématiques, critiques et émancipateurs ?

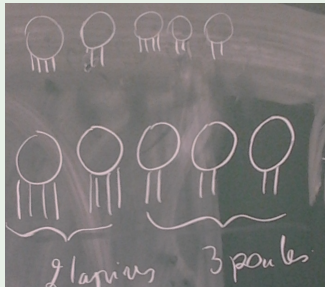
- ① Quelles sont les procédures utilisées par les élèves pour résoudre « spontanément » ces problèmes ?
- ② Quels savoirs mathématiques – savoirs et pratiques des mathématiques – se nichent dans ces problèmes et sont accessibles à des élèves de cycle 3 ?

(Hersant, 2010, 2012)

- distribution des pattes sur les têtes

- distribution des pattes sur les têtes

à l'école élémentaire



(Wallon)

<https://reseau-wallon-garges.ac-versailles.fr/IMG/pdf/>

[Poules_et_lapins_au_cycle_3_retour_sur_experience_bis.pdf](#)

- distribution des pattes sur les têtes

en 3^è, dans une narration de recherche

Pb 1 : On sait qu'une poule a deux pattes, un lapin en a quatre. Alors on a dessiné 16 têtes et on a réparti les pattes. Comme une poule a deux pattes et un lapin quatre donc il y a 10 poules et 6 lapins.

Calcul : il y a 20 poules car $10 \times 2 = 20$ et il y a 6 poules car $6 \times 4 = 24$ et comme $20 + 24 = 44$ donc on a bien 44 pattes

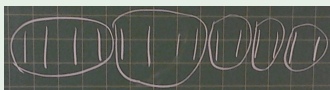
Problème 2 : Tout d'abord on a fait $91 \text{ [ndl : nombre de têtes]} \times 2 = 182$, alors 91 c'est le nombre de poules et le 2 c'est le nombre de pattes. Comme il y a 234 pattes on fait la soustraction $234 - 182$ pour trouver 52 [ndl : 42] pattes et puis on les a reportées sur les têtes. Donc les poules sont devenues des lapins parce qu'on leur a ajouté de pattes et on a trouvé 234 pattes donc il y a 36 lapins et 45 poules.

(Paulin, 2005) <https://webusers.imj-prg.fr/~severine.leidwanger/wwwIREM/Deslapins.pdf>

- distribution des pattes sur les têtes -> hypothèse qu'il n'y a que des poules puis répartition des pattes restantes sur les têtes pour « transformer les poules en lapins »
- groupements de 2 ou 4 pattes associées à des têtes

- distribution des pattes sur les têtes -> hypothèse qu'il n'y a que des poules puis répartition des pattes restantes sur les têtes pour « transformer les poules en lapins »
- groupements de 2 ou 4 pattes associées à des têtes

à l'école élémentaire



(Wallon)

https://reseau-wallon-garges.ac-versailles.fr/IMG/pdf/Poules_et_lapins_au_cycle_3_retour_sur_experience_bis.pdf

- distribution des pattes sur les têtes -> hypothèse qu'il n'y a que des poules puis répartition des pattes restantes sur les têtes pour « transformer les poules en lapins »
- groupements de 2 ou 4 pattes associées à des têtes
- procédures d'essais et ajustements successifs qui ne sont pas linéaires (Favier, 2022) -> des tests de solutions potentielles isolés

Construction de nécessités ?

- si 0 poule \rightarrow 8 lapins, 32 pattes *ne convient pas*
- si 1 poule \rightarrow
- ...
- si 5 poules \rightarrow 3 lapins, 22 pattes *convient*
- si 6 poules \rightarrow ...

- Je suis sûre qu'il y a 5 lapins et 3 poules parce que j'ai testé toutes les possibilités.
- Quand on remplace une poule par un lapin, forcément le nombre de pattes augmente de 2.
- Quand on remplace un lapin par une poule, forcément le nombre de pattes diminue de 2.

Construction de nécessités ?

- si 0 poule \rightarrow 8 lapins, 32 pattes *ne convient pas*
- si 1 poule \rightarrow
- ...
- si 5 poules \rightarrow 3 lapins, 22 pattes *convient*
- si 6 poules \rightarrow ...

- Je suis sûre qu'il y a 5 lapins et 3 poules parce que j'ai testé toutes les possibilités.
- Quand on remplace une poule par un lapin, forcément le nombre de pattes augmente de 2.
- Quand on remplace un lapin par une poule, forcément le nombre de pattes diminue de 2.

Construction de nécessités ?

- si 0 poule \rightarrow 8 lapins, 32 pattes *ne convient pas*
- si 1 poule \rightarrow
- ...
- si 5 poules \rightarrow 3 lapins, 22 pattes *convient*
- si 6 poules \rightarrow ...

- Je suis sûre qu'il y a 5 lapins et 3 poules parce que j'ai testé toutes les possibilités.
- Quand on remplace une poule par un lapin, forcément le nombre de pattes augmente de 2.
- Quand on remplace un lapin par une poule, forcément le nombre de pattes diminue de 2.

\Rightarrow Favier (2022) montrent que les élèves peinent à construire ces deux dernières nécessités ; elles restent de l'ordre de l'assertorique.

- s'il y a 4 lapins et 4 poules, il y a 24 pattes -> il y a plus de poules que de lapins

- il y a au plus 8 poules et au plus 8 lapins
- il y a forcément des lapins et des poules (i.e. $P > 0$; $L > 0$)
- pour avoir toujours 8 têtes, quand j'ajoute un lapin, je retire une poule (version duale)
- avec 8 poules et 0 lapins, il reste 6 pattes, donc il y a 3 lapins et 5 poules
- avec 8 lapins et 0 poules, il manque 10 pattes, donc il y a 5 poules et 3 lapins
- **quand on remplace une poule par un lapin, le nombre de pattes augmente de 2**
- **quand on remplace un lapin par une poule, le nombre de pattes diminue de 2**

- Il y a au plus 11 poules et au plus 5 lapins
- Il y a forcément des lapins et des poules
- Avec 11 poules et 0 lapins, il y a 3 têtes en trop ; donc il y a 3 lapins et 5 poules
- Avec 5 lapins et 0 poules, il reste 3 têtes et 2 pattes, il faut transformer 2 lapins en poules et répartir les 6 pattes alors restantes sur les 3 têtes, il y a 3 lapins et 5 poules
- pour avoir toujours 22 pattes, quand j'enlève un lapin, je le remplace par 2 poules mais alors mon nombre de tête change (version duale ?)
- quand on remplace une poule par un lapin, le nombre de pattes augmente de 2
- quand on remplace un lapin par une poule, le nombre de pattes diminue de 2

- des résultats d'essais (solutions possibles) qui restent de l'ordre de l'empirique
- des résultats d'essais mis en tension pour construire des nécessités
 - pour rendre compte de la façon dont varie le nombre de pattes en fonction du nombre de (P, L) -> une nécessité essentielle du problème, même si on peut trouver la solution sans
 - pour réduire l'exploration des possibles (les courts-circuits), organiser la recherche
 - pour contrôler les « solutions » produites

Pratiques des savoirs

- On peut trouver la ou les solutions lorsqu'elles existent en parcourant tous les cas, ça peut être très long !
- Pour résoudre des problèmes de ce type, on fait une hypothèse, puis on regarde ce qu'elle nous dit de nouveau sur le problème pour l'ajuster.
- On peut réduire la recherche en cherchant le nombre max de L et de P.
- On peut savoir comment orienter la recherche en supposant le même nombre de lapins et de poules.

Savoirs critiques et pratiques des savoirs

Le nombre d'animaux est toujours le même et le nombre de pattes d'une poule et d'un lapin ne change pas. Alors, quand je remplace une poule par un lapin, il se passe toujours la même chose : le nombre de pattes augmente de 2.

Cette relation permet de trouver le nombre de chaque animal à partir d'une hypothèse.

En mathématiques, on cherche souvent des relations de ce type.

Nécessités du problème

- il y a 4 fois plus de pattes de lapin que de lapins
- il y a deux fois plus de pattes de poules que de poules
- le nombre de têtes est la somme du nombre de lapins et de poules
- le nombre de pattes dans la basse-cour est la somme du double du nombre de poules et du quadruple du nombre de lapins.
- ...

Dégager des nécessités, construire des savoirs critiques : caricatures (Orange & Orange-Ravachol, 2007)

- pourquoi une solution ne peut pas fonctionner (conditions d'impossibilités)
- conditions de possibilité

Dégager des nécessités, construire des savoirs critiques : caricatures (Orange & Orange-Ravachol, 2007)





- pourquoi une solution ne peut pas fonctionner (conditions d'impossibilités)
 - conditions de possibilité
-
- $L = 8 \rightarrow$ impossible il y aurait 32 pattes $\Rightarrow L < 8, L > 5$
 - $P = 8 \rightarrow$ impossible il y aurait 16 pattes $\Rightarrow P < 8; P \geq 0$ et $L \geq 0$
 - $L = P = 4 \rightarrow$ il y a bien 8 têtes mais 24 pattes $\Rightarrow P > L$
 - $P = 11 \rightarrow$ il y aurait bien 22 pattes mais 11 têtes $\Rightarrow P \leq 8$
 - $L = 5 \rightarrow$ il y aurait 20 pattes $\Rightarrow L \leq 5$
 - $L=7$ et $P = 1 \Rightarrow$ 8 têtes mais 30 pattes ; il y a 8 pattes en trop, ce qui correspond à 2 lapins : il y a donc 5 lapins et 3 poules \rightarrow il y aurait 26 pattes \Rightarrow quand on remplace un L par une P, le nombre de pattes diminue de 2

Dégager des éléments sur les pratiques des savoirs

- une suite de problèmes avec, petit à petit, des choix de valeurs numériques qui empêchent l'usage de schémas analogiques
- les nécessités dans le MEB et leur traduction par des égalités à respecter

- À partir de ces problèmes, différentes problématisations possibles pour des élèves de cycle 3.
- Identification de savoirs mathématiques critiques et de savoirs sur la pratique mathématique mis en jeu dans ces problématisations.
- Des possibilités (a priori) de travailler à partir de caricatures

- Quid de la confrontation à la réalisation ?

-  Choquet, C. (2014, octobre 20). *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3*. (Thèse de doctorat, Nantes, Nantes).
-  Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève*. (Thèse de doctorat, Genève, Genève).
-  Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3*. (Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes, Nantes).
-  Hersant, M. (2012). Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques : une étude didactique pour identifier les savoirs et les apprentissages possibles. In *Les didactiques en question(s). Etat des lieux et perspectives*

pour la recherche et la formation (Elalouf, Robert, Belhadjim, Bishop, p. 192-202). Bruxelles : De Boeck.



Orange, C. & Orange-Ravachol, D. (2007). Problématisation et mise en texte des savoirs scolaires : le cas d'une séquence sur les mouvements corporels au cycle 3 de l'école élémentaire.. In *Actes des cinquièmes journées scientifiques de l'ARDIST, La Grande Motte, octobre 2007*. La Grande. Récupérée à partir de <http://www.aix-mrs.iufm.fr/ardist>