

Arbre Topologique des Formes : algorithme de construction et application

J. Mendes Forte⁽¹⁾, N. Passat⁽²⁾, Y. Kenmochi⁽¹⁾, S. Fourey⁽¹⁾

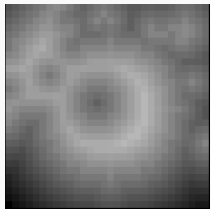
(1) Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, Caen, France

(2) Université de Reims Champagne-Ardenne, CReSTIC, Reims, France

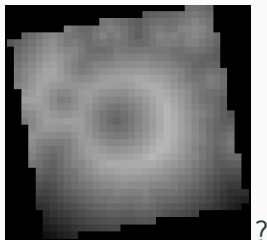
GT DGMM 2023, Caen, 6 Juillet 2023

Introduction

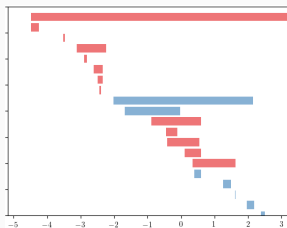
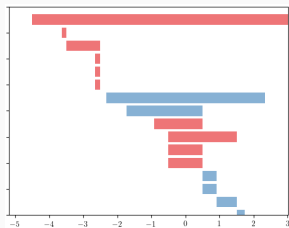
Comment visualiser/quantifier les différences topologiques entre



et



On peut, par exemple, utiliser l'homologie persistante :



Contexte

- Image en niveaux de gris
- Structure hiérarchique : l'arbre topologique des formes (ATdF)
- Descripteur topologique

Motivation

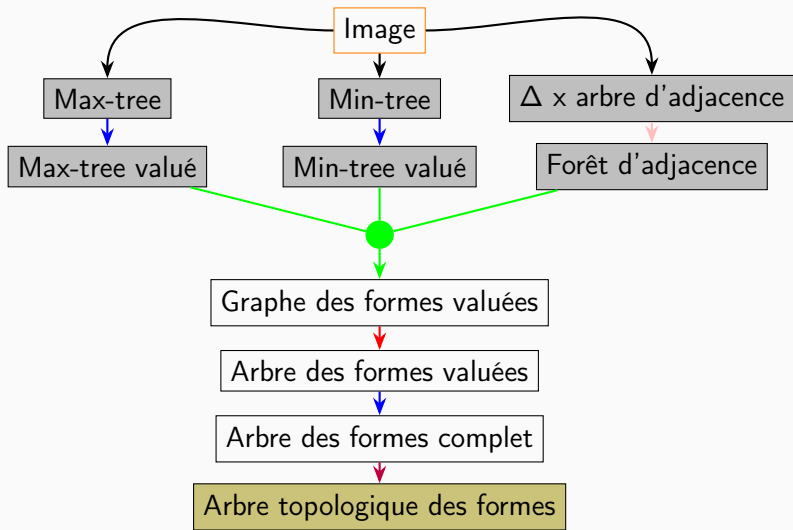
- Structures hiérarchiques de la MM comme descripteurs topologiques

Contributions

- Unification de structures hiérarchiques
- Amélioration de l'algorithmique de construction de l'ATdF
- (Application au filtrage : simplification d'image)

L'Arbre Topologique des Formes : approche initiale

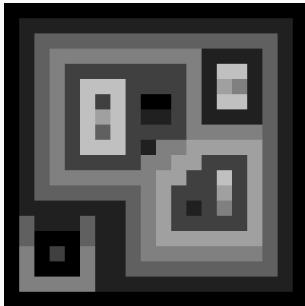
L'Arbre Topologique des Formes : approche initiale



Approche initiale : Image en niveaux de gris

Espace, valeurs, image

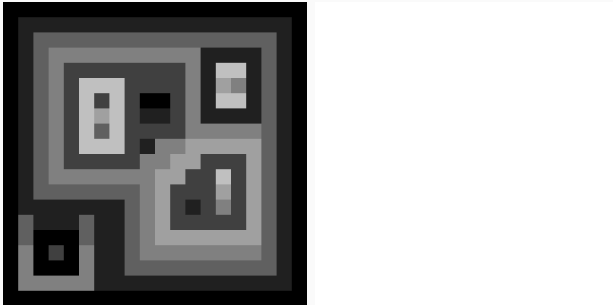
- Espace $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^n$ ($n \geq 2$)
- Valeurs $\mathcal{V} \simeq \mathbb{Z}$
- Image = fonction $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$



Approche initiale : seuillage

Seuillages

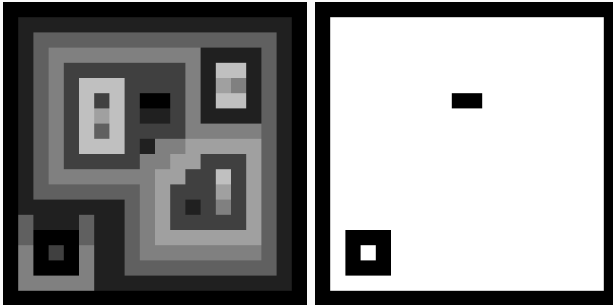
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

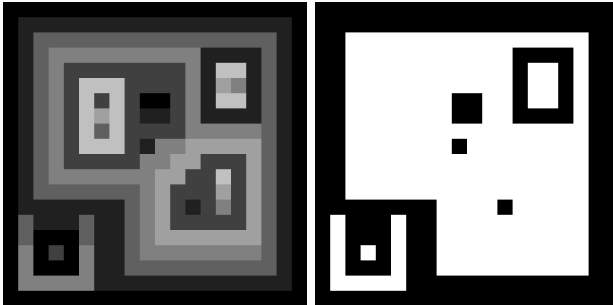
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

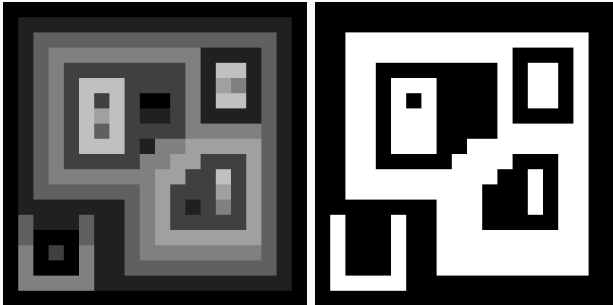
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

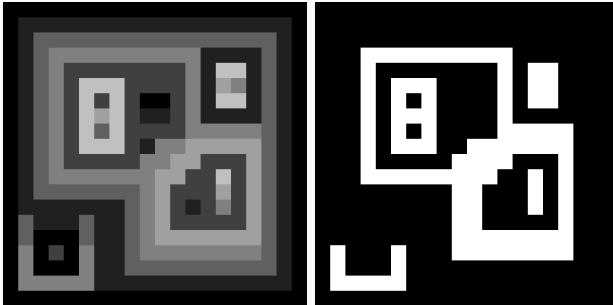
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

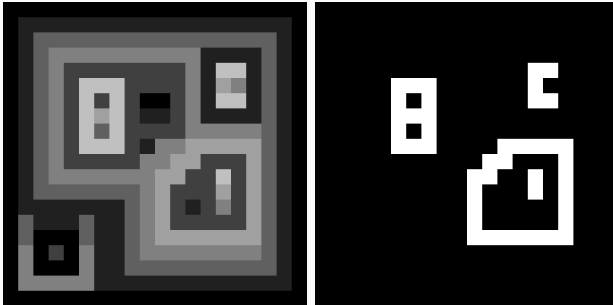
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

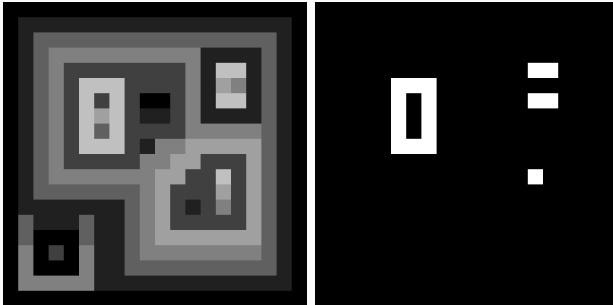
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

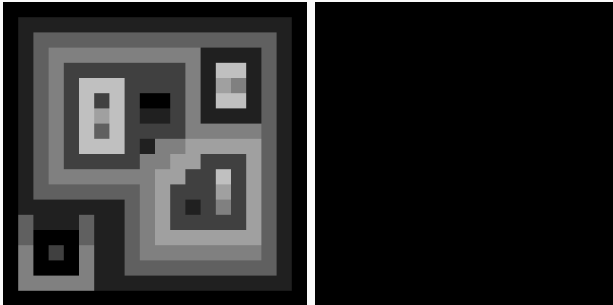
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Approche initiale : seuillage

Seuillages

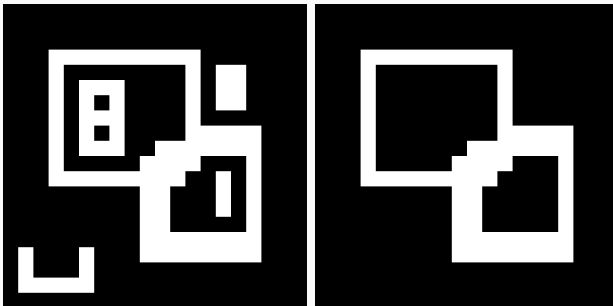
- $\Lambda_v^\circ(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs supérieures de \mathcal{F} à la valeur v (en blanc)
- $\Lambda_v^\bullet(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{U}$: seuillage par valeurs inférieures de \mathcal{F} à la valeur v (en noir)



Composantes connexes (CCs)

Composantes connexes d'un seuillage

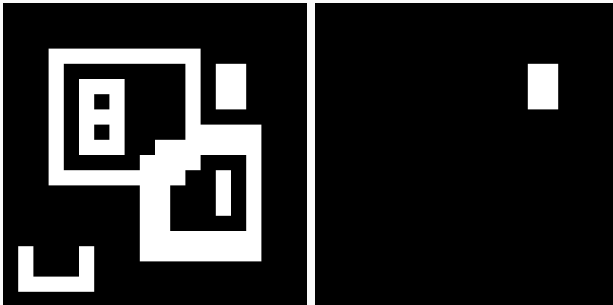
- $X \in 2^U$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^U$: l'ensemble des toutes les CCs \mathcal{F} pour toutes les valeurs v



Composantes connexes (CCs)

Composantes connexes d'un seuillage

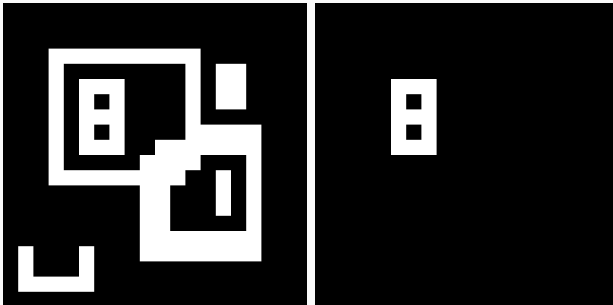
- $X \in 2^U$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^U$: l'ensemble des toutes les CCs \mathcal{F} pour toutes les valeurs v



Composantes connexes (CCs)

Composantes connexes d'un seuillage

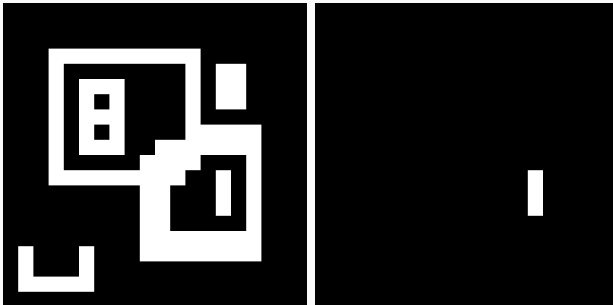
- $X \in 2^U$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^U$: l'ensemble des toutes les CCs \mathcal{F} pour toutes les valeurs v



Composantes connexes (CCs)

Composantes connexes d'un seuillage

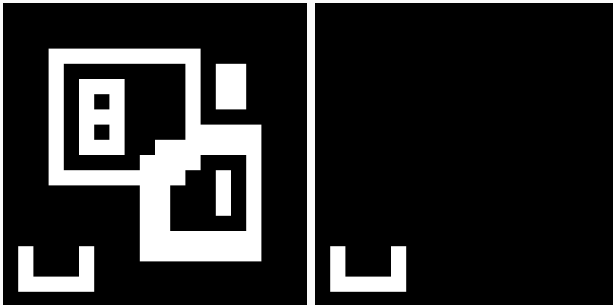
- $X \in 2^{\mathcal{U}}$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^{\mathcal{U}}$: l'ensemble des toutes les CCs \mathcal{F} pour toutes les valeurs v



Composantes connexes (CCs)

Composantes connexes d'un seuillage

- $X \in 2^{\mathcal{U}}$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^{\mathcal{U}}$: l'ensemble de toutes les CCs \mathcal{F} pour toutes les valeurs v



Arbre des composantes

Ordre sur Θ

Deux CCs $X, Y \in \Theta$ sont :

- soit disjointes : $X \cap Y = \emptyset$
- soit incluses l'une dans l'autre : $X \subseteq Y$

\implies L'ordre partiel \subseteq a une structure spécifique

\longrightarrow Son diagramme de Hasse est un **arbre**

Arbre des composantes

Ordre sur Θ

Deux CCs $X, Y \in \Theta$ sont :

- soit disjointes : $X \cap Y = \emptyset$
- soit incluses l'une dans l'autre : $X \subseteq Y$

\implies L'ordre partiel \subseteq a une structure spécifique

\longrightarrow Son diagramme de Hasse est un **arbre**

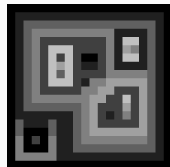
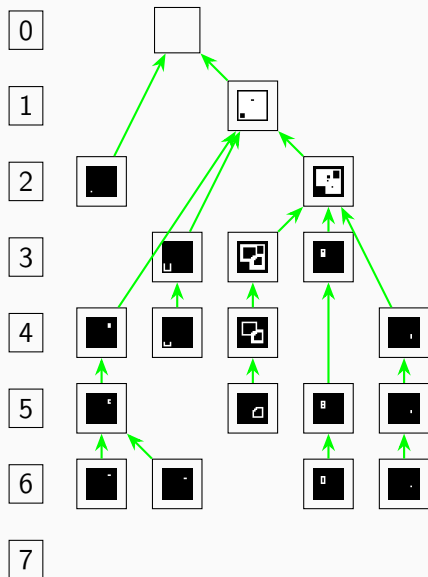
Arbre des composantes

Arbre des composantes = diagramme de Hasse de (Θ, \subseteq)

Si Θ est induit par

- seuillage par valeur supérieure \rightarrow max-tree
- seuillage par valeur inférieure \rightarrow min-tree

Arbre des composantes : Max-tree



Arbre des composantes : Min-tree

0

1

2

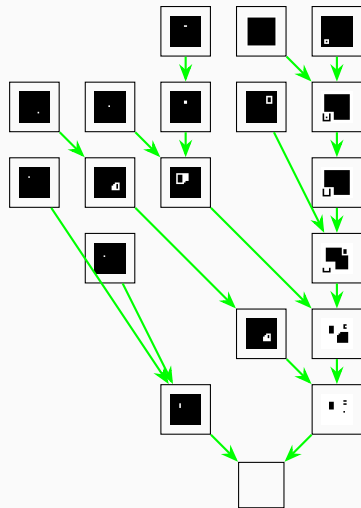
3

4

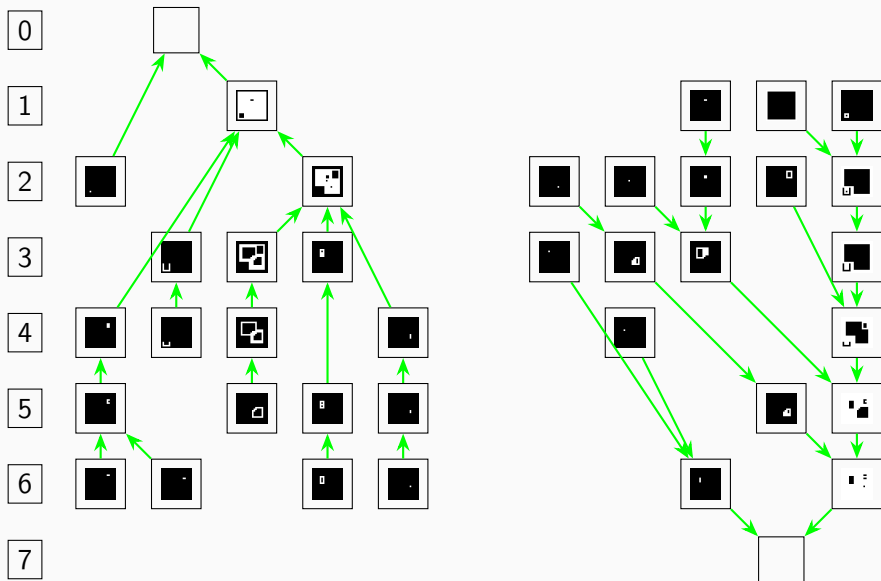
5

6

7



Arbre des composantes : Max-tree et Min-tree



Composantes connexes d'un seuillage

- $X \in 2^{\mathcal{U}}$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^{\mathcal{U}}$: l'ensemble de toutes les CCs de \mathcal{F} à toutes les valeurs v

On peut enrichir les CCs avec les valeurs auxquelles elles sont définies.

Composantes connexes valuées

Composantes connexes d'un seuillage

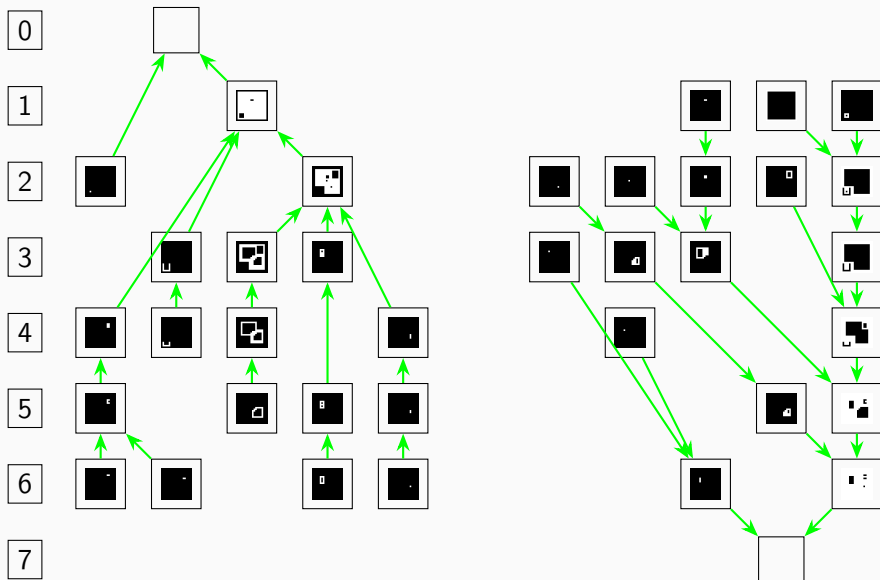
- $X \in 2^{\mathbb{U}}$: une CC de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Theta \subset 2^{\mathbb{U}}$: l'ensemble de toutes les CCs de \mathcal{F} à toutes les valeurs v

On peut enrichir les CCs avec les valeurs auxquelles elles sont définies.

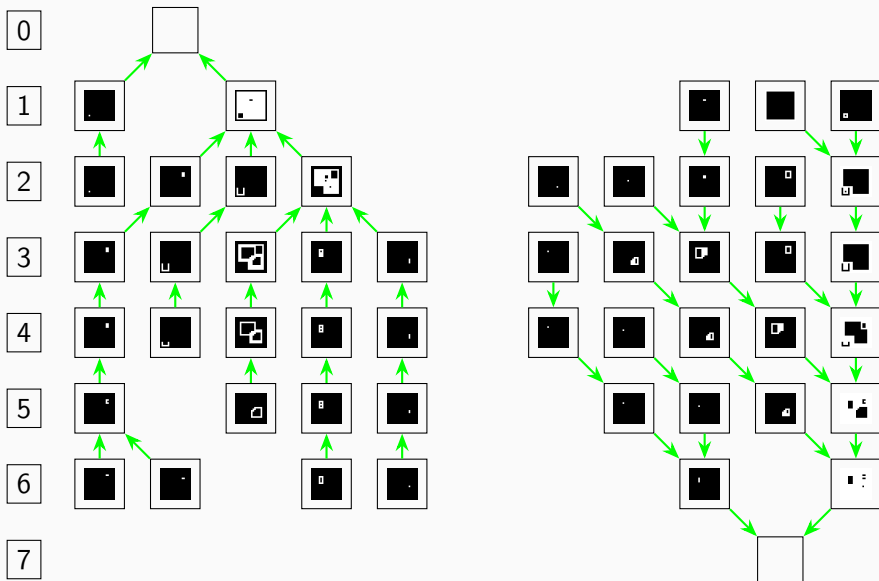
Composantes connexes **valuées** d'un seuillage

- $(X, v) \in 2^{\mathbb{U}} \times \mathbb{V}$: une CC **valuée** de \mathcal{F} à la valeur v
- $\Xi \subset 2^{\mathbb{U}} \times \mathbb{V}$: l'ensemble de toutes les CCs **valuées** de \mathcal{F} à toutes les valeurs v

Arbre des composantes : Max-tree et Min-tree



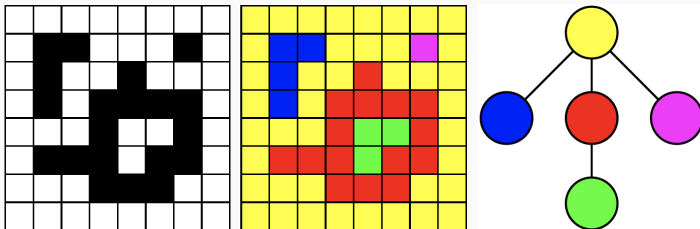
Arbre des composantes valué : Max-tree et Min-tree valués



Arbre d'adjacence : un descripteur topologique pour les images binaires

Arbre d'adjacence

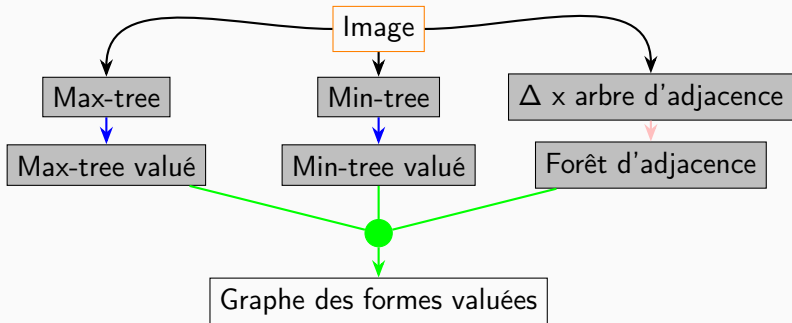
- $B \subseteq \mathbb{U}$ le *foreground* d'une image binaire et $\bar{B} = \mathbb{U} \setminus B$
- Θ_B les CCs de B et de \bar{B}
- \sqsubseteq^ψ la relation d'ordre "embriqué" sur Θ_B
 $X \sqsubseteq^\psi Y \Leftrightarrow \tau(X) \subseteq \tau(Y)$, τ l'opérateur de "fermeture de trou"
- Arbre d'adjacence de $B =$ diagramme de Hasse de $(\Theta_B, \sqsubseteq^\psi)$



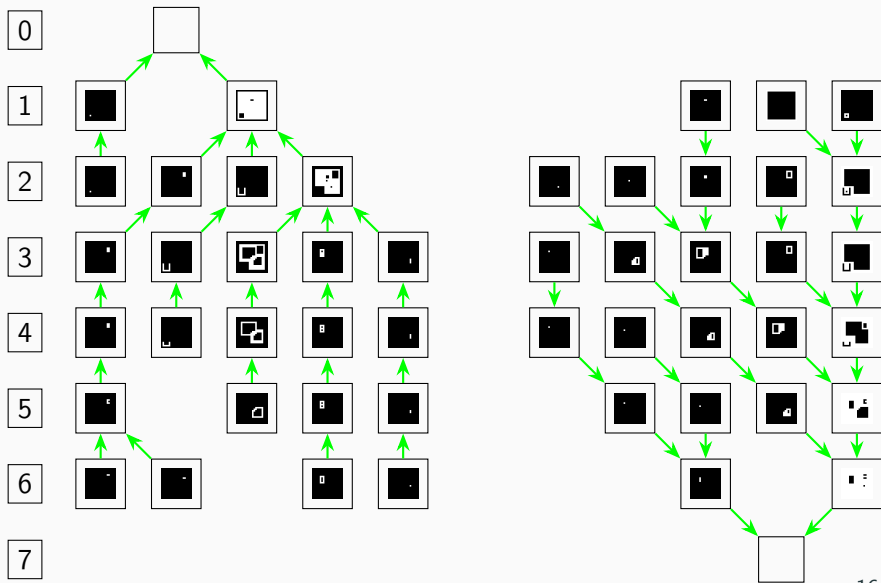
Approche initiale : Graphe des formes valué

Graphe des formes valué : lier min-tree et max-tree valués

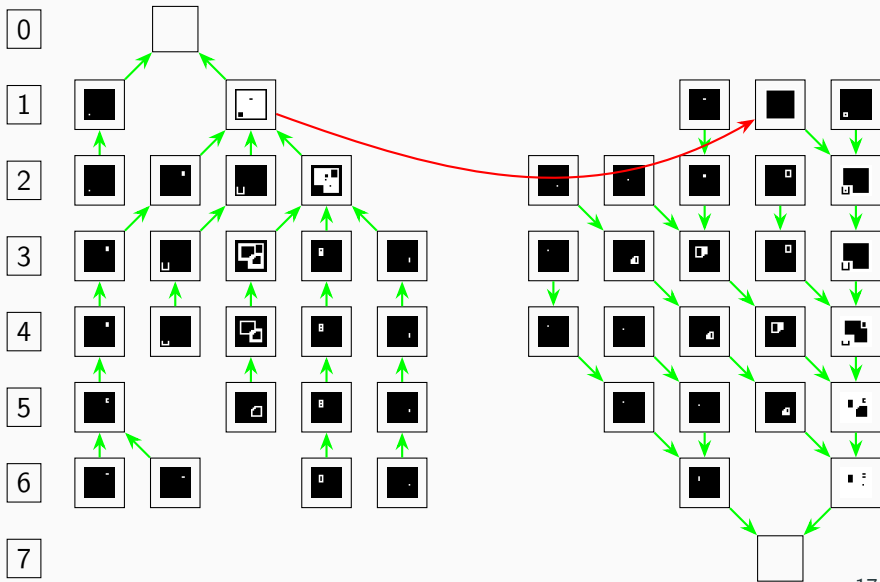
- grâce à l'arbre d'adjacence
- pour chaque image binaire
- pour chacun des seuillages de \mathcal{F}



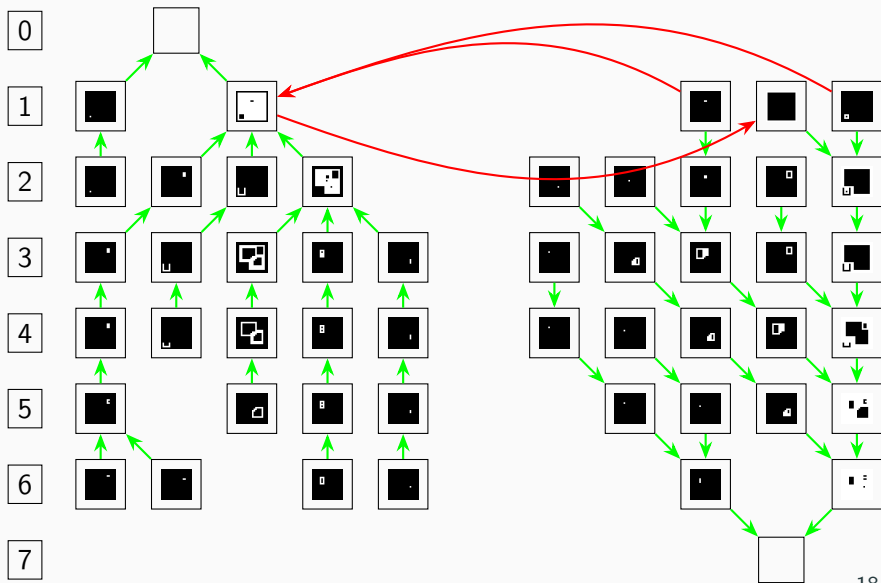
Min-tree valué + Max-tree valué



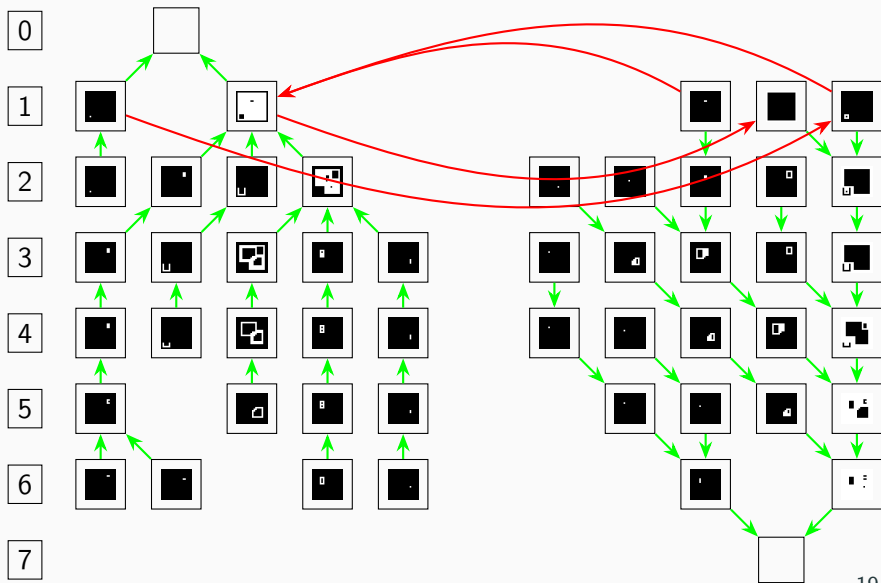
Min-tree valué + Max-tree valué + 1 arbre d'adjacence



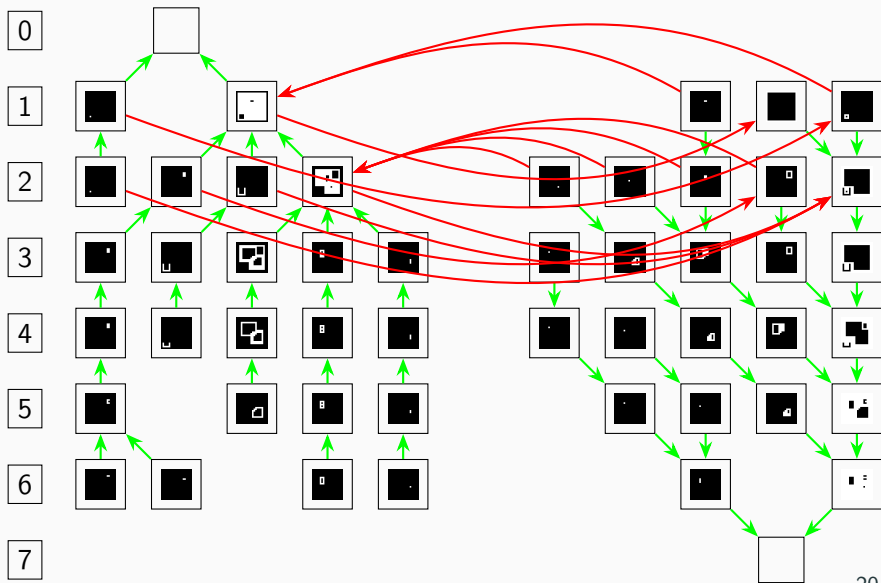
Min-tree valué + Max-tree valué + 1 arbre d'adjacence



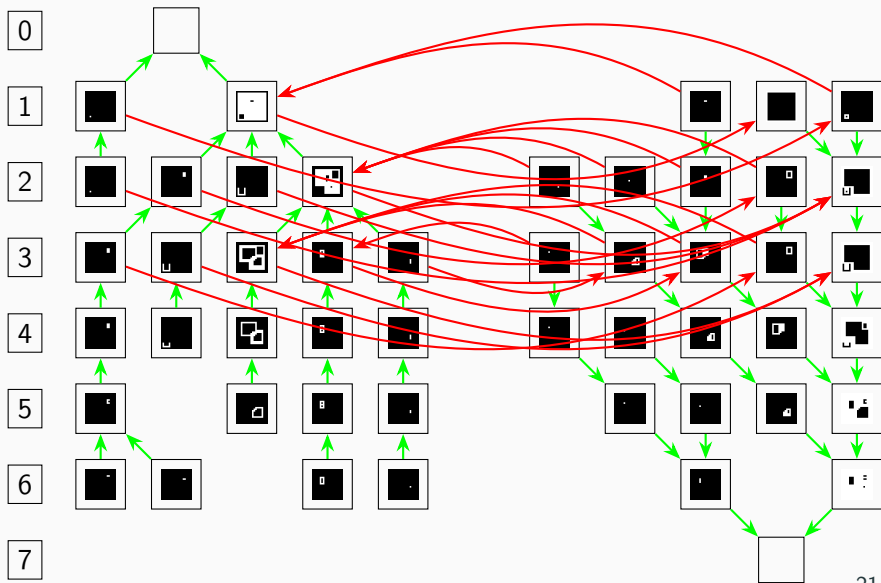
Min-tree valué + Max-tree valué + 1 arbre d'adjacence



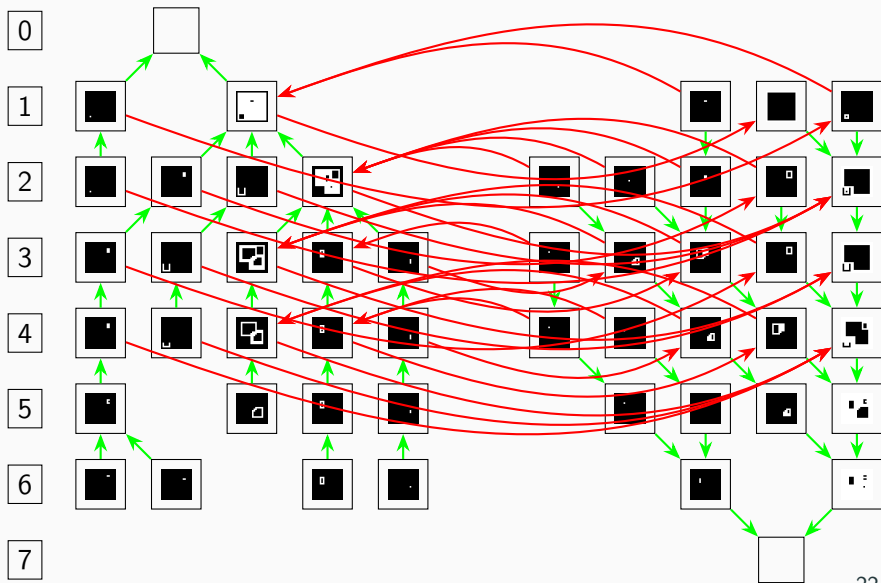
Min-tree valué + Max-tree valué + 2 arbres d'adjacence



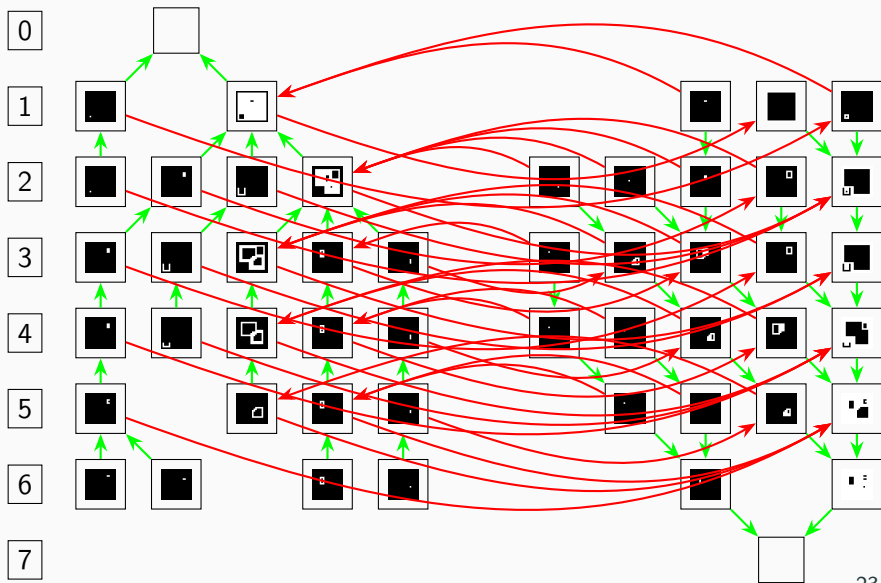
Min-tree valué + Max-tree valué + 3 arbres d'adjacence



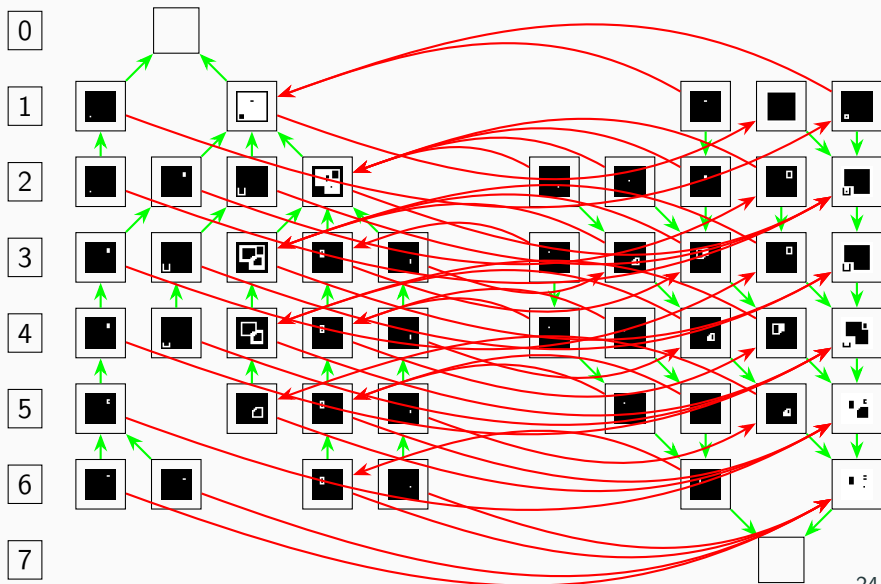
Min-tree valué + Max-tree valué + 4 arbres d'adjacence



Min-tree valué + Max-tree valué + 5 arbres d'adjacence



Min-tree valué + Max-tree valué + \sum arbres d'adjacence



Structure du Graphe des formes valué

Graphe des formes valué : $(\Xi, \triangleleft_{\Xi})$

avec

- Ξ = les CC valuées des min-tree et max-tree
- \triangleleft^{φ} les arcs des min-tree et max-tree
- \triangleleft^{ψ} les arcs des arbres d'adjacence
- \triangleleft_{Ξ} l'union de \triangleleft^{φ} et \triangleleft^{ψ}

Arcs redondants

$$\psi(P) \xleftarrow{\text{red}} P \xrightarrow{\text{green}} \varphi(P)$$

Si deux arcs existent, exactement l'un des deux est redondant par transitivité

Arcs redondants

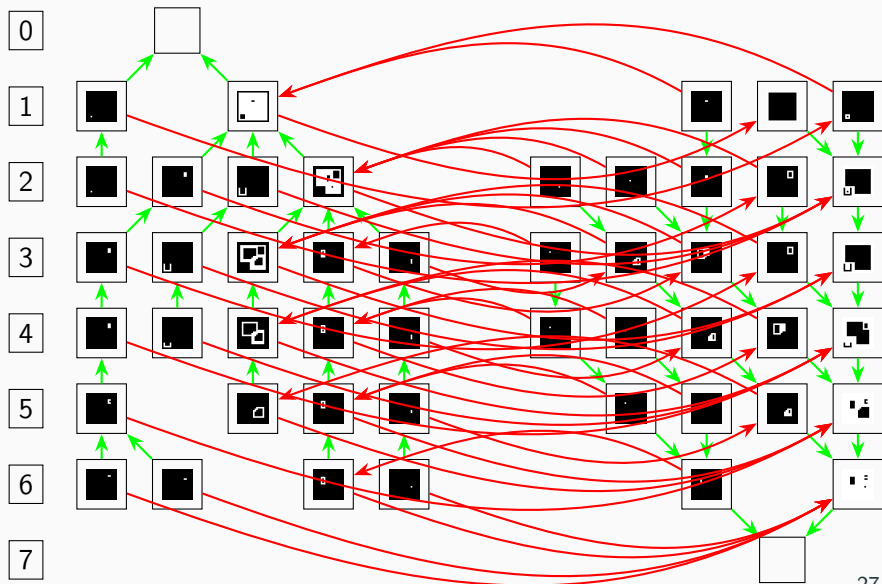
$$\psi(P) \xleftarrow{\text{red}} P \xrightarrow{\text{green}} \varphi(P)$$

Si deux arcs existent, exactement l'un des deux est redondant par transitivité

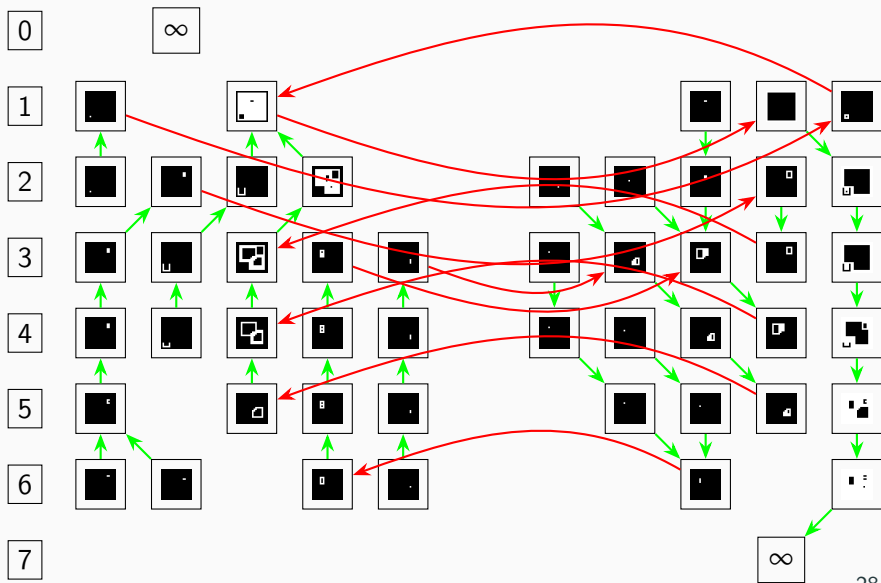
Trois configurations

1. Si $\psi(P) = [\varphi \circ \psi \circ \varphi](P)$ alors $\psi(P) \xleftarrow{\text{red}} P$ est supprimé
2. Si $\varphi(P) = [\varphi \circ \psi \circ \psi](P)$ alors $P \xrightarrow{\text{green}} \varphi(P)$ est supprimé
3. Si $\varphi(P) = [\varphi^{|\mathbb{V}|-2} \circ \psi](P)$ alors $P \xrightarrow{\text{green}} \varphi(P)$ est supprimé

Réduction transitive : avant



Réduction transitive : après



Nœuds à supports identiques

$P = (X, v)$, $Q = (Y, w)$ deux nœuds de Ξ

Si $P \neq Q$, 2 cas :

- $X \neq Y$
- $X = Y$ mais $v \neq w$

Compression spatiale : L'arbre complet des formes

Nœuds à supports identiques

$P = (X, v)$, $Q = (Y, w)$ deux nœuds de Ξ

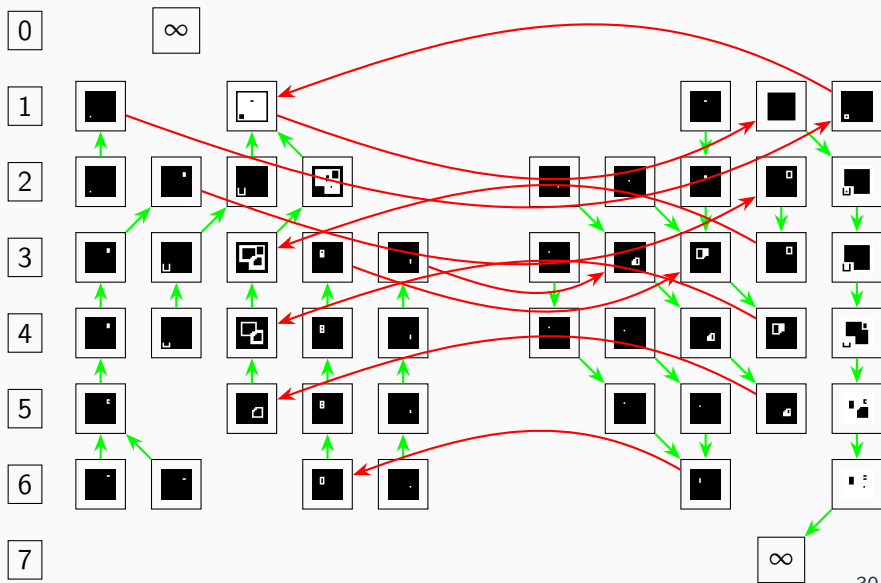
Si $P \neq Q$, 2 cas :

- $X \neq Y$
- $X = Y$ mais $v \neq w$

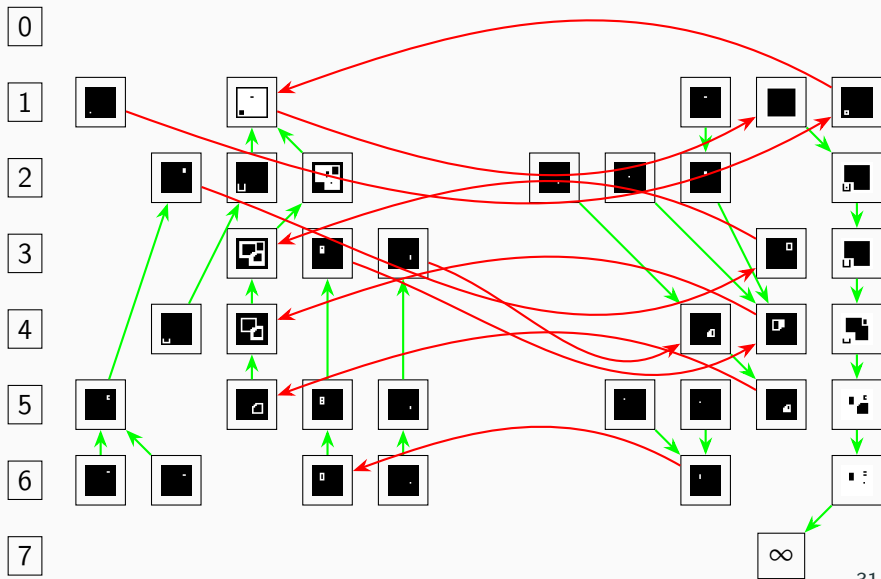
Classes d'équivalence de nœuds

- Relation d'équivalence : $P \sim_{\Theta} Q \iff X = Y$
- Bijection $\tilde{\pi}_{\Theta}$ entre Ξ/\sim_{Θ} et Θ
- $\tilde{\pi}_{\Theta}$ induit un homéomorphisme entre l'arbre des formes valué $(\Xi, \blacktriangleleft_{\Xi})$ et un autre arbre $(\Theta, \blacktriangleleft_{\Theta})$
- Cet arbre $(\Theta, \blacktriangleleft_{\Theta})$ est appelé l'Arbre complet des formes
- $(\Theta, \blacktriangleleft_{\Theta})$ est une compression sans perte de $(\Xi, \blacktriangleleft_{\Xi})$

De l'arbre des formes valué à l'arbre complet des formes



De l'arbre des formes valué à l'arbre complet des formes



Strong deletability (Ronse 1986)

$X, D \subseteq \mathbb{U}$. $Y = X \setminus D \subseteq \mathbb{U}$.

D est *strongly deletable* (dans X) si \subseteq induit :

- une bijection entre les CCs de Y et les CCs de X
- une bijection entre les CCs de $\mathbb{U} \setminus X$ et les CCs de $\mathbb{U} \setminus Y$

Relation basée sur la *strong deletability*

$Q \rightsquigarrow P$ si

Strong deletability (Ronse 1986)

$X, D \subseteq \mathbb{U}$. $Y = X \setminus D \subseteq \mathbb{U}$.

D est *strongly deletable* (dans X) si \subseteq induit :

- une bijection entre les CCs de Y et les CCs de X
- une bijection entre les CCs de $\mathbb{U} \setminus X$ et les CCs de $\mathbb{U} \setminus Y$

Relation basée sur la *strong deletability*

$Q \succcurlyeq P$ si

- $P \xrightarrow{\text{green}} Q$

Strong deletability (Ronse 1986)

$X, D \subseteq \mathbb{U}$. $Y = X \setminus D \subseteq \mathbb{U}$.

D est *strongly deletable* (dans X) si \subseteq induit :

- une bijection entre les CCs de Y et les CCs de X
- une bijection entre les CCs de $\mathbb{U} \setminus X$ et les CCs de $\mathbb{U} \setminus Y$

Relation basée sur la *strong deletability*

$Q \rightsquigarrow P$ si

- $P \xrightarrow{\text{green}} Q$
- P est unique (encodé dans le graphe des formes valué)

Strong deletability (Ronse 1986)

$X, D \subseteq \mathbb{U}$. $Y = X \setminus D \subseteq \mathbb{U}$.

D est *strongly deletable* (dans X) si \subseteq induit :

- une bijection entre les CCs de Y et les CCs de X
- une bijection entre les CCs de $\mathbb{U} \setminus X$ et les CCs de $\mathbb{U} \setminus Y$

Relation basée sur la *strong deletability*

$Q \succcurlyeq P$ si

- $P \xrightarrow{\text{green}} Q$
- P est unique (encodé dans le graphe des formes valué)
- $Q \setminus P$ est *strongly deletable*

Relation d'équivalence

On définit la relation d'équivalence topologique \sim_H sur Ξ comme la fermeture réflexive, transitive, symétrique de \sphericalangle

Arbre topologique des formes

- $H = \Xi / \sim_H$

Relation d'équivalence

On définit la relation d'équivalence topologique \sim_H sur Ξ comme la fermeture réflexive, transitive, symétrique de \sphericalangle

Arbre topologique des formes

- $H = \Xi / \sim_H$
- \blacktriangleleft_H : la relation sur H induite par \blacktriangleleft_Ξ sur Ξ relativement à \sim_H

Relation d'équivalence

On définit la relation d'équivalence topologique \sim_H sur Ξ comme la fermeture réflexive, transitive, symétrique de \sphericalangle

Arbre topologique des formes

- $H = \Xi / \sim_H$
- \blacktriangleleft_H : la relation sur H induite par \blacktriangleleft_Ξ sur Ξ relativement à \sim_H
- $(H, \blacktriangleleft_H)$ est un arbre, appelé arbre topologique des formes

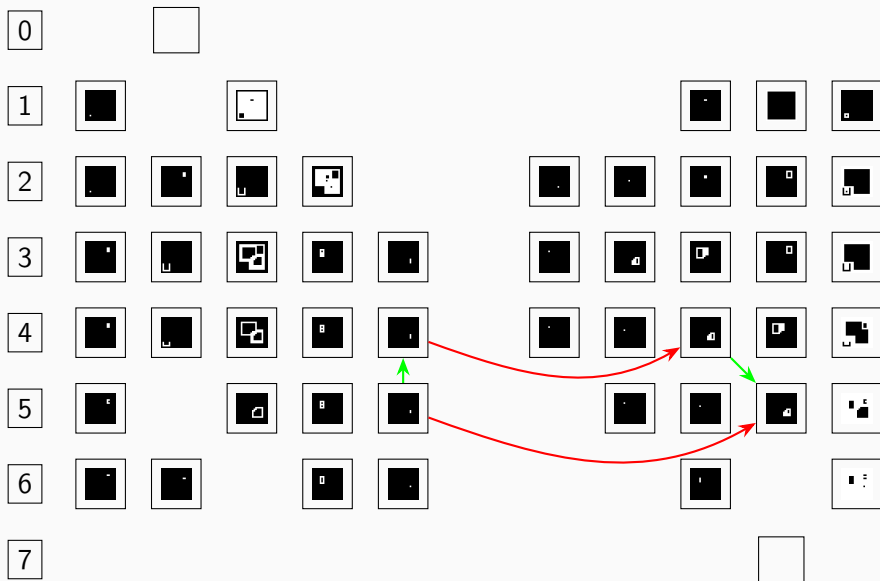
Relation d'équivalence

On définit la relation d'équivalence topologique \sim_H sur Ξ comme la fermeture réflexive, transitive, symétrique de \sphericalangle

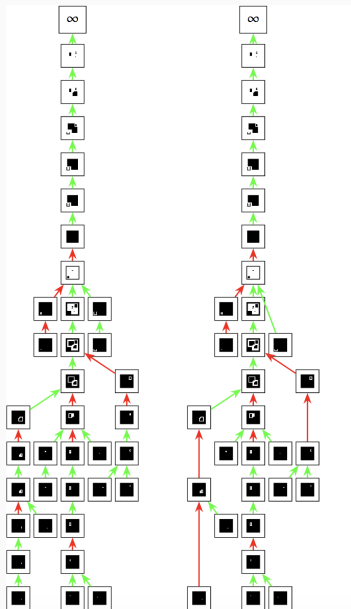
Arbre topologique des formes

- $H = \Xi / \sim_H$
- \blacktriangleleft_H : la relation sur H induite par \blacktriangleleft_Ξ sur Ξ relativement à \sim_H
- $(H, \blacktriangleleft_H)$ est un arbre, appelé arbre topologique des formes
- $(H, \blacktriangleleft_\Theta)$ est une compression avec perte de $(\Xi, \blacktriangleleft_\Xi)$

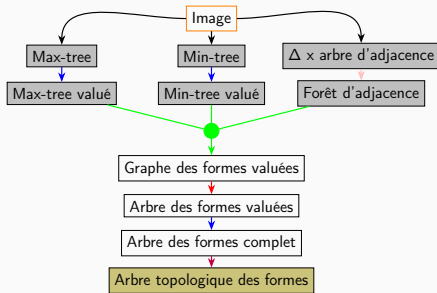
Compression topologique : Arbre des formes topologique



Arbre topologique des formes



Coûts et méthodes de construction

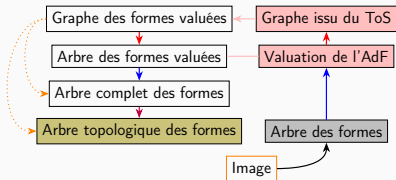
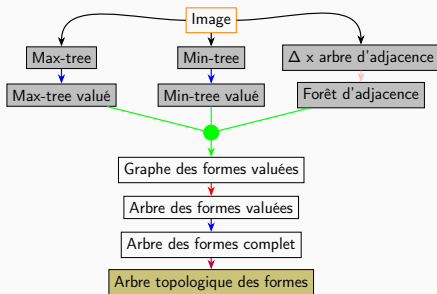


Coûts algorithmiques

- Graphe des formes valuées : $\mathcal{O}(n.(\log n + \Delta))$
- Arbre des formes valuées : $\mathcal{O}(n.\delta)$
- AdFC : $\mathcal{O}(n)$
- ATdF : $\mathcal{O}(n.\partial^-(\psi))$
- Complexité théorique globale : $\mathcal{O}(n.(\log n + \Delta + \partial^-(\psi)))$

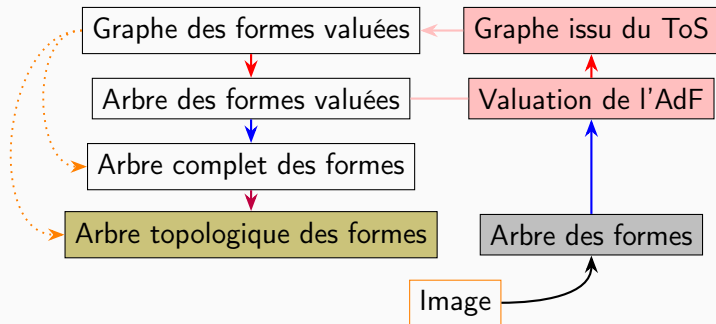
Motivations

- Le calcul de la forêt d'adjacence est coûteux : $\mathcal{O}(n)$ pour chacun des niveaux de gris de l'image.
- Stratégie alternative : construction à partir de l'arbre des formes.



L'Arbre Topologique des Formes : approche alternative

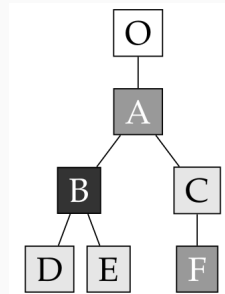
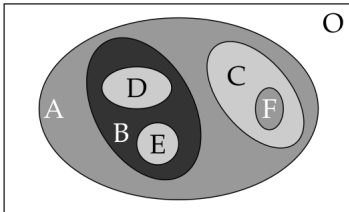
Arbre topologique des formes : à partir de l'Arbre des formes



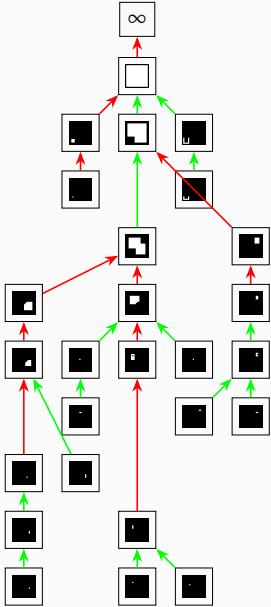
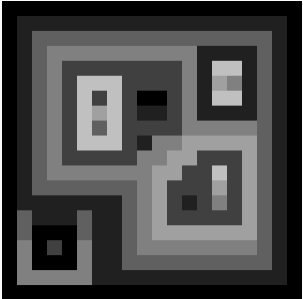
L'Arbre des formes

Arbre des formes (Monasse et al., 2000)

- $\Theta^\tau = \tau(\Theta)$
- Ξ_{Θ^τ} l'ordre sur Θ^τ tel que $X \Xi_{\Theta^\tau} Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$
- $\triangleleft_{\Theta^\tau}$ est la réduction transitive réflexive de Ξ_{Θ^τ}
- L'arbre $(\Theta^\tau, \triangleleft_{\Theta^\tau})$ est appelé l'Arbre des formes



Arbre des formes



Comme pour les min-tree et max-tree, on enrichit les CCs avec les valeurs auxquelles elles sont définies.

Formes valuées de l'arbre des formes

- $\Xi^T \subset 2^{\mathbb{U}} \times \mathbb{V}$: l'ensemble de toutes les formes **valuées** de \mathcal{F} à toutes les valeurs v
- $(\Xi^T, \triangleleft_{\Xi^T})$ est l'arbre correspondant à cette valuation

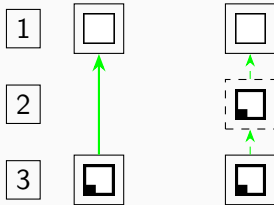
Valuation de l'Arbre des formes : algorithme

Algorithme 1 : De $(\Theta, \triangleleft_{\Theta^{\tau}})$ à $(\Xi, \triangleleft_{\Xi^{\tau}})$

Input : $(\Theta, \triangleleft_{\Theta^{\tau}})$

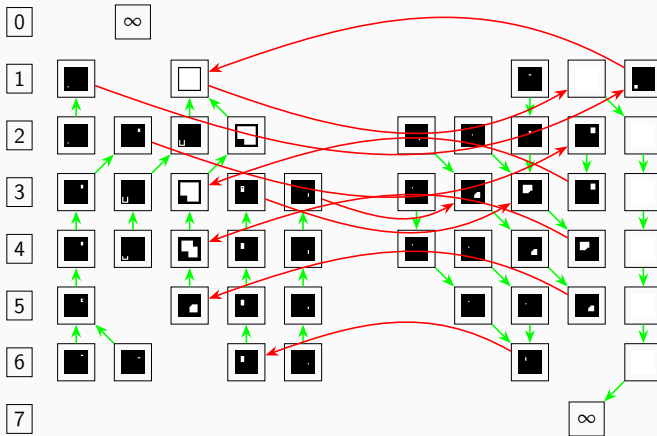
Output : $(\Xi, \triangleleft_{\Xi^{\tau}})$

```
1  $\Xi := \emptyset$ 
2  $\triangleleft_{\Xi} := \emptyset$ 
3 foreach  $X \in \Theta$  do
4   foreach  $v \in \mathbb{I}_X^{\Theta}$  do
5      $\Xi \leftarrow (X, v)$ 
6     if  $v \neq \omega_X^{\Theta}$  then
7        $\triangleleft_{\Xi} \leftarrow ((X, \sigma^{\square}(v)), (X, v))$ 
8     if  $v = \alpha_X^{\Theta}$  and  $X \neq \mathbb{U}$  then
9        $Y := \zeta_{\triangleleft_{\Theta}}(X)$ 
10       $\triangleleft_{\Xi} \leftarrow ((X, \alpha_X^{\Theta}), (Y, \omega_Y^{\Theta}))$ 
```



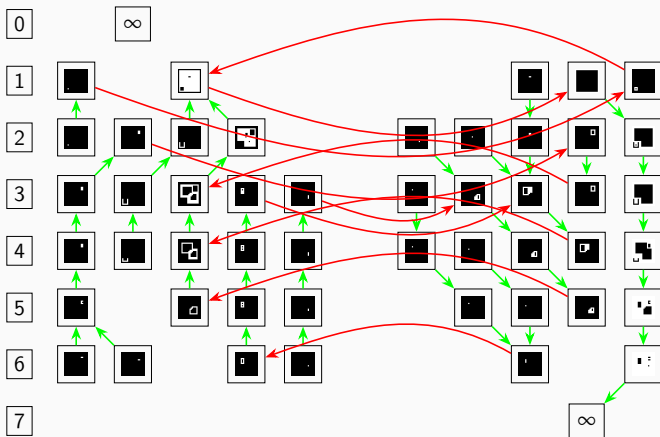
Valuation de l'arbre des formes

Cette valuation donne un arbre isomorphe à l'arbre des formes valuées. On obtient la **structure** de l'arbre des formes valuées.



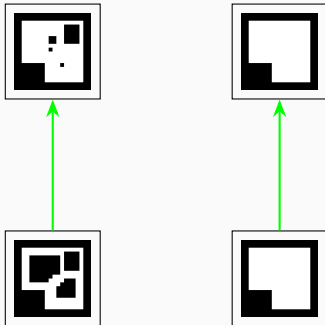
Valuation de l'arbre des formes et Arbre des formes valuées

Cette valuation donne un arbre isomorphe à l'arbre des formes valuées. On obtient la **structure** de l'arbre des formes valuées.



Différences

L'information portée par les noeuds n'est pas la même.



Enrichissement de l'information

La valuation de l'arbre des formes ne donne pas assez d'information pour calculer l'ATdF.

Enrichissement par les configurations transitives du GdFV

1. Si $\varphi(P)$ existe alors $\psi(P) = [\varphi \circ \psi \circ \varphi](P)$ est ajouté
2. Si $\psi(P)$ existe alors $\varphi(P) = [\varphi \circ \psi \circ \psi](P)$ est ajouté
3. Si $\psi(P)$ existe et est une composante du fond infini,
 $\varphi(P) = [\varphi^{|\mathbb{V}|-2} \circ \psi](P)$ est ajouté

Graphe isomorphe au GdFV, pour chaque nœud...

- Au plus un $Q \in \Xi^T$ tel que $P \triangleleft^\varphi Q$
→ "parent" $Q = \varphi(P)$ de P
- Au plus un $R \in \Xi^T$ tel que $P \triangleleft^\psi R$
→ "parent" $R = \psi(P)$ de P

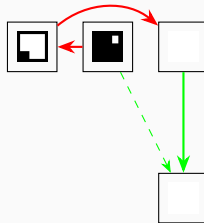
Algorithme d'enrichissement

Algorithme 2 : De $(\Xi, \triangleleft_{\Xi})$ à $(\Xi, \blacktriangleleft_{\Xi})$

Input : $(\Xi, \triangleleft_{\Xi})$

Output : $\blacktriangleleft_{\Xi} = (\varphi, \psi)$

```
1  $\blacktriangleleft_{\Xi} := \triangleleft_{\Xi}$ 
2  $\mathcal{L} := \{\infty\}$ 
3 while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  do
4    $\mathcal{L} \rightarrow P = (X, v)$ 
5   if  $P \neq \infty$  then
6      $Q = (Y, w) := \zeta_{\triangleleft_{\Xi}}(P)$ 
7     if  $v = w$ , i.e.  $(P, Q) \in \psi$  then
8        $\blacktriangleleft_{\Xi} \leftarrow (P, [\varphi \circ \psi \circ \psi](P)) \in \varphi$ 
9     else
10      if  $\psi(Q)$  exists then
11         $\blacktriangleleft_{\Xi} \leftarrow (P, [\varphi \circ \psi \circ \varphi](P)) \in \psi$ 
12    foreach  $R \in Z_{\triangleleft_{\Xi}}(P)$  do
13       $\mathcal{L} \leftarrow R$ 
```



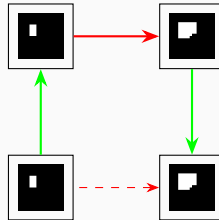
Algorithme d'enrichissement

Algorithme 2 : De $(\Xi, \triangleleft_{\Xi})$ à $(\Xi, \blacktriangleleft_{\Xi})$

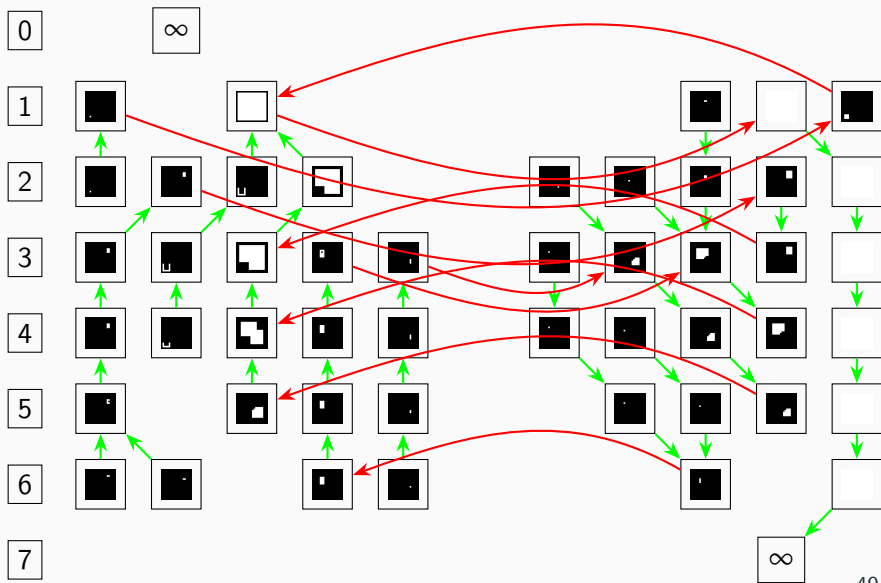
Input : $(\Xi, \triangleleft_{\Xi})$

Output : $\blacktriangleleft_{\Xi} = (\varphi, \psi)$

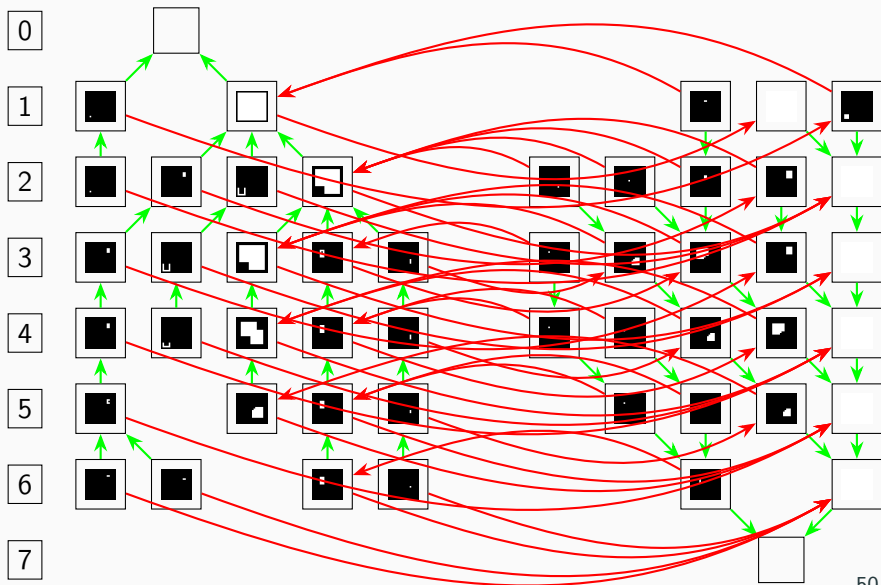
```
1  $\blacktriangleleft_{\Xi} := \triangleleft_{\Xi}$ 
2  $\mathcal{L} := \{\infty\}$ 
3 while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  do
4    $\mathcal{L} \rightarrow P = (X, v)$ 
5   if  $P \neq \infty$  then
6      $Q = (Y, w) := \zeta_{\triangleleft_{\Xi}}(P)$ 
7     if  $v = w$ , i.e.  $(P, Q) \in \psi$  then
8        $\blacktriangleleft_{\Xi} \leftarrow (P, [\varphi \circ \psi \circ \psi](P)) \in \varphi$ 
9     else
10      if  $\psi(Q)$  exists then
11         $\blacktriangleleft_{\Xi} \leftarrow (P, [\varphi \circ \psi \circ \varphi](P)) \in \psi$ 
12    foreach  $R \in Z_{\triangleleft_{\Xi}}(P)$  do
13       $\mathcal{L} \leftarrow R$ 
```



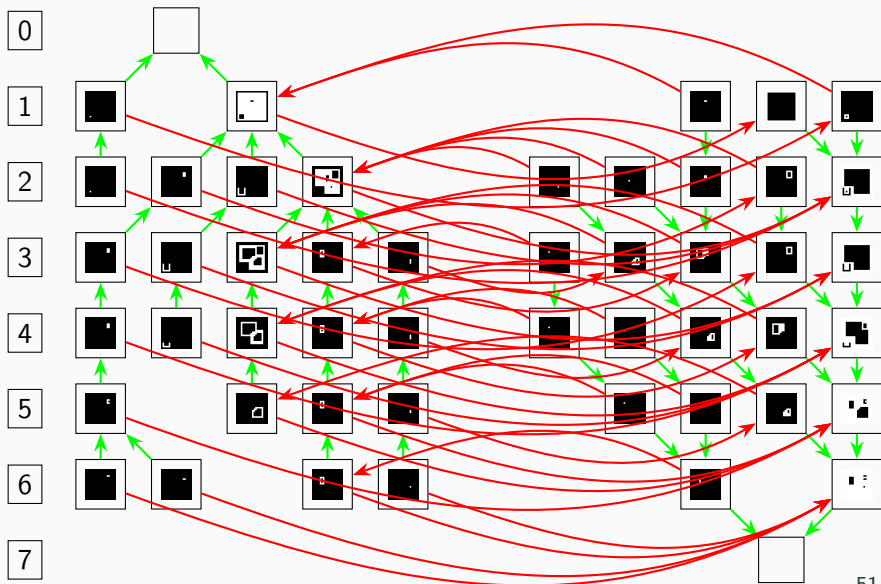
Enrichissement de la valuation de l'AdF



Enrichissement de la valuation de l'AdF

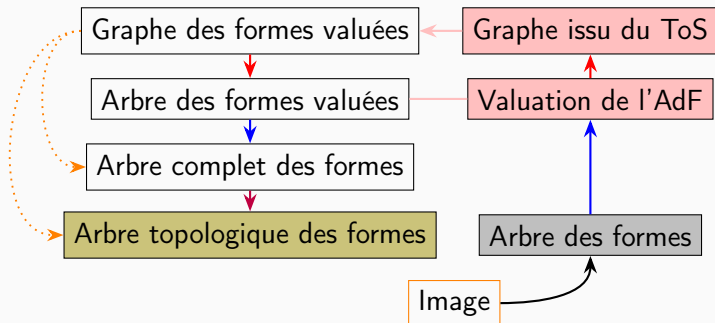


Enrichissement de la valuation de l'AdF



Construction

On dispose maintenant de suffisamment d'information pour construire l'ATdF, de la même manière que dans l'approche initiale.



Coûts algorithmiques

- AdF + valuation : $\mathcal{O}(n.(\log n + \delta))$
- Enrichissement : $\mathcal{O}(n.\delta)$
- Complexité globale : $\mathcal{O}(n.(\log n + \delta + \partial^-(\psi)))$

À comparer avec $\mathcal{O}(n.(\log n + \Delta + \partial^-(\psi)))$

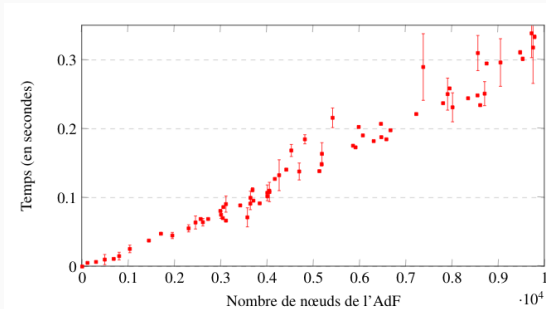
Perspectives et conclusion

Analyse de la complexité

Complexité théorique

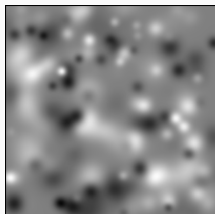
La complexité temporelle théorique est $\mathcal{O}(n \cdot (\log n + \delta + \partial^-(\psi)))$, avec n le **nombre de pixels**, δ la **rémanence moyenne** des nœuds et $\partial^-(\psi)$ le **degré entrant maximum** des arcs issus de la forêt d'adjacence.

Complexité expérimentale : légèrement **super-linéaire** par rapport au nombre de nœuds de l'Arbre des formes.

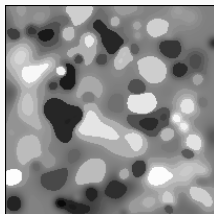


Application : filtrage d'images

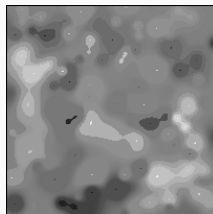
Plusieurs stratégies de reconstruction d'image sont possibles depuis l'arbre topologique des formes. Elles préservent la topologie de l'image.



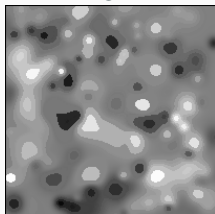
Original



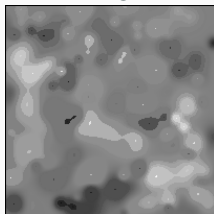
Filtrage 1



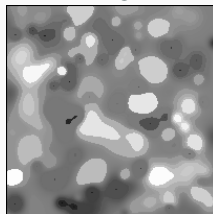
Filtrage 2



Filtrage 3



Filtrage 4



Filtrage 5

Conclusion

L'arbre topologique des formes décrit des images en niveaux de gris.

Contributions

- Définition d'un algorithme de construction plus rapide, basé sur une structure connue de la MM
- (Calcul de complexité théorique et estimation expérimentale)
- (Application au filtrage)

Perspectives

- Optimisation algorithmique : factorisation des nœuds/arcs
- 3D : l'arbre des composantes ne voit pas les tunnels
- Débruitage topologique

Merci de votre attention !