



**HAL**  
open science

## Cardinal, mais qu'est-ce donc cette diablerie ?

Olivier Rioul, Victor Rabiet

► **To cite this version:**

| Olivier Rioul, Victor Rabiet. Cardinal, mais qu'est-ce donc cette diablerie ?. 2023. hal-04153823

**HAL Id: hal-04153823**

**<https://hal.science/hal-04153823v1>**

Submitted on 6 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Cardinal, mais qu'est-ce donc cette diablerie?

Olivier Rioul et Victor Rabiet

Connaissez-vous la *fonction cardinale* de Whittaker père et fils<sup>1</sup>? ...baptisée ainsi, car considérée comme une fonction essentielle. On a fait dire à Whittaker<sup>2</sup> que cette fonction est...

« une fonction de sang royal, dont les propriétés distinguées la séparent de ses frères bourgeois »

**1. Introduction and Summary.** The Whittaker cardinal function was discovered by E. T. Whittaker [1], who wanted to know whether there exists in the class of all functions which take on the same values at the set of points  $A = \{kh\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ,  $h > 0$ , “a function of royal blood whose distinguished properties set it apart from its bourgeois brethren”. This function then played a fundamental role in the development of the theory of central difference processes, a theory which was also originated by E. T. Whittaker [1]. Somewhat later J. M. Whittaker and his co-workers [2], [3]

FIGURE 1 – Extrait de l'article “Whittaker’s Cardinal Function in Retrospect,” par J. McNamee, F. Stenger and E. L. Whitney, *Mathematics of Computation*, 1971.

On la connaît aujourd’hui principalement sous le nom de *sinus cardinal* (en abrégé « sinc ») à cause de la fonction sinus intervenant dans sa définition. Il s’agit en effet de la fonction

$$\frac{\sin x}{x}$$

qui est bien connue aujourd’hui dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, sans oublier les sciences de l’ingénieur : analyse de Fourier, optique ondulatoire, traitement du signal ; elle a aussi des liens avec l’analyse complexe et les fonctions zêta et gamma. Le résultat emblématique qui fait intervenir le fameux et glorieux *sinus cardinal* est aujourd’hui connu sous le nom de *théorème d’échantillonnage*. C’est Whittaker père qui a donné l’essentiel de la preuve sous forme de théorème d’interpolation et Whittaker fils qui a poursuivi et amélioré ses travaux.

---

1. Sir Edmund Taylor Whittaker (1873–1956) et son fils John Macnaghten Whittaker (1905–1984).

2. Citation apocryphe probablement due à John McNamee dans les années 1960.

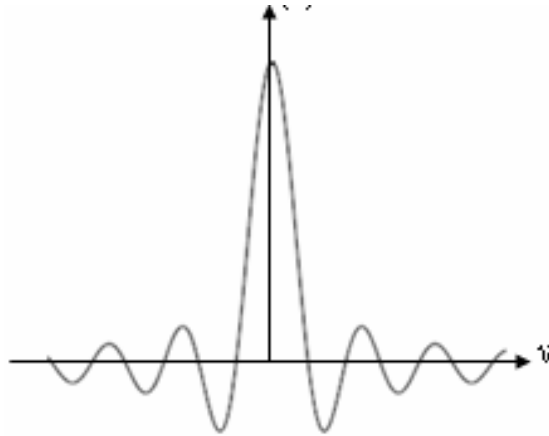


FIGURE 2 – La fonction sinus cardinal.

## 1 L'intégrale de Dirichlet

Mais le sinus cardinal recèle de nombreux trésors et curiosités. À commencer par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

parfois appelée *intégrale de Dirichlet* (nous verrons plus tard comment la calculer).

**On sait que l'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{\sin \gamma}{\delta \gamma} \delta \gamma$  a une valeur finie et égale à  $\frac{\pi}{2}$ .**

**Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis  $\gamma = 0$  jusqu'à  $\gamma = \pi$ , la seconde depuis  $\gamma = \pi$  jusqu'à  $\gamma = 2\pi$ , et ainsi de suite. Ces nouvelles intégrales sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles a une valeur numérique inférieure à celle de la précédente, et celle du rang  $\nu$  est  $k_\nu$ , abstraction faite du signe. La proposition qu'on vient de citer, revient donc à dire que la suite infinie**

$$(2.) \quad k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - \text{etc.}$$

**est convergente et a une somme égale à  $\frac{\pi}{2}$ .**

FIGURE 3 – Extrait de l'article de *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* de Gustav Lejeune-Dirichlet, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1829).

## Une démonstration élémentaire de la convergence de l'intégrale de Dirichlet

Par la formule  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$  et intégration par parties (ce qui est licite pour les bornes infinies)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x} dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin^2 \frac{x}{2})'}{x} dx \\ &= -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)' \sin^2 \frac{x}{2} dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx\end{aligned}$$

On obtient formule remarquable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

où le sinus cardinal est de carré intégrable (au sens usuel). Le second membre étant bien défini, en remontant les calculs, le premier l'est aussi.

L'intégrale de Dirichlet est l'exemple type d'intégrale semi-convergente, qui n'est pas absolument convergente. À noter que cette intégrale n'existe pas directement au sens de la théorie usuelle de l'intégration de Riemann, ni même de celle de Lebesgue (on parle d'intégrale « impropre »). En effet, pour ces théories classiques, « intégrable » signifie « absolument intégrable », et le sinus cardinal ne l'est pas. Cette intégrale existe de manière propre, en revanche, dans une théorie plus générale de l'intégration, au sens de Kurzweil-Henstock, de Perron ou de Denjoy, par exemple.

## 2 Les intégrales de Borwein : une généralisation de l'intégrale de Dirichlet ?

Partant de l'égalité  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ , intéressons-nous à la suite des intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} dx$ , etc. où à chaque étape on incorpore un nouveau sinus cardinal sous l'intégrale. En calculant les premières valeurs, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \frac{\sin(x/7)}{x/7} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \frac{\sin(x/7)}{x/7} \frac{\sin(x/9)}{x/9} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \frac{\sin(x/7)}{x/7} \frac{\sin(x/9)}{x/9} \frac{\sin(x/11)}{x/11} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \frac{\sin(x/7)}{x/7} \frac{\sin(x/9)}{x/9} \frac{\sin(x/11)}{x/11} \frac{\sin(x/13)}{x/13} dx &= \pi \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} \frac{\sin(x/7)}{x/7} \frac{\sin(x/9)}{x/9} \frac{\sin(x/11)}{x/11} \frac{\sin(x/13)}{x/13} \frac{\sin(x/15)}{x/15} dx &= ? \end{aligned}$$

Intuitivement, on a envie de dire que ce ne peut pas être un hasard, et qu'il y a là une formule générale. Toutes ces intégrales ne peuvent pas valoir autre chose que  $\pi$ . Deux solutions s'offrent à nous :

- prendre son courage à deux mains et chercher sans attendre une démonstration générale (on cherche toujours!)
- calculer de plus en plus de termes à l'aide de logiciels de calcul formel, pour affermir sa croyance avant de poursuivre (à condition que le logiciel soit fiable!)

Pour cette deuxième solution, on peut par exemple utiliser le logiciel *Sage* en allant sur la page <https://sagecell.sagemath.org> et en tapant les instructions suivantes pour vérifier les premières valeurs :

```
from sage.symbolic.integration.integral import definite_integral as integral
[
```

```

integral(sin(x)/x,x,-Infinity,Infinity),
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3)),x,-Infinity,Infinity),
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3))*(sin(x/5)/(x/5)),x,-Infinity,Infinity),
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3))*(sin(x/5)/(x/5))*(sin(x/7)/(x/7)),x,-Infinity,Infinity),
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3))*(sin(x/5)/(x/5))*(sin(x/7)/(x/7))*(sin(x/9)/(x/9)),x,-Infinity,Infinity),
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3))*(sin(x/5)/(x/5))*(sin(x/7)/(x/7))*(sin(x/9)/(x/9))*(sin(x/11)/(x/11)),x,-Infinity,Infinity),
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3))*(sin(x/5)/(x/5))*(sin(x/7)/(x/7))*(sin(x/9)/(x/9))*(sin(x/11)/(x/11))*(sin(x/13)/(x/13)),x,-Infinity,Infinity),
]

```

La réponse est :

```
[pi, pi, pi, pi, pi, pi, pi]
```

Tout va bien! Le logiciel *Sage* semble bien capable de calculer formellement ces intégrales. Calculons donc le terme suivant :

```
integral((sin(x)/x)*(sin(x/3)/(x/3))*(sin(x/5)/(x/5))*(sin(x/7)/(x/7))*(sin(x/9)/(x/9))*(sin(x/11)/(x/11))*(sin(x/13)/(x/13)),x,-Infinity,Infinity)
```

La réponse se fait attendre...et finalement, le couperet tombe :

```
467807924713440738696537864469/467807924720320453655260875000*pi
```

C'est à dire

$$\frac{467807924713440738696537864469}{467807924720320453655260875000}\pi = 0.999999999852937186 \dots \pi$$

donc pas tout-à-fait  $\pi$ , bien que très proche! A-t-on dépassé les limites de calcul ou y a-t-il un bug dans le logiciel? David et Jonathan Borwein, père et fils, qui ont étudié ces intégrales en 2001, rapportent cette mésaventure :

« When this fact was recently verified by a researcher using a computer algebra package, he concluded that there must be a “bug” in the software<sup>3</sup>. »

Qu'en est-il vraiment? C'est ce que nous allons voir!

### 3 Les outils

Pour résoudre ce mystère, il nous faut des outils. L'outil principal est ici la *transformée de Fourier*. C'est un choix logique car on a affaire à des intégrales de fonctions sinusoïdales, et à des produits de fonctions.

---

3. Lorsque ce fait a été récemment vérifié par un chercheur utilisant un logiciel de calcul formel, il a conclu qu'il devait y avoir un "bug" dans le logiciel.

Plusieurs notations sont utilisées pour la transformée de Fourier, selon les usages et les communautés. La meilleure notation pour notre problème sera celle des ingénieurs<sup>4</sup> : la transformée de Fourier  $\hat{f}(x)$  de la fonction  $f(t)$  (fonction du temps) est notée

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt} dt$$

où  $x$  est un paramètre de fréquence<sup>5</sup>.

L'intérêt de la transformation de Fourier est de changer complètement de perspective, sans perte d'information : on peut toujours revenir ensuite à l'espace initial des signaux par transformée de Fourier inverse, définie par<sup>6</sup>

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{2i\pi xt} dx$$

Dans notre cas, la transformée de Fourier va surtout nous permettre de transformer le produit des fonctions sinus cardinaux en *produit de convolution* de fonctions plus simples.

### **Théorème de convolution :**

Le produit de convolution de deux fonctions (intégrables)  $f$  et  $g$  est donnée par la formule

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t - u) du.$$

La transformée de Fourier transforme un produit de convolution en un produit multiplicatif :

$$\widehat{f * g}(x) = \hat{f}(x) \hat{g}(x)$$

4. C'est également celle adoptée par le mathématicien Laurent Schwartz.

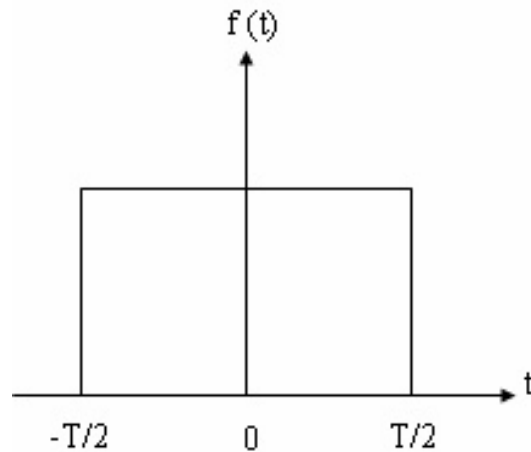
5. Cette intégrale de Fourier est toujours bien définie lorsque  $f$  est une fonction intégrable (cadre  $L^1$ ). On peut aussi la considérer bien définie dans d'autres espaces fonctionnels comme  $L^2$  (fonctions de carré intégrable) ou même des espaces plus généraux (par exemple l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'$ ), à condition d'interpréter l'intégrale de Fourier comme le résultat d'une convergence dans l'espace en question lorsque les bornes tendent vers l'infini.

6. Là encore, cette intégrale de Fourier inverse est bien définie lorsque  $\hat{f}$  est une fonction intégrable. On peut la généraliser à d'autres espaces comme indiqué précédemment.

Sous l'hypothèse d'intégrabilité, cela résulte d'un calcul simple qui repose sur le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t) e^{-2i\pi x t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) e^{-2i\pi x u} e^{-2i\pi x (t-u)} du dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(v) e^{-2i\pi x u} e^{-2i\pi x v} du dv \\
 &= \hat{f}(x) \hat{g}(x).
 \end{aligned}$$

Quoi de plus simple qu'une fonction "porte"? Pour illustrer graphiquement le



produit de convolution, prenons-en une de largeur  $\ell$  :<sup>7</sup>

$$\Pi_{\ell}(t) = \frac{1}{\ell} \times \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \ell/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Son produit de convolution avec elle-même est illustré ci-dessous. On obtient une fonction triangle qu'on notera  $\Lambda$  par la suite.

---

7. On convient de centrer cette porte en  $t = 0$ , et de la normaliser pour que son intégrale soit égale à 1.



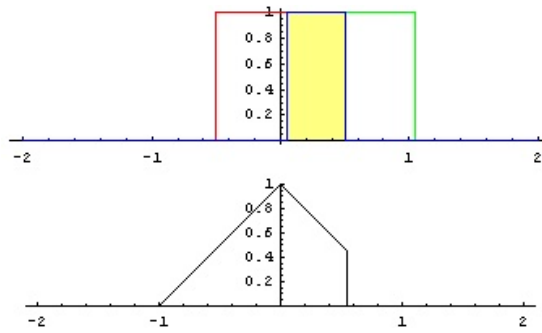
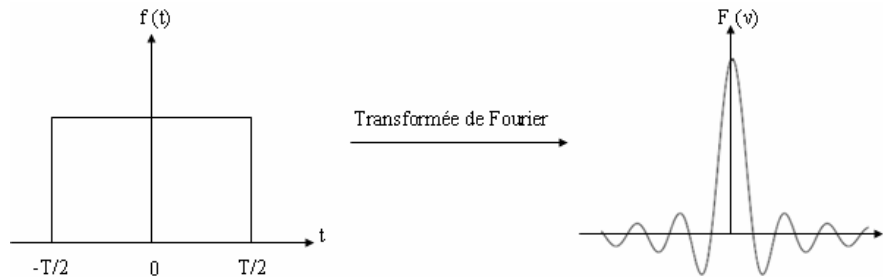


FIGURE 4 – Animation du carré convolutif  $\Pi_\ell * \Pi_\ell$  d'une porte.

Sa transformée de Fourier se calcule facilement <sup>8</sup> :

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}_\ell(x) &= \frac{1}{\ell} \times \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} e^{-2i\pi xt} dt \\
 &= \frac{1}{\ell} \times \left[ \frac{e^{-2i\pi xt}}{-2i\pi x} \right]_{-\ell/2}^{+\ell/2} \\
 &= \frac{1}{\ell} \times \frac{e^{i\pi x \ell} - e^{-i\pi x \ell}}{2i\pi x} \\
 &= \frac{\sin(\pi \ell x)}{\pi \ell x}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît notre sinus cardinal!



Profitons-en pour adopter une notation qui nous permettra de simplifier l'écriture :

$$\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

avec la convention  $\text{sinc } 0 = 1$  (prolongement par continuité). Ainsi

<sup>8</sup>. Pour  $x \neq 0$ . La transformée de Fourier vaut 1 en  $x = 0$ .

la transformée de Fourier d'une porte (centrée) de largeur  $\ell$  est  $\text{sinc}(\ell x)$ .

Par un petit changement de variable, les intégrales de Borwein qui nous intéressent deviennent :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, \text{sinc } \frac{x}{3} \, dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, \text{sinc } \frac{x}{3} \, \text{sinc } \frac{x}{5} \, dx &= 1 \\ &\vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, \text{sinc } \frac{x}{3} \, \text{sinc } \frac{x}{5} \, \text{sinc } \frac{x}{7} \, \text{sinc } \frac{x}{9} \, \text{sinc } \frac{x}{11} \, \text{sinc } \frac{x}{13} \, dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, \text{sinc } \frac{x}{3} \, \text{sinc } \frac{x}{5} \, \text{sinc } \frac{x}{7} \, \text{sinc } \frac{x}{9} \, \text{sinc } \frac{x}{11} \, \text{sinc } \frac{x}{13} \, \text{sinc } \frac{x}{15} \, dx &= ? \end{aligned}$$

Nous avons à présent tout ce qu'il faut pour calculer ces intégrales. La première, l'intégrale de Dirichlet, est un cas un peu spécial que nous allons traiter séparément.

## 4 Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Si le sinus cardinal était absolument intégrable, on pourrait procéder comme suit. Par la formule d'inversion de Fourier, comme  $\text{sinc}$  est la transformée de Fourier d'une porte centrée de largeur 1, on aurait :

$$\Pi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(x) e^{2i\pi x t} \, dx$$

En particulier en  $t = 0$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, dx = \Pi_1(0) = 1$$

ce qui donne bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi.$$

Malheureusement,  $\text{sinc } x$  n'est pas absolument intégrable. Cependant, son carré  $\text{sinc}^2 x$  l'est. Or, nous avons montré dans l'encadré ci-dessus l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc } x \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 x \, dx$$

Cette fois-ci, avec la même idée en appliquant la formule d'inversion de Fourier, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 x \, dx = \Pi_1 * \Pi_1(0) = \Lambda(0) = 1$$

où  $\Lambda$  est la fonction triangle de hauteur 1 et de demi-largeur 1 (voir la figure ci-dessus d'illustration graphique du produit de convolution). On obtient bien le résultat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi.$$

## 5 Calcul des autres intégrales de Borwein

Pour toutes les intégrales de Borwein suivantes, les produits de sinus cardinaux sont des fonctions absolument intégrables. On peut donc utiliser directement la formule d'inversion de Fourier. Cette méthode astucieuse a été proposée par H. Schmid en 2014.

Comme précédemment, par la formule d'inversion de Fourier et le théorème de convolution en  $t = 0$ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc} x \, \text{sinc} \frac{x}{3} \cdots \text{sinc} \frac{x}{2N+1} \, dx = \Pi_1 * \Pi_{\frac{1}{3}} * \cdots * \Pi_{\frac{1}{2N+1}}(0)$$

où on a utilisé que  $\text{sinc}(\ell x)$  est la transformée de Fourier de la porte  $\Pi_\ell(t)$ .

L'avantage de cette méthode est qu'elle possède une interprétation graphique particulièrement éclairante. En effet, si on représente graphiquement les produits de convolution successifs de portes de plus en plus étroites, on obtient les étapes suivantes (voir la figure) :

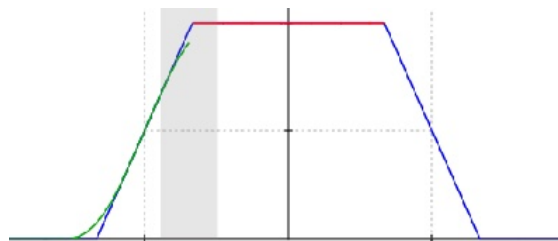


FIGURE 5 – Animation des convolutions successives  $\Pi_1 * \Pi_{\frac{1}{3}} * \cdots * \Pi_{\frac{1}{2N+1}}$  de portes de plus en plus étroites.

- $\Pi_1$  a un plateau central de hauteur 1 de largeur 1
- $\Pi_1 * \Pi_{\frac{1}{3}}$  a un plateau central de hauteur 1 de largeur  $1 - \frac{1}{3}$

- $\Pi_1 * \Pi_{\frac{1}{3}}$  a un plateau central de hauteur 1 de largeur  $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$
- etc.

Le plateau central de hauteur 1 perdure tant que

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2N+1} > 0$$

Comme la série harmonique  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$  tend vers  $+\infty$ , il y a forcément un plus grand entier impair vérifiant cette inégalité. On trouve numériquement que c'est  $2N+1 = 13$ .

Par conséquent, à partir de  $2N+1 = 15$ , le plateau central disparaît, le « tas de neige fond »<sup>9</sup> et la hauteur centrale diminue (elle devient  $< 1$ ). Ce qui explique le phénomène.

## 6 Quelques Variantes Amusantes

C'est donc la divergence de la série harmonique qui provoque le phénomène : le plateau finit par disparaître, on passe d'une valeur = 1 en  $t = 0$  à une valeur  $< 1$ . À partir de là, il est facile de trouver d'autres variations sur le même thème :

### 6.1 Une suite d'intégrales similaires qui reste constante encore plus longtemps

La suite des intégrales de Borwein ne décroche qu'au huitième terme. Pour décrocher encore plus loin, suivant une suggestion de H. Schmid, partons de

$$2 \operatorname{sinc} 2x = 2 \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} = 2 \frac{2 \cos \pi x \sin \pi x}{2\pi x} = 2 \cos \pi x \operatorname{sinc} x$$

au lieu de  $\operatorname{sinc} x$ , pour que le plateau initial soit toujours de hauteur  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  mais de largeur 2 au lieu de 1. On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cos \pi x \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc} \frac{x}{3} \operatorname{sinc} \frac{x}{5} \dots \operatorname{sinc} \frac{x}{2N+1} dx = 1$$

tant que

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2N+1} > 0$$

c'est-à-dire jusqu'à  $2N+1 = 111$  (le 56<sup>e</sup> terme), puis le 57<sup>e</sup> terme décroche :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cos \pi x \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc} \frac{x}{3} \operatorname{sinc} \frac{x}{5} \dots \operatorname{sinc} \frac{x}{113} dx < 1$$

---

9. Expression empruntée à Yves Meyer.

## 6.2 Une suite d'intégrales similaires qui reste constante aussi loin que l'on veut

Il suffit de prendre une série lentement divergente, par exemple (suivant une suggestion de J. Baez) :

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots$$

On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc} \frac{x}{101} \operatorname{sinc} \frac{x}{201} \dots \operatorname{sinc} \frac{x}{100N+1} dx = 1$$

pour tout

$$N < 15\,341\,178\,777\,673\,149\,429\,167\,740\,440\,969\,249\,338\,310\,889$$

(soit environ  $1,5 \cdot 10^{43}$ )<sup>10</sup>.

À partir de cette idée, on peut construire des séries harmoniques de plus en plus lentes à diverger, pour obtenir une suite d'intégrales similaires qui reste constante aussi loin que l'on veut.

## 6.3 Une suite d'intégrales similaires qui reste toujours constante

Il suffit cette fois de considérer une série convergente de somme inférieure ou égale à 1. Par exemple, la série convergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

montre que chaque somme partielle est  $< 1$ . Le plateau de hauteur 1 à  $t = 0$  perdurera toujours dans un produit de convolution  $\Pi_1 * \Pi_{\frac{1}{2}} * \Pi_{\frac{1}{4}} * \dots$  et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} x \operatorname{sinc} \frac{x}{2} \operatorname{sinc} \frac{x}{4} \operatorname{sinc} \frac{x}{8} \operatorname{sinc} \frac{x}{16} \operatorname{sinc} \frac{x}{32} \dots \operatorname{sinc} \frac{x}{2^N} dx = 1$$

toujours.

---

10. On peut le calculer à l'aide de la fonction digamma  $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  où  $\Gamma(x)$  est la fonction Gamma. Comme  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , en prenant le logarithme et en dérivant on obtient l'identité  $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$  d'où

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{100N+1} = \frac{\psi(N+1 + \frac{1}{100}) - \psi(1 + \frac{1}{100})}{100}$$

et une évaluation de la fonction digamma donne le résultat.

## Exercice

Établir la formule générale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} a_1 x \operatorname{sinc} a_2 x \operatorname{sinc} a_3 x \cdots \operatorname{sinc} a_N x \, dx = \frac{1}{|a_1|}$$

tant que

$$|a_2| + |a_3| + \cdots + |a_N| < |a_1|.$$

## Bibliographie

E. T. Whittaker, On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A* 35, 1915, 181–194.

J. M. Whittaker, *Interpolatory function theory*, Cambridge University Press. 1935, 107 p.

J. McNamee, F. Stenger and E. L. Whitney, “Whittaker’s Cardinal Function in Retrospect”, *Mathematics of Computation* 25(113) 1971, 141–154.

D. Borwein and J. M. Borwein, Some remarkable properties of sinc and related integrals, *The Ramanujan Journal* 5, 2001, 73–89.

H. Schmid, Two curious integrals and a graphic proof, *Elem. Math.* 69, 2014, 11–17.

R. Baillie, D. Borwein and J. M. Borwein, Surprising sinc sums and integrals, *Amer. Math. Monthly* 115, 2008, 888–901.

J. Baez. Patterns that eventually fail, 2018, *Azimuth*. <https://johnCarlosbaez.wordpress.com/2018/09/20/patterns-that-eventually-fail/>.