



**HAL**  
open science

# Facteurs disjoints des transformations mélangeantes

François Parreau

► **To cite this version:**

| François Parreau. Facteurs disjoints des transformations mélangeantes. 2023. hal-04149182

**HAL Id: hal-04149182**

**<https://hal.science/hal-04149182v1>**

Preprint submitted on 3 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Facteurs disjoints des transformations mélangeantes.

François Parreau

## Résumé

We show that any non-mixing automorphism of a standard probability space has a factor disjoint from all mixing automorphism.

Soient  $T$  et  $S$  deux automorphismes de deux espaces de probabilité standard  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ . Étant donné un couplage non trivial  $\lambda$  de  $T$  et  $S$ , on considère l'opérateur markovien  $V$  associé, de  $L^2(X)$  vers  $L^2(Y)$  et le facteur  $\mathcal{A}$  de  $Y$  engendré par l'image de  $V$ , qu'on appellera le facteur engendré par  $V$  ou le facteur de  $Y$  engendré par  $\lambda$ .

C'est aussi le facteur qu'on obtient dans la construction d'un facteur de  $Y$  isomorphe à un facteur d'un autocouplage infini de  $X$  (voir par ex. l'article [1]). En effet, soit  $\lambda_\infty$  le produit relativement indépendant d'une infinité de copies de  $\lambda$  au-dessus de leur facteur commun  $Y$ , sur  $X^\infty \times Y$  et soit  $\tilde{\lambda}_\infty$  sa projection sur  $X^\infty$ . Pour des fonctions mesurables bornées  $f_1, \dots, f_n$  sur  $X$  et  $g$  sur  $Y$ ,

$$\int \otimes_{i=1}^n f_i \otimes g d\lambda_\infty = \int \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) g d\nu. \quad (1)$$

Comme une fonction mesurable sur  $X^\infty \times Y$  symétrique par rapport aux variables dans  $X$  est égale  $\lambda_\infty$ -presque-partout à une fonction de la variable dans  $Y$  seule ("loi de 0-1 relative"), le facteur symétrique de  $(X^\infty, \tilde{\lambda}_\infty)$  s'identifie à un facteur de  $Y$ , et il est clair d'après (1), que  $\mathcal{A}$  est le facteur engendré par l'image de  $V$  dans  $L^2(Y)$ .

Dans la démonstration qui suit, on applique cela à un autocouplage  $\lambda$  de  $T$ . Pour éviter les confusions, les différents facteurs  $X$  dans  $X^\infty$  sont notés  $X_1, \dots, X_n, \dots$ . Les projections de  $\lambda_\infty$  sur  $X_1 \times \dots \times X_n$  et sur  $X_1 \times \dots \times X_n \times X$  sont notées  $\tilde{\lambda}_n$  et  $\lambda_n$  respectivement (en particulier  $\lambda_1 = \lambda$ ).

**Théorème 1** *Le facteur engendré par un autocouplage limite de graphes de puissances est disjoint de tout automorphisme mélangeant. En particulier, tout automorphisme non mélangeant a un facteur disjoint de tout automorphisme mélangeant.*

*Démonstration.* On considère un autocouplage  $\lambda$  de  $T$  limite faible d'une suite de graphes de puissances  $T^{k_j}$  (où  $k_j$  tend vers l'infini), l'opérateur markovien  $V$  associé et

le facteur  $\mathcal{A}$  engendré, avec les notations ci-dessus. Soit  $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$  un système mélangeant et  $\eta$  un couplage de  $T$  restreint à  $\mathcal{A}$  avec  $S$ . On veut montrer que  $\eta$  est trivial. On peut sans perte de généralité supposer  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \pmod{\mu}$ .

Puisque  $\lambda_\infty$  identifie  $\mathcal{A}$  à un facteur de  $(X^\infty, \lambda_\infty)$ , il revient au même de montrer la même chose pour le couplage produit  $\tilde{\rho} = \eta \circ \lambda_\infty$ , projection sur  $X^\infty \times Y$  du produit relativement indépendant  $\rho$  de  $\lambda_\infty$  et de  $\eta$  au-dessus du facteur commun  $X$ .

Pour des fonctions bornées  $f_1, \dots, f_n$  sur  $X$  et  $g$  sur  $Y$ , on a

$$\int \otimes_{i=1}^n f_i \otimes g d\tilde{\rho} = \int \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) J^* g d\mu, \quad (2)$$

où  $J$  est l'opérateur markovien associé à  $\eta$ , de  $L^2(X)$  vers  $L^2(Y)$ . On doit montrer que cette intégrale est égale à

$$\left( \int \otimes_{i=1}^n f_i d\tilde{\lambda}_\infty \right) \left( \int g d\nu \right)$$

et il suffira de montrer qu'elle est nulle chaque fois que  $\int g d\nu = 0$ .

Pour  $n \geq 1$ , notons  $\rho_n$  le produit relativement indépendant de  $\lambda_n$  et de  $\eta$  au-dessus de  $X$ , et  $\tilde{\rho}_n = \eta \circ \lambda_n$  la projection de  $\tilde{\rho}_n$  sur  $X_1 \times \dots \times X_n \times Y$ . Il s'agit donc de montrer que  $\tilde{\rho}_n$  est le produit  $\lambda_n \otimes \nu$  pour tout  $n \geq 1$ .

Cela est vrai pour  $n = 1$  du fait que  $JV = \lim JT^{k_j} = \lim S^{k_j} J$  et  $\lim S^{k_j}$  est le projecteur orthogonal sur les constantes.

Fixons  $n \geq 1$ , supposons la propriété vraie pour cet entier, et considérons des fonctions bornées  $f_1, \dots, f_{n+1}$  sur  $X$  et  $g$  sur  $Y$ , avec  $g$  d'intégrale nulle. On a aussi

$$\int \otimes_{i=1}^{n+1} f_i \otimes g d\tilde{\rho}_{n+1} = \int V f_{n+1} \otimes \left( \otimes_{i=1}^n f_i \right) \otimes g d\rho_n. \quad (3)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la mesure spectrale de  $\left( \otimes_{i=1}^n f_i \right) \otimes g$  est la convolution de celles des deux termes et en particulier, comme  $S$  est mélangeant et  $g$  d'intégrale nulle, sa transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini. De l'autre côté, du fait que  $V^*$  est aussi limite de puissances de  $T$ , et que  $\text{Ker} V^* = (\text{Im} V)^\perp$ , on a que la mesure spectrale de  $V f_{n+1}$  est étrangère à toute mesure dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini.

Il en résulte que l'intégrale (4) est nulle, ce qui montre la propriété par récurrence. ■

*Variante.* Il n'est pas réellement nécessaire de considérer l'autocouplage infini. Voici une variante de la démonstration ne faisant appel qu'aux produits finis. On garde les mêmes notations et l'hypothèse supplémentaire  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \pmod{\mu}$ .

Comme alors  $L^2(\mathcal{B}, \mu)$  est linéairement engendré par les produits  $\prod_{i=1}^n V f_i$  où  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions mesurables bornées sur  $X$ , on a à montrer que pour tout

$n \geq 1$ , étant données  $n$  fonctions mesurables bornées  $f_1, \dots, f_n$  sur  $X$  et une fonction mesurable bornée  $g$  sur  $Y$ ,

$$\int \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes g \, d\eta = \int \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) d\mu \int g \, d\nu. \quad (4)$$

Pour tout  $n \geq 1$  le couplage  $\rho_n$  sur  $X \times X^n \times Y$  produit relativement indépendant au-dessus de  $X$  de  $n$  copies de  $\lambda$  et de  $\eta$  est donné par

$$\int f \otimes \left( \otimes_{i=1}^n f_i \right) \otimes g \, d\rho_n = \int f \cdot \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \cdot Jg \, d\mu = \int f \cdot \left( \prod_{i=1}^n V f_i \right) \otimes g \, d\eta. \quad (5)$$

En comparant (4) et (5) lorsque  $f = 1$ , on voit qu'on a à montrer que pour tout  $n \geq 1$  les facteurs  $X^n$  et  $Y$  de ce couplage sont indépendants, autrement dit que la projection  $\tilde{\rho}_n$  de  $\rho_n$  sur  $X^n \times Y$  est la mesure produit, et il suffit de montrer que cette intégrale est nulle lorsque  $\int g \, d\nu = 0$ .

Pour  $n = 1$  cela résulte du fait que  $S$  est mélangeante et que

$$\begin{aligned} \int V f_1 \cdot Jg \, d\mu &= \lim \int T^{k_j} f_1 \cdot Jg \, d\mu = \lim \int T^{k_j} f_1 \otimes g \, d\eta \\ &= \lim \int f_1 \otimes S^{-k_j} g \, d\eta = \lim \int J^* f_1 \cdot S^{-k_j} g \, d\nu. \end{aligned}$$

Fixons  $n \geq 1$ , supposons la propriété vraie pour cet entier, et considérons des fonctions bornées  $f_1, \dots, f_{n+1}$  sur  $X$  et  $g$  sur  $Y$ , avec  $g$  d'intégrale nulle. En appliquant (2) avec  $f = V f_{n+1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int \left( \prod_{i=1}^{n+1} V f_i \right) \otimes g \, d\eta &= \int V f_{n+1} \otimes \left( \otimes_{i=1}^n f_i \right) \otimes g \, d\rho_n \\ &= \lim \int T^{k_j} f_{n+1} \otimes \left( \otimes_{i=1}^n f_i \right) \otimes g \, d\rho_n \\ &= \lim \int f_{n+1} \otimes \left( \otimes_{i=1}^n T^{-k_j} f_i \right) \otimes S^{-k_j} g \, d\rho_n \\ &= \lim \int R f_{n+1} \cdot \left( \left( \otimes_{i=1}^n T^{-k_j} f_i \right) \otimes S^{-k_j} g \right) \, d\tilde{\rho}_n, \end{aligned}$$

où  $R$  est l'opérateur markovien associé de  $L^2(X, \mu)$  vers  $L^2(X^n \times Y, \tilde{\rho}_n)$ , et il suffit de montrer que  $\left( \otimes_{i=1}^n T^{-k_j} f_i \right) \otimes S^{-k_j} g$  tend faiblement vers 0.

Or c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse de récurrence – les facteurs  $X^n$  et  $Y$  sont indépendants pour  $\pi\rho_n$  – et du fait que  $S$  est mélangeant.

Il en résulte que  $X^{n+1}$  et  $Y$  sont indépendants pour  $\tilde{\rho}_{n+1}$ , ce qui montre la propriété cherchée par récurrence. ■

## Références

- [1] Lemańczyk M., Parreau F., Thouvenot J.-P. Gaussian automorphisms whose ergodic self-joinings are Gaussian. *Fundam Math* 164, (2000)253–293