



HAL
open science

Systèmes hyperboliques de lois de conservation ; application à la dynamique des gaz

Bruno Després, François Dubois

► **To cite this version:**

Bruno Després, François Dubois. Systèmes hyperboliques de lois de conservation ; application à la dynamique des gaz. 3ème cycle. Systèmes hyperboliques de lois de conservation ; application à la dynamique des gaz, Palaiseau, France. 2005, pp.203. hal-04139341

HAL Id: hal-04139341

<https://hal.science/hal-04139341>

Submitted on 23 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



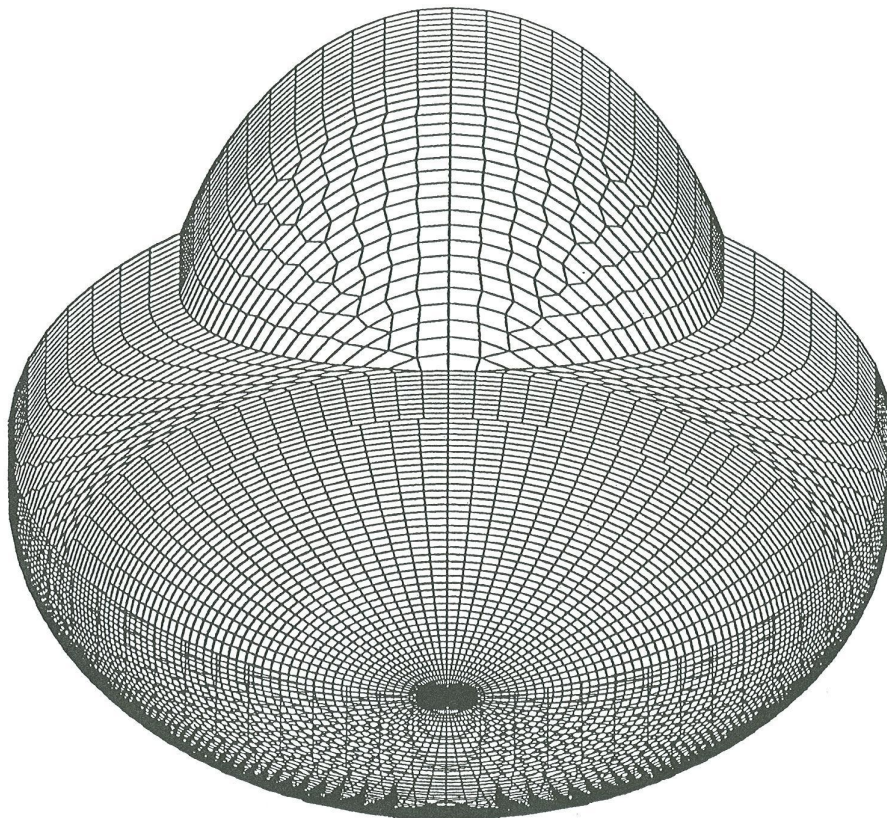
Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Systemes hyperboliques de lois de conservation

Application à la dynamique des gaz

Bruno Després et François Dubois

juillet 2005



Cette image est le maillage d'un modèle d'avion spatial stylisé au moyen d'un double ellipsoïde. On note la présence de triangles sur la surface afin d'approcher avec précision la courbe d'intersection.

Ces notes de cours sont issues d'un enseignement transmis à l'école polytechnique au cours des années 2002-2005 dans le cadre de la majeure "sciences de l'ingénieur, simulation et modélisation".

L'étude de la dynamique des gaz demande de maîtriser les modèles physiques comme la thermodynamique et la mécanique des milieux continus, les mathématiques appliquées et enfin l'art de l'ingénieur pour concevoir et mettre en œuvre les méthodes d'approximation numérique. Ce mémoire permet d'aborder les modèles physiques de la dynamique des gaz et les éléments fondamentaux en vue de leur mise en application pratique au sein de logiciels, en s'appuyant avant tout sur les éléments mathématiques rigoureux : solution faible d'une loi de conservation pour formuler correctement la présence de discontinuités, notion d'entropie mathématique, problème de Riemann, discrétisation *via* l'approche des volumes finis, convergence des schémas numériques. Ouvrage d'introduction, des connaissances de mathématiques générales sont suffisantes pour en aborder la lecture. Des exercices corrigés permettent également au lecteur de mesurer l'acquisition de ses connaissances tout en lui proposant de découvrir un point de vue complémentaire.

Avant-Propos

Le cours de “Systèmes hyperboliques de lois de conservation, applications à la dynamique des gaz” au sein de la “majeure” *Sciences de l’Ingénieur et Calcul Scientifique* est une option proposée aux élèves de l’Ecole Polytechnique des promotions 1999 à 2002 en fin de cycle de formation. Il est structuré en neuf blocs. Chaque bloc se compose d’un cours d’une heure trente (proposé et transmis par François Dubois) suivi d’une “petite classe” de deux heures (conçue et pilotée par Bruno Després) consacrée aux exercices d’applications et/ou à de travaux de modélisation numérique. Le plan s’en déduit naturellement. Les exercices sont regroupés à la fin de l’ouvrage. Ils sont suivis par une courte bibliographie.

Remerciements

Ils vont d’abord aux élèves de l’Ecole polytechnique ; par leurs questions, leur étonnement, leur sens critique, ils ont permis chaque année d’améliorer l’exposé et le contenu de cet enseignement. Ils vont ensuite à nos brillants “Anciens”, puisque ce cours d’introduction n’aurait pas pu exister sans le livre d’Edwige Godlewski et Pierre-Arnaud Raviart [*Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, volume 118, Springer, 1996] et le travail antérieur de Bernard Larrouturou [*Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l’ingénieur*, Ecole polytechnique, 1997]. Qu’ils nous pardonnent tous nos emprunts !

BD et FD, Palaiseau, juillet 2005.

Table des matières

1. Modèles hyperboliques	
1) Dynamique des gaz	7
2) Méthode des caractéristiques	16
3) Systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation	24
2. Différences finies pour l'équation d'advection	
1) Discrétisation	29
2) Construction de quelques schémas aux différences	30
3) Stabilité	36
4) Convergence	43
5) Dissipation et dispersion	45
3. Etude mathématique d'une loi de conservation	
1) Introduction	49
2) Solutions régulières	49
3) Intersection de caractéristiques	53
4) Solutions faibles	55
5) Non unicité des solutions faibles	63
4. Entropie mathématique	
1) Loi de conservation supplémentaire	67
2) Solution entropique d'une loi de conservation	75
3) Chocs entropiques	78
4) Problème de Riemann	82
5. Variables entropiques	
1) Entropie mathématique	89
2) Système symétrisable	93
3) Condition d'entropie pour la méthode des lignes	96
4) Variables entropiques pour la dynamique des gaz	98

6. Introduction aux volumes finis	
1) Méthode des lignes	101
2) Schéma de Godunov	105
3) Convergence	112
7. Problème de Riemann	
1) Introduction	119
2) Ondes de détente	121
3) Ondes de choc	124
4) Discontinuités de contact	129
5) Solution du problème de Riemann	131
8. Schémas de Godunov et de Roe	
1) Tube à choc	135
2) Schéma de Godunov	139
3) Matrice de Roe	145
4) Correction d'entropie	150
9. Vers la mécanique des fluides numérique	
1) Introduction	157
2) Méthode de Van Leer	158
3) Conditions aux limites	169
4) Aspects bidimensionnels	178
10. Exercices corrigés	
1) Enoncés	183
2) Proposition de correction des exercices	191
11. Bibliographie	203

Modèles hyperboliques

Après avoir rappelé les hypothèses physiques et mécaniques qui conduisent à un modèle très général pour la dynamique des gaz, nous le simplifions petit à petit pour aboutir à l'équation d'advection (paragraphe 1). Nous introduisons ensuite la méthode des caractéristiques qui permet de résoudre par un calcul simple l'équation d'advection, y compris pour un intervalle borné. Nous donnons au troisième paragraphe la définition générale d'un "système hyperbolique de lois de conservation" et nous vérifions qu'elle permet de traiter le cas de la dynamique des gaz.

1) DYNAMIQUE DES GAZ

Introduction

• La mécanique des fluides est un champ important d'interaction entre les sciences de l'ingénieur et les mathématiques. En première approximation, les modèles mathématiques sont fixés depuis le dix-huitième siècle (Euler, Lagrange) et ils donnent encore lieu à des problèmes mathématiques ouverts, c'est-à-dire qui restent à résoudre. Rappelons que l'approche d'Euler (1755) consiste à chercher le fluide sous la forme de champs définis dans l'espace temps ou une portion Ξ de celui-ci :

$$(1.1) \quad (x, t) \in \Xi \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

On distingue d'une part les champs **thermodynamiques** tels que la densité notée ρ , l'énergie interne e et la pression p :

$$(1.2) \quad \Xi \ni (x, t) \mapsto (\rho(x, t), e(x, t), p(x, t)) \in]0, \infty[^3$$

et le champ de vitesse u qui décrit la **cinématique** du fluide :

$$(1.3) \quad \Xi \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}^3.$$

L'impulsion $q = \rho u$ couple la densité et la vitesse et constitue une grandeur conservée fondamentale. Elle permet même souvent de **définir** la vitesse *via* la relation $u = \frac{q}{\rho}$, ce qui exclut naturellement la valeur $\rho = 0$ de l'ensemble des valeurs admissibles pour la densité.

• Une première fermeture est donnée par la **thermostatique**. La loi d'état du fluide fournit une relation *a priori* entre la densité, la vitesse et la pression. Nous utilisons dans ce chapitre le modèle le plus simple du gaz parfait polytropic, de rapport des chaleurs spécifiques égal à une constante γ ($\gamma > 1$) :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(1.4) \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad \gamma > 1.$$

Dans ce modèle, les chaleurs spécifiques C_p et C_v à pression et volume constant respectivement sont des constantes et l'énergie interne est proportionnelle à la température T :

$$(1.5) \quad e = C_v T, \quad C_v = \text{constante}, \quad C_p = \text{constante}.$$

• Les autres relations sont associées aux **lois de conservation** de la physique à l'échelle macroscopique et à basse vitesse caractéristique du régime où l'on étudie habituellement un fluide : conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie. Pour écrire ces lois de conservation, on introduit les **trajectoires** du milieu continu, ce qui revient *in fine* à prendre le point de vue de Lagrange. On résout classiquement l'équation différentielle

$$(1.6) \quad \frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

associée à la condition initiale

$$(1.7) \quad x(0) = a;$$

on note $X(a, t)$ la solution de l'équation (1.6) associée à la condition initiale (1.7) ; elle définit le changement de variables entre coordonnées de Lagrange (a, τ) et d'Euler (x, t) :

$$(1.8) \quad \Theta \ni (a, \tau) \mapsto (X(a, \tau), t \equiv \tau) \in \Xi.$$

Un volume V qui occupe à l'instant initial la position V_0 (avec $(V_0, 0) \subset \Theta$) est "suivi dans son mouvement" avec la relation (1.8) et devient un volume $V(\tau) = \{X(a, \tau), a \in V_0\}$. On établit alors (voir par exemple l'ouvrage classique de E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit [*Hydrodynamique physique*, CNRS-Inter-Editions, 1991]) que la dynamique d'une grandeur conservée ϕ que l'on suit dans son mouvement est équilibrée par le flux $\psi \cdot n$ à travers la surface $\partial V(t)$:

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, dx = \int_{\partial V(t)} \psi \cdot d\gamma,$$

soit sous forme différentielle

$$(1.10) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(u \phi) = \text{div} \psi,$$

par utilisation de (1.6) et de la formule de Green. Pour la conservation de la masse, on a $\phi = \rho$ et aucune source surfacique ($\psi = 0$) :

$$(1.11) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0.$$

Pour la conservation de l'impulsion, on a $\phi = \rho u$ et $\psi = \sigma$, tenseur des contraintes :

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \text{div}(\rho u \otimes u) - \text{div} \sigma = 0$$

Modèles hyperboliques

soit sous forme développée composante par composante :

$$(1.13) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right\} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

La conservation de l'énergie demande de regrouper l'énergie interne volumique ρe et énergie cinétique volumique $\frac{1}{2} \rho |u|^2$:

$$(1.14) \quad \phi = \rho e + \frac{1}{2} \rho |u|^2 \equiv \rho E.$$

Le flux d'énergie est égal à la puissance du flux d'impulsion diminuée du flux de chaleur q :

$$(1.15) \quad \psi_i = \sum_j \sigma_{ij} u_j - q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Compte tenu de (1.10), (1.14) et (1.15), la conservation de l'énergie (totale) s'écrit

$$(1.16) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i E) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \sigma_{ij} u_j \right) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right\} = 0.$$

Nous retenons de ce paragraphe qu'après écriture sous forme d'équations aux dérivées partielles dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les lois de conservation de la physique ont une forme générale du type proposé à la relation (1.10).

Equations de Navier Stokes

- Il reste à fixer le modèle mécanique, c'est-à-dire la **loi de comportement** phénoménologique à l'échelle macroscopique. Dans le cas de la mécanique des fluides, le tenseur des contraintes et le flux de chaleur doivent être précisés en fonction des champs thermodynamiques et cinématiques inconnus (relations (1.2) et (1.3)). Pour un **fluide newtonien**, le tenseur des contraintes est la somme des contraintes de pression (ou de fluide parfait) et des contraintes visqueuses, qui utilisent les coefficients de Lamé λ et μ

$$(1.17) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Lorsque le fluide obéit à la loi de Fourier pour la propagation de la chaleur, on a

$$(1.18) \quad q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad k > 0.$$

Les équations de Navier Stokes de la dynamique des gaz consistent à chercher le champ constitué des inconnues thermodynamiques (1.2) et cinématiques (1.3) (soit six champs scalaires dans le cas de trois dimensions d'espace) qui satisfont à une équation d'état telle que (1.4) dans le cas du gaz parfait polytropique et soumis aux lois de conservation de la masse (1.11), de l'impulsion (1.12) et de l'énergie

(1.16) avec l'hypothèse (1.17) de fluide newtonien qui satisfait à la loi de Fourier (1.18).

- La mécanique des fluides se divise alors en deux grandes branches mathématiques reliées à l'**hydrodynamique** d'une part et à la **dynamique des gaz** d'autre part. Dans le cas où la densité est constante (fluide incompressible, ce qui est vrai pour un liquide en première approximation), la conservation de la masse (1.11) s'écrit simplement

$$(1.19) \quad \operatorname{div} u = 0.$$

La conservation de l'impulsion (1.13), compte tenu de (1.19) et (1.17), prend la forme plus simple

$$(1.20) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\mu}{\rho} \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.$$

On n'a pas besoin de l'équation de l'énergie ni de la loi d'état (1.4) pour "fermer" le modèle incompressible des équations de Navier Stokes ; la pression peut s'interpréter comme un **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte d'incompressibilité (1.19). Les "fanas" pourront consulter le livre de R. Temam [*Navier Stokes equations*, North Holland, Amsterdam, 1977]. Les mathématiciens classent le système (1.19) (1.20) comme "parabolique incomplet", et le système de **Stokes**, obtenu en négligeant le terme non-linéaire $u \cdot \nabla u$ au sein de la relation (1.20) lorsqu'on se limite à d'une étude stationnaire, est de type **elliptique**. Ce type de problème n'est pas développé ici et nous renvoyons le lecteur par exemple à l'ouvrage de V. Girault et P.A. Raviart [*Finite Element Methods for Navier Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, 1986].

- Lorsque la densité varie fortement (en temps et/ou en espace), on est typiquement dans le cadre de la dynamique des gaz. Les équations de Navier Stokes des fluides compressibles forment le modèle le plus complet pour décrire l'ensemble des conservations de la physique dans le contexte de la mécanique des milieux continus. Nous remarquons simplement ici que si nous cherchons une **solution particulière de vitesse nulle**, l'équation de l'énergie (1.16) se réécrit aussi, compte tenu de (1.5), (1.11), (1.14) et (1.18) :

$$(1.21) \quad \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla T) = 0.$$

On retrouve l'**équation de la chaleur** étudiée dans le cours d'équations aux dérivées partielles. Nous retenons ici que l'équation (1.21) de **diffusion** de la chaleur est l'un des modes de transfert de l'énergie, l'autre étant associé au terme non-linéaire $\operatorname{div}(\rho u T)$ négligé dans (1.21), c'est-à-dire la **convection**.

Equations d’Euler des fluides parfaits

• Compte tenu de l’immense complexité mathématique des équations de Navier Stokes qui, dit-on, “contiennent tout” (le lecteur intéressé est invité à consulter l’ouvrage de P.L. Lions [*Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Science Publications, 1996]), on construit des modèles de plus en plus simples afin de pouvoir maîtriser les mathématiques sous-jacentes. La première étape est de supposer que le fluide est **parfait** ; le tenseur des contraintes néglige alors les termes visqueux associés au gradient du champ de vitesse (on pose $\lambda = \mu = 0$) et le flux de chaleur est supposé nul $q = 0$:

$$(1.22) \quad \sigma = -p \text{ Id}.$$

On suppose aussi ici (afin uniquement d’alléger les expressions algébriques) que l’espace est bidimensionnel. Les équations de conservation de la masse (1.11), de l’impulsion (1.13), et de l’énergie (1.16) s’écrivent, avec un champ de vitesse u noté abusivement (u, v) :

$$(1.23) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E + pu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v E + pv) = 0. \end{cases}$$

Ces équations de conservation sont également couplées à la loi des gaz parfait (1.4) et à l’expression (1.14) de l’énergie totale.

• Le modèle (1.4) (1.14) (1.23) est encore hors de portée des méthodes de l’analyse mathématique qui cherchent à démontrer qu’avec des conditions aux limites à préciser, il y a existence (et unicité !) d’une solution $(\rho(x, y, t), u(x, y, t), v(x, y, t), e(x, y, t))$ du modèle de fluide parfait bidimensionnel pour tout instant $t \geq 0$ si on se donne une condition initiale $(\rho_0(x, y), u_0(x, y), v_0(x, y), e_0(x, y))$. Par ailleurs, après discrétisation à l’aide de la méthode des volumes finis (introduite dans les chapitres ultérieurs), le même modèle mécanique (1.4) (1.14) (1.23) est d’emploi courant dans l’industrie aéronautique pour déterminer les efforts aérodynamiques dus au champ de pression autour d’un avion de transport ou autre engin volant.

Equations de Saint-Venant du fluide barotrope

• Il est donc naturel de chercher à simplifier le modèle des équations d’Euler de la dynamique des gaz. Le nouveau modèle est fondé sur l’existence de l’entropie. On définit l’**entropie spécifique** s par la relation

$$(1.24) \quad p = K \rho^\gamma \exp\left(\frac{s}{C_v}\right)$$

(avec une constante $K > 0$ destinée à la cohérence de l'analyse dimensionnelle).
On a alors la

• **Proposition 1. Transport de l'entropie.**

Une solution régulière (de classe \mathcal{C}^1)

$$\Xi \ni (x, y, t) \mapsto (\rho(x, y, t), u(x, y, t), v(x, y, t), e(x, y, t)) \in \mathbb{R}^4$$

des équations d'Euler (1.4) (1.14) (1.23) de la dynamique des gaz vérifie l'équation de transport de l'entropie

$$(1.25) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = 0$$

avec $s(\bullet)$ donnée à l'aide de la relation (1.24).

• La preuve est un exercice (classique mais pas si facile !) laissé au lecteur qui pourra consulter l'ouvrage de référence de E. Godlewski et P.A. Raviart [*Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, 1996]. Une conséquence de la relation (1.25), jointe au changement de variables (1.8) est l'invariance de l'entropie le long des lignes de courant. Si on pose

$$(1.26) \quad \Theta \ni (a, \tau) \mapsto \tilde{s}(a, \tau) \equiv s(X(a, \tau), \tau) \in \mathbb{R},$$

on a alors le calcul numérique (sur lequel nous reviendrons)

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \tau} \bullet \nabla s + \frac{\partial s}{\partial t}(X, \tau) = u \bullet \nabla s + \frac{\partial s}{\partial t} = 0.$$

Si elle est constante dans l'ouvert "initial" V_0 et si "la" solution des équations d'Euler est régulière, alors l'entropie est constante.

• Cette propriété mécanique motive l'étude de gaz dont la loi d'état n'est plus (1.4), mais de type (1.24) avec $s = \text{constante}$, et on parle alors de gaz **isentropique**. De façon plus générale, un **gaz barotrope** est un gaz dont la thermostatique est simplifiée et ne comporte qu'une seule variable thermodynamique, en général la densité ρ :

$$(1.27) \quad p = P(\rho), \quad \rho > 0, \quad P(\rho) > 0, \quad \frac{dP}{d\rho} > 0,$$

où $P(\bullet)$ est une fonction régulière $]0, \infty[\ni \rho \mapsto P(\rho) \in]0, +\infty[$. On élimine alors l'équation de l'énergie, déjà utilisée grâce à (1.25) et l'hypothèse de fluide barotrope. On obtient ainsi le modèle du **fluide parfait barotrope**

Modèles hyperboliques

$$(1.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P(\rho)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + P(\rho)) = 0 \end{cases}$$

qui est mathématiquement identique aux équations des **eaux peu profondes** proposé par A. Barré de Saint-Venant en 1839. Dans le cas d'une dimension d'espace, le système (1.28) se simplifie en

$$(1.29) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P(\rho)) = 0. \end{cases}$$

p-système

• Le p -système est une **version lagrangienne** des équations de Saint-Venant (1.28) dans le cas d'une seule dimension d'espace. On suppose qu'on dispose d'une solution régulière $\rho(x, t)$, $u(x, t)$ des équations de Saint-Venant (1.29) à une dimension d'espace, avec la condition

$$(1.30) \quad 0 < \rho_* \leq \rho(x, t) \leq \rho^* < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

On construit le changement de variables $(\xi, \tau) \mapsto (x, t)$ des coordonnées de Lagrange vers les coordonnées d'Euler de proche en proche. On commence par l'**instant initial**. On cherche $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto X(\xi, 0) \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$(1.31) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, 0) = \frac{1}{\rho(X(\xi, 0), 0)}, \quad X(\xi_0, 0) = \xi_0$$

où ξ_0 est fixé dans \mathbb{R} . Cette condition initiale est tout à fait **non triviale** et couple l'équation de la masse aux coordonnées. On fait ensuite évoluer $X(\bullet, \bullet)$ avec le temps par la recherche des trajectoires (ou des caractéristiques) :

$$(1.32) \quad \frac{\partial X}{\partial \tau}(\xi, \tau) = u(X(\xi, \tau), \tau), \quad \tau \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si le champ de vitesse est assez régulier (localement lipschitzien), la fonction $\tau \mapsto X(\xi, \tau)$ est définie pour les temps τ assez petits et on suppose que cette fonction peut être, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, prolongée à $[0, +\infty[$. Les coordonnées d'Euler (x, t) prennent par définition la forme suivante, en fonction des coordonnées de Lagrange (ξ, τ) :

$$(1.33) \quad (x, t) = (X(\xi, \tau), \tau).$$

Le jacobien $J(\xi, \tau) = \frac{\partial(x, t)}{\partial(\xi, \tau)} = \begin{vmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial X / \partial \tau \\ \partial t / \partial \xi & \partial t / \partial \tau \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial \xi}$ est non nul en

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$\tau = 0$ (cf. (1.31)) et le produit (ρJ) est constant dans le temps, comme le montre le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(X(\xi, \tau), \tau) J(\xi, \tau)] &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) J + \rho \frac{\partial^2 X}{\partial \tau \partial \xi} \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial x} u \bullet J + \frac{\partial \rho}{\partial t} J + \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u(X(\xi, \tau), \tau) \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) J + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial \xi} \\
 &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) J \\
 &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{compte tenu de (1.29)}
 \end{aligned}$$

$$(1.34) \quad \rho(X(\xi, \tau)) J(\xi, \tau) = \rho(X(\xi, 0), 0) J(\xi, 0) = 1$$

donc le jacobien $J(\bullet, \bullet)$ ne s'annule jamais.

- On introduit les nouvelles fonctions inconnues, à savoir le volume spécifique $v \equiv 1/\rho$ et le champ de vitesses, noté ζ en lagrangien :

$$(1.35) \quad v(\xi, \tau) = \frac{1}{\rho(x, t)}; \quad \zeta(\xi, \tau) = u(x, t), \quad (x, t) \text{ et } (\xi, \tau) \text{ reliés par (1.33).}$$

Les dérivations se transforment très classiquement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = J \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial x}
 \end{aligned}$$

et s'inversent selon

$$(1.36) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \zeta \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

L'équation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + u \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{v} \right) + \frac{1}{v} \frac{1}{v} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{1}{v^2} \left(- \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) = 0$$

et celle de l'impulsion :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} P(\rho) = \frac{1}{v} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[P \left(\frac{1}{v} \right) \right] = 0.$$

Les équations du p -système sont la réécriture des équations monodimensionnelles du fluide barotrope avec les coordonnées lagrangiennes définies en (1.31) (1.32) et les inconnues (v, ζ) introduites en (1.35) :

Modèles hyperboliques

$$(1.37) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} P\left(\frac{1}{v}\right) = 0. \end{cases}$$

On note qu'il est facile d'éliminer la vitesse pour écrire une **équation des ondes non linéaire** :

$$(1.38) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P\left(\frac{1}{v}\right) = 0, \quad v > 0.$$

Acoustique linéaire

• On revient dans ce paragraphe au cas de deux dimensions d'espace pour fixer les idées. L'étude de l'acoustique consiste à chercher l'évolution des perturbations $(\rho'(x, y, t), u'(x, y, t), v'(x, y, t))$ autour d'un champ **constant** (ρ_0, u_0, v_0) , d'un fluide en évolution isentropique (cf. (1.24)). On a donc

$$(1.39) \quad (\rho, u, v) = (\rho_0 + \rho', u_0 + u', v_0 + v')$$

et le vecteur des inconnues (ρ', u', v') est considéré comme un infiniment petit. Par suite l'équation (1.24) entraîne par dérivation

$$(1.40) \quad p' = c_0^2 \rho', \quad c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) = \frac{\partial p_0}{\rho_0}$$

et c_0 est (voir plus loin !) la **célérité des ondes sonores**.

• On obtient le système de l'acoustique linéaire en injectant la représentation (1.40) au sein des équations de Saint-Venant (1.28), en négligeant les termes "primes" d'ordre 2 ou plus. On a par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 + \rho')(u_0 + u')] &= (u_0 + u') \frac{\partial \rho'}{\partial x} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} \\ &= u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + (\text{ordre} \geq 2). \end{aligned}$$

Il vient alors facilement

$$(1.41) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ c_0^2/\rho_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} + \\ \qquad \qquad \qquad + \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \rho_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ c_0^2/\rho_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

et par construction même, ce modèle est **linéaire**.

- Dans le cas le plus courant en pratique où l'état constant est de vitesse nulle ($u_0 = v_0 = 0$), on obtient l'**équation des ondes** linéaire en dérivant par rapport à t la première équation de (1.41) et en lui soustrayant la seconde après dérivation par rapport à x puis la troisième après dérivation par rapport à y :

$$(1.42) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right) \rho' = 0.$$

Equation de Burgers

- Il s'agit d'un modèle purement mathématique proposé par Burgers en 1941 pour comprendre les effets des termes non linéaires de dérivation spatiale d'un produit au sein des équations de la dynamique des gaz (Euler (1.23), Saint-Venant (1.28)) dans le cas simple d'une seule dimension d'espace. On cherche donc un champ $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ (de vitesse ?) satisfaisant à l'équation

$$(1.43) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi écrire cette équation sous une forme "non conservative" en explicitant la dérivée du produit :

$$(1.44) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Equation d'advection

- Si on linéarise l'équation de Burgers autour du champ constant $u_0 \equiv a$, ou si dans l'équation de conservation de la masse (1.11), on suppose que le champ de vitesse u est une constante égale à a , la perturbation ($u - a$) (ou la densité ρ) suit une équation linéaire posée à une dimension d'espace : l'équation d'advection

$$(1.45) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}.$$

C'est le modèle hyperbolique le plus simple. Sa résolution algébrique est très facile (voir le paragraphe suivant). Pourtant, son approximation numérique est délicate et nous en reparlerons au chapitre 2.

2) MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Problème de Cauchy pour l'équation d'advection

- L'équation d'advection (1.45) se résout mathématiquement de manière très élémentaire. Nous posons d'abord le problème de **Cauchy** formé de l'équation d'advection (1.45) pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ et de la condition initiale

Modèles hyperboliques

$$(2.1) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

• **Proposition 2. Caractéristiques pour l'advection.**

Soit $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto u^0(\xi) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors le problème de Cauchy pour l'équation d'advection, composé de l'équation (1.45) et de la condition initiale (2.1), a une solution unique $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , déterminée par

$$(2.2) \quad u(x, t) = u^0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Preuve de la proposition 2.

• Il est d'abord immédiat de vérifier que la relation (2.2) définit une solution de (1.45) :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right\} u^0(x - at) = \left(-a \frac{d}{d\xi} u^0 + a \frac{d}{d\xi} u^0 \right)(x - at) = 0.$$

L'unicité s'obtient à l'aide de la méthode des caractéristiques, qui consiste à chercher les courbes intégrales $\tau \mapsto X(\tau)$ du "champ de vecteurs" $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto a \in \mathbb{R}$. Soit $X(\bullet)$ une solution de l'équation différentielle

$$(2.3) \quad \frac{dX}{d\tau} = a, \quad \tau > 0$$

et $\tau \mapsto v(\tau)$ la fonction de variable réelle définie par

$$(2.4) \quad v(\tau) = u(X(\tau), \tau)$$

où $\mathbb{R} \ni \mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ est une solution de classe \mathcal{C}^1 du problème de Cauchy (1.45) (2.1). On a alors

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)(X(\tau), \tau) = 0$$

et la fonction $v(\bullet)$ est constante. On dit aussi que "**la solution est constante sur les droites caractéristiques**".

• Etant donné un point $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$ arbitraire, soit $\tau \mapsto X(\tau)$ la solution de (2.3) valant x au temps t : $X(t) = x$. On a alors par intégration de (2.3) : $X(\tau) = x + a(\tau - t)$ et en particulier $X(0) = x - at$. La constance de $v(\bullet)$ sur la droite précédente entraîne $v(t) = v(0)$, c'est-à-dire

$$u(x, t) = u(x - at, 0) = u^0(x - at)$$

au vu de (2.1). D'où l'unicité ; la proposition 2 en résulte. □

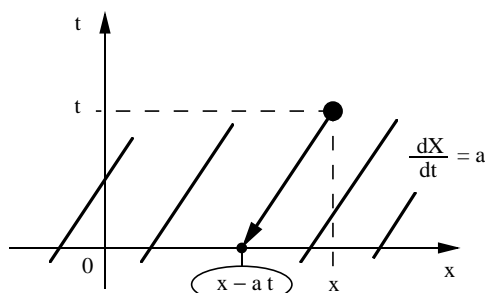


Figure 1. Droites caractéristiques pour l'équation d'advection.

- La figure 1 illustre le résultat (2.2) ; l'ensemble des solutions $\tau \mapsto X(\tau)$ de l'équation (2.3) déterminent une famille de (demi) droites parallèles (de pente a) qui recouvrent l'ensemble du demi-plan $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. Au point courant (x, t) , il existe une unique droite caractéristique de la forme (2.3) le long de laquelle toute solution (régulière) de (1.45) est constante. On “remonte” la caractéristique jusqu'à l'instant $t = 0$, où la solution $u(\bullet, 0)$ est connue à l'aide de la condition initiale (2.1).

Conditions aux limites pour l'équation d'advection

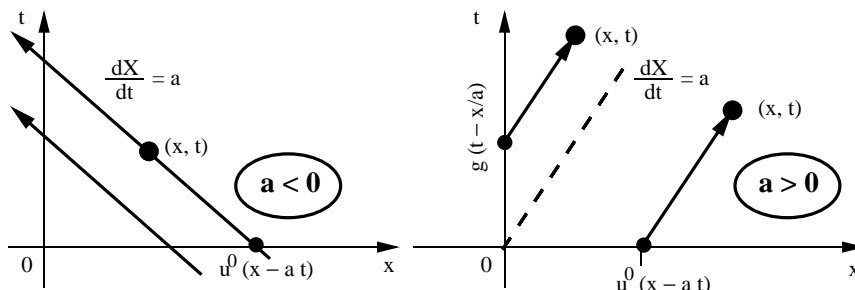


Figure 2. Problème à la limite pour l'équation d'advection. Si $a \leq 0$, les caractéristiques “sortent” du domaine d'étude $\{x > 0, t > 0\}$ et aucune condition limite n'est nécessaire [à gauche]. Si $a > 0$, les droites caractéristiques “entrent” (pour les temps croissants) dans le domaine d'étude et il faut se donner une condition limite de type (2.5) pour déterminer $u(\bullet, \bullet)$ solution de l'équation d'advection (1.45).

- Nous montrons dans ce paragraphe que le problème à la limite formé de (1.45) dans le quart de plan $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, de la condition initiale (2.1) sur la demi-droite $[0, \infty[$ et d'une condition limite en $x = 0$ et $t > 0$ du type

Modèles hyperboliques

$$(2.5) \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

soit de façon précise

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u^0(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad \{a > 0\}$$

conduit à un problème bien posé (qui admet une solution unique) lorsque $a > 0$ alors que pour $a \leq 0$, il n'en est rien : le problème à valeur initiale et **sans** condition limite, soit

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u^0(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad \{a \leq 0\}$$

a une solution unique.

• **Proposition 3. Condition limite pour l'équation d'advection.**

Soit $[0, \infty[\ni \xi \mapsto u^0(\xi) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 (condition initiale) et $[0, \infty[\ni \theta \mapsto g(\theta) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 bien définie pour $a > 0$ (condition limite).

(i) Si $a > 0$, le problème (2.6) à **valeur initiale et à la limite** a une unique solution de classe \mathcal{C}^1 , sous les deux conditions :

$$(2.8) \quad u^0(0) = g(0)$$

$$(2.9) \quad \frac{dg}{dt}(0) + a \frac{du^0}{dx}(0) = 0.$$

Elle s'explique via les relations

$$(2.10) \quad u(x, t) = u^0(x - at), \quad x \geq at$$

$$(2.11) \quad u(x, t) = g\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad x \leq at.$$

(ii) Si $a \leq 0$, le problème (2.6) **uniquement à valeur initiale** a une solution unique $u(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 , calculée à l'aide de la relation (2.9).

Preuve de la proposition 3.

• Nous étudions d'abord le cas $a > 0$. La condition (2.8) est nécessaire si on cherche $u(\bullet, \bullet)$ continue au point $(0, 0)$ et la condition (2.8) exprime que si $u(\bullet, \bullet)$ est continuellement dérivable au point $(0, 0)$, l'équation d'advection est satisfaite en ce point.

• La méthode des caractéristiques permet ensuite de construire la forme (2.9) (2.10) nécessaire pour une éventuelle solution. Si $x \geq at$, la droite de pente a passant par (x, t) coupe l'axe des x en $(x - at, 0)$ et comme toute solution de (1.45) est constante le long d'une telle droite, la relation (2.9) est nécessaire. Si

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$x \leq at$, la droite caractéristique passant par (x, t) a une intersection avec l'axe du temps en $(0, t - \frac{x}{a})$ avec $t - \frac{x}{a} \geq 0$, où $g(\bullet)$ est effectivement définie. Donc la relation (2.10) est nécessaire.

• Il reste à vérifier que les relations (2.9) (2.10) déterminent une solution de classe \mathcal{C}^1 du problème (2.6). Le seul point non banal est de vérifier qu'effectivement $u(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur la demi-droite $\{(t, at), t \geq 0\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, at) &= \frac{du^0}{dx}(0) && \text{si } x > at \\ &= -\frac{1}{a} \frac{dg}{dt}(0) && \text{si } x < at \end{aligned}$$

et la non-ambiguïté de l'existence de $\frac{\partial u}{\partial x}(t, at)$ résulte de la relation (2.9). On a un calcul analogue pour $\frac{\partial u}{\partial t}(t, at)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, at) &= -a \frac{du^0}{dx}(0) && \text{si } x > at \\ &= \frac{dg}{dt}(0) && \text{si } x < at. \end{aligned}$$

• Dans le cas $a \leq 0$, l'ensemble des caractéristiques issues de $[0, \infty[\times \{0\}$ **recouvre** le quart d'espace $[0, \infty[\times [0, \infty[$:

$$(x, t) = (x - at, 0) + (at, t)$$

avec $x - at > 0$ si $x > 0$, $t > 0$ et $a \leq 0$. Par suite, $u(x, t)$ est nécessairement égal à $u(x - at, 0) = u^0(x - at)$ et la relation (2.9) est toujours nécessaire (on remarque d'ailleurs que $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x \leq at, t > 0\}$ contient $[0, \infty[\times [0, \infty[$ si $a \leq 0$). Il est facile de vérifier que la relation (2.9) définit une solution du problème (2.6) ; la méthode des caractéristiques est tout à fait analogue au cas du "pur" problème de Cauchy. \square

• On retiendra de la proposition 3 le curieux comportement des problèmes hyperboliques vis-à-vis des **conditions aux limites** : on en a parfois besoin (cas $a > 0$, caractéristique entrante dans le domaine d'étude) et parfois pas ($a \leq 0$, caractéristique sortante) ainsi qu'illustré figure 2.

Système hyperbolique linéaire

• Nous abandonnons le modèle le plus simple de l'équation d'advection (complètement résolu !), laissons pour le chapitre suivant l'équation non linéaire de Burgers (1.45), et généralisons (au moins dans le cas d'une dimension d'espace) le modèle (1.42) de l'acoustique linéaire.

Modèles hyperboliques

• **Définition 1. Système hyperbolique linéaire.**

Soit N un entier supérieur ou égal à 1, A une matrice réelle fixée à N lignes et N colonnes. Le système de lois de conservation

$$(2.12) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

d'inconnue $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est dit **hyperbolique** si la matrice A est **diagonalisable** sur \mathbb{R} ; il existe des valeurs propres réelles

$$(2.13) \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_N, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$$

et des vecteurs propres $r_k \in \mathbb{R}^N$ associés à ces valeurs propres :

$$(2.14) \quad A \bullet r_k = \lambda_k r_k.$$

qui forment une **base** de l'espace \mathbb{R}^N .

• Il est facile d'expliciter la solution d'un système hyperbolique linéaire dans le cas d'une dimension d'espace. On décompose le vecteur $W(\bullet, \bullet)$ inconnu sur la base des vecteurs (fixés) r_k :

$$(2.15) \quad W = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x, t) r_k.$$

Les inconnues scalaires $\varphi_k(\bullet, \bullet)$ sont aussi appelées les **variables caractéristiques**. Elles sont solution de N équations d'advection de célérité λ_k :

$$(2.16) \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0,$$

résultat qui s'obtient facilement en injectant la représentation (2.15) au sein de l'équation (2.12) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} r_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} A \bullet r_k \right) = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) r_k$$

vu (2.15) et en utilisant le fait que la famille $(r_k)_{1 \leq k \leq N}$ est une base de \mathbb{R}^N .

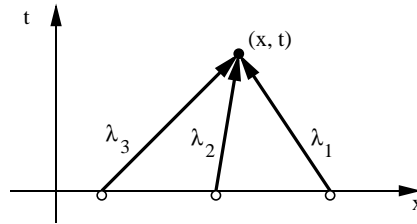


Figure 3. *Droites caractéristiques pour un système hyperbolique linéaire.*

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

- Pour calculer la solution $W(\bullet, \bullet)$ au point (x, t) , on décompose le vecteur inconnu sur la base $(r_k)_k$ des vecteurs propres de A . Puis la k^0 variable caractéristique φ_k est solution d’une équation d’advection (2.16), laquelle possède des solutions constantes le long **des** droites caractéristiques d’équation $\frac{dX}{dt} = \lambda_k$. On a donc

$$(2.17) \quad \varphi_k(x, t) = \varphi_k^0(x - \lambda_k t), \quad 1 \leq k \leq N$$

où la condition initiale $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto W^0(\xi) \in \mathbb{R}^N$ est supposée décomposée comme à la relation (2.15) :

$$(2.18) \quad W^0(\xi) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(\xi) r_k, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si on regroupe (2.17) et (2.15), on a :

$$(2.19) \quad W(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(x - \lambda_k t) r_k.$$

Le point $(x - \lambda_k t, 0)$ sur l’axe des abscisses envoie l’“information” $\varphi_k^0(x - \lambda_k t)$ jusqu’au point (x, t) à la célérité λ_k . Puis on reconstitue l’ensemble de la solution (2.18) de l’équation (2.12) associée à la condition initiale

$$(2.20) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

à l’aide de la relation (2.19) qui est une décomposition sur les vecteurs propres de A . Nous venons d’établir la

- **Proposition 4. Problème de Cauchy pour un système hyperbolique linéaire.** Soit A une matrice fixée comme à la définition 1 et $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \varphi_k^0(x) \in \mathbb{R}$ un ensemble de N fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Alors la solution classique du problème hyperbolique (2.12) associé à la condition initiale (2.20) définie en (2.18) existe, est unique et est calculée grâce à la relation (2.19).

- Nous terminons ce paragraphe par le problème à valeur initiale et à la limite posé sur le domaine $[0, L] \times [0, +\infty[$ d’espace-temps (figure 4). A l’équation (2.12) posée pour $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$, on associe la condition initiale (2.18) définie via des fonctions $[0, L] \ni \xi \mapsto \varphi_k^0(\xi) \in \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 ($1 \leq k \leq N$). Les conditions aux limites sont **différentes** en $x = 0$ et en $x = L$. Il faut dans chaque cas déterminer l’ensemble des directions caractéristiques “entrantes” dans le domaine d’étude $[0, L] \times [0, \infty[$.

Modèles hyperboliques

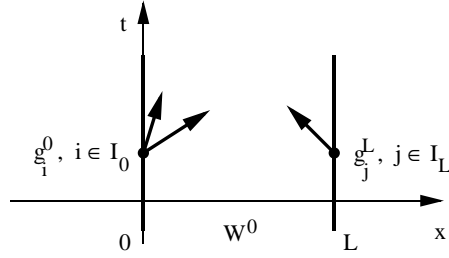


Figure 4. Problème à valeur initiale et aux limites pour un système hyperbolique linéaire.

- On se donne d'abord l'ensemble des directions caractéristiques sur lesquelles il **faut** se donner une condition limite en $x = 0$:

$$(2.21) \quad I_0 = \{i \in \{1, \dots, N\}, \lambda_i > 0\}$$

et de même en $x = L$:

$$(2.22) \quad I_L = \{j \in \{1, \dots, N\}, \lambda_j < 0\}.$$

Les conditions en $x = 0$ portent sur les directions $i \in I_0$:

$$(2.23) \quad \varphi_i(0, t) = g_i^0(t), \quad i \in I_0, t \geq 0$$

et de même en $x = L$ avec les indices $j \in I_L$

$$(2.24) \quad \varphi_j(L, t) = g_j^L(t), \quad j \in I_L, t \geq 0.$$

Notons que les données de conditions limites $[0, \infty[\ni \theta \mapsto g_i^0(\theta) \in \mathbb{R}$ et $[0, +\infty[\ni \theta \mapsto g_j^L(\theta) \in \mathbb{R}$ ($i \in I_0, j \in I_L$) sont relatives aux variables caractéristiques définies à la relation (2.15).

- Le problème (2.12) avec la condition initiale (2.18) (2.20) et les conditions aux limites (2.23) (2.24) a une solution unique régulière $W(\bullet, \bullet)$ représentée en (2.15) et évaluée par (2.19) pour $0 \leq x - \lambda_k t \leq L$, et par

$$(2.25) \quad \varphi_i(x, t) = g_i^0\left(t - \frac{x}{\lambda_i}\right), \quad x - \lambda_i t \leq 0, \quad i \in I_0$$

$$(2.26) \quad \varphi_j(x, t) = g_j^L\left(t - \frac{x-L}{\lambda_j}\right), \quad L \leq x - \lambda_j t, \quad j \in I_L$$

dans les cas où les conditions limites (2.23) et (2.24) sont activées. On a aussi à noter les relations de **compatibilité** qui assurent que la solution obtenue est continue :

$$(2.27) \quad \varphi_i^0(0) = g_i^0(0), \quad i \in I_0$$

$$(2.28) \quad \varphi_j^0(L) = g_j^L(0), \quad j \in I_L$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

et celles qui traduisent qu'on dispose d'une solution de classe \mathcal{C}^1 :

$$(2.29) \quad \frac{dg_i^0}{dt}(0) + \lambda_i \frac{d\varphi_i^0}{dx}(0) = 0, \quad i \in I_0$$

$$(2.30) \quad \frac{dg_j^L}{dt}(0) + \lambda_j \frac{d\varphi_j^L}{dx}(L) = 0, \quad j \in I_L.$$

3) SYSTÈMES HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES
DE LOIS DE CONSERVATION

Généralités

• Nous donnons dans cette dernière partie un cadre théorique qui permet de “ranger” l'équation de Burgers (1.45), le p -système (1.38), les équations (1.28) des eaux peu profondes et le système (1.23) des équations d'Euler des fluides parfaits. Nous nous plaçons à deux dimensions d'espace pour alléger les notations ; la généralisation aux dimensions supérieures est immédiate et le cas d'une seule dimension d'espace sans difficulté supplémentaire. Elle généralise naturellement la notion de système hyperbolique linéaire, qui permet de résoudre le problème de Cauchy. *Modulo* l'introduction d'une condition d'entropie (voir le chapitre 4), cette notion de système hyperbolique non linéaire permet de résoudre le problème de Riemann, cas particulier du problème de Cauchy où la donnée est formée de deux états constants.

• **Définition 2. Système hyperbolique non linéaire.**

Le système de lois de conservation

$$(3.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, W(x, t) \in \Omega$$

est dit hyperbolique si pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi]$ et tout $W \in \Omega$ la matrice jacobienne

$$(3.2) \quad A(W, \theta) \equiv \cos \theta df(W) + \sin \theta dg(W), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad W \in \Omega$$

est **diagonalisable** avec des valeurs propres $\lambda_k(W, \theta)$ réelles et des vecteurs propres réels $r_k(W, \theta)$:

$$(3.3) \quad \begin{cases} A_k(W, \theta) \cdot r_k(W, \theta) = \lambda_k(W, \theta) r_k(W, \theta), \\ \theta \in [0, 2\pi], \quad 1 \leq k \leq N, \quad W \in \Omega \end{cases}$$

qui forment une **base** de \mathbb{R}^N .

• La première remarque est que la propriété d'hyperbolicité est **invariante** par changement de fonction inconnue $\Omega \ni W \mapsto V = \mathcal{V}(W) \in \mathcal{Y}$ supposé régulier

Modèles hyperboliques

et bijectif ; elle ne dépend pas de l'écriture "conservative" des équations (3.1). Supposons en effet que l'on effectue le changement de fonction inconnue proposé ci-dessus :

$$(3.4) \quad \Omega \ni W \mapsto V = \mathcal{V}(W) \in \mathcal{Y},$$

et cherchons l'équation satisfaite par V . On pose

$$(3.5) \quad T(W) = d\mathcal{V}(W), \quad W \in \Omega;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) &= \frac{\partial W}{\partial V} \bullet \frac{\partial V}{\partial t} + df(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + dg(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \\ &= T^{-1}(W) \bullet \left[\frac{\partial V}{\partial t} + T(W) df(W) \bullet T^{-1}(W) \bullet \frac{\partial V}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + T(W) \bullet dg(W) \bullet T^{-1}(W) \bullet \frac{\partial V}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned}$$

L'équation satisfaite par $V(x, y, t) \in Y$ s'écrit donc

$$(3.6) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + B(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial x} + C(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

avec

$$(3.7) \quad \begin{cases} B(V) = T(W) \bullet df(W) \bullet T^{-1}(W) \\ C(V) = T(W) \bullet dg(W) \bullet T^{-1}(W). \end{cases}$$

c'est une "**forme non conservative**" des équations (3.1).

• **Proposition 5. Condition suffisante d'hyperbolicité**

Pour que le système (3.1) de lois de conservation soit hyperbolique, il suffit de vérifier qu'avec un changement de fonction inconnue (3.4), les matrices $B(V)$ et $C(V)$ définissent, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, une matrice $D(V, \theta)$ via

$$(3.8) \quad D(V, \theta) = \cos \theta B(V) + \sin \theta C(V), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad V \in \mathcal{Y}$$

qui a des valeurs propres réelles et dont les vecteurs propres forment une base de \mathbb{R}^N , *id est* est **diagonalisable** sur \mathbb{R} .

Preuve de la proposition 5.

• Elle est immédiate ; le calcul effectué plus haut montre que les matrices $A(W, \theta)$ et $D(V, \theta)$ sont **semblables** :

$$(3.9) \quad D(V, \theta) = T(W) \bullet A(W, \theta) \bullet T^{-1}(W).$$

Elles ont donc **mêmes propriétés spectrales** et la diagonalisabilité sur \mathbb{R} de l'une entraîne la même propriété pour l'autre. \square

Equations d'Euler de la dynamique des gaz

- Nous montrons maintenant que le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz (1.23) est un **système hyperbolique non linéaire** de lois de conservation et laissons au lecteur le soin de vérifier à titre d'exercice que la même propriété est vraie pour le modèle de Saint-Venant, le p -système ou l'équation de Burgers.

- Le premier point est de préciser la valeur de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ qui englobe toutes les variables "conservatives" W , avec

$$(3.10) \quad W = (\rho, q, r, \mathcal{E})^t$$

$$(3.11) \quad q = \rho u, \quad r = \rho v$$

$$(3.12) \quad \mathcal{E} = \rho e + \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2) \equiv \rho E.$$

On a donc

$$(3.13) \quad \Omega = \left\{ (\rho, q, r, \mathcal{E})^t, \quad \rho > 0, \quad \mathcal{E} - \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{\rho} + \frac{r^2}{\rho}\right) > 0 \right\}.$$

La vérification de la convexité de Ω est laissée au lecteur.

- Le second point est d'explicitier les fonctions $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^4$ et $\Omega \ni W \mapsto g(W) \in \mathbb{R}^4$ pour ramener le système (1.23) dans le cadre général (3.1), compte tenu de la loi des gaz parfaits (1.4) qui s'écrit aussi

$$(3.14) \quad p = (\gamma - 1) \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2\rho} (q^2 + r^2) \right)$$

et définit bien une application $\Omega \ni W \mapsto p(W) \in]0, +\infty[$. On a alors

$$(3.15) \quad f(W) = (\rho, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(3.16) \quad g(W) = (\rho, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t$$

et par composition des applications $\Omega \ni W \mapsto u(W) = q/\rho \in \mathbb{R}$, $\Omega \ni W \mapsto v(W) = r/\rho \in \mathbb{R}$ et de $\Omega \ni W \mapsto p(W) \in]0, \infty[$ établie en (3.14), la construction de $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^4$ et $\Omega \ni W \mapsto g(W) \in \mathbb{R}^4$ n'offre pas de difficulté. On a par exemple

$$(3.17) \quad f(W) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left(\mathcal{E} - \frac{q^2 + r^2}{2\rho} \right) \\ \frac{qr}{\rho} \\ \mathcal{E} \frac{q}{\rho} + (\gamma - 1) \frac{q}{\rho} \left(\mathcal{E} - \frac{q^2 + r^2}{2\rho} \right) \end{pmatrix}.$$

- Le troisième point consiste à faire le changement de variables (3.4) le plus approprié, et nous proposons de poser

Modèles hyperboliques

$$(3.18) \quad V = (\rho, u, v, s)^t$$

avec l'entropie s définie en (1.24). La pression p ne dépend plus alors que de ρ et s ; on a

$$(3.19) \quad \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \equiv c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} > 0,$$

via un calcul algébrique immédiat par dérivation de (1.24). L'écriture des équations de la dynamique des gaz dans les variables non conservatives V ne demande que du soin et a été suggéré à la proposition 1. On a une évolution donnée par la relation (3.6), avec

$$(3.20) \quad B(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$(3.21) \quad C(V) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Il reste à vérifier que la matrice $D(V, \theta)$ de la relation (3.8) est diagonalisable sur le corps des réels. On pose

$$(3.22) \quad \xi = u \cos \theta + v \sin \theta.$$

On a alors

$$(3.23) \quad D(V, \theta) = \begin{pmatrix} \xi & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \cos \theta & \xi & 0 & \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{c^2}{\rho} \sin \theta & 0 & \xi & \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

qui montre clairement que ξ est valeur propre. On a ensuite

$$\begin{vmatrix} \xi - \lambda & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \\ \frac{c^2}{\rho} \cos \theta & \xi - \lambda & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \sin \theta & 0 & \xi - \lambda \end{vmatrix} = \begin{cases} (\xi - \lambda)^3 - \rho \cos \theta \left(\frac{c^2}{\rho} \cos \theta \right) (\xi - \lambda) + \\ - \rho \sin \theta \left(\frac{c^2}{\rho} \sin \theta \right) (\xi - \lambda) \end{cases}$$

$$= (\xi - \lambda) ((\xi - \lambda)^2 - c^2)$$

qui montre que ξ est **valeur propre double** ; les deux autres valeurs propres sont

$$(3.24) \quad \lambda_{\pm} = \xi \pm c.$$

• **Proposition 6. Hyperbolicité des équations d'Euler.**

Le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz, défini à l'aide des relations (3.10) à (3.16) et (3.1) est un système hyperbolique de lois de conservation. Ses valeurs propres s'écrivent

$$(3.25) \quad \lambda_1 = \xi - c < \lambda_2 = \lambda_3 = \xi < \lambda_4 = \xi + c,$$

avec ξ donné à la relation (3.22).

Preuve de la proposition 6.

• L'explicitation du noyau de la matrice $D(V, \theta) - \xi I$ avec D donnée en (1.23) permet de s'assurer que l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = \xi$ est bien de dimension 2. Si $X = (\zeta, \eta, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $D \bullet X = \xi X$, on a :

$$\begin{cases} \rho \cos \theta \eta + \rho \sin \theta \varphi & = 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \cos \theta \zeta + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \psi & = 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \sin \theta \zeta + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \psi & = 0 \end{cases}$$

et les deux dernières relations sont proportionnelles à $(c^2 \zeta + \frac{\partial p}{\partial s} \psi)$, ce qui établit la propriété. Il suffit alors d'utiliser la proposition 5. □

Différences finies pour l'équation d'advection

La méthode des différences finies, parmi les plus utilisées, est très populaire chez les praticiens. Nous en rappelons dans ce chapitre les grands principes dans le cas particulier de l'équation d'advection : discrétisation (paragraphe 1), construction de quelques schémas classiques (paragraphe 2), introduction à la stabilité (paragraphe 3), à la convergence (paragraphe 4) et à l'étude de la dissipation et de la dispersion (paragraphe 5).

1) DISCRÉTISATION

- Nous étudions l'approximation par différences finies de l'équation d'advection

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

On sait qu'associée à la condition initiale

$$(1.2) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$$

cette équation a pour solution

$$(1.3) \quad u(x, t) = u^0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Cette relation exprime l'advection du profil $u^0(\bullet)$ au cours du temps. On peut se demander pourquoi approcher avec une méthode numérique un problème dont on connaît par ailleurs la solution exacte. La réponse est double. D'une part, l'équation (1.1) est le modèle ultime de phénomènes de propagation non-linéaire beaucoup plus complexes pour lesquels on ne connaît pas de solution exacte en général, et les méthodes proposées pour l'advection (1.1) doivent être les plus génériques et exactes possible. D'autre part, l'approximation numérique de l'équation d'advection est un problème mathématique difficile en soi dans le cas où la donnée initiale est discontinue.

- La méthode des différences finies remplace l'espace-temps continu $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ par un ensemble discret de points. On introduit d'abord un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$, puis l'ensemble (x_j, t^n) des points dont les coordonnées sont des multiples entiers de Δx et Δt :

$$(1.4) \quad (x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Au lieu de rechercher une fonction $u(\bullet)$ définie sur un espace-temps continu, on cherche une fonction discrète $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (j, n) \mapsto u_j^n \in \mathbb{R}$ de sorte que les valeurs u_j^n sont une "bonne approximation" des valeurs de $u(\bullet)$ sur la grille (x_j, t^n) :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(1.5) \quad u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

• On approche ensuite “au mieux” l’opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x}$. Rappelons que l’on a

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (u(x+h, t) - u(x, t))$$

mais à l’échelle de la grille discrète, on ne peut prendre des accroissements h de la variable d’espace infiniment petits ; on est limité par l’échelle $h = \Delta x$ de la grille. On définit donc naturellement la différence finie Δ_x^+ **décentrée à droite**

$$(1.7) \quad (\Delta_x^+ u)_j^n = \frac{1}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ est une fonction assez régulière (de classe \mathcal{C}^2 ici) et $u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t)$ l’opérateur $(\Delta_x^+ u)_j^n$ approche la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$ à l’ordre 1 de précision par rapport à Δx :

$$(1.8) \quad (\Delta_x^+ u)_j^n = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x) ; \quad u \text{ de classe } \mathcal{C}^2.$$

On a de même un opérateur aux différences finies **décentré à gauche** :

$$(1.9) \quad (\Delta_x^- u)_j^n \equiv \frac{1}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Quand on fait la demi-somme des deux opérateurs définis aux relations (1.7) et (1.9), on définit l’opérateur aux **différences finies centré** Δ_x^0 :

$$(1.10) \quad (\Delta_x^0 u)_j^n \equiv \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

qui est précis à l’ordre 2 lorsque u est de classe \mathcal{C}^3

$$(1.11) \quad (\Delta_x^0 u)_j^n = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O(\Delta x^2) ; \quad u \text{ de classe } \mathcal{C}^3$$

ainsi qu’on la montre aisément à l’aide de la formule de Taylor. On définit de même les opérateurs aux différences en temps :

$$(1.12) \quad (\Delta_t^- u)_j^n \equiv \frac{1}{\Delta t} (u_j^n - u_j^{n-1}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(1.13) \quad (\Delta_t^+ u)_j^n \equiv \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(1.14) \quad (\Delta_t^0 u)_j^n \equiv \frac{1}{2\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) CONSTRUCTION DE QUELQUES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES

• Le principe de construction des schémas aux différences les plus classiques est le suivant : on approche d’abord la condition initiale $u^0(\bullet)$:

Différences finies pour l'équation d'advection

$$(2.1) \quad u_j^0 \simeq u^0(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}$$

et il faut ensuite déterminer l'ensemble des valeurs $(u_j^n)_{n \geq 1, j \in \mathbb{Z}}$. L'idée est de définir une méthode pour passer de $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ à $(u_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ et de l'itérer pour $n \in \mathbb{N}$. On suppose donc dans la suite l'ensemble $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ donné et il faut déterminer $(u_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$.

- La première idée est d'utiliser le schéma $(\Delta_x^0 u)_j^n$ qui est le plus précis pour approcher la dérivée partielle en espace et l'opérateur aux différences $(\Delta_t^+ u)_j^n$ en temps. On obtient ainsi le “**schéma explicite centré instable**”

$$(2.2) \quad \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2 \Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ce schéma est **explicite** : si $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}\}$ est connu pour une valeur fixée de l'entier n , la valeur u_j^{n+1} se calcule “explicitement” à l'aide de la relation (2.2), laquelle peut être très facilement programmée au sein d'un ordinateur.

- On peut aussi construire un “**schéma implicite centré**” en écrivant l'équation (1.1) au temps t^{n+1} , en utilisant le schéma aux différences $(\Delta_x^0 u)^{n+1}$ et le schéma décentré $(\Delta_t^- u)^{n+1}$ pour approcher la dynamique en temps. Il vient

$$(2.3) \quad \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2 \Delta x}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ce schéma ne permet pas un calcul immédiat de u_j^{n+1} en fonction des données $\{u_k^n, k \in \mathbb{Z}\}$; il définit simplement un **système** d'une infinité **d'équations** avec le modèle le plus simple choisi ici de ne pas prendre en compte les conditions aux limites. Il faut donc résoudre un **système linéaire** pour calculer $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ à partir de $\{u_k^n, k \in \mathbb{Z}\}$, ce qui entraîne le choix d'un algorithme approprié. Rien ne prouve *a priori* que le système (2.3) a une solution unique. De manière générale, un schéma implicite demande la résolution d'une équation non banale avant d'aboutir à un calcul effectif de la fonction inconnue au nouveau pas de temps.

- **Définition 1. Erreur de troncature.**

Un schéma à deux niveaux en temps (d'indices n et $n + 1$) et $(2p + 1)$ points en espace (qui utilise les indices $j - p$ à $j + p$ pour l'évolution du $j^{\text{ième}}$ point de grille x_j) qui s'écrit sous la forme

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \phi(\Delta x, \Delta t; u_{j-p}^n, \dots, u_{j+p}^n; u_{j-p}^{n+1}, \dots, u_{j+p}^{n+1}) = 0, \\ j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

à, en (x, t) fixé dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$, et pour $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ solution régulière (au moins de classe \mathcal{C}^2) de l'équation d'advection (1.1), une erreur de troncature $\mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t; u)$ définie comme suit :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t; u) \equiv \frac{1}{\Delta t} [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] + \\ \quad + \phi(\Delta x, \Delta t; u(x - p\Delta x, t), \dots, u(x + p\Delta x, t); \\ \quad \quad \quad u(x - p\Delta x, t + \Delta t), \dots, u(x + p\Delta x, t + \Delta t)). \end{array} \right.$$

• **Définition 2. Ordre d'un schéma aux différences.**

Un schéma à deux niveaux en temps et $(2p + 1)$ points en espace de type (2.4) est dit d'ordre q en temps et d'ordre r en espace si, pour toute solution $u(\bullet)$ assez régulière, l'erreur de troncature $\mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t; u)$ admet le développement limité suivant :

$$(2.6) \quad \mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t; u) = O(\Delta t^q) + O(\Delta x^r), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

pour $u(\bullet)$ solution régulière de l'équation d'advection (1.1). Si $q > 0$ et $r > 0$, le schéma est dit **consistant** avec l'équation d'advection (1.1).

• **Proposition 1. Ordre des schémas centré instable et implicite.**

Les schémas explicite centré instable (2.2) et implicite centré (2.3) sont d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Preuve de la proposition 1.

• Rappelons qu'il suffit d'injecter la solution exacte $u(\bullet, \bullet)$ vue aux points (x, t) , $(x, t + \Delta t)$, $(x + \Delta x, t)$, $(x - \Delta x, t)$ [pour le schéma (2.2) ou moins] au sein de l'expression qui définit le schéma pour calculer l'erreur de troncature. On a d'abord facilement

$$(2.7) \quad \frac{1}{\Delta t} [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + O(\Delta t)$$

$$(2.8) \quad \frac{1}{2\Delta x} [u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)] = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + O(\Delta x^2)$$

dès que $u(\bullet)$ est de classe \mathcal{C}^2 en temps et \mathcal{C}^3 en espace, donc par exemple si $u(\bullet)$ est de classe \mathcal{C}^3 par rapport au couple (x, t) . Par addition de (2.7) et (2.8) multipliée par a , il vient

$$(2.9) \quad \mathcal{T}_{(2,2)}(\Delta x, \Delta t; x, t; u) = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

lorsque u vérifie la relation $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. La preuve pour le schéma implicite (2.3) est tout à fait analogue et est laissée au lecteur. \square

• On peut aussi utiliser une différence finie Δ_t^0 **centrée** en temps et Δ_x^0 centrée en espace. Le schéma obtenu, à savoir

$$(2.10) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \frac{a}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

à **trois niveaux** en temps, est appelé schéma **saute-mouton**. Le schéma saute-mouton "saute" au-dessus du "mouton" (x_j, t^n) . Il est explicite puisque si $\{u_k^{n-1}$,

Différences finies pour l'équation d'advection

$k \in \mathbb{Z}$ et $\{u_\ell^n, \ell \in \mathbb{Z}\}$ sont connus, la relation (2.10) permet effectivement de calculer u_j^{n+1} en fonction des données. Par contre, le fait qu'il utilise trois niveaux de temps ne permet pas de l'utiliser pour le début du calcul, *i.e.* entre les instants $t^0 = 0$ et $t^1 = \Delta t$.

- Le nombre de schémas numériques possibles pour discrétiser l'équation d'advection n'est pas limité et nous invitons le lecteur à construire des schémas d'ordre 3 en espace et d'ordre 2 en temps (par exemple). Nous en proposons dans ce qui suit quatre autres, d'ordre 1 ou d'ordre 2 seulement.

- Le schéma de **Lax-Friedrichs** s'obtient à partir du schéma explicite centré instable en remplaçant u_j^n dans la dérivée discrète en temps par la demi-somme $\frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$. Il s'écrit donc algébriquement :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} [u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)] + \frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \\ j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Comme le schéma saute-mouton (2.10), il découple les points "pairs" (*i.e.* $j+n$ est un entier pair) et "impairs" ($j+n$ est impair). Ceci signifie que dans le membre de gauche des relations (2.10) et (2.11), la somme des indices en espace **et** en temps est toujours de même parité. On a par exemple pour le schéma de Lax-Friedrichs :

$$(n+1) + j = (n + (j-1)) + 2 = n + (j+1).$$

Cette propriété est un défaut du point de vue algorithmique. En effet, l'ensemble des inconnues $\{u_j^n, j+n \in 2\mathbb{Z}\}$ suit une évolution totalement **découplée** de l'ensemble $\{u_j^n, n+j \in (2\mathbb{Z}+1)\}$, ce qui n'est pas naturel car les valeurs u_j^n et u_{j+1}^n pour deux points "voisins" (j, n) et $(j+1, n)$ devraient a priori être voisines (si u est régulière). Cette propriété continue n'est pas fabriquée par l'algorithme par un mélange "ad hoc", si elle est en défaut à un instant t^n donné.

- Le schéma **décentré amont** utilise la méthode des caractéristiques. On sait que $u(x_j, t^n + \Delta t)$ peut s'exprimer, pour la solution exacte $u(\bullet)$, en fonction de la solution à l'instant t^n :

$$(2.12) \quad u(x_j, t^n + \Delta t) = u(x_j - a\Delta t, t^n).$$

Le schéma décentré amont interpole, pour $a > 0$, la valeur "exacte" $u(x_j - a\Delta t, t^n)$ à l'aide des deux points de grille (x_{j-1}, t^n) et (x_j, t^n) :

$$(2.13) \quad u(x_j - a\Delta t, t^n) \simeq \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) u(x_j, t^n) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} u(x_{j-1}, t^n), \quad a > 0.$$

On écrit donc le schéma décentré amont pour $a > 0$ comme un schéma **décentré à gauche** :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(2.14) \quad \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si $a < 0$, on trouve un schéma **décentré à droite** :

$$(2.15) \quad \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le schéma décentré amont est explicite. On imagine qu'il est particulièrement efficace lorsque la caractéristique issue du point $(x_j, t^n + \Delta t)$ passe "entre" les points (x_{j-1}, t^n) et (x_j, t^n) .

- La version implicite du schéma précédent est le schéma de **Courant** (1952) :

$$(2.16) \quad \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a > 0$$

avec une version "à droite" pour $a < 0$.

- Le schéma de **Lax-Wendroff** (1960) reprend l'idée d'interpoler l'expression (2.12) issue de la méthode des caractéristiques à l'aide des trois points x_{j-1}, x_j et x_{j+1} à l'instant $n\Delta t$. Au lieu d'utiliser une interpolation affine comme dans le cas du schéma décentré, on utilise une **interpolation de Lagrange de degré 2**. Si ξ désigne la variable $x - x_j$, la fonction interpolée $[-\Delta x, \Delta x] \ni \xi \mapsto \tilde{u}(\xi) \in \mathbb{R}$ entre les points de grille x_{j-1} et x_{j+1} à partir des valeurs nodales $u_{j-1}^n = \tilde{u}(-\Delta x)$, $u_j^n = \tilde{u}(0)$, $u_{j+1}^n = \tilde{u}(\Delta x)$ s'écrit :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(\xi) = u_j^n + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \xi + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} \xi^2, \\ -\Delta x \leq \xi \leq \Delta x. \end{array} \right.$$

Le schéma de Lax-Wendroff, compte tenu de (2.12), se définit ainsi :

$$(2.18) \quad u_j^{n+1} = \tilde{u}(-a\Delta t),$$

soit en explicitant les relations algébriques,

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ - \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Le schéma de Lax-Wendroff s'obtient en ajoutant à l'expression (2.3) du schéma centré instable le terme de diffusion (numérique) $\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$.

- **Proposition 2. Erreur de troncature des schémas saute-mouton, de Lax-Friedrichs, décentré, de Courant et de Lax-Wendroff.**

Le résultat est présenté dans le tableau qui suit.

Différences finies pour l'équation d'advection

	schéma	type	ordre % Δx	ordre % Δt
(2.20)	saute-mouton (2.10)	explicite	2	2
	Lax-Friedrichs (2.11)	explicite	1	1
	décentré (2.14)(2.15)	explicite	1	1
	Courant (2.16)	implicite	1	1
	Lax-Wendroff (2.19)	explicite	2	2

Preuve de la proposition 2.

• Nous la laissons au lecteur à titre d'exercice pour les quatre premiers schémas ; nous la détaillons dans le cas du schéma de Lax-Wendroff. Soit $u(\bullet)$ une solution régulière de classe \mathcal{C}^4 de l'équation d'advection (1.1). On a :

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t; u) \equiv \frac{1}{\Delta t} (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) \\ \quad + \frac{a}{2\Delta x} (u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)) \\ \quad - \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2} (u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)) . \end{array} \right.$$

On développe alors les différents termes du membre de droite de (2.21) à l'aide de la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) \\ \frac{1}{2\Delta x} (u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)) &= \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ \frac{1}{\Delta x^2} (u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) . \end{aligned}$$

Il vient ensuite :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t, u) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) . \end{array} \right.$$

Comme la fonction $u(\bullet)$ est solution de (1.1), elle vérifie aussi l'équation des ondes

$$(2.23) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

ainsi que le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \end{aligned}$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

Par suite les termes d'ordre zéro et d'ordre un en Δt dans le membre de droite de (2.22) sont nuls et le résultat annoncé est établi. \square

3) STABILITÉ

• L'expérience numérique montre que le schéma centré instable est toujours inutilisable en pratique, c'est-à-dire qu'après un certain nombre de pas de temps, la solution calculée $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}\}$ n'a plus rien à voir avec une approximation de la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto u(x, t^n) \in \mathbb{R}$. Les erreurs numériques liées aux **arrondis** des calculs algébriques s'amplifient petit à petit et viennent polluer l'approximation recherchée de l'équation d'advection. Il est utile d'étudier pour le schéma centré instable (2.2) l'opérateur $T_{\Delta t}$ de "passage du temps discret", défini par les relations suivantes :

$$(3.1) \quad \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u^n \mapsto T_{\Delta t} u^n = u^{n+1} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$(3.2) \quad (T_{\Delta t} u)_j = u_j - \frac{1}{2} \frac{a \Delta t}{\Delta x} (u_{j+1} - u_{j-1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Soit θ l'opérateur de décalage de une unité des indices :

$$(3.3) \quad (\theta u)_j = u_{j+1}, \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

σ le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$(3.4) \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

et I l'opérateur identité $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$.

• La relation (3.2) peut alors se réécrire sous la forme

$$(3.5) \quad T_{\Delta t} = I - \frac{1}{2} \sigma (\theta - \theta^{-1}).$$

Il est utile de calculer la norme de l'opérateur $T_{\Delta t}$. Pour cela, nous utilisons l'opérateur $\hat{T}_{\Delta t}$ obtenu par transformation de Fourier :

$$(3.6) \quad \hat{T}_{\Delta t} = \tilde{\mathcal{F}} \bullet T_{\Delta t} \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

et qui est **équivalent** à l'opérateur $T_{\Delta t}$. Nous constatons que l'opérateur $\hat{T}_{\Delta t}$ est **diagonal**. Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $\hat{\varphi}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$, donc

$$(\theta \hat{\varphi})_k = (\theta \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \varphi)_k = \hat{\varphi}_{k+1} = \left(e^{-i\xi} \varphi \right)_k,$$

d'où l'on tire

$$(3.7) \quad \theta \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \left(\exp(-i\xi) \varphi \right), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Compte tenu de la relation (3.5) et de (3.6), on a :

$$(3.8) \quad \hat{T}_{\Delta t} \varphi = A(\xi) \varphi, \quad A(\xi) = 1 - \frac{\sigma}{2} (e^{-i\xi} - e^{i\xi}), \quad \xi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Différences finies pour l'équation d'advection

Nous savons (voir le cours d'analyse sur la transformation de Fourier discrète) qu'alors la norme de l'opérateur $T_{\Delta t}$ est donnée par la relation

$$(3.9) \quad \|T_{\Delta t}\|_{\ell^2(\mathbf{Z}), \ell^2(\mathbf{Z})} = \sup_{\xi \in [0, 2\pi]} |A(\xi)| .$$

Comme $A(\xi) = 1 + i\sigma \sin \xi$, on tire de (3.9) :

$$(3.10) \quad \|T_{\Delta t}\|_{\ell^2(\mathbf{Z}), \ell^2(\mathbf{Z})} = \sqrt{1 + \sigma^2} .$$

• On constate que pour tout nombre de Courant $\sigma \neq 0$, la norme de l'opérateur $T_{\Delta t}$ est strictement supérieure à 1. Le schéma (2.2) n'amortit pas les erreurs d'arrondis ; il est inutilisable en pratique et on exprime cette propriété en disant qu'il est **instable**. La présentation courante "élémentaire" du résultat précédent s'effectue comme suit. On considère comme donnée à l'instant t^n une "onde"

$$(3.11) \quad v(x) = \hat{v}_k \exp(ikx) , \quad k \in \mathbb{R} , \quad x \in \mathbb{R}$$

qu'on interpole sur la grille spatiale de pas Δx , d'où une suite $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$:

$$(3.12) \quad u_j^n = v(j\Delta x) = \hat{v}_k \exp(ikj\Delta x) , \quad j \in \mathbf{Z} .$$

Notons que la famille $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$ définie en (3.12) n'appartient **pas** à $\ell^2(\mathbf{Z})$. Il convient d'abord de noter qu'on peut étendre sans difficulté la définition (3.2) lorsque la donnée u est un mode de Fourier. On étudie ensuite comment le schéma $T_{\Delta t}$ opère sur la suite $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$ définie à la relation (3.12). Compte tenu de (3.5), il vient simplement :

$$(3.13) \quad u_j^{n+1} = (T_{\Delta t} u)_j^n = \left[1 - \frac{\sigma}{2}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) \right] u_j^n ,$$

expression qui fait apparaître la quantité notée $A(\xi)$ de la relation (3.8), et qui porte le nom de **coefficient d'amplification** du schéma. On le note $g(\sigma, \xi)$, avec $\xi = k\Delta x$, et

$$(3.14) \quad g(\sigma, \xi) = A(-\xi) ; \quad \xi = k\Delta x .$$

• **Définition 3. Coefficient d'amplification.**

Si, lorsqu'on prend une donnée initiale $(u_j^n)_{j \in \mathbf{Z}}$ de la forme (3.12), le schéma numérique $u_j^n \mapsto u_j^{n+1}$ peut s'écrire sous la forme

$$(3.15) \quad u_j^{n+1} = g(\sigma, \xi) u_j^n , \quad j \in \mathbf{Z} , \quad \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x} ,$$

la fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\sigma, \xi) \mapsto g(\sigma, \xi) \in \mathbb{C}$ est appelée coefficient d'amplification du schéma.

• **Définition 4. Stabilité au sens de Von Neumann.**

Soit $u_j^{n+1} = T_{\Delta t} u_j^n$ un schéma linéaire à coefficients constants pour approcher l'équation d'advection (1.1). Ce schéma est dit **stable** au sens de Von Neumann si l'on a

$$(3.16) \quad \|T_{\Delta t}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}), \ell^2(\mathbb{Z})} \leq 1 .$$

• **Proposition 3. Critère de stabilité.**

Soient θ l'opérateur de décalage de 1 des indices sur l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$(3.17) \quad (\theta u)_k = u_{k+1} , \quad k \in \mathbb{Z}, \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}) ,$$

$A(\bullet, \bullet, \bullet)$ et $B(\bullet, \bullet, \bullet)$ deux polynômes à trois variables et à coefficients réels. On introduit l'opérateur $T_{\Delta t}$ qui décrit l'avancement du temps discret : $u_j^{n+1} = T_{\Delta t} u_j^n$ qui est un schéma d'approximation de l'équation d'advection $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ qu'on suppose pouvoir écrire sous la forme

$$(3.18) \quad A(\sigma, \theta, \theta^{-1}) T_{\Delta t} = B(\sigma, \theta, \theta^{-1}) , \quad \sigma \equiv \frac{a \Delta t}{\Delta x} .$$

On suppose que $T_{\Delta t}$ définit un opérateur linéaire continu de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même. Alors le coefficient d'amplification $g(\sigma, \xi)$ défini en (3.15) s'écrit

$$(3.19) \quad g(\sigma, \xi) = (A(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi}))^{-1} B(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi}) ,$$

et le schéma $u_j^{n+1} = T_{\Delta t} u_j^n$ est stable si et seulement si

$$(3.20) \quad \sup_{0 \leq \xi \leq 2\pi} |g(\sigma, \xi)| \leq 1 .$$

Preuve de la proposition 3.

• Il suffit de généraliser à un schéma de type (3.18) ce qui a été dit dans le cas du schéma instable. Pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ses coefficients de Fourier $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont définis par

$$(3.21) \quad \hat{\varphi}_j = (\tilde{\mathcal{F}}^{-1} \varphi)_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) e^{-ij\xi} d\xi$$

et $\theta \hat{\varphi}_j = \hat{\varphi}_{j+1}$ (cf. relation (3.17)) s'écrit aussi :

$$(3.22) \quad \tilde{\mathcal{F}} \bullet \theta \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = e^{-i\xi} \varphi , \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) .$$

• Par suite, si $B(\sigma, \theta, \theta^{-1})$ est une fonction polynomiale quelconque, on a :

$$(3.23) \quad \tilde{\mathcal{F}} \bullet B(\sigma, \theta, \theta^{-1}) \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \varphi = B(\sigma, e^{-i\xi}, e^{i\xi}) \varphi .$$

Si l'opérateur $A(\sigma, \theta, \theta^{-1})$ est inversible, on tire facilement de (3.23) :

$$(3.24) \quad (\tilde{\mathcal{F}} \bullet A(\sigma, \theta, \theta^{-1}) \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1})^{-1} \varphi = [A(\sigma, e^{-i\xi}, e^{i\xi})]^{-1} \varphi .$$

Différences finies pour l'équation d'advection

On en déduit que l'opérateur $\hat{T}_{\Delta t}$ conjugué de T par la transformation de Fourier, *i.e.*

$$(3.25) \quad \hat{T}_{\Delta t} = \tilde{\mathcal{F}} \bullet T_{\Delta t} \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$$

est diagonal ; pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\Delta t} \varphi &= \tilde{\mathcal{F}} \bullet (A(\sigma, \theta, \theta^{-1}))^{-1} \bullet B(\sigma, \theta, \theta^{-1}) \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \varphi \\ &= (\tilde{\mathcal{F}} \bullet A(\sigma, \theta, \theta^{-1}) \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1})^{-1} \bullet (\tilde{\mathcal{F}} \bullet B(\sigma, \theta, \theta^{-1}) \bullet \tilde{\mathcal{F}}^{-1}) \varphi \end{aligned}$$

$$(3.26) \quad \hat{T}_{\Delta t} \varphi = (A(\sigma, e^{-i\xi}, e^{i\xi}))^{-1} \bullet B(\sigma, e^{-i\xi}, e^{i\xi}) \varphi .$$

Le critère sur le calcul de la norme d'opérateurs équivalents (voir le cours d'analyse) montre que $T_{\Delta t}$ définit un schéma stable si et seulement si

$$(3.27) \quad \sup_{\xi \in [0, 2\pi]} \left| (A(\sigma, e^{-i\xi}, e^{i\xi}))^{-1} B(\sigma, e^{-i\xi}, e^{i\xi}) \right| \leq 1 .$$

- Par ailleurs, le calcul du coefficient d'amplification $g(\sigma, \xi)$ demande de faire agir le schéma (3.18) sur une onde de la forme

$$(3.28) \quad u_j^n = \hat{v}_k \exp(ikj\Delta x), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{R} .$$

On a $\theta u_j^n = \hat{v}_k \exp[ik(j+1)\Delta x] = e^{ik\Delta x} u_j^n$, donc

$$(3.29) \quad \theta u_j^n = e^{i\xi} u_j^n, \quad \xi = k\Delta x, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z} .$$

Il en résulte comme plus haut que

$$(3.30) \quad B(\sigma, \theta, \theta^{-1}) u_j^n = B(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi}) u_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

donc

$$(3.31) \quad u_j^{n+1} = T_{\Delta t} u_j^n = (A(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi}))^{-1} B(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi}) u_j^n$$

c'est-à-dire

$$(3.32) \quad g(\sigma, \xi) = (A(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi}))^{-1} B(\sigma, e^{i\xi}, e^{-i\xi})$$

qui établit (3.19). La relation (3.20) résulte alors de (3.27) et du changement de la variable ξ en $-\xi$. □

- La proposition 3 permet d'analyser la stabilité de tous les schémas présentés plus haut, sauf le schéma saute-mouton, à trois niveaux en temps, qui exige une étude spécifique avec une matrice d'amplification 2×2 au lieu d'un coefficient d'amplification $g(\sigma, \xi)$. Nous renvoyons le lecteur par exemple aux notes de cours de B. Larrouturou [*Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur*, Ecole polytechnique, 1997]. Nous avons donc la

• **Proposition 4. Stabilité de quelques schémas classiques.**

Les schémas introduits plus haut dans ce chapitre ont le comportement qui suit vis-à-vis de la stabilité au sens de von Neumann

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

	schéma	
	explicite centré (2.2)	instable $\forall \sigma \neq 0$
	Lax-Friedrichs (2.11)	stable si $ \sigma \leq 1$
(3.33)	décentré à gauche (2.14)(2.15)	stable si $a \geq 0$ et $0 \leq \sigma \leq 1$
		instable sinon
	Courant (2.16)	stable si $a \geq 0, \forall \sigma \geq 0$
	Lax-Wendroff (2.19)	stable si $ \sigma \leq 1$

avec, rappelons-le, le nombre de Courant donné par la relation (3.4).

Preuve de la proposition 4.

- Il suffit de calculer le coefficient d'amplification de ces différents schémas et d'appliquer le critère (3.20) de la proposition 3. Pour le schéma explicite centré ou instable, on a vu plus haut que $g(\sigma, \xi) = 1 - i\sigma \sin \xi$, ce qui établit le premier point de la relation (3.33).

- Pour le schéma implicite centré (2.3), on a, lorsque u_j^n a la forme proposée en (3.12) :

$$\left[1 + \frac{\sigma}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) \right] u_j^{n+1} = u_j^n,$$

soit

$$(3.24) \quad g(\sigma, \xi) = \frac{1}{1 + i\sigma \sin \xi}, \quad \text{schéma implicite centré (2.3)}$$

et le second point de (3.33) est démontré.

- Pour le schéma de Lax-Friedrichs (2.11), il vient facilement

$$(3.25) \quad g(\sigma, \xi) = \cos \xi - i\sigma \sin \xi, \quad \text{Lax-Friedrichs (2.11)}$$

et le troisième point de (3.33) est établi.

- Pour le schéma décentré à gauche (2.14), on trouve

$$(3.36) \quad g(\sigma, \xi) = 1 - \sigma(1 - e^{-i\xi}), \quad \text{schéma décentré à gauche (2.14)}$$

et après un calcul facile, il vient

$$|g(\sigma, \xi)|^2 = 1 - 4\sigma(1 - \sigma) \sin^2 \xi / 2$$

qui montre que le schéma est stable au sens de von Neumann si et seulement si $\sigma(1 - \sigma) \geq 0$, *id est* $a \geq 0$ et $0 \leq \sigma \leq 1$.

- Pour le schéma de R. Courant, la relation (2.16) et l'hypothèse (3.12) montrent que

$$(3.37) \quad g(\sigma, \xi) = \frac{1}{1 + \sigma(1 - e^{-i\xi})}, \quad \text{schéma de Courant (2.16)}$$

Différences finies pour l'équation d'advection

Le changement de σ en $-\sigma$ dans le calcul fait juste avant montre que $|g(\sigma, \xi)|^2 = \frac{1}{1+4\sigma(1+\sigma)\sin^2 \xi/2}$, ce qui établit l'avant-dernière ligne du tableau (3.33).

- Pour le schéma de Lax-Wendroff, on a, compte tenu de (2.17),

$$(3.38) \quad g(\sigma, \xi) = 1 - i\sigma \sin \xi + \sigma^2(\cos \xi - 1), \quad \text{Lax-Wendroff (2.19)}$$

et après quelques lignes d'algèbre, il vient

$$|g(\sigma, \xi)|^2 = 1 - 4\sigma^2(1 - \sigma^2)\sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

qui permet de conclure de manière analogue à ce qui a été vu pour le schéma décentré. \square

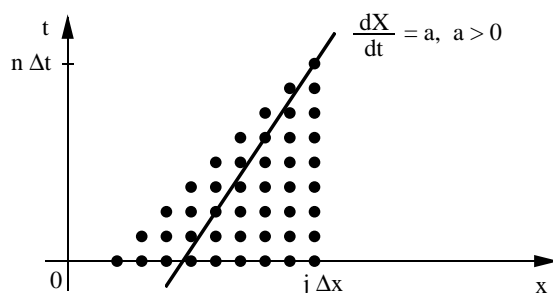


Figure 1. *Cône de dépendance numérique pour le schéma décentré à gauche (2.14). La condition de stabilité $0 \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ exprime que la droite caractéristique passant par le point $(j\Delta x, n\Delta t)$ est à l'intérieur de ce cône de dépendance numérique.*

- Il importe de bien comprendre la condition de stabilité $0 \leq \sigma \leq 1$ pour le schéma décentré à gauche par exemple. Pour $(j, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ fixé, on appelle **cône de dépendance numérique** l'ensemble des indices (k, m) , $k \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ effectivement utilisés pour le calcul de la valeur numérique u_j^n à partir de la condition initiale u^0 (figure 1). L'information numérique se propage à la vitesse $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, alors que l'information "physique" relative à la solution exacte se propage à la célérité a . La condition $0 \leq \sigma \leq 1$ exprime que

$$(3.39) \quad \begin{cases} \text{le cône de dépendance numérique} \\ \text{contient la caractéristique passant par } (j\Delta x, n\Delta t). \end{cases}$$

- En un certain sens, le schéma numérique agit sainement : l'information liée à l'équation est interpolée à partir des valeurs numériques initiales "là où on en a besoin". Mais attention ! Cette vision des choses **ne définit pas** le concept de stabilité au sens de von Neumann, comme le montre le contre-exemple du schéma

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

centré explicite instable qui reste instable pour $|\sigma| \leq 1$ alors que la condition (3.39) est satisfaite !

- Nous terminons cette étude de stabilité en étudiant ce qu'il advient du **principe du maximum** ; on sait que la solution $u(\bullet)$ de l'équation d'advection (1.1) vérifie

$$(3.40) \quad \alpha \leq u(x, t) \leq \beta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

dès que la condition initiale u^0 satisfait les mêmes inégalités :

$$(3.41) \quad \alpha \leq u^0(x) \leq \beta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous disons que le schéma $u_j^{n+1} = T_{\Delta t} u_j^n$ satisfait au **principe du maximum discret** si étant donné une condition initiale discrète $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ qui satisfait

$$(3.42) \quad \alpha \leq u_j^0 \leq \beta, \quad j \in \mathbb{Z},$$

on a alors pour tout $n \geq 0$,

$$(3.43) \quad \alpha \leq u_j^n \leq \beta, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sous la condition $a > 0$ et $0 < a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, c'est le cas pour le schéma décentré, alors qu'il n'en est rien pour le schéma de Lax-Wendroff.

- **Proposition 5. Principe du maximum discret pour le schéma décentré amont.** Soit $a > 0$ la célérité de l'advection (1.1). Sous la condition de stabilité

$$(3.44) \quad 0 \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

le schéma décentré amont (2.14) satisfait au principe du maximum discret.

Preuve de la proposition 5.

- Il suffit de montrer que la condition

$$(3.45) \quad \alpha \leq u_j^n \leq \beta, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \text{ fixé}$$

entraîne

$$(3.46) \quad \alpha \leq u_j^{n+1} \leq \beta, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

puis de raisonner par récurrence sur n . Or la relation (2.14) peut aussi s'écrire

$$(3.47) \quad u_j^{n+1} = (1 - \sigma) u_j^n + \sigma u_{j-1}^n, \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Par suite u_j^{n+1} est **combinaison convexe** de u_j^n et u_{j-1}^n . L'hypothèse (3.44) entraîne à la fois $1 - \sigma \geq 0$ et $\sigma \geq 0$, donc par multiplication de (3.45) par $(1 - \sigma)$ (pour l'indice j) et par σ (pour l'indice $j - 1$), la relation (3.46) s'en déduit clairement. \square

• **Proposition 6. Le schéma de Lax-Wendroff ne satisfait pas au principe du maximum discret.** Le schéma de Lax-Wendroff a ce défaut : il peut créer des oscillations (phénomène de Gibbs) si la solution discrète a de forts gradients. Bien que d'ordre 2, ce défaut est fondamental pour les applications où le champ $u(\bullet)$ a une interprétation physique naturelle qui **impose** une inégalité du type $0 \leq u(x, t) \leq 1$ (si $u(\bullet)$ est une concentration par exemple). Les schémas "modernes" utilisés dans les applications sont en général une pondération astucieuse du schéma décentré amont (2.14) et du schéma de Lax-Wendroff (2.19) (voir par exemple le chapitre 9 ou [R.J. Le Veque, *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, 1990]).

Preuve de la proposition 6.

• Elle est toute entière contenue dans le contre-exemple suivant. On considère une condition initiale croissante de 0 à 1 entre les indices $j = 0$ et $j = 1$:

$$(3.48) \quad u_j^0 = \begin{cases} 0, & j \leq 0 \\ 1, & j \geq 1. \end{cases}$$

• Il est clair que $u_j^1 = 0$ si $j \leq -1$ et $u_j^1 = 1$ si $j \geq 2$. Par contre pour $j = 0$, u_0^1 est l'interpolé parabolique de $u_{-1}^0 = 0$, $u_0^0 = 0$, $u_1^0 = 1$ qui est strictement négatif entre les indices $j = -1$ et $j = 0$, ce qui met le principe du maximum discret en défaut. D'un point de vue algébrique, on a

$$(3.49) \quad u_j^1 = u_j^0 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0) + \frac{1}{2} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

et pour $j = 0$, il vient, compte tenu de (3.48)

$$(3.50) \quad u_0^1 = -\frac{1}{2}\sigma(1 - \sigma) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < \sigma < 1.$$

La propriété en résulte. □

4) CONVERGENCE

• Nous avons vu que les schémas instables ne donnent pas d'approximation numérique cohérente de l'équation d'advection (1.1) alors que parmi les schémas présentés (qui sont tous consistants avec l'équation d'advection), les schémas stables (sous condition de Courant-Friedrichs-Lewy au besoin) approchent correctement l'équation d'advection. Cette remarque est un cas particulier de la théorie des schémas aux différences telle que proposée pour P.D. Lax dans les années 1960 ; le lecteur intéressé pourra consulter le livre classique de R. Richtmyer et K. Morton [*Difference Methods for initial-value problems*, Interscience, J. Wiley, 1967]. Le résultat essentiel de cette théorie énonce que pour un schéma consistant, la stabilité est une condition suffisante de convergence. Ici, nous montrons que lorsqu'il est stable, le schéma décentré amont est convergent pour l'équation d'advection linéaire.

• **Théorème 1. Convergence du schéma décentré amont.**

Soit $u^0(\bullet)$ une condition initiale **bornée** sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^2 et telle que la dérivée première et la dérivée seconde sont bornées :

$$(4.1) \quad |u^0(x)| \leq K_0, \quad \left| \frac{du^0}{dx}(x) \right| \leq K_1, \quad \left| \frac{d^2u^0}{dx^2}(x) \right| \leq K_2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et $u(\bullet)$ la solution de (1.1) et (1.2). Soit $(u_j^0)_{j \in \mathbb{Z}}$ la condition initiale discrète du schéma décentré le plus simple associée au pas d'espace $\Delta x > 0$:

$$(4.2) \quad u_j^0 = u^0(j\Delta x), \quad j \in \mathbb{Z}$$

et $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ la solution du système d'équations discrètes (2.14) du schéma décentré amont. On suppose la condition de stabilité suivante satisfaite :

$$(4.3) \quad 0 < \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Alors pour tout $T > 0$, il existe $C_T > 0$ (C_T ne dépend que de u^0 et de T , pas de Δx et Δt) de sorte que

$$(4.4) \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}, 0 \leq n\Delta t \leq T} |u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)| \leq C_T(\Delta x + \Delta t)$$

où $u(\bullet, \bullet)$ désigne la solution de l'équation d'advection (1.1) avec la donnée initiale u^0 .

Preuve du théorème 1.

• On introduit l'erreur $\epsilon_j^n = u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ entre la solution approchée u_j^n et la solution exacte $u(j\Delta x, n\Delta t)$. Compte tenu de la relation (2.14) et de la définition de l'erreur de troncature $\mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; x, t; u)$ (cf. la relation (2.5)), on a

$$(4.5) \quad \frac{1}{\Delta t}(\epsilon_j^{n+1} - \epsilon_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(\epsilon_j^n - \epsilon_{j-1}^n) = -\mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; j\Delta x, n\Delta t; u) \equiv \mathcal{T}_j^n.$$

On étudie ensuite un majorant de l'erreur de troncature à l'aide de la formule de Taylor ; la solution $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) = u^0(x - at) \in \mathbb{R}$ de (1.1) (1.2) est de classe \mathcal{C}^2 et, compte tenu des estimations (4.1), il existe une constante $K > 0$ de sorte que

$$(4.6) \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq K, \quad a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0.$$

On a également

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Delta t} [u(j\Delta x, n\Delta t + \Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)] - \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) \right| &\leq K \Delta t \\ \left| \frac{a}{\Delta x} [u(j\Delta x, n\Delta t) - u(j\Delta x - \Delta x, n\Delta t)] - \frac{a\partial u}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) \right| &\leq K \Delta x \end{aligned}$$

Différences finies pour l'équation d'advection

et par addition des deux inégalités précédentes, compte tenu de (1.1), on en déduit :

$$|\mathcal{T}(\Delta x, \Delta t; j\Delta x, n\Delta t; u)| \leq K(\Delta t + \Delta x) \quad i.e.$$

$$(4.7) \quad |\mathcal{T}_j^n| \leq K(\Delta t + \Delta x).$$

• Le second membre du système linéaire (4.5) est donc majoré. Mais ceci ne prouve pas que l'inégalité (4.4) a lieu. Cette dernière est conséquence de (4.7) et de l'hypothèse de stabilité du schéma. On pose

$$(4.8) \quad \epsilon^n = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\epsilon_j^n|.$$

On tire alors de (4.5) :

$$\epsilon_j^{n+1} = (1 - \sigma)\epsilon_j^n + \sigma\epsilon_{j-1}^n - \Delta t \mathcal{T}_j^n$$

et comme $1 - \sigma \geq 0$, $\sigma \geq 0$ compte tenu de l'hypothèse de stabilité (4.3), on a :

$$|\epsilon_j^{n+1}| \leq (1 - \sigma)\epsilon^n + \sigma\epsilon^n + \Delta t |\mathcal{T}_j^n|$$

soit, compte tenu de (4.7) et de la définition (4.8) :

$$(4.9) \quad \epsilon^{n+1} \leq \epsilon^n + K \Delta t (\Delta t + \Delta x), \quad n \geq 0.$$

Comme $\epsilon^0 = 0$ par le choix de la condition initiale (4.2), on déduit de (4.9) par sommation

$$\epsilon^n \leq K n \Delta t (\Delta t + \Delta x) \leq K T (\Delta t + \Delta x)$$

et l'inégalité (4.4) est établie. □

5) DISSIPATION ET DISPERSION

• Nous approfondissons dans ce paragraphe l'étude de l'approximation du caractère propagatif de l'équation (1.1). De manière plus précise, si une onde sinusoïdale de nombre d'onde k , soit

$$(5.1) \quad v(x, t) = \hat{v}_k \exp[i(kx - \omega t)]$$

est solution de l'équation d'advection, on remarque d'abord que la pulsation ω satisfait à la **relation de dispersion** (continue)

$$(5.2) \quad \omega = k a$$

qui la relie au nombre d'onde. Après discrétisation sur un maillage paramétré par un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$, la relation (5.1) peut s'écrire

$$(5.3) \quad v_j^n = \hat{v}_k \exp(ik(j\Delta x - n\Delta t)), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Au cours d'un pas de temps Δt , l'onde discrète advectée par l'équation continue (1.1) est "amplifiée" selon la relation constitutive

$$(5.4) \quad v_j^{n+1} = G(\sigma, \xi) v_j^n$$

où

$$(5.5) \quad G(\sigma, \xi) = \exp(-i\sigma\xi), \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \xi = k\Delta x.$$

Le coefficient $G(\sigma, \xi) = \exp(-ika\Delta t)$ est le **coefficient d'amplification de l'équation** d'advection, il indique comment une onde discrétisée de nombre d'onde k (mesuré après discrétisation par $\xi = k\Delta x$) est transportée, ou amplifiée lors du passage d'un pas de temps discret Δt (mesuré avec le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy $\sigma = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$).

- Nous avons vu au paragraphe 3 que le schéma de Lax-Wendroff, défini par la relation de récurrence discrète

$$(5.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ -\frac{a^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a un coefficient d'amplification $g(\sigma, \xi)$, défini par

$$(5.7) \quad u_j^{n+1} = g(\sigma, \xi) u_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

lorsque u_j^n est un profil sinusoïdal du type

$$(5.8) \quad u_j^n = \hat{v}_k e^{ijk\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et qui s'évalue avec l'expression (3.38), c'est-à-dire

$$(5.9) \quad g(\sigma, \xi) = 1 - i\sigma \sin \xi + \sigma^2(\cos \xi - 1); \quad \sigma = a\frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \xi = k\Delta x.$$

L'erreur $g - G$ mesure l'erreur introduite par le schéma numérique lors de la propagation.

- On décompose traditionnellement le nombre complexe $g(\sigma, \xi)$ en module et argument

$$(5.10) \quad g(\sigma, \xi) = e^{-\gamma\Delta t} e^{-i\Omega\Delta t}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

qui fait apparaître la **dissipation** (coefficient γ) et la **dispersion** (coefficient Ω).

En effet, si on introduit (5.10) au sein de la relation (5.7), une onde discrète de type (5.3) (ou (5.8)) s'écrit après passage de n pas de temps :

$$(5.11) \quad u_j^n = (\exp -\gamma t) \hat{v}_k \exp i(kx - \Omega t), \quad x = j\Delta x, \quad t = n\Delta t$$

et cette relation est à rapprocher de (5.1). L'onde advectée exactement (5.1) subit **deux** phénomènes avec sa discrétisation grâce au schéma numérique : d'une part elle est amortie (coefficient $\exp(-\gamma t)$ en préfacteur de (5.11)) et la condition $\gamma \geq 0$ exprime que le schéma est stable (en $|g| \leq 1$) et d'autre part elle est dispersée puisque la relation de dispersion (5.2) cède sa place à la relation $\omega = \Omega$.

- Au lieu de mesurer directement la différence entre les nombres complexes g et G , on introduit traditionnellement l'**erreur d'amplitude** ϵ_α et l'**erreur de phase** ϵ_φ définies par :

$$(5.12) \quad \epsilon_\alpha = -\gamma$$

$$(5.13) \quad \epsilon_\varphi = \Omega - ka$$

compte tenu des relations (5.5) et (5.10).

• **Proposition 7. Erreurs d'amplitude et de phase du schéma de Lax-Wendroff pour les grandes longueurs d'onde.** Lorsque le nombre d'onde k tend vers zéro (ou $\xi = k \Delta x \rightarrow 0$), les erreurs d'amplitude et de phase du schéma de Lax-Wendroff sont données par les développements suivants :

$$(5.14) \quad \epsilon_\alpha = -\frac{1}{8}\sigma(1-\sigma^2) a k^4 (\Delta x)^3 + O(\Delta x^5)$$

$$(5.15) \quad \epsilon_\varphi = -\frac{1}{6}(1-\sigma^2) a k^3 (\Delta x)^2 + O(\Delta x^4).$$

L'erreur d'amplitude est d'ordre 3 et l'erreur de phase est d'ordre 2 par rapport à Δx .

Preuve de la proposition 7.

• L'erreur d'amplitude a en fait déjà été traitée lors de la proposition 4. Nous avons vu que

$$(5.16) \quad |g(\sigma, \xi)|^2 = 1 - 4\sigma^2(1-\sigma^2) \sin^4(\xi/2)$$

donc $e^{-\gamma\Delta t} = 1 - 2\sigma^2(1-\sigma^2) \sin^4(\xi/2) + O(\xi^8)$ soit

$$\begin{aligned} -\gamma &= 2\frac{\sigma^2}{\Delta t}(1-\sigma^2)\frac{1}{16}(k\Delta x)^4 + O\left(\frac{\xi^6}{\Delta t}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\sigma(1-\sigma^2)\frac{a}{\Delta x}k^4(\Delta x)^4 + O(\Delta x^5) \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (5.14).

• Pour l'erreur de phase, on identifie les parties purement imaginaires des relations (5.9) et (5.10) ; on trouve

$$(5.17) \quad |g| \sin(\Omega\Delta t) = \sigma \sin \xi$$

qui constitue la **relation de dispersion du schéma**. On remarque qu'elle est **non linéaire** (et même donnée sous une forme de fonction implicite !). Lorsque ξ est infiniment petit, on a

$$(5.18) \quad |g| = 1 - 2\sigma^2(1-\sigma^2) \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 + O(\xi^8)$$

et au premier ordre, la relation (5.17) s'écrit $\Omega\Delta t = \sigma\xi + O(\xi^3)$, soit

$$\Omega = \frac{1}{\Delta t} a \frac{\Delta t}{\Delta x} k \Delta x + O(\Delta x^3/\Delta t) = ka + O(\Delta x^2).$$

On retrouve bien la relation de dispersion exacte (le schéma simule bien l'équation d'advection !) et l'erreur de phase ϵ_φ demande de préciser le terme suivant dans le développement de la phase Ω . On tire de (5.17) et (5.18) :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\Omega \Delta t - \frac{1}{6}(\Omega \Delta t)^3 + O(\Delta t \xi^4) = \sigma \left(\xi - \frac{1}{6} \xi^3 \right) + O(\xi^6)$$

soit

$$\Omega \Delta t = \sigma \xi + \frac{1}{6}((\sigma \xi)^3 - \sigma \xi^3) + O(\Delta t \xi^4)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= ka + \frac{1}{6} \frac{\sigma}{\Delta t} (k \Delta x)^3 (\sigma^2 - 1) + O(\Delta x^4) \\ &= ka - \frac{1}{6} (1 - \sigma^2) a k^3 (\Delta x)^2 + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

et la relation (5.15) en résulte. □

- La relation de dispersion du schéma est donnée par la relation (5.17) associée à (5.16). Nous pouvons aussi étudier le rapport q entre la vitesse de phase numérique du schéma Ω/k et la vitesse de phase de l'équation $\frac{\omega}{k} = a$:

$$(5.19) \quad q = \frac{\Omega}{ka}$$

lorsque le nombre de Courant σ varie. Rappelons que

$$(5.20) \quad q = \frac{1}{\sigma \xi} \arcsin \left\{ \frac{\sigma \sin \xi}{(1 - 4\sigma^2(1 - \sigma^2) \sin^4 \xi/2)^{1/2}} \right\} .$$

Pour $\sigma = 1$ ou -1 , on a $q = 1$ pour tout ξ : le schéma de Lax-Wendroff est exact et ne disperse pas les ondes. Ensuite, la situation se dégrade, au fur et à mesure que le pas d'espace est de plus en plus grand. L'erreur de dispersion est de plus en plus grande au fur et à mesure que σ diminue, comme le montre le préfacteur $(1 - \sigma^2)$ au second membre de la relation (5.16), ce qui n'est pas intuitif. On pourrait croire qu'en prenant des pas de temps de plus en plus petits, on approche de mieux en mieux l'équation (1.1). En fait il n'en est rien ; pour minimiser l'erreur de dispersion, on a intérêt à se situer **le plus près possible de la condition de stabilité** $\sigma \leq 1$, *i.e.* choisir des nombres de CFL supérieures à 0,9 par exemple.

- Nous terminons ce chapitre par une remarque élémentaire, mais fondamentale. Pour discrétiser une onde de nombre d'onde k ou de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, combien faut-il prendre de points de grille ? Comment choisir Δx par rapport à λ , soit $\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\xi}{2\pi}$? Le *minimum minimorum* admis est de $\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{1}{4}$, soit **cinq points de grille**. Au-delà, on rate les extrema de la fonction sinus ! En pratique, on ne descend pas en-dessous de $\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{1}{10}$ (compté en nombre de points de grille !) et l'optimum coût/efficacité se situe aux alentours de 12 à 15 points de grille par longueur d'onde pour les schémas du second ordre comme le schéma de Lax-Wendroff.

Etude mathématique d'une loi de conservation

La méthode des caractéristiques peut être étendue pour une loi de conservation non linéaire lorsque la donnée initiale est régulière (paragraphe 2). Mais la non linéarité introduit naturellement des singularités au bout d'un temps fini même si la condition initiale est régulière (paragraphe 3). On peut surmonter cette difficulté en changeant de point de vue via l'introduction de "solutions faibles" (paragraphe 4) qui conduisent aux relations de saut de Rankine et Hugiot. Mais l'unicité pour le problème de Cauchy est perdue (paragraphe 5).

1) INTRODUCTION

• Nous étudions un système **hyperbolique** de lois de conservation à une dimension d'espace :

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

L'inconnue $W(x, t)$ prend ses valeurs dans un **ouvert convexe** non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction de flux assez régulière (de classe \mathcal{C}^1 en pratique) ; sa dérivée de Fréchet $df(W)$

$$(1.2) \quad df(W) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \quad W \in \Omega$$

admet une base $(r_k(W))_{1 \leq k \leq N}$ de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont notées $\lambda_k(W)$:

$$(1.3) \quad df(W) \bullet r_k(W) = \lambda_k(W) r_k(W), \quad W \in \Omega, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Dans le cas où $N = 1$, on parle d'une loi de conservation scalaire et on utilise une minuscule $u(x, t)$ pour désigner la fonction réelle inconnue. La condition d'hyperbolicité est alors évidente. Le cas où $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ correspond à l'équation de Burgers, présentée au chapitre relatif aux modèles hyperboliques.

2) SOLUTIONS RÉGULIÈRES

• Il est naturel dans un premier temps au moins de supposer que les divers termes de l'équation (1.1) ont un sens classique, donc par exemple que $\frac{\partial W}{\partial t}(x, t)$ et $\frac{\partial W}{\partial x}(x, t)$ sont bien définis au point $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$. Une **solution classique** appartient a priori à l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)$

$$(2.1) \quad W(\bullet, \bullet) \text{ solution classique ; } W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega).$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

Dans le cas d'une équation ($N = 1$) on pose

$$(2.2) \quad a(u) = f'(u), \quad u \in \Omega.$$

On cherche ici à résoudre le problème de Cauchy, composé d'une part de l'équation (1.1) et d'autre part de la condition initiale

$$(2.3) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\mathbb{R} \ni x \mapsto u^0(x) \in \Omega$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

- Si $u(\bullet, \bullet)$ est solution classique de la loi de conservation (1.1), la règle de la dérivation d'une fonction composée et la définition (2.2) permettent de construire la **forme non conservative**

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

de l'équation hyperbolique (1.1). Nous allons voir que la méthode des caractéristiques impose des contraintes sur la solution classique $u(\bullet, \bullet)$.

- **Proposition 1. Les caractéristiques sont droites.**

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \mathbb{R})$ une solution classique de la loi de conservation (1.1) associée à la condition initiale (2.3). Soit $\mathbb{R} \supset I \ni \theta \mapsto X(\theta) \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle

$$(2.5) \quad \frac{dX}{d\theta} = a(u(X(\theta), \theta)), \quad \theta \in I,$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et $a(\bullet)$ la célérité introduite à la relation (2.2). Alors la fonction $v(\bullet)$ définie par

$$(2.6) \quad v(\theta) = u(X(\theta), \theta), \quad \theta \in I$$

est constante ; la courbe intégrale de l'équation (2.6) est une droite.

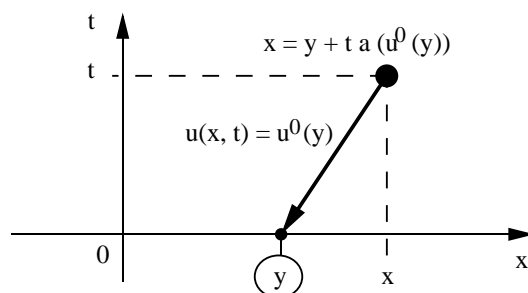


Figure 1. Trouver le pied de la caractéristique nécessite de résoudre une équation.

Preuve de la proposition 1.

- On calcule la dérivée de $v(\bullet)$ par rapport au temps θ ; il vient

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{d\theta} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) (X(\theta), \theta) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(u(X(\theta), \theta)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (X(\theta), \theta) && \text{car } X(\bullet) \text{ est solution de (2.5)} \\ &= 0 && \text{car } u(\bullet, \bullet) \text{ est solution de (2.4).} \end{aligned}$$

Cette propriété établit le premier point de la proposition.

- La solution $I \ni \theta \mapsto X(\theta) \in \mathbb{R}$ de l'équation caractéristique (2.5) vérifie $\frac{dX}{d\theta} = a(v(\theta))$, compte tenu de (2.6) et comme $v(\theta)$ ne dépend pas de θ , $a(v(\theta))$ est une constante. Par suite la fonction $X(\bullet)$ est affine et les caractéristiques sont des droites. \square

- On peut adopter deux points de vue : partir de l'**origine** du temps et construire, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, la droite caractéristique passant par ce point

$$(2.7) \quad x = x_0 + t a(u^0(x_0)) ,$$

ou le point (x, t) de l'espace-temps étant fixé, chercher le "pied" de la caractéristique, *i.e.* résoudre l'équation (2.7) par rapport à l'inconnue x_0 .

Théorème 1. Solution classique du problème de Cauchy.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $a = \frac{df}{du} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose que D défini par

$$(2.8) \quad D = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left[\frac{d}{dx} (a(u^0(x))) \right]$$

est réel, *i.e.*

$$(2.9) \quad \frac{da}{du} (u^0(x)) \frac{du^0}{dx} \geq D , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

On pose

$$(2.10) \quad T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0 . \end{cases}$$

Alors le problème de Cauchy

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} , & x \in \mathbb{R} , t \geq 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) , & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, T^*])$ sur l'intervalle de temps $[0, T^*[$.

Preuve du théorème 1.

• On doit, pour (x, t) fixé dans $\mathbb{R} \times [0, T^*[$, résoudre l'équation (2.7) d'inconnue $x_0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire trouver (sans ambiguïté) le pied de la caractéristique passant par le point (x, t) . Pour t fixé ≥ 0 et strictement inférieur à T^* , on pose

$$(2.12) \quad g(y, t) = y + t a(u^0(y)) , \quad y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t < T^* .$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(g(y, t)) = 1 + t \frac{d}{dy}(a(u^0(y))) \quad \text{et}$$

$$(2.13) \quad \frac{\partial}{\partial y}(g(y, t)) \geq 1 + tD \geq \epsilon > 0$$

avec $\epsilon = 1$ si $D \geq 0$ et $\epsilon > 0$ choisi de sorte que $t - \frac{\epsilon}{D} \leq T^*$ si $D < 0$. L'application $g(\bullet, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et la condition (2.13) assure qu'elle est croissante, tend vers $-\infty$ si $y \rightarrow -\infty$ et tend vers $+\infty$ si $y \rightarrow +\infty$ puisque $g(y, t) - g(0, t) \geq \epsilon y$ par intégration de la relation (2.13) sur l'intervalle $[0, y]$. C'est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et l'application réciproque $(g(\bullet, t))^{-1}$ est bien définie.

• Pour $t \in [0, T^*[$ et $x \in \mathbb{R}$, l'équation (2.7) a une solution unique $x_0 \in \mathbb{R}$ donnée par $x_0 = g(t, \bullet)^{-1}(x)$. Compte tenu de la proposition 1, toute solution $u(\bullet, \bullet)$ de classe \mathcal{C}^1 du problème (2.11) est nécessairement de la forme

$$(2.14) \quad u(x, t) = u^0(g(\bullet, t)^{-1}(x)) , \quad x \in \mathbb{R} , \quad 0 \leq t < T^*$$

puisque $u(\bullet, \bullet)$ est constante sur la caractéristique (2.5) et vaut u^0 au temps origine.

• Il faut maintenant vérifier que la relation (2.14) définit effectivement une application de classe \mathcal{C}^1 du couple $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*[$. Or l'équation qui définit le pied $y = x_0$ de la caractéristique s'écrit

$$(2.15) \quad y + t a(u^0(y)) \equiv g(y, t) = x$$

avec $g(\bullet, \bullet)$ de classe \mathcal{C}^1 et pour (y, t) fixé dans $\mathbb{R} \times [0, T^*[$, l'application $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(y, t) \eta \in \mathbb{R}$ est bijective (cf. (2.13)). Le théorème des fonctions implicites permet de conclure à l'existence d'un voisinage $W(x)$ de $x = g(y, t)$, d'un voisinage $V(t)$ de $t \in [0, T^*[$ et d'une application de classe \mathcal{C}^1 : $W(x) \times V(t) \ni (\xi, \theta) \mapsto \varphi(\xi, \theta) \in \mathbb{R}$ qui est identique à $(g(\bullet, \bullet))^{-1}$ de sorte que toute solution de l'équation $g(y, \theta) = \xi$ avec $\xi \in W(x)$ et $\theta \in V(t)$ s'écrit nécessairement sous la forme $y = \varphi(\xi, \theta)$. On en déduit que l'application $V(t) \times W(x) \ni (\theta, \xi) \mapsto y = (g(\bullet, \theta))^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 . Compte tenu de (2.14) et de l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, le membre de droite de (2.14) est de classe \mathcal{C}^1 .

• Il reste à vérifier que la fonction $u(\bullet, \bullet)$ définie à l'aide de la relation (2.14) est effectivement une solution du problème de Cauchy (2.11). Soit $y = \varphi(x, t)$

Etude mathématique d'une loi de conservation

la solution de l'équation (2.15) qui définit le pied de la caractéristique. On a par dérivation successive de (2.15) par rapport au temps et par rapport à l'espace :

$$(2.16) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-a(u^0(y))}{1 + ta'(u^0(y))}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1 + ta'(u^0(y))}$$

donc si $u(\bullet, \bullet)$ est la fonction donnée par la relation (2.14), on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = (u^0(y))' \left(\frac{\partial y}{\partial t} + a(u) \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0$$

compte tenu des relations (2.16) et le résultat est établi. □

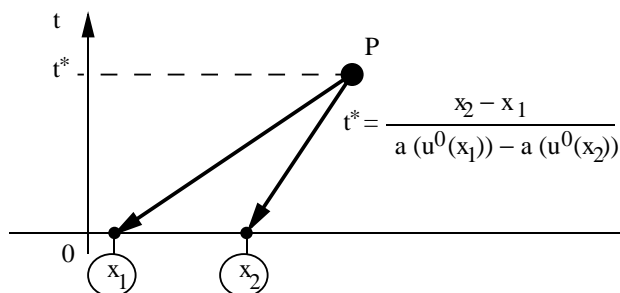


Figure 2. Au point P , il ne peut y avoir de solution classique continue si $u^0(x_1) \neq u^0(x_2)$.

3) INTERSECTION DE CARACTÉRISTIQUES

• Le résultat précédent définit la solution classique sur $[0, T^*[$ et une question naturelle est de savoir si on peut **prolonger** cette solution classique jusqu'à $+\infty$. La réponse est **négative** si D défini en (2.8) est strictement négatif. Imaginons pour fixer les idées, deux points $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$(3.1) \quad x_1 < x_2$$

$$(3.2) \quad u^0(x_1) \neq u^0(x_2)$$

$$(3.3) \quad a(u^0(x_1)) > a(u^0(x_2)) .$$

La caractéristique issue de x_1 à l'origine s'écrit

$$(3.4) \quad x = x_1 + ta(u^0(x_1)), \quad t \geq 0$$

et celle issue de x_2 a pour équation

$$(3.5) \quad x = x_2 + ta(u^0(x_2)), \quad t \geq 0$$

(voir la figure 2). Ces deux droites **se coupent** en $P(x^*, t^*)$. Si $u(\bullet, \bullet)$ solution classique de (2.11) existe au point P , on a nécessairement (compte tenu de la

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

proposition 1) : $u(P) = u(x_1, 0) = u(x_2, 0)$ et cette dernière égalité contredit l'hypothèse (3.2), qui est elle-même une conséquence de la relation (3.3).

- La remarque précédente peut être précisée. Si

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad a = f', \quad u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad -\infty < D \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx} [a(u^0(x))] < 0$$

et $T^* = -1/D$, alors pour tout $\epsilon > 0$, le problème de Cauchy (2.11) ne peut avoir de solution classique sur $\mathbb{R} \times [0, T^* + \epsilon[$.

- L'exemple qui suit illustre le comportement typique de la solution d'une loi de conservation lorsque les vitesses d'ondes à l'origine ne définissent pas une fonction croissante. Nous étudions l'équation de Burgers, pour laquelle $f(u) \equiv \frac{1}{2} u^2$ et

$$(3.6) \quad a(u) = u, \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{Burgers})$$

avec une donnée initiale u^0 continue (qui, en toute rigueur, n'est pas dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc ne recouvre pas exactement les hypothèses du théorème 1, mais les calculs algébriques sont plus simples !) définie par

$$(3.7) \quad u^0(x_0) = \begin{cases} 1, & x_0 \leq 0 \\ 1 - x_0, & 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 0, & x_0 \geq 1. \end{cases}$$

Le calcul de la caractéristique (2.7) est facile :

si $x_0 \leq 0$, $x = x_0 + t$ et $u(x, t) = 1$,

si $0 \leq x_0 \leq 1$, $x = x_0 + t(1 - x_0)$ et $u(x, t) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}$

si $x_0 \geq 1$, $x = x_0$ et $u(x, t) = 0$ si $x \geq 1$.

La construction de la fonction $u(\bullet, \bullet)$ pour $0 \leq t \leq 1$ est donc donnée par

$$(3.8) \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq t \\ \frac{1 - x}{1 - t} & t \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

- Au fur et à mesure que t croît, le profil $u(t, \bullet)$ se raidit, et la solution (classique) $u(t, \bullet)$ devient **discontinue** en $x = 1$ au temps $t = 1$. Cette discontinuité est un modèle mathématique pour une **onde de choc**. Notons que l'apparition d'une discontinuité est une manifestation naturelle du caractère **non linéaire** de la loi de conservation (1.1) lorsque la donnée initiale $u^0(\bullet)$ est telle que $\mathbb{R} \ni x \mapsto a(u^0(x)) \in \mathbb{R}$ n'est **pas** croissante. Les ondes se propagent avec la vitesse a . La condition initiale est telle que des ondes plus rapides (en valeur algébrique) sont situées "à gauche" de points caractérisés par des vitesses d'ondes plus lentes. Les **ondes rapides rattrapent les ondes lentes**, le profil se raidit et une discontinuité se crée. Il est donc nécessaire de sortir du cadre trop strict des

Etude mathématique d'une loi de conservation

solutions classiques (de classe \mathcal{C}^1) de la loi de conservation (1.1), afin de permettre aux solutions "faibles" certaines discontinuités.

4) SOLUTIONS FAIBLES

• Nous commençons par écrire la loi de conservation (1.1) **sans** faire apparaître explicitement les dérivées $\frac{\partial W}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$, où $\mathbb{R}^N \supset \Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ est la fonction de flux. On suppose que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$ vérifie une condition initiale

$$(4.1) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R} \ni x \mapsto W^0(x) \in \Omega$ est une fonction donnée de classe \mathcal{C}^1 .

• On multiplie l'équation (1.1) par une fonction vectorielle φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$,

$$(4.2) \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)^N.$$

Une telle fonction est nulle hors d'un domaine de type $[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T]$, mais est a priori non nulle sur l'axe $x = 0$, *i.e.* l'intervalle (de \mathbb{R}^2) $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$, ainsi que le suggère la figure 3.

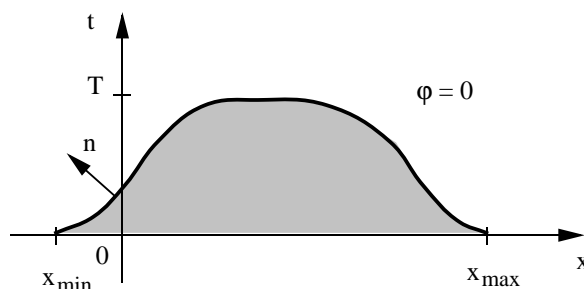


Figure 3. Support typique de $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$.

• Puis on intègre l'expression obtenue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$:

$$(4.3) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} \right] \varphi(x, t) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$$

sans se priver de le faire par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{\infty} dt \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} \right] \varphi(x, t) =$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^\infty dt \left(W(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\
 & + \int_{\partial(\text{supp}\varphi)} [W(x, t) n_t + f(W(x, T)) n_x] \varphi(x, t) d\gamma,
 \end{aligned}$$

où $n \equiv (n_x, n_t)$ désigne la normale extérieure au support de φ . Mais sur le bord de son support, $\varphi(\bullet, \bullet)$ est nulle, sauf peut être sur le morceau de type $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$ décrit plus haut, où $n = (0, -1)$ et $\varphi(x, t) = \varphi(x, 0)$. On a donc

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial(\text{supp}\varphi)} (W(x, t) n_t + f(W(x, t)) n_x) \varphi(x, t) d\gamma &= - \int_{\mathbb{R}} dx W(x, 0) \varphi(x, 0) \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} W^0(x) \varphi(x, 0) dx
 \end{aligned}$$

compte tenu de la condition initiale (4.1).

- Pour une solution régulière $W(\bullet, \bullet)$ de la loi de conservation (1.1) et de la condition initiale (4.1), l'écriture (4.3) s'écrit sous forme équivalente

$$(4.4) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left(W(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} W^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N. \end{cases}$$

Cette écriture ne contient **plus** de dérivées de la fonction inconnue $W(\bullet, \bullet)$ et prend un sens dès que $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$, c'est à dire dès que $W \in L^\infty(K)$ pour toute partie compacte K de $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. En effet, la fonction régulière $\varphi \in \mathcal{C}_0^1$ est à support compact dans le même espace $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ et les intégrales de l'expression (4.4) ont bien un sens. Cette remarque motive la définition qui suit.

• **Définition 1. Solution faible du problème de Cauchy.**

Soit $W^0 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})^N$. Une fonction $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$ est dite solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) si $W(x, t) \in \Omega$ presque partout (x, t) et satisfait la relation (4.4) pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$ à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.

- Une solution faible est solution au sens des distributions de la loi de conservation (1.1). En effet, on a bien évidemment $\mathbb{R} \times]0, \infty[\subset \mathbb{R} \times [0, \infty[$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \subset \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$, φ est nulle sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ (car elle est à support compact dans l'**ouvert** $\mathbb{R} \times]0, \infty[$) donc la relation (4.4) entraîne

$$(4.5) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left[W(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)^N,$$

relation qui exprime par définition la loi de conservation (1.1) au sens des **distributions**. L'intérêt de la notion de solution faible est d'incorporer dans la même écriture à la fois la loi de conservation (1.1) **et** la condition initiale (4.1), *i.e.* l'ensemble des conditions relatives au problème de Cauchy.

- Si, de plus, une solution faible $W(\bullet, \bullet)$ du problème de Cauchy est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , *i.e.* $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)$, ou écrit (4.4) avec pour fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ et il vient après intégration par parties (les termes de bord sont nuls) :

$$(4.6) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \right] \varphi(x, t) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)^N,$$

relation qui entraîne (1.1) sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$. L'application $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction continue et $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ pour un ouvert quelconque \mathcal{O} de $\mathbb{R} \times]0, \infty[$. Par continuité, la loi de conservation (1.1) est satisfaite sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$.

- On intègre ensuite la relation (4.4) par parties “à l'envers” et on tient compte de la relation (1.1) que nous venons d'établir. Il vient

$$(4.7) \quad \int_{\mathbb{R}} (W(x, 0) - W^0(x)) \varphi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N,$$

relation qui compte tenu des hypothèses $W^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})^N$ et $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)^N$, entraîne la condition initiale (4.1). Nous avons démontré la

• **Proposition 2. Une solution faible régulière est solution classique.**

Si $W^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \Omega)$ et $W \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ est une solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) qui satisfait de plus à l'hypothèse de régularité $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)$, alors $W(\bullet, \bullet)$ est solution classique du problème de Cauchy (1.1) (4.1).

- On s'intéresse maintenant au cas où $W(\bullet, \bullet)$ est régulière, “sauf sur une famille finie Σ de courbes régulières”. On dit que $W(\bullet, \bullet)$ est “de classe \mathcal{C}^1 **par morceaux**” si il existe une famille finie Σ de courbes régulières dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ paramétrées par le temps sous la forme $x = \xi(\theta)$, telles que $W(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 dans l'ensemble $(\mathbb{R} \times [0, \infty[) \setminus \Sigma$ et admet une **limite à gauche et à droite** en tout point $(x, t) \in \Sigma$:

$$(4.8) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} W(\xi(t) - \epsilon, t) = W_g(\xi(t), t), \quad (\xi(t), t) \in \Sigma$$

$$(4.9) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} W(\xi(t) + \epsilon, t) = W_d(\xi(t), t), \quad (\xi(t), t) \in \Sigma.$$

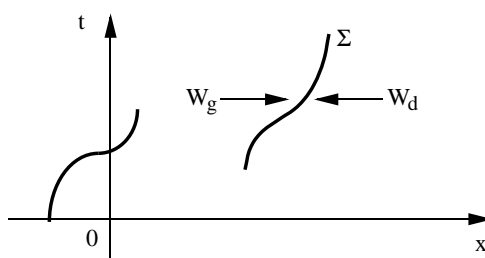


Figure 4. Fonction W de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

- Une condition initiale $W^0 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$, qui est une fonction d'une seule variable réelle, est dite également "de classe \mathcal{C}^1 par morceaux" si il existe une famille finie P de points de \mathbb{R} telle que W^0 est continuellement dérivable sur $\mathbb{R} \setminus P$, et W^0 a une limite à gauche et une limite à droite en tout point $x \in P$.

• **Théorème 2. Relation de Rankine et Hugoniot.**

On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et la condition initiale W^0 de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors une fonction $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux est solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) si et seulement si

- (i) W est solution classique de (1.1) (4.1) aux points de $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ où elle est de classe \mathcal{C}^1 et
- (ii) W satisfait la relation de saut dite de Rankine (1876) et Hugoniot (1887) :

$$(4.10) \quad f(W_d) - f(W_g) = \sigma(W_d - W_g) \quad \text{sur } \Sigma$$

en tout point de la ligne de discontinuité, avec

$$(4.11) \quad \sigma = \frac{d\xi}{d\theta}(x, t), \quad x = \xi(\theta) \quad \text{sur } \Sigma.$$

Preuve du théorème 2.

- Soit W une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux qui soit également solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1). La proposition 2 montre que $W(\bullet, \bullet)$ est solution classique en tout point où elle est de classe \mathcal{C}^1 , ce qui montre le point (i).
- Considérons maintenant un point M de la ligne Σ et D une boule ouverte centrée autour de M assez petite de sorte que $\Sigma \cap D$ soit composé de la seule composante connexe de Σ contenant M (Figure 5).

Etude mathématique d'une loi de conservation

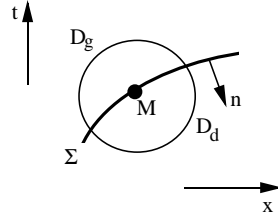


Figure 5. Zoom autour d'un point de discontinuité.

- On appelle D_g et D_d les deux composantes connexes de $D \setminus (\Sigma \cap D)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(D)^N$. Comme W est solution au sens des distributions, on a

$$0 = \int_D \left(W \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = \int_{D_g} + \int_{D_d} .$$

On suppose que le vecteur normal n sur Σ pointe de D_g vers D_d (Figure 5). On intègre l'égalité précédente par parties, en tenant compte du fait que la fonction φ est nulle sur le bord ∂D de l'ouvert D . Il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_d} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \right) \varphi(x, t) dx dt - \int_{\partial D_d} [n_t W + n_x f(W)] \varphi(x, t) d\gamma \\ &\quad - \int_{D_g} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \right) \varphi(x, t) dx dt + \int_{\partial D_g} [n_t W + n_x f(W)] \varphi(x, t) d\gamma . \end{aligned}$$

On remarque que $W(\bullet, \bullet)$ étant solution classique de (1.1) sur $D_g \cup D_d$, les deux intégrales correspondantes sont nulles. Par ailleurs sur le bord ∂D_g , la fonction $W(\bullet, \bullet)$ est égale à sa limite à gauche W_g et on a un résultat analogue à droite. On tire donc de la relation précédente

$$(4.12) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma \cap D} [n_t (W_d - W_g) + n_x (f(W_d) - f(W_g))] \varphi(x, t) d\gamma = 0 \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(D)^N . \end{cases}$$

La relation (4.14) est vraie pour toute fonction φ régulière sur le bord $\Sigma \cap D$, ce qui établit la relation (4.12), compte tenu de la relation géométrique

$$(4.13) \quad (n_t \times 1) + (n_x \sigma) = 0 \quad \text{sur } \Sigma .$$

- Nous détaillons le cas où le point M est situé sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, *i.e.* le cas où la ligne de discontinuité Σ a une trace sur l'ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$ associé à la condition initiale W^0 , discontinue au point M . On introduit comme plus haut une boule ouverte D autour de M , mais seule la demi-boule $D \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est utile maintenant. On utilise une fonction test appartenant à $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ à support dans $D \cap (\mathbb{R} \times [0, \infty[)$; on a (cf. (4.4)) :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\int_{D \cap (\mathbb{R} \times [0, \infty])} \left[W \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt + \int_{D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})} W^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 .$$

L'intégration par parties de cette relation conduit à :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{D_g \cup D_d} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \varphi dx dt \\ - \int_{\Sigma \cap D} [n_t(W_d - W_g) + n_x(f(W_d) - f(W_g))] \varphi(x, t) d\gamma \\ + \int_{[D_g \cap (\mathbb{R} \times \{0\})] \cup [D_d \cap (\mathbb{R} \times \{0\})]} [W^0(x) - W(x, 0)] \varphi(x, 0) dx = 0 , \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N \quad \text{supp } \varphi \subset D \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) . \end{array} \right.$$

On suppose la boule D choisie assez petite de sorte que la portion de courbe passant par M est identique à $\Sigma \cap D$. Par suite, la fonction $W(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $D_g \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ et $D_d \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$; compte tenu de la proposition 2, elle vérifie donc la condition initiale (4.1). On a vu plus haut que W vérifie l'équation (1.1) sous forme classique dans $D_g \cup D_d$. Il résulte des deux remarques qui précèdent que seule l'intégrale $\int_{\Sigma \cap D}$ est non nulle au sein de la relation (4.16) et la relation (4.14) est établie à nouveau dans ce cas particulier.

- Réciproquement si W , fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, satisfait les conditions (i) et (ii), un calcul à l'envers des intégrations par parties précédentes montre que la relation (4.4) est vraie, et $W(\bullet, \bullet)$ est solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1). □

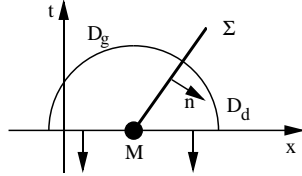


Figure 6. *Discontinuité initiale.*

- Dans le cas particulier de l'équation de Burgers, la relation de Rankine-Hugoniot prend la forme $\frac{1}{2}(u_d^2 - u_g^2) = \sigma(u_d - u_g)$. Par suite ou bien $u_d = u_g$ et il n'y a pas de discontinuité, ou bien

$$(4.15) \quad \sigma = \frac{1}{2}(u_g + u_d) \quad (\text{Burgers}).$$

La vitesse de l'onde de choc est directement explicitable à partir des valeurs de part et d'autre de celle-ci.

- Nous pouvons maintenant construire une solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) à valeurs initiales **discontinues**, par exemple

$$(4.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) \equiv \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

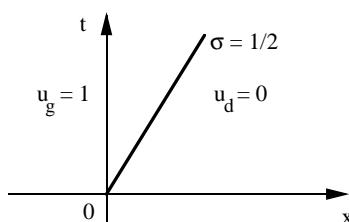


Figure 7. Choc pour l'équation de Burgers.

- La discontinuité proposée en (4.16) génère un choc de vitesse initiale $\sigma = 1/2$ qui se propage sans modification de sa célérité. La fonction $u(\bullet, \bullet)$ définie par

$$(4.17) \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t/2 \\ 0 & \text{si } x > t/2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, est solution de l'équation de Burgers et de la condition initiale en tous les points où elle est régulière. Elle vérifie de plus la condition de Rankine-Hugoniot (4.12) en tous les points où elle est discontinue. C'est donc une solution faible du problème de Cauchy en vertu du théorème 2.

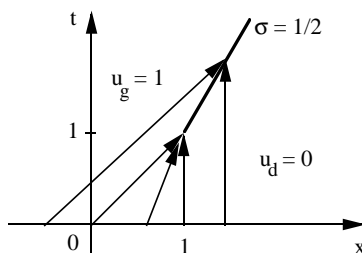


Figure 8. Focalisation d'un choc pour l'équation de Burgers.
Les caractéristiques sont "avalées" par le choc.

- Cette solution particulière permet de prolonger l'exemple donné en (3.7) (3.8) et à la figure 3. A l'instant $t = 1$, la valeur de la solution candidate $u(x, 1)$ par la

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

méthode des caractéristiques est discontinue : $u(x,1) = 1$ si $x < 1$, $u(x,1) = 0$ si $x > 1$ et, à un changement de référence du temps et de l'espace près, on retrouve la condition initiale (4.17). Après focalisation (3.8) de la condition initiale décroissante, une discontinuité apparaît au point $(x,t) = (1,1)$ et se propage ensuite avec la vitesse $\sigma = 1/2$ (Figure 8).

- Nous insistons sur le fait que la relation de saut (4.12) est associée à la forme conservative (1.1) et qu'elle est l'écriture dans le monde des fonctions de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de **cette** loi de conservation et **pas d'une autre**, même si pour les fonctions régulières (de classe \mathcal{C}^1), la loi de conservation (1.1) est équivalente à une autre loi de conservation. L'exemple de l'équation de Burgers est élémentaire pour illustrer le point précédent. Ainsi, l'équation de Burgers s'écrit sous la forme conservative suivante :

$$(4.18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

et conduit à une vitesse de choc $\sigma(u_g, u_d)$ calculée à la relation (4.5). Sous forme non conservative, l'équation (4.18) s'écrit

$$(4.19) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Après multiplication de (4.19) par u^2 et quelques manipulations algébriques élémentaires, il vient :

$$(4.20) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} (u^3) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} (u^4) = 0$$

et cette relation est une nouvelle forme conservative de l'équation de Burgers qui n'est **pas** équivalente à (4.18). En effet la vitesse $\tilde{\sigma}(u_g, u_d)$ d'un choc entre u_g et u_d issue de la relation de Rankine-Hugoniot associée à la loi de conservation (4.20) s'écrit $\frac{1}{4} [u^4] = \frac{1}{3} \tilde{\sigma} [u^3]$, soit

$$(4.21) \quad \tilde{\sigma} = \frac{3}{4} \frac{u_g^2 + u_d^2}{u_g^2 + u_g u_d + u_d^2} (u_g + u_d),$$

relation **différente** de (4.15) !

- Nous retenons de la discussion précédente le fait que lorsqu'on manipule les solutions faibles, la **forme conservative** (1.1) est première. C'est ce qu'on a vu pour la dynamique des gaz : les équations sous forme conservative ne sont que l'écriture algébrique de la conservation physique de la masse, de l'impulsion, de l'énergie et pas d'autres grandeurs !

5) NON UNICITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES

- Nous étudions à nouveau un problème de Cauchy pour l'équation de Burgers, voisin (en apparence) de (4.16) :

$$(5.1) \quad u^0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

La méthode des caractéristiques permet de transporter u^0 le long du domaine d'espace-temps représenté figure 9. Toutefois, un "trou" apparaît dans le secteur angulaire $0 \leq \frac{x}{t} \leq 1$.

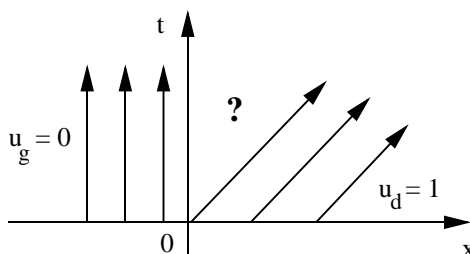


Figure 9. Problème de Cauchy associé à des caractéristiques "fuyantes".

- Une première construction possible est de remarquer que la condition initiale (5.1) est **invariante** par homothétie de rapport $\lambda > 0$:

$$(5.2) \quad u^0(\lambda x) = u^0(x), \quad \lambda > 0, \quad x \neq 0.$$

Par ailleurs toute loi de conservation (1.1) est invariante par dilatation d'espace-temps.

• **Proposition 3. Invariance d'échelle d'une loi de conservation.**

Soit $\lambda > 0$, T_λ la transformation de l'espace-temps définie par

$$(5.3) \quad T_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

$W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$ une solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) qui vérifie donc la relation (4.4), et $T_\lambda W$ la fonction définie par

$$(5.4) \quad (T_\lambda W)(x, t) = W(T_\lambda(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Alors $(T_\lambda W)$ est solution faible de la loi de conservation (4.4).

Preuve de la proposition 3.

- On remarque que $T_\lambda W(\bullet)$ appartient clairement à $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$ si c'est le cas pour $W(\bullet)$ et on considère, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$, l'expression associée à la relation (4.4) :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} [(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial x}] dx dt + \int_{\mathbb{R}} (T_\lambda W^0)(x) \varphi(x, 0) dx \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} (W(\lambda x, \lambda t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(\lambda x, \lambda t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} W^0(\lambda x) \varphi(x, 0) dx \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} \left[W(x', t') \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{x'}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda} \right) + f(W(x', t')) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{x'}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda} \right) \right] \frac{dx' dt'}{\lambda^2} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} W^0(x') \varphi \left(\frac{x'}{\lambda}, 0 \right) \frac{dx'}{\lambda}
\end{aligned}$$

avec le changement de variables $x' = \lambda x$ et $t' = \lambda t$. On pose $\psi(\xi, \theta) = \varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\theta}{\lambda}\right)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ équivaut à la propriété $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ si $\lambda > 0$. On a de plus $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\theta}{\lambda} \right)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\theta}{\lambda} \right)$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} [(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial x}] dx dt + \int_{\mathbb{R}} (T_\lambda W^0)(x) \varphi(x, 0) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} \left[W(x', t') \lambda \frac{\partial \psi}{\partial t'} + f(W(x', t')) \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right] \frac{dx' dt'}{\lambda^2} + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} W^0(x') \psi(x', 0) \frac{dx'}{\lambda}
\end{aligned}$$

et cette expression est toujours nulle si W est solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1). \square

- Il est donc naturel, si $u(\bullet, \bullet)$ est solution de l'équation de Burgers dont la condition initiale satisfait (5.2), d'introduire la solution u_λ associée à (5.4) :

$$(5.5) \quad u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda t), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

La fonction $u_\lambda(\bullet, \bullet)$ est solution faible si u l'est et, compte tenu de l'invariance par dilatation de la condition initiale, elle a même condition initiale que u^0 :

$$(5.6) \quad u_\lambda(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Si le problème de Cauchy (même sous forme faible) a une solution unique, la condition (5.6) implique que u_λ , solution de la **même** équation que u avec la **même** condition initiale que u , est **égale** à u . La solution u est **autosemblable** :

$$(5.7) \quad u(x, t) = u(\lambda x, \lambda t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

- **Définition 2. Solution autosemblable.**

Une solution faible $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ de la loi de conservation (1.1) est autosemblable si il existe $V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})^N$ de sorte que

Etude mathématique d'une loi de conservation

$$(5.8) \quad W(x, t) = V\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

- Dans le cas de l'équation de Burgers, les solutions autosemblables continues sont appelées **ondes de détente**. La représentation (5.8) au sein de (4.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[v\left(\frac{x}{t}\right) \right] + v \frac{\partial}{\partial x} \left[v\left(\frac{x}{t}\right) \right] = -\frac{x}{t^2} v' + v \frac{1}{t} v' \\ &= \frac{1}{t} \left(-\frac{x}{t} + v\left(\frac{x}{t}\right) \right) v'. \end{aligned}$$

Une solution autosemblable de l'équation de Burgers est constante (cas à ne pas négliger !) ou bien vérifie

$$(5.9) \quad u(x, t) = \frac{x}{t}.$$

- La solution (5.9) est utilisée pour "recoller" les deux morceaux de solution que l'on ne peut pas traiter la méthode des caractéristiques (cf. figure 9). Il vient

$$(5.10) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \frac{x}{t} < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq \frac{x}{t} \leq 1 \\ 1 & \frac{x}{t} > 1. \end{cases}$$

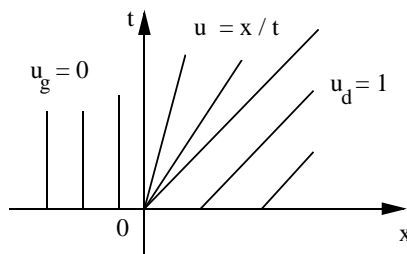


Figure 10. Onde de détente pour l'équation de Burgers.

- On vérifie facilement que la fonction (5.10), appartient à $L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ (elle est même bornée), est continue et est solution faible de l'équation de Burgers (elle est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux) ; le seul point à regarder avec soin est le voisinage de $(0, 0)$, ce que nous laissons au lecteur à titre d'exercice.

- Mais, dans notre recherche de solution unique via l'invariance d'échelle d'une loi de conservation, nous venons de construire une **nouvelle solution faible** de

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

l'équation de Burgers ! En effet, l'exemple (4.16) ne diffère de (4.28) (5.4) que par l'échange de u_g et u_d entre la gauche et la droite. La fonction $\tilde{u}(\bullet)$ directement inspirée de (4.19), c'est-à-dire

$$(5.11) \quad \tilde{u}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

est encore solution faible comme l'illustrent le théorème 2 et la figure 7.

- Nous avons construit dans ce chapitre la notion mathématique de solution faible d'une loi de conservation pour ne pas être bloqué par les contraintes de dérivabilité inhérentes aux solutions classiques. Ceci nous a permis, *via* les relations de saut de Rankine-Hugoniot, de construire des **solutions discontinues d'une loi de conservation**. Toutefois, les ondes de détente sont également une classe naturelle de solutions faibles seulement continues. Dans certains cas, les **deux** types d'ondes (de solutions), à savoir les ondes de détentes et les ondes de chocs peuvent coexister et, à ce stade de la théorie, l'**unicité** du problème de Cauchy n'est pas satisfaite.

Entropie mathématique

Dans ce chapitre, nous montrons d'abord que l'existence d'une loi de conservation supplémentaire pour la dynamique des gaz est intimement liée à l'entropie physique. Cette remarque permet de définir la notion d'entropie mathématique. Une "solution entropique" d'un système de lois de conservation vérifie une inégalité d'entropie supplémentaire, comme pour les limites de "perturbations visqueuses". Cette définition conduit au théorème de Kručkov qui établit que dans le cas d'une loi de conservation scalaire, le problème de Cauchy admet une unique solution entropique (paragraphe 2). Le cas particulier du problème de Riemann (condition initiale composée de deux états constants) est explicité à la fin du chapitre.

1) LOI DE CONSERVATION SUPPLÉMENTAIRE

- Nous gardons en tête l'exemple des équations d'Euler de la dynamique des gaz

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad W \in \Omega$$

avec

$$(1.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t, \quad \rho > 0$$

$$(1.3) \quad \rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2), \quad e > 0$$

$$(1.4) \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad \gamma > 1$$

$$(1.5) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(1.6) \quad g(W) = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t.$$

Nous avons vu (proposition 1 du chapitre sur les modèles hyperboliques) que si on pose

$$(1.7) \quad s = C_v \log \left(\frac{p}{K \rho^\gamma} \right), \quad K > 0, \quad C_v > 0,$$

alors l'entropie spécifique s est transportée par le mouvement :

$$(1.8) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = 0.$$

Compte tenu de la loi de conservation de la masse

$$(1.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

nous pouvons réécrire l'équation (1.8) sous forme **conservative** :

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u s) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v s) = 0.$$

Les mathématiciens (depuis Godunov en 1961 puis Friedrichs et Lax en 1971) introduisent l'**entropie mathématique** $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ par la relation

$$(1.11) \quad \eta(W) = -\rho s$$

et les **flux d'entropie** correspondants :

$$(1.12) \quad \xi(W) = -\rho u s$$

$$(1.13) \quad \zeta(W) = -\rho v s$$

et on a la

• **Proposition 1. Conservation de l'entropie.**

Pour le système (1.1) – (1.6) des équations d'Euler du gaz parfait polytropique, il existe une fonction **strictement convexe** $\eta(\bullet)$ donnée par les relations (1.6) et (1.11) et des flux d'entropie $\Omega \ni W \mapsto (\xi(W), \zeta(W)) \in \mathbb{R}^2$ calculés aux relations (1.12) et (1.13) de sorte que toute solution régulière $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$ de (1.1) satisfait à la loi de conservation supplémentaire

$$(1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta(W) + \frac{\partial}{\partial x}\xi(W) + \frac{\partial}{\partial y}\zeta(W) = 0.$$

Preuve de la proposition 1.

• Compte tenu de ce qui a été dit plus haut, le seul point non banal est de vérifier que l'application $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ est une fonction **strictement convexe** de l'argument W sur l'ensemble

$$(1.15) \quad \Omega = \left\{ (\rho, q, r, \mathcal{E})^t, \rho > 0, \rho e \equiv \mathcal{E} - \frac{1}{2\rho}(q^2 + r^2) > 0 \right\}.$$

Rappelons d'abord que l'ensemble Ω est bien convexe. Ceci résulte de la convexité de l'application

$$(1.16) \quad]0, \infty[\times \mathbb{R}^2 \ni (\rho, q, r) \mapsto \varphi(\rho, q, r) = \frac{1}{2\rho}(q^2 + r^2) \in [0, \infty[.$$

On a en effet

$$(1.17) \quad d\varphi(\rho, q, r) = -\frac{1}{2\rho^2}(q^2 + r^2)d\rho + \frac{q}{\rho}dq + \frac{r}{\rho}dr$$

Entropie mathématique

$$(1.18) \quad d^2\varphi(\rho, q, r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^3}(q^2 + r^2) & -\frac{q}{\rho^2} & -\frac{r}{\rho^2} \\ -\frac{q}{\rho^2} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{r}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

qui définit une matrice positive puisque le terme $(d^2\varphi)_{33}$ est positif (strictement), le mineur $\det[d^2\varphi]_{2 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq 3}$ est également strictement positif et $\det(d^2\varphi) = 0$.

- On rappelle que l'entropie $\eta(\bullet)$ est donnée par la relation

$$(1.19) \quad \eta(W) = -\rho C_v \log \left[\frac{\gamma - 1}{K} \left\{ \frac{\rho E - \frac{1}{2\rho} [(\rho u)^2 + (\rho v)^2]}{\rho^\gamma} \right\} \right]$$

et nous souhaitons du courage au lecteur qui entreprend de démontrer directement que la matrice hessienne $d^2\eta$ est définie positive. Nous préférons utiliser les connaissances classiques de **thermostatique** (voir par exemple H. Callen [*Thermodynamics and an introduction to thermostatics*, John Wiley & Sons, seconde édition, 1985]).

- Pour un système physique de masse M , volume V et énergie interne ϵ , l'**entropie physique** S est une fonction $\Sigma(\bullet)$ homogène de degré 1 de ces trois champs : $[0, \infty[^3 \ni (M, V, \epsilon) \mapsto S = \Sigma(M, V, \epsilon) \in \mathbb{R}$

$$(1.20) \quad \Sigma(\lambda M, \lambda V, \lambda \epsilon) = \lambda \Sigma(M, V, \epsilon), \quad \lambda, M, V, \epsilon \geq 0$$

qui est de plus **concave**, comme le rappellent par exemple Landau et Lifchitz [*Physique statistique*, Mir, 1953] :

$$(1.21) \quad \begin{cases} \Sigma((1-\theta)M_1 + \theta M_2, (1-\theta)V_1 + \theta V_2, (1-\theta)\epsilon_1 + \theta\epsilon_2) \\ \geq (1-\theta)\Sigma(M_1, V_1, \epsilon_1) + \theta\Sigma(M_2, V_2, \epsilon_2); \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

Dans le cas du gaz parfait polytropique de rapport γ de chaleurs spécifiques, on a (dans un cadre statique, *i.e.* sans champ de vitesse) :

$$(1.22) \quad \Sigma(M, V, \epsilon) = M C_v \log \left[\frac{\gamma - 1}{K} \frac{V^{\gamma-1}}{M^\gamma} \epsilon \right].$$

On dérive une fois la fonction $\Sigma(\bullet)$:

$$(1.23) \quad d\Sigma = C_v \left\{ \left(\frac{\Sigma}{M C_v} - \gamma \right) dM + (\gamma - 1) \frac{M}{V} dV + \frac{M}{\epsilon} d\epsilon \right\}$$

et par identification avec la relation thermodynamique classique

$$(1.24) \quad d\epsilon \equiv \mu dM - p dV + T dS$$

qui introduit le potentiel chimique massique μ , la pression p et la température T , il vient

$$(1.25) \quad \frac{p}{T} = (\gamma - 1) C_v \frac{M}{V}$$

$$(1.26) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{\epsilon} M C_v \geq 0$$

relations qui redonnent bien la loi (1.4) mais de plus la **positivité de la température**.

- On dérive maintenant la relation (1.23). Il vient :

$$(1.27) \quad d^2\Sigma = \frac{1}{C_v} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{M} & \frac{\gamma-1}{V} & \frac{1}{\epsilon} \\ \frac{\gamma-1}{V} & -(\gamma-1)\frac{M}{V^2} & 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 & -\frac{M}{\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

et, comme on l'a fait pour $d^2\varphi$, cette matrice est positive, de rang 2 et son noyau est engendré par le vecteur $(M, V, \epsilon)^t$ puisque Σ est homogène de degré 1 :

$$(1.28) \quad \ker d^2\Sigma(M, V, \epsilon) = \mathbb{R} (M, V, \epsilon)^t.$$

L'entropie mathématique $\eta(\bullet)$ s'exprime très facilement en fonction de l'entropie physique $\Sigma(\bullet)$:

$$(1.29) \quad \eta(\rho, q, r, \mathcal{E}) = -\Sigma\left(\rho, 1, \mathcal{E} - \frac{1}{2\rho}(q^2 + r^2)\right).$$

- La convexité de $\eta(\bullet)$ résulte de la **concavité** de Σ et de la **positivité de la température**, comme le montre le calcul qui suit :

$$\begin{aligned} & \eta((1-\theta)W_1 + \theta W_2) = \\ & = -\Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, \right. \\ & \quad \left. (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - \frac{1}{2}\varphi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1-\theta)q_1 + \theta q_2, (1-\theta)r_1 + \theta r_2)\right) \\ & = -\Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, \right. \\ & \quad \left. (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - \frac{1}{2}\varphi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1-\theta)q_1 + \theta q_2, (1-\theta)r_1 + \theta r_2)\right) \\ & + \Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) - \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2)\right) \\ & - \Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) - \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2)\right) \\ & \leq -\Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) - \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2)\right) \end{aligned}$$

car $\varphi(\bullet)$ est convexe et $\Sigma(\rho, 1, \bullet)$ est croissante car la température est positive. Donc, comme $\Sigma(\bullet)$ est concave,

$$\eta((1-\theta)W_1 + \theta W_2) \leq$$

$$\leq -(1-\theta)\Sigma(\rho_1, 1, \mathcal{E}_1 - \varphi(\rho_1, q_1, r_1)) - \theta\Sigma(\rho_2, 1, \mathcal{E}_2 - \varphi(\rho_2, q_2, r_2))$$

Entropie mathématique

$$= (1 - \theta) \eta(W_1) + \theta \eta(W_2)$$

et la convexité (large) de l'entropie $\eta(\bullet)$ est établie.

• Il reste à démontrer que $\eta(\bullet)$ est **strictement** convexe. On introduit $W_1 \neq W_2$ et $\theta \in]0, 1[$ de sorte que

$$(1.30) \quad \eta((1 - \theta) W_1 + \theta W_2) = (1 - \theta) \eta(W_1) + \theta \eta(W_2), \quad 0 < \theta < 1.$$

Comme $\eta(\bullet)$ est convexe sur l'intervalle $[W_1, W_2] \subset \Omega$, l'égalité (1.30) a nécessairement lieu pour **tout** $\theta \in [0, 1]$. Par suite, dans la chaîne d'inégalités précédentes, on est toujours dans le cas d'**égalité**, et on déduit

$$(1.31) \quad \begin{cases} \varphi((1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1 - \theta)q_1 + \theta q_2, (1 - \theta)r_1 + \theta r_2) = \\ = (1 - \theta) \varphi(\rho_1, q_1, r_1) + \theta \varphi(\rho_2, q_2, r_2), \end{cases}$$

$$(1.32) \quad \begin{cases} \Sigma((1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1 - \theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2) = \\ = (1 - \theta) \Sigma(\rho_1, 1, \varphi_1) + \theta \Sigma(\rho_2, 1, \varphi_2) \end{cases}$$

pour **tout** $\theta \in [0, 1]$, avec $\varphi_1 = \varphi(\rho_1, q_1, r_1)$, $\varphi_2 = \varphi(\rho_2, q_2, r_2)$ et $\varphi(\bullet)$ définie à la relation (1.16).

• Nous exploitons la relation (1.31) qui a lieu sur le segment $\{(\rho_1, q_1, r_1) + \theta(\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1), 0 \leq \theta \leq 1\}$. En dérivant deux fois dans la direction de segment, on a :

$$(1.33) \quad \begin{cases} d^2\varphi((1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1 - \theta)q_1 + \theta q_2, (1 - \theta)r_1 + \theta r_2) \bullet \\ \bullet ((\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1), (\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1)) = 0, \end{cases}$$

ce qui montre que le vecteur incrément $(\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1)$ est en tout point colinéaire au vecteur propre de $d^2\varphi$ associé à la valeur propre nulle. Comme on a

$$(1.34) \quad \ker d^2\varphi(\rho, q, r) = \mathbb{R}(\rho, q, r),$$

on tire du point précédent :

$$(1.35) \quad \forall \theta \in]0, 1[, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \rho_2 - \rho_1 \\ q_2 - q_1 \\ r_2 - r_1 \end{pmatrix} = \alpha \left[(1 - \theta) \begin{pmatrix} \rho_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \rho_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right].$$

On déduit de la relation (1.35) l'égalité $(1 - \alpha\theta)(\rho_2 - \rho_1) = \alpha\rho_1$. Si $\rho_2 = \rho_1$, alors $\alpha = 0$ ($\rho_1 > 0$) et $q_2 = q_1, r_2 = r_1$ d'après (1.35), donc

$$(1.36) \quad u_2 = u_1, \quad v_2 = v_1,$$

et $W_2 = W_1$. Si $\rho_2 \neq \rho_1$, on ne peut avoir $\alpha = 1/\theta$ car alors α est également nul. On tire donc de (1.35)

$$(1.37) \quad (\rho_2, q_2, r_2) = \left(1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha\theta}\right) (\rho_1, q_1, r_1)$$

et l'identité $q \equiv \rho u, r \equiv \rho v$ montre que la relation (1.36) a lieu encore dans ce cas.

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

- On exploite maintenant la relation (1.32) sur le segment $[(\rho_1, q_1, \varphi_1), (\rho_2, q_2, \varphi_2)]$. On a de manière analogue à (1.33) :

$$(1.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^2\Sigma((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\epsilon_1 + \theta\epsilon_2 - ((1-\theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2)) \\ \bullet \left((\rho_2 - \rho_1, 0, (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)), \right. \\ \left. (\rho_2 - \rho_1, 0, (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)) \right) = 0. \end{array} \right.$$

S'il est non nul, le vecteur $(\rho_2 - \rho_1, 0, (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (\varphi_2 - \varphi_1))$ est colinéaire à $((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)(\epsilon_1 - \varphi_1) + \theta(\epsilon_2 - \varphi_2))$, compte-tenu de (1.28). Donc ce vecteur est nul. Les états W_1 et W_2 vérifient la relation (1.36) ainsi que $\rho_1 = \rho_2$ et $\varphi_1 = \varphi_2$, donc $\epsilon_2 = \epsilon_1$. Ces deux vecteurs sont donc égaux, ce qui établit la contradiction et la propriété demandée. \square

- De manière générale, nous pouvons chercher à **quelle condition** sur le triplet (η, ξ, ζ) (cf. les relations (1.1) à (1.13) dans le cas de la dynamique des gaz), on dispose d'une loi de conservation supplémentaire (1.14) si $W(\bullet)$ est solution d'une loi de conservation de type (1.1). On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \xi(W) + \frac{\partial}{\partial y} \zeta(W) &= d\eta(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + d\xi(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + d\zeta(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \\ &= d\eta(W) \bullet \left[\frac{\partial W}{\partial t} + df(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + dg(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \right] \\ &\quad + [d\zeta(W) - d\eta(W) \bullet df(W)] \frac{\partial W}{\partial x} + [d\zeta(W) - d\eta(W) \bullet dg(W)] \frac{\partial W}{\partial y}. \end{aligned}$$

La première ligne est nulle si $W(\bullet)$ est solution de (1.1) et les deux dernières le sont si on a les relations suivantes entre l'entropie $\eta(\bullet)$ et les flux d'entropie $\xi(\bullet)$ et $\zeta(\bullet)$:

$$(1.39) \quad d\xi(W) = d\eta(W) \bullet df(W)$$

$$(1.40) \quad d\zeta(W) = d\eta(W) \bullet dg(W).$$

Ces considérations motivent la définition qui suit.

• **Définition 1. Entropie mathématique.**

Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^N , $\Omega \ni W \mapsto (f(W), g(W)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ deux fonctions de flux relatives à la loi de conservation (1.1). Une fonction $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ **strictement convexe** est une **entropie** mathématique pour la loi de conservation (1.1) si et seulement si il existe deux flux d'entropie $\Omega \ni W \mapsto (\xi(W), \zeta(W)) \in \mathbb{R}^2$ tels que (1.39) et (1.40) ont lieu. Toute solution régulière de (1.1) vérifie alors la loi de conservation supplémentaire (1.14).

- Une conséquence intéressante de l'existence d'une entropie pour un système de lois de conservations, est l'hyperbolicité.

• **Proposition 2. Hyperbolicité.**

Soit (1.1) un système de lois de conservations qui possède une entropie au sens de la définition 1. Alors le système (1.1) est hyperbolique : pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ la matrice

$$(1.40) \quad A(W, \theta) = (\cos \theta) df(W) + (\sin \theta) dg(W), \quad W \in \Omega$$

est **diagonalisable** sur le corps des réels.

Preuve de la proposition 2.

• Il s'agit essentiellement de tirer les conséquences du fait que $d\eta(W) \bullet df(W)$ est la différentielle d'une fonction :

$$(1.41) \quad \sum_{j=1}^N \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial f_j(W)}{\partial W_i} = \frac{\partial \xi}{\partial W_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \forall W \in \Omega.$$

On dérive une seconde fois l'identité (1.41) et on utilise l'identité de Schwarz d'égalité des dérivées croisées $\frac{\partial^2 \xi}{\partial W_i \partial W_k} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_k \partial W_i}$:

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} + \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k} &= \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_i} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} + \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la propriété de Schwarz pour la fonction $f_j(\bullet)$, i.e. $\frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i}$, il vient

$$(1.42) \quad \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} = \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_i} \frac{\partial f_j}{\partial W_k}.$$

La relation (1.42) exprime que la matrice $F(W)$ de composantes

$$(1.43) \quad F_{ik}(W) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j(W)}{\partial W_i}, \quad W \in \Omega$$

est **symétrique** :

$$(1.44) \quad F(W) = F(W)^t, \quad W \in \Omega$$

et il en est de même de la matrice G définie par

$$(1.45) \quad G_{ij} \equiv \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_k} \frac{\partial g_k}{\partial W_j}, \quad W \in \Omega$$

$$(1.46) \quad G(W) = G(W)^t, \quad W \in \Omega.$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

on note également H la matrice hessienne de l'entropie mathématique $\eta(\bullet)$:

$$(1.47) \quad H(W)_{ij} = \frac{\partial^2 \eta(W)}{\partial W_i \partial W_j}, \quad W \in \Omega$$

Elle est symétrique définie positive ainsi que sa matrice inverse H^{-1} :

$$(1.48) \quad H^{-1}(W) = (H^{-1})^t(W), \quad W \in \Omega.$$

On tire de (1.43) et (1.47) :

$$(1.49) \quad H(W) \bullet df(W) = F(W), \quad W \in \Omega$$

d'où

$$(1.50) \quad df(W) = H^{-1}(W) \bullet F(W), \quad W \in \Omega$$

avec $H^{-1}(W)$ symétrique définie positive car $\eta(\bullet)$ est strictement convexe et $F(W)$ est symétrique. On a de même, compte tenu de (1.45) et (1.47) :

$$(1.51) \quad dg(W) = H^{-1}(W) \bullet G(W), \quad W \in \Omega.$$

• On introduit une racine carrée de $H^{-1}(W)$ par décomposition de $H^{-1}(W)$ dans une base orthogonale pour le produit scalaire de \mathbb{R}^N :

$$(1.52) \quad H^{-1}(W) = P^{-1}(W) \bullet \Lambda(W) \bullet P(W), \quad W \in \Omega,$$

Λ diagonale à éléments strictement positifs, donc

$$(1.53) \quad \sqrt{H^{-1}(W)} = P^{-1}(W) \bullet \Lambda^{1/2}(W) \bullet P(W), \quad W \in \Omega$$

avec

$$(1.54) \quad \Lambda_{ij}^{1/2}(W) = \sqrt{\Lambda_{ij}(W)}, \quad i \leq i, j \leq N, \quad W \in \Omega$$

on a bien clairement :

$$(1.55) \quad H^{-1}(W) = \sqrt{H^{-1}(W)} \bullet \sqrt{H^{-1}(W)}.$$

on déduit alors de (1.50), et (1.51)

$$(1.56) \quad df(W) = \sqrt{H^{-1}(W)} (\sqrt{H^{-1}(W)} \bullet F(W) \bullet \sqrt{H^{-1}(W)}) (\sqrt{H^{-1}(W)})^{-1}$$

$$(1.57) \quad dg(W) = \sqrt{H^{-1}(W)} (\sqrt{H^{-1}(W)} \bullet G(W) \bullet \sqrt{H^{-1}(W)}) (\sqrt{H^{-1}(W)})^{-1}$$

Les matrices $df(W)$ et $dg(W)$ sont conjuguées de deux matrices symétriques, lesquelles sont diagonalisables ; donc elles sont diagonalisables sur le corps des réels. De même pour la matrice $A(W, \theta)$:

$$(1.58) \quad A(W, \theta) = \sqrt{H^{-1}} \bullet (\sqrt{H^{-1}} \bullet (\cos \theta F + \sin \theta G) \bullet \sqrt{H^{-1}}) \bullet (\sqrt{H^{-1}})^{-1},$$

ce qui établit le résultat. □

• Un système de lois de conservation qui possède une entropie mathématique est toujours hyperbolique, *i.e.* "propage de l'information à vitesse finie". On dispose dans ce cas d'une forme **symétrique** du système (1.1) des lois de conservation. On pose

Entropie mathématique

$$(1.59) \quad \varphi_i = \frac{\partial \eta(W)}{\partial W_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad W \in \Omega.$$

Alors, dans le cas de solutions régulières, le système (1.1) s'écrit aussi

$$(1.60) \quad H^{-1}(W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + df(W) \bullet H^{-1}(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + dg(W) \bullet H^{-1}(W) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

avec des matrices H^{-1} , $df \bullet H^{-1}$ et $dg \bullet H^{-1}$ symétriques (cf. (1.50), (1.51), (1.44) et (1.46)) et H^{-1} symétrique définie positive.

2) SOLUTION ENTROPIQUE D'UNE LOI DE CONSERVATION

• Nous supposons dans ce paragraphe que $W(\bullet)$ est un champ scalaire (noté u) et nous nous restreignons au cas d'une dimension d'espace. Nous remarquons d'abord que la loi de conservation scalaire

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

possède **toujours** une entropie ; on a même mieux puisque toute fonction **strictement convexe** $\mathbb{R} \ni u \mapsto \eta(u) \in \mathbb{R}$ est une entropie mathématique pour la loi de conservation (2.1). Il suffit en effet de poser

$$(2.2) \quad \xi(u) = \int_0^u \eta'(v) f'(v) dv, \quad u \in \mathbb{R}$$

pour trouver un flux d'entropie associé à $\eta(\bullet)$ *via* la relation (1.38). Nous étudions ensuite, pour $\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0$ le comportement de la solution $u^\epsilon(\bullet)$ de la "perturbation visqueuse" suivante

$$(2.3) \quad \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\epsilon) - \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, u^\epsilon(x, t) \in \mathbb{R}.$$

• **Théorème 1. Limite visqueuse.**

Soit $\eta(\bullet)$ une entropie mathématique pour la loi de conservation scalaire (2.1) de flux associé $\xi(\bullet)$, $(u^\epsilon(\bullet))_{\epsilon > 0}$ une famille de solutions (de classe \mathcal{C}^2) de la perturbation visqueuse (2.3), qu'on suppose bornée uniformément dans $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$:

$$(2.4) \quad \exists C > 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \|u^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)} \leq C,$$

avec une constante C est indépendante de $\epsilon > 0$. On suppose que la famille $(u^\epsilon(\bullet))_{\epsilon > 0}$ converge presque partout pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$ vers une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$:

$$(2.5) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} u^\epsilon(x, t) = u(x, t), \quad \text{pp}(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[.$$

Alors $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ est solution au sens des distributions de la loi de conservation (2.1) et satisfait de plus à l'inégalité d'entropie

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$$

c'est-à-dire au sens des distributions :

$$(2.7) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[), \varphi \geq 0.$$

Preuve de la théorème 1.

• On multiplie la perturbation visqueuse (2.3) par $\eta'(u^\epsilon)$ et compte tenu de (1.38), il vient

$$(2.8) \quad \frac{\partial \eta(u^\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u^\epsilon) = \epsilon \eta'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}.$$

On évalue le membre de droite de la relation (2.8) grâce à une intégration par parties :

$$\epsilon \eta'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta(u^\epsilon)) - \epsilon \eta''(u^\epsilon) \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right)^2$$

et comme $\eta(\bullet)$ est convexe et $\epsilon > 0$, on a

$$(2.9) \quad \epsilon \eta'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \leq \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u^2)$$

relation qui, compte tenu de (2.8), entraîne

$$(2.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u^\epsilon) \leq \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u^\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

On suppose que $u^\epsilon(\bullet)$ vérifie la relation (2.5). On a alors

$$(2.11) \quad u_\epsilon \rightarrow u \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$$

puis par continuité des opérateurs de dérivation dans \mathcal{D}' (voir par exemple le traité de L. Schwartz [*Théorie des distributions*, Hermann, 1950]),

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} & \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \\ \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \end{cases}$$

donc

$$(2.13) \quad \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[).$$

• Compte tenu de l'hypothèse (2.4) et de la régularité du flux $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$, la fonction composée $f \circ u^\epsilon$ est bornée sur $[-C, C]$, donc

$$(2.14) \quad |f(u^\epsilon(x, t))| \leq K, \quad |f(u(x, t))| \leq K, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \epsilon > 0$$

et pour Ξ partie bornée de $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, on a

$$(2.15) \quad f(u^\epsilon(x, t)) \rightarrow f(u(x, t)) \quad \text{pp}(x, t) \in \Xi$$

$$(2.16) \quad |f(u^\epsilon(x, t)) - f(u(x, t))| \leq 2K, \quad \text{pp}(x, t) \in \Xi.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre qu'alors

Entropie mathématique

$$(2.17) \quad f(u^\epsilon(x, t)) \rightarrow f(u(x, t)) \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) .$$

Il en résulte que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ arbitraire, on a

$$(2.18) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[u^\epsilon(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u^\epsilon(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \epsilon u^\epsilon(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] dx dt \\ \rightarrow \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u^\epsilon(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[), \end{cases}$$

donc que $u(\bullet)$ est solution de (2.1) au sens des distributions.

- De manière analogue au raisonnement fait pour le flux $f(\bullet)$, on a

$$(2.19) \quad \eta(u^\epsilon) \rightarrow \eta(u) \quad \text{et} \quad \xi(u^\epsilon) \rightarrow \xi(u) \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times]0, \infty[) .$$

On multiplie l'inégalité (2.10) par φ positive appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ et on intègre par parties ; il vient

$$(2.20) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[-\eta(u^\epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi(u^\epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \epsilon \eta(u^\epsilon) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] dx dt \leq 0, \\ \epsilon > 0, \quad \varphi \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[) . \end{cases}$$

Puis on fait tendre ϵ vers 0. Compte tenu de (2.19), il vient

$$(2.21) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \\ \varphi \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \end{cases}$$

qui établit la relation (2.7), *i.e.* que la relation l'inégalité d'entropie (2.6) a lieu au sens des distributions. \square

Le théorème 1 motive la définition qui suit.

- **Définition 2. Solution entropique d'une loi de conservation.**

Soit $\mathbb{R} \ni x \mapsto u^0(x) \in \mathbb{R}$ une condition initiale ($u^0 \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$) et $u(\bullet) \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ une solution faible de (2.1) associée à la condition initiale

$$(2.22) \quad u(x, t) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} .$$

La fonction $u(\bullet)$ est dite **solution entropique** du problème de Cauchy (2.1) (2.22) si pour **toute** entropie mathématique $\eta(\bullet)$ de flux associé $\xi(\bullet)$, on a l'inégalité (2.6) écrite faiblement, *i.e.*

$$(2.23) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \\ \forall \varphi \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, \infty[) . \end{cases}$$

L'intérêt de la notion de solution entropique pour le problème de Cauchy est le théorème suivant, dû à Volpert (1967) et Kručkov (1970), et que nous admettons.

• **Théorème 2. Existence et unicité pour le problème de Cauchy.**

On suppose que la fonction de flux $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et que la condition initiale u^0 appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$:

$$(2.24) \quad u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Alors le problème de Cauchy (2.1) (2.22) a une **unique solution entropique bornée** :

$$(2.25) \quad u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[).$$

Cette solution satisfait de plus à l'estimation

$$(2.26) \quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

et on a le principe du maximum suivant : si

$$(2.27) \quad \alpha \leq u^0(x) \leq \beta, \quad \text{pp}(x) \in \mathbb{R},$$

alors

$$(2.28) \quad \alpha \leq u(x, t) \leq \beta, \quad \text{pp}(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

3) **CHOCs ENTROPIQUES**

• On s'intéresse maintenant au cas particulier des solutions $u(\bullet, \bullet)$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : $u(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \setminus \Sigma$, où Σ est une famille finie de courbes régulières admettant un paramétrage de la forme $x = \xi(\theta)$. Dans toute zone de régularité de la solution $(x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$, l'inégalité d'entropie est en fait une loi de conservation supplémentaire de la forme $\frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u) = 0$. Le long des courbes de discontinuité, on a la relation de Rankine-Hugoniot

$$(3.1) \quad f(u_d) - f(u_g) = \sigma(u_d - u_g)$$

$$(3.2) \quad \sigma = \frac{d\xi}{d\theta}(t)$$

La condition d'entropie (2.6) impose alors une inégalité supplémentaire.

• **Proposition 3. Inégalité de saut d'entropie.**

Soit $u(\bullet)$ une solution de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de la loi de conservation (2.1). Alors $u(\bullet)$ est une solution entropique si et seulement si en tout point $(\xi(\theta), \theta)$ de la ligne de discontinuité Σ , on a l'inégalité

$$(3.3) \quad \xi(u_d) - \xi(u_g) \leq \sigma(\eta(u_d) - \eta(u_g)),$$

pour tout couple entropie-flux (η, ξ) .

Preuve de la proposition 3.

• Elle se traite exactement comme la preuve de la relation de Rankine-Hugoniot (théorème 2 du chapitre sur l'étude mathématique d'une loi de conservation). On écrit la relation (2.23) dans une boule localisée autour du point $(x, t) \in \Sigma$ (figure 1) :

Entropie mathématique

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \\
 &\quad - \int_{D_g \cup D_d} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \varphi dx dt \\
 &\quad - \int_{\Sigma \cap D} \left[(\eta(u_d) - \eta(u_g)) n_t + (\xi(u_d) - \xi(u_g)) n_x \right] \varphi dx dt \\
 &= \int_{\Sigma} \left\{ [\eta(u_d) - \eta(u_g)] \sigma - (\xi(u_d) - \xi(u_g)) \right\} n_x \varphi d\gamma
 \end{aligned}$$

qui entraîne, puisque $n_x > 0$ et $\varphi \geq 0$ arbitraire,

$$(3.4) \quad \sigma(\eta(u_d) - \eta(u_g)) - (\xi(u_d) - \xi(u_g)) \geq 0.$$

i.e. la relation (3.3). □

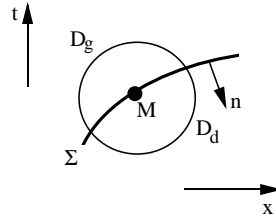


Figure 1. Saut d'entropie le long de la courbe régulière Σ .

- Une discontinuité (u_g, u_d) de part et d'autre d'une courbe régulière Σ est un **choc entropique** si $u_g \neq u_d$ et si la condition (3.1) de Rankine-Hugoniot est satisfaite. Dans le cas où la fonction de flux est strictement convexe (en particulier pour l'équation de Burgers où $f(u) = u^2/2$), on a une caractérisation très simple des chocs entropiques.

- **Proposition 4. Choc entropique pour un flux strictement convexe.**

Soit $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ une fonction de flux de classe \mathcal{C}^1 strictement convexe et $u(\bullet, \bullet)$ une solution de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de la loi de conservation (2.1). Le choc (u_g, u_d) au travers d'une ligne de discontinuité Σ est entropique si et seulement si

$$(3.5) \quad u_g \geq u_d.$$

Preuve de la proposition 4.

- On suppose dans un premier temps que la discontinuité (u_g, u_d) est un choc entropique. On fixe une entropie $\eta(\bullet)$ strictement convexe et son flux associé $\xi(\bullet)$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

(qui vérifie $\xi' = \eta' \bullet f'$). Comme $u_g \neq u_d$, on peut écrire l'inégalité (3.3) en utilisant la relation (3.1) de Rankine-Hugoniot :

$$(3.6) \quad \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} [\eta(u_d) - \eta(u_g)] - [\xi(u_d) - \xi(u_g)] \geq 0.$$

Pour u_g fixé, on "fait varier" u_d ; on pose donc

$$(3.7) \quad g(v) = \frac{f(v) - f(u_g)}{v - u_g} [\eta(v) - \eta(u_g)] - [\xi(v) - \xi(u_g)].$$

La fonction $\mathbb{R} \ni v \mapsto g(v) \in \mathbb{R}$ est continue et vérifie

$$(3.8) \quad g(u_g) = 0, \quad g(u_d) \geq 0$$

compte tenu de l'inégalité (3.5).

- Montrons que lorsque $f(\bullet)$ et $\eta(\bullet)$ sont strictement convexes, $g(\bullet)$ est strictement décroissante. Pour $v \neq u_g$, on a

$$g'(v) = \frac{f'(v)[v - u_g] - f(v) + f(u_g)}{(v - u_g)^2} (\eta(v) - \eta(u_g)) + \frac{f(v) - f(u_g)}{v - u_g} \eta'(v) - \xi'(v)$$

soit après réduction au même dénominateur :

$$(3.9) \quad g'(v) = - \left[\frac{f(u_g) - f(v) - f'(v)(u_g - v)}{(v - u_g)^2} \right] [\eta(u_g) - \eta(v) - \eta'(v)(u_g - v)].$$

Comme η et f sont strictement convexes, la caractérisation de cette propriété par le fait que "la fonction est au-dessous de sa tangente" montre que les deux crochets du membre de droite de (3.8) sont strictement positifs, donc $g'(v) < 0$ si $v \neq u_g$. La fonction $g(\bullet)$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} et les conditions (3.7) entraînent alors (3.4).

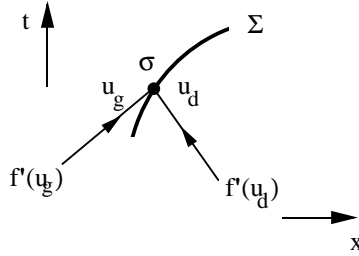


Figure 2. *Choc entropique.*
Les caractéristiques "entrent" dans la ligne de discontinuité.

- Réciproquement, si la discontinuité (u_g, u_d) est admissible comme solution faible (*i.e.* si la relation (3.1) a lieu) et satisfait de plus la relation (3.5), nous

Entropie mathématique

fixons une entropie strictement convexe $\eta(\bullet)$ et introduisons comme plus haut la fonction $g(\bullet)$ par l'expression (3.6). Le calcul fait plus haut montre que $g(\bullet)$ est strictement décroissante donc $g(u_d) \geq g(u_g) = 0$, ce qui établit l'inégalité (3.5) en vertu de la relation de Rankine et Hugoniot. \square

• On remarque que la condition (3.4) est établie en utilisant **une seule entropie mathématique** $\eta(\bullet)$. De plus, la stricte convexité de $f(\bullet)$ et la condition (3.14) entraînent

$$(3.10) \quad f'(u_d) < \frac{f(u_g) - f(u_d)}{(u_g - u_d)} < f'(u_g), \quad u_d < u_g$$

soit, compte tenu de la relation (3.1),

$$(3.11) \quad f'(u_g) > \sigma > f'(u_d), \quad \text{choc entropique}$$

ainsi qu'illustré figure 2. L'inégalité (3.11) (dite de Lax qui l'a proposée en 1954), permet de sélectionner les chocs entropiques parmi ceux admissibles pour la loi de conservation (2.1). Ainsi on retrouve l'unicité des solutions entropiques, mais sans oublier la condition (2.25) du théorème 2 : on cherche une solution entropique **bornée** ($u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$).

• Le contre exemple qui suit montre à quel point la condition d'unicité est asservie également à l'hypothèse de chercher une **solution bornée** à la loi de conservation (2.1). Considérons la fonction $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ définie par

$$(3.12) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -\sqrt{t} \\ x/t, & -\sqrt{t} < x < \sqrt{t} \\ 0, & x > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Elle satisfait les deux conditions qui caractérisent les solutions faibles entropiques relatives au problème de Cauchy

$$(3.13) \quad u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(3.14) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$$

$$(3.15) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$$

mais elle **n'est pas** localement bornée au voisinage de $(0, 0)$. Elle n'appartient **pas** à l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$; donc elle ne peut pas avoir le statut de "solution faible !"

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

4) PROBLÈME DE RIEMANN

- Nous étudions dans ce paragraphe le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ pour des lois de conservation du type

$$(4.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Il s'agit du problème de Cauchy pour une donnée $\mathbb{R} \ni x \mapsto W^0(x) \in \mathbb{R}^N$:

$$(4.2) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

qui est formée de **deux états constants** :

$$(4.3) \quad W^0(x) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

Avec les outils fondamentaux introduits à ce niveau, nous pouvons étudier les solutions faibles du système d'équations (4.1)-(4.2)-(4.3) dans le cas où le flux $f(\bullet)$ est hyperbolique linéaire

$$(4.4) \quad f(W) \equiv A \bullet W, \quad W \in \mathbb{R}^N, \quad A \text{ matrice } N \times N \text{ diagonalisable sur } \mathbb{R}$$

ainsi que les solutions faibles entropiques pour une loi de conservation scalaire de flux strictement convexe

$$(4.5) \quad f(u) \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

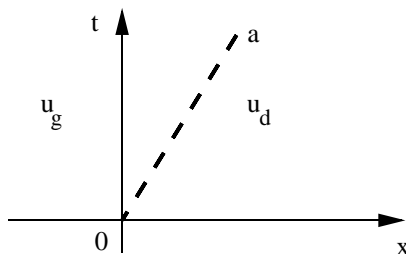


Figure 3. *Problème de Riemann pour l'équation d'advection.*

- **Proposition 5. Problème de Riemann pour d'advection.**

Dans le cas d'une loi de conservation scalaire linéaire, *i.e.*

$$(4.6) \quad f(u) = a u, \quad a \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R},$$

le problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ défini par les conditions

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a u) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g, & x < 0 \\ u_d, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

a une unique solution faible entropique

$$(4.8) \quad W^0(x) = \begin{cases} u_g, & x < at \\ u_d, & x > at, \quad t > 0. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 5.

• Il s'agit d'une application du théorème 2. La condition initiale est bornée et la fonction de flux (4.6) est de classe \mathcal{C}^1 . L'unique solution faible entropique est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ; en effet, il est immédiat de constater que la fonction $u(\bullet)$ définie en (4.8) est régulière hors de la demi-droite $x = at$ ($t \geq 0$) et qu'à travers celle-ci, on a la relation de Rankine-Hugoniot :

$$f(u_d) - f(u_g) = a(u_d - u_g) = \sigma(u_d - u_g)$$

puisque $\sigma = \frac{dx}{dt} = a$ si $x = at$. □

• La solution (4.8) est bien une fonction discontinue si la donnée initiale (cf (4.7)) l'est. **La discontinuité se propage avec la vitesse caractéristique a .** Cette propriété est générale : si (W_g, W_d) est une discontinuité admissible pour la loi de conservation (linéaire vectorielle) (4.4), la relation de Rankine-Hugoniot s'écrit

$$(4.9) \quad f(W_d) - f(W_g) \equiv A \bullet (W_d - W_g) = \sigma(W_d - W_g).$$

Elle exprime que pour $W_g \neq W_d$, le nombre σ est une **valeur propre** de la matrice A de la fonction de flux. Dans le cas linéaire, les **discontinuités se propagent** avec une **célérité qui est valeur propre** de la jacobienne de la fonction de flux.

• Nous pouvons détailler la (une ?) solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ dans le cas d'un système hyperbolique linéaire de lois de conservation

$$(4.10) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad W \in \mathbb{R}^N.$$

On décompose l'espace \mathbb{R}^N sous forme de combinaison linéaire des vecteurs propres de A :

$$(4.11) \quad W = \sum_{j=1}^N \varphi_j r_j \quad ; \quad A \bullet r_j = \lambda_j r_j$$

et chaque variable caractéristique φ_j est alors solution d'une loi de conservation scalaire linéaire de célérité λ_j :

$$(4.12) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

On décompose la condition initiale sur les vecteurs propres r_j :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(4.13) \quad W_g = \sum_{j=1}^N \varphi_j^g r_j, \quad W_d = W_g + \sum_{j=1}^N \alpha_j r_j.$$

Compte tenu de la proposition 5, on a

$$(4.14) \quad \varphi_j(x, t) = \begin{cases} \varphi_j^g, & x < \lambda_j t \\ \varphi_j^g + \alpha_j & x > \lambda_j t. \end{cases}$$

Si on ordonne les valeurs propres de A dans un ordre croissant, *i.e.*

$$(4.15) \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots \leq \lambda_N,$$

la solution faible entropique du problème (4.10)-(4.2)-(4.3) s'exprime de la manière suivante :

$$(4.16) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_g, & x < \lambda_1 t \\ W_g + \sum_{j=1}^i \alpha_j \varphi_j, & \lambda_i t < x < \lambda_{i+1} t \\ W_d, & x > \lambda_N t \end{cases}$$

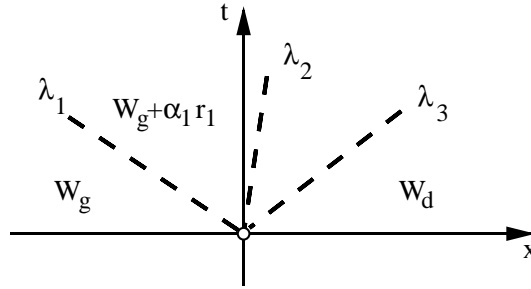


Figure 4. *Problème de Riemann pour un système hyperbolique linéaire.*

- Remarquons que la fonction (4.15) est **autosemblable**, que l'état constant $W_{i+1/2}$ dans le secteur $\lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1}$ s'exprime de deux façons :

$$(4.17) \quad W_{i+1/2} = W_g + \sum_{j=1}^i \alpha_j r_j = W_d - \sum_{j=i+1}^N \alpha_j r_j, \quad \lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1}$$

et que le saut entre $W_{i-1/2}$ et $W_{i+1/2}$ à travers la caractéristique de vitesse λ_i est égal à la $i^{\text{ème}}$ composante de la discontinuité $W_d - W_g$:

$$(4.18) \quad W_{i+1/2} - W_{i-1/2} = \alpha_i r_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

On vérifie bien la relation de Rankine-Hugoniot :

$$f(W_{i+1/2}) - f(W_{i-1/2}) = A \bullet (W_{i+1/2} - W_{i-1/2}) = A \bullet (\alpha_i r_i) = \alpha_i \lambda_i r_i$$

qui exprime que la célérité de la discontinuité est égale à la i^{eme} valeur propre λ_i (Figure 4).

• **Proposition 6. Problème de Riemann pour l'équation de Burgers.**

Dans le cas de l'équation de Burgers, *i.e.*

$$(4.19) \quad f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

le problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ défini par

$$(4.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g, & x < 0 \\ u_d, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

a une unique solution faible entropique $u(x, t) \equiv \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right)$ qui s'exprime par

(i) $u_g \leq u_d$: **onde de détente**

$$(4.21) \quad \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right) = \begin{cases} u_g & x \leq u_g t \\ \frac{x}{t} & u_g t \leq x \leq u_d t \\ u_d & u_d t \leq x \end{cases}$$

(ii) $u_g > u_d$: **onde de choc**

$$(4.22) \quad \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right) = \begin{cases} u_g & x < \frac{u_g + u_d}{2} t \\ u_d & x > \frac{u_g + u_d}{2} t. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 6.

• Elle résulte du théorème 2, dont le point mathématiquement délicat est l'unicité. Vérifier que (4.21) et (4.22) sont solutions faibles a été fait plus haut. La relation (4.22) définit bien un choc entropique ainsi qu'étudié à la proposition 4. \square

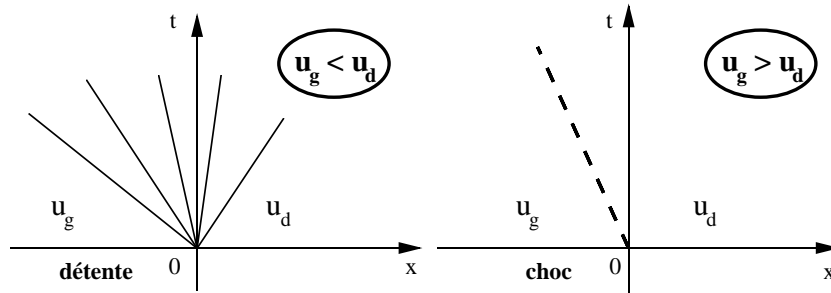


Figure 5. Problème de Riemann pour l'équation de Burgers.

• On remarque à nouveau que dans les deux cas (i) et (ii), la solution entropique $U(\bullet, u_g, u_d)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ est bien **autosemblable**. Dans le cas où $f(\bullet)$ est strictement convexe, la proposition 6 se généralise sans difficulté. Dans le cas où elle n'est pas convexe, nous renvoyons par exemple à l'ouvrage de C. Dafermos [*Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Grundlehren des mathematischen Wissenschaften, vol. 325, Springer, New York, 2000].

• **Proposition 7. Vitesse de propagation finie.**

Soit $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ l'une des deux fonctions de flux suivantes

$$(4.23) \quad \Omega = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(W) = \frac{1}{2} W^2$$

$$(4.24) \quad \Omega = \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad f(W) = A \bullet W,$$

avec A matrice diagonalisable fixée. On pose, pour W_g et W_d appartenant à Ω :

$$(4.25) \quad a(W_g, W_d) = \max\{ |\lambda_j(W_g)|, |\lambda_j(W_d)|, 1 \leq j \leq N \}.$$

La solution entropique $\mathcal{U}(\bullet; W_g, W_d)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ vérifie la propriété suivante :

$$(4.26) \quad \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; W_g, W_d\right) = \begin{cases} W_g & \text{si } \frac{x}{t} < -a(W_g, W_d) \\ W_d & \text{si } \frac{x}{t} > a(W_g, W_d); \end{cases}$$

la plus grande vitesse des ondes du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ est inférieure ou égale à $a(W_g, W_d)$.

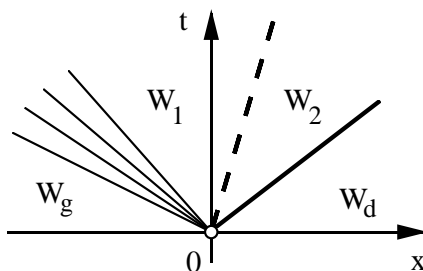


Figure 6. *Vitesse finie de propagation au sein du problème du Riemann.*

Preuve de la proposition 7.

• Pour l'équation de Burgers, on a $a(W_g, W_d) = \max(|W_g|, |W_d|)$ et il y a deux cas de figure pour la solution du problème de Riemann. Ou bien $W_g > W_d$, et la solution contient un choc de vitesse $\sigma = \frac{1}{2}(W_g + W_d)$. On a alors

$$|\sigma| \leq \frac{1}{2}(|W_g| + |W_d|) \leq \max(|W_g|, |W_d|) = a(W_g, W_d)$$

et l'on a donc en particulier :

$$\mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; W_g, W_d\right) = \begin{cases} W_g & \text{si } \frac{x}{t} < -\max(|W_g|, |W_d|) \leq -|\sigma| \\ W_d & \text{si } \frac{x}{t} > \max(|W_g|, |W_d|) \geq |\sigma|, \end{cases}$$

ce qui établit la propriété (4.26) dans ce cas. Si $W_g \leq W_d$, la solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ n'est différente des deux états W_g et W_d que dans la zone de l'onde de détente, décrite par les conditions

$$W_g \leq \frac{x}{t} \leq W_d,$$

et la propriété (4.26) est alors claire.

• Dans le cas d'un système hyperbolique linéaire, on a $a(W_g, W_d) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_N|)$ et la relation (4.26) est une conséquence de l'expression (4.16) de la solution du problème de Riemann. \square

Variables entropiques

Dans ce chapitre, nous développons l'utilisation de l'entropie mathématique introduite au chapitre précédent. Dans le cas de systèmes hyperboliques généraux, l'existence d'une entropie entraîne l'hyperbolicité (paragraphe 1), l'écriture des équations sous une forme symétrique (paragraphe 2) et la mise en évidence d'une dissipation lors de la discrétisation numérique en espace (paragraphe 3). Dans le cas particulier de la dynamique des gaz, nous montrons que le calcul des variables entropiques est très facile à partir des notions classiques de thermodynamique.

1) ENTROPIE MATHÉMATIQUE

• Nous étudions un système de N lois de conservation posé à deux dimensions d'espace pour fixer les idées. L'inconnue W appartient à l'ouvert convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et les flux $f(\bullet)$ et $g(\bullet)$ sont des fonctions régulières définies sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R}^N : $\Omega \ni W \mapsto (f(W), g(W)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Le système de lois de conservation s'écrit alors

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0.$$

• Définition 1. Entropie mathématique.

Une fonction strictement convexe $\eta(\bullet)$ définie sur Ω , ($\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$) est une entropie mathématique pour le système (1.1) si il existe deux fonctions $\xi(\bullet)$ et $\zeta(\bullet)$ définies sur Ω ($\Omega \ni W \mapsto (\xi(W), \zeta(W)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) de sorte que

$$(1.2) \quad d\xi(W) = d\eta(W) \bullet df(W)$$

$$(1.3) \quad d\zeta(W) = d\eta(W) \bullet dg(W).$$

• Rappelons que la relation (1.2) est une égalité de formes linéaires ; elle signifie que pour tout vecteur $r \in \mathbb{R}^N$, le nombre $d\xi(W) \bullet r$ est égal à la forme linéaire $d\eta(W)$, appliquée au vecteur $df(W) \bullet r$ de \mathbb{R}^N . On a donc

$$(1.4) \quad d\xi(W) \bullet r = d\eta(W) \bullet (df(W) \bullet r), \quad W \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^N.$$

• **Proposition 1. Loi de conservation supplémentaire.**

Soit $\Xi \ni (x, y, t) \mapsto W(x, y, t) \in \Omega$ une solution régulière (de classe C^1) de la loi de conservation (1.1). Elle satisfait alors à la loi de conservation “supplémentaire” de l’entropie mathématique, qui s’écrit

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(W) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(W) + \frac{\partial}{\partial y} \zeta(W) = 0, \quad W(x, y, t) \text{ solution régulière.}$$

Preuve de la proposition 1.

• On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= d\eta(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} = -d\eta(W) \bullet \left(\frac{\partial f(W)}{\partial x} + \frac{\partial g(W)}{\partial y} \right) \\ &= -d\eta(W) \bullet \left(df(W) \frac{\partial W}{\partial x} + dg(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \right) \quad \text{si } W(x, y, t) \text{ est régulière} \\ &= -d\xi(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} - d\zeta(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{compte tenu de (1.2) et (1.3)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \xi(W) - \frac{\partial}{\partial y} \zeta(W) \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (1.5). □

• Les systèmes de lois de conservation qui possèdent une entropie **strictement** convexe sont hyperboliques. C’est une propriété remarquable.

• **Théorème 1. Hyperbolicité.**

Soit (1.1) un système de lois de conservation qui possède une entropie mathématique $\eta(\bullet)$ strictement convexe. Alors le système (1.1) est hyperbolique : pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, la matrice $A(W, \theta)$ définie par

$$(1.6) \quad A(W, \theta) \equiv \cos \theta df(W) + \sin \theta dg(W), \quad W \in \Omega, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

est diagonalisable avec des valeurs propres et des vecteurs propres réels.

Preuve du théorème 1

• On établit que la matrice $A(W, \theta)$ de la relation (1.6) est la conjuguée d’une matrice symétrique, donc est diagonalisable sur \mathbb{R} . On commence par exploiter la relation (1.2) : le produit $d\eta(W) \bullet df(W)$ est la différentielle de la fonction $\xi(\bullet)$. On en détaille les composantes cartésiennes :

$$(1.7) \quad \sum_{j=1}^N \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \bullet \frac{\partial f_j}{\partial W_i} = \frac{\partial \xi}{\partial W_i}, \quad W \in \Omega, \quad 1 \leq i \leq N.$$

• On dérive la relation (1.7) par rapport à la variable W_k et on utilise l’égalité de Schwarz des dérivées croisés :

Variables entropiques

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial W_i \partial W_k} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_k \partial W_i}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_j \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} + \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i} \right\} &= \\ &= \sum_j \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_i} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} + \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k} \right\}. \end{aligned}$$

Comme l'identité de Schwarz est encore vraie pour les fonctions f_j , c'est à dire

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k},$$

on déduit de la relation précédente que la matrice $F(W)$ de composantes

$$(1.8) \quad F(W)_{ik} \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j}{\partial W_i}$$

est une matrice symétrique.

- On note $H(W)$ la matrice hessienne de l'entropie mathématique $\eta(\bullet)$:

$$H(W)_{jk} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k}.$$

C'est une matrice symétrique définie positive, donc il en est de même de la matrice inverse $H^{-1}(W)$. On tire donc de (1.8) :

$$(1.9) \quad df(W) = H^{-1}(W) \bullet F(W).$$

Il est alors classique d'en déduire que la jacobienne $df(W)$ est diagonalisable. En effet, la matrice $H^{-1}(W)$ est symétrique définie positive ; on peut la diagonaliser dans une base orthonormée, mettant en évidence une matrice orthogonale $P(W)$ et une matrice diagonale à coefficients strictement positifs $\Lambda(W)$:

$$(1.10) \quad H^{-1}(W) = P^{-1}(W) \bullet \Lambda(W) \bullet P(W).$$

On pose $\Lambda^{1/2}(W)_{jj} = \sqrt{\Lambda(W)_{jj}}$ et $\Lambda^{1/2}(W)_{ij} = 0$ si $i \neq j$, ce qui définit la matrice $\sqrt{\Lambda(W)}$. Une racine carrée de $H^{-1}(W)$ peut alors être définie par

$$(1.11) \quad H^{-1/2}(W) = P^{-1}(W) \bullet \sqrt{\Lambda(W)} \bullet P(W).$$

On a alors le calcul suivant, issu de (1.9) :

$$(1.12) \quad df(W) = H^{-1/2}(W) \bullet (H^{-1/2}(W) \bullet F(W) \bullet H^{-1/2}(W)) \bullet H^{1/2}(W).$$

Comme les matrices $F(W)$ et $H^{-1/2}(W)$ sont symétriques, il en est de même du produit $H^{-1/2}(W) \bullet F(W) \bullet H^{-1/2}(W)$ et $df(W)$, matrice conjuguée d'une matrice diagonalisable, est encore diagonalisable.

- L'extension bidimensionnelle n'offre pas de difficulté. Si on pose

$$(1.13) \quad G(W)_{ik} \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial g_j}{\partial W_i},$$

on définit une matrice symétrique $G(W)$, compte tenu de (1.3). On a alors

$$(1.14) \quad A(W, \theta) = H^{-1/2} \bullet (H^{-1/2} \bullet [\cos \theta F(W) + \sin \theta G(W)] \bullet H^{-1/2}) \bullet H^{1/2}$$

qui permet de conclure pour la matrice $A(W, \theta)$ de la même façon que nous l'avons fait pour $df(W)$. D'où le théorème 1. \square

- Pour un état $W \in \Omega$ arbitraire, la matrice hessienne $(d^2\eta)(W)$ est **diagonale** dans la base des vecteurs propres de la jacobienne $(df)(W)$. Ceci est précisé à la proposition suivante.

• **Proposition 2. Diagonalisation de la hessienne de l'entropie.**

On étudie le système de lois de conservation

$$(1.15) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(W)) = 0$$

à une dimension d'espace ; on le suppose strictement hyperbolique, *i.e.* $df(W)$ admet une famille de valeurs propres réelles $\lambda_j(W)$

$$(1.16) \quad \lambda_1(W) < \lambda_2(W) < \dots < \lambda_N(W)$$

distinctes deux à deux. On suppose que le système (1.15) admet une entropie mathématique $\eta(\bullet)$. Alors la matrice hessienne $(d^2\eta)(W)$ est diagonale dans la base $r_j(W)$ des vecteurs propres de $(df)(W)$:

$$(1.17) \quad d^2\eta(W) \bullet (r_j(W), r_k(W)) = 0 \quad \text{si } j \neq k.$$

Preuve de la proposition 2.

- On introduit le flux d'entropie $\xi(\bullet)$ qui satisfait la relation (1.2), que l'on teste sur un vecteur $r \in \mathbb{R}^N$ arbitraire. Il vient :

$$(1.18) \quad d\xi(W) \bullet r = d\eta(W) \bullet (df(W) \bullet r), \quad W \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^N.$$

On dérive la relation (1.18) par rapport à W , mais dans une nouvelle direction $\rho \in \mathbb{R}^N$ arbitraire. On obtient :

$$(1.19) \quad d^2\xi(W) \bullet (r, \rho) = d^2\eta(W) \bullet (df(W) \bullet r, \rho) + d\eta(W) \bullet (d^2f(W) \bullet (r, \rho)).$$

Compte tenu de l'identité de Schwarz

$$(1.20) \quad (d^2\varphi)(W) \bullet (r, \rho) = (d^2\varphi)(W) \bullet (\rho, r), \quad W \in \Omega, \quad r, \rho \in \mathbb{R}^N$$

valable pour toute fonction $\Omega \ni W \mapsto \varphi(W) \in \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^2 , et en particulier pour $\varphi = \eta$ et $\varphi = f$, on tire de (1.19) et (1.20) :

$$(1.21) \quad d^2\eta(W) \bullet (df(W) \bullet r, \rho) = d^2\eta(W) \bullet (df(W) \bullet \rho, r), \quad \rho, r \in \mathbb{R}^N.$$

Variables entropiques

Si on particularise les vecteurs r et ρ en choisissant des vecteurs propres de la jacobienne $df(W)$ associés à des valeurs propres λ et μ distincts :

$$(1.22) \quad df(W) \bullet r = \lambda r, \quad df(W) \bullet \rho = \mu \rho, \quad \lambda \neq \mu,$$

on tire de (1.21) : $(\lambda - \mu) d^2\eta \bullet (r, \rho) = 0$, ce qui établit la relation (1.17), compte tenu de (1.22). \square

• **Proposition 3. Conditions de compatibilité**

Soit $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\eta(\bullet)$ soit une entropie pour le système de lois de conservation (1.1) est que les deux matrices d'ordre N $d^2\eta \bullet df$ et $d^2\eta \bullet dg$ soient symétriques.

Preuve de la proposition 3.

• La condition est nécessaire. Si $\eta(\bullet)$ est une entropie, il existe deux flux d'entropie ξ et ζ de sorte que les relations (1.2) et (1.3) aient lieu. On a donc la relation (1.7) et par dérivation, la matrice $F(W)$ définie à la relation (1.8) est symétrique :

$$(1.23) \quad \left(\sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_j} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} \right)_{ik} \quad \text{est symétrique.}$$

Il en est de même avec la matrice obtenue en échangeant les rôles de f et g .

• La condition est suffisante. Si la relation (1.23) a lieu, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial W_i} \left(\sum_j \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} \right) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_j} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} + \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial W_k \partial W_j} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} + \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i} \right) = \frac{\partial}{\partial W_k} \left(\sum_j \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} \right) \end{aligned}$$

et ces relations de compatibilité assurent l'existence d'une fonction ξ telle que

$$(1.24) \quad \frac{\partial \xi}{\partial W_k} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial f_j}{\partial W_k},$$

qui n'est qu'une réécriture de la relation (1.2). Il en est de même en remplaçant f par g et ξ par ζ , ce qui établit la propriété. \square

2) SYSTÈME SYMÉTRISABLE

• **Définition 2. Système symétrique du premier ordre.**

Un système symétrique du premier ordre est un système d'équations aux dérivées partielles qui consiste, dans le cas de deux dimensions d'espace pour fixer les idées, à chercher une fonction inconnue $V(x, y, t)$ avec

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(2.1) \quad V(x, y, t) \in \phi \subset \mathbb{R}^N,$$

qui s'écrit sous la forme

$$(2.2) \quad S(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial t} + P(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial x} + Q(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

avec $S(V), P(V), Q(V)$ matrices symétriques d'ordre N et $S(V)$ matrice définie positive.

• **Définition 3. Système symétrisable.**

Un système hyperbolique du type

$$(2.3) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + B(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

est tel que la matrice d'ordre N : $\cos \theta A(W) + \sin \theta B(W)$ est diagonalisable pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ et pour tout $W \in \Omega$. De plus, il est **symétrisable** si il existe un changement de variables (difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1)

$$(2.4) \quad \Omega \ni W \mapsto V = \mathcal{V}(W) \in \phi \subset \mathbb{R}^N$$

de sorte que, après le changement de variables, le système (2.3) s'écrive sous la forme symétrique du premier ordre (2.2).

• **Définition 4. Variables entropiques.**

Soit $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une entropie strictement convexe pour un système de lois de conservation (1.1). Pour $W \in \Omega$, on note $\varphi(W)$ le gradient de l'entropie :

$$(2.5) \quad d\eta(W) \equiv \varphi(W) \bullet dW.$$

Les variables scalaires qui composent le vecteur (ligne) $\varphi(W)$ constituent par définition l'ensemble des variables entropiques. Si W décrit Ω , la ligne $\varphi(W) \in \mathbb{R}^N$ décrit une partie ϕ de \mathbb{R}^N et l'application

$$(2.6) \quad \Omega \ni W \mapsto \varphi(W) \in \phi$$

est bijective car $\eta(\bullet)$ est strictement convexe.

• **Théorème 2.**

Un système hyperbolique est symétrisable si et seulement si il possède une entropie strictement convexe.

Preuve du théorème 2.

• Si le système (1.1) possède une entropie $\eta(\bullet)$, on note

$$(2.7) \quad H(W) = \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_j} \right)_{i,j}, \quad W \in \Omega$$

la hessienne de l'entropie, qui est une matrice symétrique définie positive. Si on pose aussi

Variables entropiques

$$(2.8) \quad A(W)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial W_j}, \quad B(W)_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial W_j},$$

alors les matrices $H(W) \bullet A(W)$ et $H(W) \bullet B(W)$ sont symétriques compte tenu de la proposition 3. Le système (1.1) s'écrit aussi

$$(2.9) \quad H(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + H(W) \bullet A(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + H(W) \bullet B(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

et prend naturellement une forme symétrique du type (2.2).

• Réciproquement, supposons que le changement de variables $V = \mathcal{V}(W)$ symétrise le système (1.1), qui prend alors la forme (2.2), avec

$$(2.10) \quad S(V) = \frac{\partial W}{\partial V}, \quad P(V) = \frac{\partial f}{\partial W} \bullet \frac{\partial W}{\partial V}, \quad Q(V) = \frac{\partial g}{\partial W} \bullet \frac{\partial W}{\partial V}.$$

La symétrie de la matrice $S(V)$ entraîne l'existence d'une fonction $\mu(V)$ telle que

$$(2.11) \quad \frac{\partial \mu}{\partial V_i} = W_i(V), \quad d\mu = W \bullet dV,$$

de même pour les matrices $P(V)$ et $Q(V)$: il existe deux fonctions $\alpha(V)$ et $\beta(V)$ de sorte que

$$(2.12) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial V_i} = f_i(W(V)), \quad \frac{\partial \beta}{\partial V_i} = g_i(W(V)).$$

Comme la matrice $S(V)$ est définie positive, la fonction $V \mapsto \mu(V)$ est strictement convexe, donc l'application $V \mapsto d\mu(V)$ est bijective et V peut être considéré comme une fonction de W . On pose alors

$$(2.13) \quad \begin{cases} \eta(W) = V^t \bullet W - \mu(V(W)) \\ \xi(W) = V^t \bullet f(W) - \alpha(V(W)) \\ \zeta(W) = V^t \bullet g(W) - \beta(V(W)) \end{cases}$$

et on a :

$$d\eta(W) \bullet r = V^t \bullet r + \left(\frac{\partial V_i}{\partial W_j} V_j \right) W_i - W_i \frac{\partial V_i}{\partial W_k} V_k = V_j r_j$$

$$d\xi(W) \bullet r = V_i A_{ij} r_j + \frac{\partial V_i}{\partial W_j} r_j f_i - f_i \frac{\partial V_i}{\partial W_k} r_k = V_i A_{ij} r_j$$

$$d\zeta(W) \bullet r = V_i B_{ij} r_j + \left(\frac{\partial V_i}{\partial W_j} r_j \right) g_i - g_i \frac{\partial V_i}{\partial W_k} r_k = V_i B_{ij} r_j$$

ce qui établit les relations (1.2) et (1.3).

• On a enfin

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_j} = \frac{\partial V_j}{\partial W_i} = (S(V))_{ij}^{-1}$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

ce qui montre que la hessienne de la fonction $\eta(\bullet)$ est une matrice (symétrique) définie positive et établit la stricte convexité de la fonction $W \mapsto \eta(W)$. On a donc bien construit une entropie mathématique au sens de la définition 1. Le théorème en résulte. \square

• **Proposition 4. Système hyperbolique linéaire.**

Soit A une matrice carrée d'ordre N diagonalisable fixée. La fonction strictement convexe

$$(2.14) \quad \eta(W) = \frac{1}{2} W^t \bullet S \bullet W$$

est une entropie pour le système hyperbolique linéaire

$$(2.15) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

si et seulement si S est une matrice d'ordre N symétrique définie positive et si la matrice B définie par

$$(2.16) \quad B = A \bullet S^{-1}$$

est symétrique.

Preuve de la proposition 4.

• C'est une conséquence directe de la proposition 3 : on a $d^2 \eta \bullet df = S \bullet A$ dans le cas linéaire. De plus, la matrice $S \bullet A$ est symétrique si et seulement si la matrice qui lui est congruente obtenue en la multipliant à gauche et à droite par S^{-1} , soit $S^{-1} \bullet (S \bullet A) \bullet S^{-1} \equiv B$ l'est. D'où le résultat. \square

• Dans le cas du système (2.15), on peut écrire

$$(2.17) \quad S^{-1} \bullet \frac{\partial V}{\partial t} + B \bullet \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

avec

$$(2.18) \quad V = S \bullet W$$

qui fournit une forme symétrique (2.17) du système hyperbolique, ainsi que l'expression (2.18) des variables entropiques.

3) CONDITION D'ENTROPIE POUR LA MÉTHODE DES LIGNES

• **Proposition 5. Fonctions duales auxiliaires.**

Soit $\eta(\bullet)$ une entropie pour un système hyperbolique (1.1), $\Omega \ni W \mapsto \varphi(W) \in \phi$ les variables entropiques définies par la relation (2.5). On pose

$$(3.1) \quad \eta^*(\varphi) \equiv \varphi \bullet W(\varphi) - \eta(W(\varphi))$$

$$(3.2) \quad \psi(\varphi) \equiv \varphi \bullet f(W(\varphi)) - \xi(W(\varphi)).$$

Variables entropiques

On a alors

$$(3.3) \quad d\eta^*(\varphi) = d\varphi \bullet W(\varphi)$$

$$(3.4) \quad d\psi(\varphi) = d\varphi \bullet f(W(\varphi)) .$$

Preuve de la proposition 5.

• Elle est essentiellement contenue dans celle du théorème 2. Rappelons d'abord que la relation (1.2), peut s'écrire contre un vecteur test $r \in \mathbb{R}^N$ sous la forme $d\xi(W) \bullet r = d\eta(W) \bullet (df(W) \bullet r) = \varphi \bullet df(W(\varphi)) \bullet r$,

soit

$$(3.5) \quad d\xi = \varphi \bullet df(W) .$$

• On dérive la relation (3.1) en tenant compte de la relation (2.5). Il vient :

$$d\eta^* = d\varphi \bullet W + \varphi \bullet dW - d\eta = d\varphi \bullet W + \varphi \bullet dW - \varphi \bullet dW = d\varphi \bullet W$$

ce qui démontre la relation (3.3). On dérive ensuite la relation (3.2), en tenant compte de (3.5). On obtient

$$d\psi = d\varphi \bullet f + \varphi \bullet df - d\xi = d\varphi \bullet f(W(\varphi)) ,$$

ce qui montre la relation (3.4). □

Théorème 3. Condition d'entropie discrète

Soit $\Omega \times \Omega \ni (W_g, W_d) \mapsto \Phi(W_g, W_d) \in \mathbb{R}^N$ une fonction de flux numérique qui permet de définir un schéma continu en temps et discret en espace via l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dW_{j+1/2}}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (\Phi(W_{j+1/2}, W_{j+3/2}) - \Phi(W_{j-1/2}, W_{j+1/2})) = 0, \\ j \in \mathbb{Z} . \end{array} \right.$$

Alors si le schéma numérique Φ est tel que la "dissipation d'entropie" $\mathcal{D}_{g,d}$ définie par

$$(3.7) \quad \mathcal{D}_{g,d} \equiv \int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\varphi \left[\Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d)) - f(W(\varphi)) \right]$$

est toujours négative :

$$(3.8) \quad \mathcal{D}_{g,d} \leq 0, \quad \forall \varphi_g, \varphi_d \in \phi ,$$

on a l'inégalité d'entropie discrète suivante :

$$(3.9) \quad \frac{d}{dt} \eta(W_{j+1/2}) + \frac{1}{\Delta x} (\xi_{j+1} - \xi_j) \leq 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

avec

$$(3.10) \quad \xi_j \equiv \varphi_{j+1/2} \bullet \Phi(W_{j-1/2}, W_{j+1/2}) - \psi(\varphi_{j+1/2}), \quad j \in \mathbb{Z} ,$$

et $\varphi \mapsto \psi(\varphi)$ défini à la relation (3.2).

- Compte tenu de la proposition 5 (relation (3.4)), la dissipation d'entropie $\mathcal{D}_{g,d}$ peut aussi s'écrire :

$$(3.11) \quad \mathcal{D}_{g,d} = (\varphi_d - \varphi_g) \bullet \Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d)) + \psi(\varphi_g) - \psi(\varphi_d)$$

puisque

$$\int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\varphi f(W(\varphi)) = \int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\psi(\varphi) = \psi(\varphi_d) - \psi(\varphi_g).$$

Preuve du théorème 3.

- On multiplie la loi de conservation discrète (3.6) par $\eta'(W_{j+1/2}) \equiv \varphi_{j+1/2}$. Il vient

$$(3.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \eta(W_{j+1/2}) + \\ + \frac{1}{\Delta x} \varphi_{j+1/2} \bullet (\Phi(W_{j+1/2}, W_{j+3/2}) - \Phi(W_{j-1/2}, W_{j+1/2})) = 0. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} & \varphi_{j+1/2} \bullet (\Phi(W_{j+1/2}, W_{j+3/2}) - \Phi(W_{j-1/2}, W_{j+1/2})) = \\ & = (\varphi_{j+1/2} - \varphi_{j+3/2}) \bullet \Phi(W_{j+1/2}, W_{j+3/2}) + \\ & \quad + (\xi_{j+1} + \psi_{j+3/2}) - (\xi_j + \psi_{j+1/2}) \\ & = \xi_{j+1} - \xi_j - ((\varphi_{j+3/2} - \varphi_{j+1/2}) \bullet \Phi(W_{j+1/2}, W_{j+3/2}) + (\psi_{j+1/2} - \psi_{j+3/2})) \end{aligned}$$

et si on pose

$$(3.13) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_j \equiv \mathcal{D}(\varphi_{j-1/2}, \varphi_{j+1/2}) = \\ = \int_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}} d\varphi [\Phi(W_{j-1/2}, W_{j+1/2}) - f(W(\varphi))] \end{cases}$$

on déduit de (3.12) et du calcul précédent :

$$(3.14) \quad \frac{d}{dt} \eta(W_{j+1/2}) + \frac{1}{\Delta x} (\xi_{j+1} - \xi_j) = \frac{1}{\Delta x} \mathcal{D}_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

qui démontre l'inégalité (3.9) puisque $\mathcal{D}_j \leq 0$ pour tout entier j compte tenu de l'hypothèse (3.8). D'où le théorème 3. \square

4) VARIABLES ENTROPIQUES POUR LA DYNAMIQUE DES GAZ

- La méthode la plus simple pour déterminer les variables entropiques pour la dynamique des gaz est d'abord de se souvenir de l'expression de l'entropie mathématique η et de son flux $\xi(W)$:

$$(4.1) \quad \eta(W) = -\rho s, \quad \xi(W) = \eta u = -\rho u s$$

où s est l'entropie par unité de masse. Mais l'entropie massique s doit d'abord être évaluée à l'aide de l'entropie thermostatique $\Sigma(\bullet)$, qui est une fonction du triplet (masse, volume, énergie interne) :

Variables entropiques

$$(4.2) \quad S = \Sigma(M, V, \epsilon)$$

avec l'hypothèse d'extensivité :

$$(4.3) \quad \Sigma(\lambda M, \lambda V, \lambda \epsilon) = \lambda \Sigma(M, V, \epsilon), \quad \lambda > 0$$

et la relation de dérivation :

$$(4.4) \quad d\epsilon \equiv T d\Sigma - p dV + \mu dM$$

qui **définit** la température T , la pression p et le potentiel chimique massique μ .

- L'extensivité (4.3) et la relation d'Euler des fonctions homogènes montrent qu'on a :

$$(4.5) \quad \epsilon = T S - p V + \mu M$$

soit en introduisant l'énergie interne massique $e \equiv \epsilon/M$, l'entropie spécifique $s \equiv S/M$ et la masse volumique $\rho \equiv M/V$:

$$(4.6) \quad \mu = e - T s + \frac{p}{\rho}.$$

- **Proposition 6. Variables entropiques de la dynamique des gaz.**

Compte tenu de l'expression de (4.1) de l'entropie mathématique pour la dynamique des gaz et de la définition générale (2.5) des variables entropiques, on a :

$$(4.7) \quad \varphi = \left(\frac{1}{T} \left(\mu - \frac{u^2}{2} \right), \frac{u}{T}, -\frac{1}{T} \right).$$

Preuve de la proposition 6.

- Rappelons qu'à une dimension d'espace, un état W a pour expression :

$$(4.8) \quad W = \left(\rho, q = \rho u, \zeta = \rho E = \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right)^t.$$

L'entropie η s'écrit, compte tenu de (4.1) et de la définition des variables massiques :

$$\eta(W) = -\rho \frac{1}{M} \Sigma(M, V, \epsilon) = -\frac{1}{V} \Sigma(M, V, \epsilon) = -\Sigma(\rho, 1, \rho e), \quad \text{soit}$$

$$(4.9) \quad \eta(W) = -\Sigma \left(\rho, 1, \zeta - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho} \right), \quad W = (\rho, q, \zeta)^t.$$

- La dérivation de la relation (4.9), compte tenu de la loi classique (4.4), est alors élémentaire :

$$\begin{aligned} d\eta &= - \left[-\frac{\mu}{T} d\rho + \frac{1}{T} \left(d\zeta - \frac{q}{\rho} dq + \frac{q^2}{2\rho^2} d\rho \right) \right] \\ &= \left(\frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} \frac{u^2}{2} \right) d\rho + \frac{u}{T} dq - \frac{1}{T} d\zeta \end{aligned}$$

et la relation (4.7) est établie. □

• **Proposition 7. Fonctions auxiliaires.**

Avec les définitions générales (3.1) et (3.2) introduites pour la proposition 5, on a pour la dynamique des gaz :

$$(4.10) \quad \eta^*(\varphi) = \frac{p}{T}, \quad \psi(\varphi) = \frac{pu}{T}.$$

Preuve de la proposition 7.

• C'est un calcul simple qui est une conséquence de (4.5) et (4.7) :

$$\begin{aligned} \eta^* &= \varphi \bullet W - \eta = \frac{1}{T} \left(\mu - \frac{u^2}{2} \right) \rho + \frac{\mu}{T} q - \frac{1}{T} \left(\rho e + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \rho s \\ &= \frac{1}{T} \left(e - Ts - \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho + \rho \frac{u^2}{T} - \frac{1}{T} \left(\rho e + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \rho s = \frac{p}{T} \end{aligned}$$

et de manière analogue

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi \bullet f - \xi \\ &= \frac{1}{T} \left(\mu - \frac{u^2}{2} \right) \rho u + \frac{u}{T} (\rho u^2 + p) - \frac{1}{T} \left(\rho u e + \rho \frac{u^3}{2} + pu \right) + \rho u s \\ &= \frac{1}{T} \left(e - Ts + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) \rho u + \frac{\rho u^3}{T} + \frac{pu}{T} - \frac{\rho u e}{T} - \frac{1}{2T} \rho u^3 + \\ &\quad - \frac{pu}{T} + \rho u s \\ &= \frac{pu}{T}. \end{aligned}$$

La relation (4.10) est établie. □

Introduction aux volumes finis

Nous abordons dans ce chapitre une méthode de discrétisation en espace très populaire. Sa construction est heuristique (paragraphe 1) et elle permet de retrouver dans le cas de maillages uniformes l'approche des différences finies présentée au chapitre 2. Le paragraphe 2 présente l'idée de Godunov : résoudre une suite de problèmes de Riemann et faire la moyenne après un petit intervalle de temps. Au paragraphe 3, nous abordons les questions de convergence et la propriété remarquable qu'après passage à la limite, la méthode des volumes finis "capture" les solutions faibles.

1) MÉTHODE DES LIGNES

- Nous étudions une loi de conservation à une dimension d'espace

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

où $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction de flux régulière et Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^N . On suppose donné un pas d'espace $\Delta x > 0$ et une famille de points x_j :

$$(1.2) \quad x_j = j \Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La méthode des volumes finis demande de définir avec soin un **maillage** \mathcal{T} associé à la famille de points proposée à la relation (1.2). Un maillage (même monodimensionnel) est constitué d'une part de **sommets** (ici les points x_j) qui forment un ensemble \mathcal{T}^0 et d'autre part **d'éléments** (notés K dans la suite) qui forment un ensemble \mathcal{T}^1 . Le bord des éléments contient les sommets du maillage et la réunion des adhérences des éléments recouvre tout l'espace :

$$(1.3) \quad \bigcup_{K \in \mathcal{T}^1} \bar{K} = \mathbb{R}.$$

L'intersection de deux éléments K et L du maillage est vide, ou est un sommet du maillage, ou $K = L$. Noter qu'à deux ou trois dimensions spatiales, ces notions se généralisent sans difficulté en utilisant la notion classique en topologie de **complexe cellulaire** (voir par exemple C. Godbillon [*Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971]). Dans le cas présent, avec le choix

$$(1.4) \quad \mathcal{T}^0 = \left\{ x_j, j \in \mathbb{Z} \right\},$$

on a simplement

$$(1.5) \quad \mathcal{T}^1 = \left\{ K =]x_j, x_{j+1}[, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour chaque élément K du maillage ($K \in \mathcal{T}^1$), on introduit la **valeur moyenne** $W_K(t)$ de “la” solution de (1.1), qu’on suppose exister, quitte à se restreindre au cas d’une équation scalaire ou au cas d’un système hyperbolique linéaire que nous avons déjà étudié :

$$(1.6) \quad W_K(t) = \frac{1}{|K|} \int_K W(x, t) dx, \quad K \in \mathcal{T}^1$$

et on cherche quelle est l’équation vérifiée par les fonctions $[0, \infty[\ni t \mapsto W_K(t) \in \Omega$. Il est utile d’introduire les deux sommets $S_-(K)$ et $S_+(K)$ qui composent le bord de l’élément K :

$$(1.7) \quad \partial K = \{ S_-(K), S_+(K) \}; K =]S_-(K), S_+(K)[, \quad K \in \mathcal{T}^1.$$

On intègre l’équation (1.1) en espace dans le volume K . Il vient après intégration du terme divergeant $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$(1.8) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + f(W(S_+(K), t)) - f(W(S_-(K), t)) = 0, \quad K \in \mathcal{T}^1.$$

La difficulté est que pour une solution $W(\bullet)$ de la loi de conservation (1.1), les flux $f(W(S_\pm(K), t))$ ne sont **pas** une fonction simple de l’ensemble

$$(1.9) \quad \mathcal{W}(t) = \{ W_K(t), \quad K \in \mathcal{T}^1 \}$$

de toutes les valeurs moyennes définies en (1.6).

- On construit un schéma **conservatif** semi-discretisé en espace et continu en temps en se donnant, pour tout sommet S du maillage, une **fonction de flux numérique** ψ_S qui dépend a priori de l’ensemble $\mathcal{W}(t)$ de toutes les valeurs moyennes et approche le flux de la solution exacte au sommet $S \in \mathcal{T}^0$:

$$(1.10) \quad f(W(S, t)) \simeq \psi_S(\mathcal{W}(t)), \quad S \in \mathcal{T}^0.$$

Le schéma de volumes finis est obtenu en remplaçant dans la relation (1.8) les flux de la solution exacte aux sommets du maillage par la **fonction de flux numérique** sur ces sommets ; on obtient une équation d’évolution de la valeur moyenne

$$(1.11) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + \psi_{S_+(K)}(\mathcal{W}(t)) - \psi_{S_-(K)}(\mathcal{W}(t)) = 0, \quad K \in \mathcal{T}^1.$$

Une fois les fonctions de flux numériques ψ_S connues, *i.e.*

$$(1.12) \quad \Omega^{\mathcal{T}^1} \ni \mathcal{W} \mapsto \psi_S(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^N, \quad S \in \mathcal{T}^0,$$

Introduction aux volumes finis

l'équation (1.11) est un système d'équations différentielles ordinaires qui porte le nom de **méthode des lignes**. En pratique, pour les schémas numériques à deux points invariants par translation auxquels nous nous restreignons ici, le flux numérique ψ_S sur l'interface S entre les deux éléments $K_g(S)$ et $K_d(S)$ "qui contiennent S dans leur bord", *i.e.*

$$(1.13) \quad S = \partial K_g(S) \cap \partial K_d(S), \quad S \in \mathcal{T}^0$$

n'est fonction que des deux plus proches voisins W_{K_g} et W_{K_d} , ou à la rigueur également des deux voisins à l'ordre suivant. Nous posons ici donc pour fixer les idées

$$(1.14) \quad \psi_S(\mathcal{W}) = \Phi(W_{K_g(S)}, W_{K_d(S)}), \quad S \in \mathcal{T}^0$$

et toute la connaissance du schéma (1.12) se résume à celle de la fonction de deux variables Φ ; on parle alors d'une **fonction de flux à deux points** :

$$(1.15) \quad \Omega \times \Omega \ni (W_g, W_d) \mapsto \Phi(W_g, W_d) \in \mathbb{R}^N.$$

• **Définition 1. Consistance d'un schéma de volumes finis.**

La fonction de flux numérique Φ de la relation (1.15) est dite **consistante** avec la loi de conservation (1.1) si l'on a

$$(1.16) \quad \Phi(W, W) = f(W), \quad W \in \Omega.$$

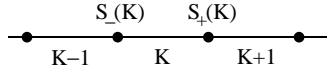


Figure 1. *Sommets et éléments d'un maillage à une dimension d'espace.*

• Si on se donne une fonction de flux à deux points (1.15) consistante avec la loi de conservation (1.1), le schéma de volumes finis défini par la méthode des lignes permet de décrire l'évolution en temps des moyennes W_K pour les éléments du maillage avec une équation qui couple l'élément courant K avec son voisin de droite

$$(1.17) \quad K + 1 = K_d(S_+(K)), \quad K \in \mathcal{T}^1$$

et son voisin de gauche $K - 1$:

$$(1.18) \quad K - 1 = K_g(S_-(K)), \quad K \in \mathcal{T}^1$$

décrits à la figure 1. On obtient de cette façon l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(1.19) \quad \frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] = 0, \quad K \in \mathcal{T}^1.$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

Bien entendu, ce schéma se généralise facilement aux dimensions supérieures (voir par exemple, pour les fanas, le livre de E. Godlewski et P.A. Raviart [*Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, 1996]) et la notation choisie en (1.17) et (1.18) est particulière du cas monodimensionnel.

- La discrétisation en temps de la méthode des lignes ne demande que d'explicitier les divers schémas de base pour une équation différentielle générale :

$$(1.20) \quad \frac{dU}{dt} + F(U) = 0, \quad U \in \mathbb{R}^N$$

qu'on peut identifier à (1.19) avec la correspondance

$$U = \mathcal{W}(t), \quad F_K(t) = \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)]$$

si on suppose le maillage \mathcal{T} constitué d'un nombre fini N d'éléments. On dispose, une fois fixé un pas de temps $\Delta t > 0$, du schéma d'**Euler explicite** :

$$(1.21) \quad \frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) + F(U^n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

mais aussi du schéma d'**Euler implicite**

$$(1.22) \quad \frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) + F(U^{n+1}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

et de leur moyenne la plus simple, le schéma de **Crank-Nicolson**, qui est d'ordre 2 alors que les deux schémas d'Euler sont d'ordre un :

$$(1.23) \quad \frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) + \frac{1}{2}(F(U^n) + F(U^{n+1})) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En pratique, on utilise souvent le schéma de Runge et Kutta d'ordre 2 (schéma de Heun) qui a l'avantage d'être explicite :

$$(1.24) \quad \frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) + \frac{1}{2}(F(U^n) + F(U^n - \Delta t F(U^n))) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

mais demande plus d'évaluations de la fonction $F(\bullet)$.

- Dans le cas de l'équation d'advection

$$(1.25) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}$$

si on utilise le flux centré

$$(1.26) \quad \Phi(u_g, u_d) \equiv \frac{1}{2} a (u_g + u_d)$$

on obtient le schéma centré qui est **instable** pour un intégrateur du type Euler explicite en temps (1.21) :

Introduction aux volumes finis

$$(1.27) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{2\Delta x}(u_{K+1}^n - u_{K-1}^n) = 0, \\ K =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z} , \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour un intégrateur implicite (schéma d'Euler rétrograde (1.22)), le schéma centré est toujours stable :

$$(1.28) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{2\Delta x}(u_{K+1}^{n+1} - u_{K-1}^{n+1}) = 0, \\ K =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z} , \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

• Toujours pour l'approximation numérique de l'équation d'advection, on peut aussi utiliser un flux décentré amont, *i.e.*

$$(1.29) \quad \Phi(u_g, u_d) = \begin{cases} a u_g , & a > 0 \\ a u_d , & a < 0. \end{cases}$$

L'emploi du schéma d'Euler implicite (1.22) en temps permet de retrouver le schéma de Courant ; on a par exemple pour $a > 0$:

$$(1.30) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_K^{n+1} - u_{K-1}^{n+1}) = 0, \\ K =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z} , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

alors que l'emploi du schéma d'Euler explicite (1.21) réintroduit le schéma décentré amont, stable dans le cas $a > 0$ sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (1927)

$$(1.31) \quad 0 < \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

et qui s'écrit

$$(1.32) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{\Delta x}(u_K^n - u_{K-1}^n) = 0, \\ K =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z} , \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2) SCHÉMA DE GODUNOV

• L'approche de Godunov (1955) permet de relier les notions de schéma numérique et de solution du problème de Riemann. On suppose dans la suite de cette partie que le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ pour le système de lois de conservation (1.1) associé à une condition initiale (W_g, W_d) , *i.e.*

$$(2.1) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_g , & x < 0 \\ W_d , & x > 0 \end{cases}$$

a une unique solution entropique autosemblable $\mathcal{U}(\bullet; W_g, W_d)$:

$$(2.2) \quad W(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; W_g, W_d\right) , \quad x \in \mathbb{R} , \quad t > 0 .$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, c'est le cas dans le cas d'une loi de conservation scalaire et nous avons détaillé le cas de l'équation de Burgers

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

($u \in \mathbb{R}$, $f(u) = u^2/2 \in \mathbb{R}$) et pour un système hyperbolique linéaire de lois de conservation. Le cas d'une classe assez générale de systèmes hyperboliques (incluant la dynamique des gaz) sera traité au chapitre suivant.

- L'idée est de discrétiser au temps $t^n = n\Delta t$ le champ inconnu $W^n(x)$ par des volumes finis, *i.e.* un champ **constant dans chaque maille** $K =]x_j, x_{j+1}[$

$$(2.3) \quad W^n(x) = W_{j+1/2}^n, \quad x \in K =]x_j, x_{j+1}[.$$

La remarque fondamentale de Godunov est que pour des temps $t > 0$ assez petits, on **connait** une solution entropique du problème de Cauchy composé de (1.1) et de la condition "initiale"

$$(2.4) \quad W(x, 0) = W^n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

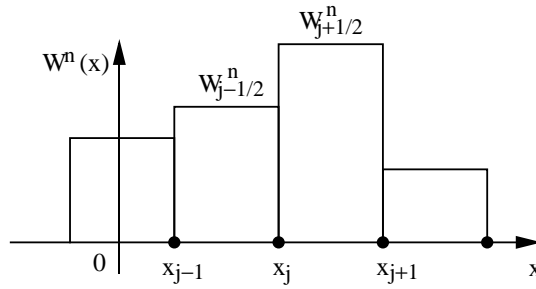


Figure 2. *Discrétisation au temps t^n du champ.*

- Pour l'interface x_j , la condition initiale (2.3)(2.4) définit un problème de Riemann entre les états $W_{j-1/2}^n$ et $W_{j+1/2}^n$

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_{j-1/2}^n, & x < x_j \\ W_{j+1/2}^n, & x > x_j \end{cases} \end{cases}$$

tant que l'on s'intéresse au voisinage immédiat ($|x - x_j|$ assez petit) de cette interface (figure 2). La solution du problème (2.5) s'écrit donc :

$$(2.6) \quad W(x, t) = \mathcal{U} \left(\frac{x - x_j}{t - t^n}; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n \right), \quad t \geq t^n.$$

On note $a_{j+1/2}^n$ la célérité maximale des ondes relatives à l'état $W_{j+1/2}^n$:

$$(2.7) \quad a_{j+1/2}^n = \sup_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k(W_{j+1/2}^n)|, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Introduction aux volumes finis

Compte tenu de la proposition 7 du chapitre précédent sur la vitesse de propagation finie, tant que la condition

$$(2.8) \quad \left| \frac{x - x_j}{t - t^n} \right| \geq \max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|)$$

est satisfaite, la solution du problème (2.5) est donnée par les relations suivantes :

$$(2.9) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_{j-1/2}^n, & \frac{x - x_j}{t - t^n} < -\max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|) \\ W_{j+1/2}^n, & \frac{x - x_j}{t - t^n} > \max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|) \end{cases}.$$

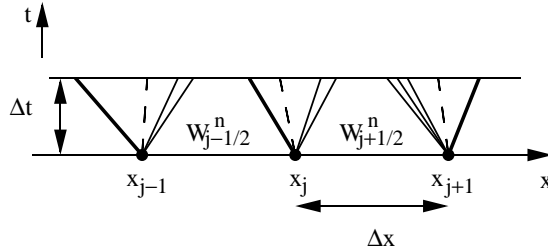


Figure 3. Solution du problème de Cauchy (1.1)-(2.4) sous la condition de stabilité (2.11).

- La solution du problème de Riemann est égale à un état constant si on est assez loin de l'interface x_j ; ceci a lieu en particulier au milieu $x_{j-1/2}$ de la maille $K_{j-1/2}$ et au milieu $x_{j+1/2}$ de la maille $K_{j+1/2}$ pour tout instant t tel que $t^n < t < t^n + \Delta t$ lorsque l'on a la condition

$$(2.10) \quad \Delta t < \frac{\Delta x / 2}{\max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|)}.$$

Lorsque la condition (2.10) a lieu pour toutes les mailles, soit

$$(2.11) \quad \Delta t \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} |a_{j+1/2}^n| \right) \leq \frac{\Delta x}{2},$$

on peut alors “recoller” entre elles les solutions des différents problèmes (2.7). Et pour $t^n < t < t^n + \Delta t$, une solution du problème de Cauchy (1.1)-(2.4) s'écrit pour $|x - x_j| < \Delta x / 2$ et $t < t^n + \Delta t$:

$$(2.12) \quad \begin{cases} W(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x - x_j}{t - t^n}; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n\right), \\ |x - x_j| < \frac{\Delta x}{2}, \quad 0 < t - t^n < \Delta t, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En effet, lorsque la condition (2.6) est satisfaite, les ondes issues du problème de Riemann à l'interface x_j parcourent une distance maximale égale à $\frac{\Delta x}{2}$, donc **n'interagissent pas entre elles** pour deux problèmes de Riemann posés entre interfaces voisines (figure 3).

- Le schéma de Godunov est défini à partir de la solution (2.12) en prenant la moyenne sur chaque maille K à l'instant Δt :

$$(2.13) \quad W_K^{n+1} = \frac{1}{|K|} \int_K W(x, \Delta t) dx, \quad W(x, t) \text{ donné en (2.12).}$$

• **Proposition 1. Flux numérique du schéma de Godunov.**

Le schéma de Godunov, défini par les relations (2.3) à (2.13), s'écrit aussi sous la forme

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(W_K^{n+1} - W_K^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi(W_K^n, W_{K+1}^n) - \Phi(W_{K-1}^n, W_K^n)] = 0 \\ K =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

où $\Phi(\bullet, \bullet)$ est la fonction de flux numérique définie par

$$(2.15) \quad \Phi(W_g, W_d) = f(\mathcal{U}(0; W_g, W_d)), \quad W_g, W_d \in \Omega.$$

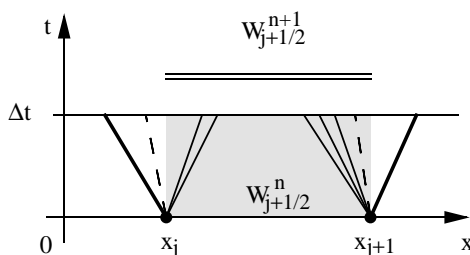


Figure 4. *Volume de contrôle dans l'espace-temps pour l'explicitation du flux du schéma de Godunov.*

- Le schéma de Godunov est donc clairement **consistant** avec la loi de conservation (1.1) ; en effet, $\mathcal{U}(0; W, W) = W$, donc $\Phi(W, W) = f(W)$, ce pour tout état W .

Preuve de la proposition 1.

- On intègre la loi de conservation (1.1) avec la solution particulière du problème de Cauchy associé à la condition initiale (2.3) par la relation (2.12) dans le domaine d'espace-temps $]x_j, x_{j+1}[\times]0, \Delta t[$:

Introduction aux volumes finis

$$(2.16) \quad \int_{\partial([x_j, x_{j+1}] \times]0, \Delta t])} [W(x, t) n_t + f(W(x, t)) n_x] d\gamma(x, t) = 0.$$

• Le bord du rectangle $]x_j, x_{j+1}] \times]0, \Delta t[$ fait apparaître quatre termes (cf. figure 4) :

$$\begin{aligned} \int_{]x_j, x_{j+1}] \times \{0\}} W(x, t) n_t d\gamma(x, t) &= -|K| W_{j+1/2}^n \\ \int_{]x_j, x_{j+1}] \times \{\Delta t\}} W(x, t) n_t d\gamma(x, t) &= |K| W_{j+1/2}^{n+1} \\ \int_{\{x_j\} \times]0, \Delta t[} f(W(x, t)) n_x d\gamma(x, t) &= -\Delta t f(\mathcal{U}(0; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)) \\ \int_{\{x_{j+1}\} \times]0, \Delta t[} f(W(x, t)) n_x d\gamma(x, t) &= \Delta t f(\mathcal{U}(0; W_{j+1/2}^n, W_{j+3/2}^n)). \end{aligned}$$

Le regroupement des quatre termes précédents au sein de (2.16) s'écrit, en tenant compte de la relation (2.15)

$$(2.17) \quad \begin{cases} |K| (W_{j+1/2}^{n+1} - W_{j+1/2}^n) + \\ \quad + \Delta t (\Phi(W_{j+1/2}^n, W_{j+3/2}^n) - \Phi(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)) = 0 \end{cases}$$

et cette relation est, à la notation près, identique à la relation (2.14). □

• Dans le cas de l'équation d'advection, le schéma de Godunov est identique au schéma décentré amont

$$(2.18) \quad f(\mathcal{U}(0; u_g, u_d)) = \begin{cases} a u_g, & a > 0 \\ a u_d, & a < 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

• **Proposition 2. Cas d'un système hyperbolique linéaire.**

Soit A une matrice diagonalisable sur \mathbb{R} de valeurs propres λ_k et vecteurs propres $r_k \in \mathbb{R}^N$

$$(2.19) \quad A \bullet r_k = \lambda_k r_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

et $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \mathbb{R}^N$ la solution du problème de Riemann

$$(2.20) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$(2.21) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

Le flux de Godunov $\Phi(W_g, W_d) = A \bullet W(0, t)$ de la relation (2.10) se calcule aussi *via* la relation

$$(2.22) \quad \Phi(W_g, W_d) = A^+ \bullet W_g + A^- \bullet W_d$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

où les matrices A^\pm sont définies par les relations

$$(2.23) \quad \lambda_k^+ = \max(0, \lambda_k), \quad \lambda_k^- = \min(0, \lambda_k), \quad 1 \leq k \leq \lambda$$

$$(2.24) \quad A^\pm \bullet r_k = \lambda_k^\pm r_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

- Les ondes de célérité $\lambda_k > 0$ transmettent l'information de l'état W_g jusqu'à l'interface $\{x = 0\}$ alors que celles de vitesse $\lambda_k < 0$ la propagent de W_d jusqu'à l'interface (figure 5).

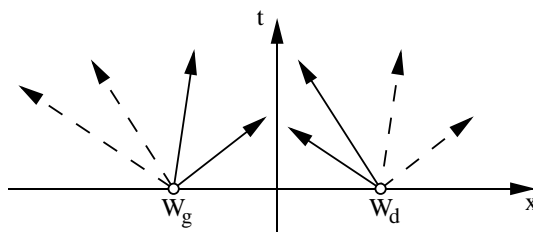


Figure 5. Schéma de Godunov pour un système hyperbolique linéaire :
 $\Phi(W_g, W_d) = A^+ \bullet W_g + A^- \bullet W_d.$

Preuve de la proposition 5.

- Elle résulte du calcul fait au chapitre 4 avec la méthode des caractéristiques. On décompose d'abord la condition initiale (W_g, W_d) sur les vecteurs propres de la matrice A :

$$(2.25) \quad W_g = \sum_{k=1}^N \varphi_{g,k} r_k, \quad \varphi_{g,k} \in \mathbb{R}$$

$$(2.26) \quad W_d = \sum_{k=1}^N \varphi_{d,k} r_k, \quad \varphi_{d,k} \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$(2.27) \quad \varphi_k^0(x) = \begin{cases} \varphi_{g,k}, & x < 0 \\ \varphi_{d,k}, & x > 0. \end{cases}$$

L'analyse des caractéristiques nous a montré que la solution du problème (2.20)-(2.21) s'écrit :

$$(2.28) \quad W(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(x - \lambda_k t) r_k.$$

Il en résulte que

Introduction aux volumes finis

$$W(0, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(-\lambda_k t) r_k, \quad t > 0$$

$$W(0, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(-\lambda_k) r_k \quad \text{vu l'invariance d'échelle (2.27)}$$

$$W(0, t) = \sum_{-\lambda_k < 0} \varphi_{g,k} r_k + \sum_{-\lambda_k > 0} \varphi_{d,k} r_k, \quad t > 0$$

Par suite

$$\begin{aligned} \Phi(W_g, W_d) &= A \bullet W(0, t) = \sum_{\lambda_k > 0} \varphi_{g,k} A \bullet r_k + \sum_{\lambda_k < 0} \varphi_{d,k} A \bullet r_k \\ &= A^+ \bullet W_g + A^- \bullet W_d \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (2.22). □

- On peut vérifier que pour la résolution numérique du système linéaire (2.20), le schéma de Godunov, composé de (2.14) et (2.22) est **stable** sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy

$$(2.29) \quad \left(\sup_k |\lambda_k| \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

alors que c'est une condition de type " $CFL = 1/2$ " dont on a eu besoin en (2.11) pour effectuer proprement le recollement entre les divers problèmes de Riemann dans le cas **non linéaire**. Par ailleurs, le schéma de Godunov est **d'ordre 1** au sens de l'erreur de troncature, ainsi que le suggère la relation (2.18) puisque pour l'advection le schéma de Godunov correspond au schéma aux différences finies décentré amont.

- **Proposition 3. Stabilité L^∞ .**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de flux réelle de classe \mathcal{C}^2 , $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ une donnée initiale, \mathcal{T} un maillage de \mathbb{R} de pas $\Delta x > 0$ uniforme et $\Delta t > 0$ un pas de temps. On construit le schéma de Godunov à l'aide de la condition initiale discrète suivante

$$(2.30) \quad u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x) dx, \quad K =]j\Delta x, (j+1)\Delta x[, \quad j \in \mathbb{Z},$$

et des équations (2.14)-(2.15). Sous la condition de stabilité

$$(2.31) \quad \Delta t \sup_{|\xi| \leq \|u^0\|_{L^\infty}} |f'(\xi)| \leq \frac{1}{2} \Delta x,$$

le schéma de Godunov préserve le principe du maximum :

$$(2.32) \quad \left(\alpha \leq u^0 \leq \beta \text{ pp}(x) \right) \implies \left(\alpha \leq u_K^n \leq \beta, \quad \forall K, \forall n \right).$$

Preuve de la proposition 3.

- Il est clair d'une part qu'on a

$$(2.33) \quad |u_K^0| \leq \|u^0\|_{L^\infty}, \quad \forall K \in \mathcal{T}^1$$

et pour $K \in \mathcal{T}^1$, la solution entropique bornée $\mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_K^0, u_{K+1}^0\right)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_K^0, u_{K+1}^0)$ satisfait la condition

$$(2.34) \quad \left| \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_K^0, u_{K+1}^0\right) \right| \leq \max(|u_K^0|, |u_{K+1}^0|).$$

Comme on a, compte tenu de (2.31),

$$(2.35) \quad \begin{cases} u_K^1 = \frac{1}{|K|} \left[\int_0^{\Delta x/2} \mathcal{U}\left(\frac{x}{\Delta t}; u_{K-1}^0, u_K^0\right) dx \right. \\ \left. + \int_{-\Delta x/2}^0 \mathcal{U}\left(\frac{x}{\Delta t}; u_K^0, u_{K+1}^0\right) dx \right], \quad K \in \mathcal{T}^1 \end{cases}$$

et on en déduit simplement $|u_K^1| \leq \|u^0\|_{L^\infty}$ pour $K \in \mathcal{E}_\mathcal{T}$, et après une récurrence immédiate :

$$(2.36) \quad |u_K^n| \leq \|u^0\|_{L^\infty}, \quad K \in \mathcal{T}^1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- La relation (2.32) s'établit de façon analogue : la condition $\alpha \leq u^0 \leq \beta$ presque partout se traduit par intégration sur la condition initiale du schéma :

$$(2.37) \quad \alpha \leq u_K^0 \leq \beta, \quad K \in \mathcal{T}^1$$

et l'unique solution entropique bornée du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_K^0, u_{K+1}^0)$ satisfait à la relation

$$(2.38) \quad \alpha \leq \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_K^0, u_{K+1}^0\right) \leq \beta, \quad K \in \mathcal{T}^1$$

si c'est le cas pour la condition initiale (relation (2.37)). Il suffit alors d'utiliser (2.38) et la relation de projection (2.35) pour montrer qu'on a $\alpha \leq u_K^1 \leq \beta$, $K \in \mathcal{T}^1$. La relation (2.32) s'en déduit immédiatement par récurrence. \square

3) CONVERGENCE

- Nous fixons une condition initiale scalaire $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, que nous discrétisons sur un maillage \mathcal{T}_m de pas $\Delta x_m > 0$:

$$(3.1) \quad (u_m)_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x) dx, \quad K =]j\Delta x, (j+1)\Delta x_m[, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Nous utilisons un pas de temps $\Delta t_m > 0$ et cherchons une fonction $u_m : \mathbb{R} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ supposée constante dans chaque produit cartésien de la forme $]j\Delta x_m, (j+1)\Delta x_m[\times]n\Delta t_m, (n+1)\Delta t_m[$:

Introduction aux volumes finis

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_m(x, t) = (u_m)_K^n, & x \in K =]j \Delta x_m, (j+1) \Delta x_m[, \\ t^n = n \Delta t_m \leq t \leq t^{n+1}, & j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Nous utilisons un flux numérique à deux points $\mathbb{R}^2 \ni (u_g, u_d) \mapsto \Phi(u_g, u_d) \in \mathbb{R}$ et un schéma de volumes finis explicite pour calculer u_K^{n+1} par récurrence sur l'entier n :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t_m} [(u_m)_K^{n+1} - (u_m)_K^n] + \\ + \frac{1}{\Delta x_m} \left\{ \Phi((u_m)_K^n, (u_m)_{K+1}^n) - \Phi((u_m)_{K-1}^n, (u_m)_K^n) \right\} = 0 . \end{cases}$$

Lorsque $\Delta x_m \rightarrow 0$ et $\Delta t_m \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$, le comportement de la famille de fonctions $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ peut converger vers une solution faible du problème de Cauchy, ainsi que la propose le résultat suivant de Lax et Wendroff (1960).

• **Théorème 1. Convergence de la méthode des volumes finis vers une éventuelle solution faible.** On se place dans le cadre fixé ci-dessus d'une famille \mathcal{T}_m de maillages uniformes de \mathbb{R} de pas $\Delta x_m > 0$ et d'une famille Δt_m de pas de temps, pour $m \in \mathbb{N}$. On construit une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de fonctions à l'aide de la relation (3.2), de la condition initiale (3.1) et de la relation de récurrence (3.3). On fait les hypothèses suivantes :

• la fonction de flux numérique $\Phi(\bullet, \bullet)$ est consistante avec le flux f de la loi de conservation :

$$(3.4) \quad \Phi(u, u) = f(u), \quad u \in \mathbb{R}$$

• la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans L^∞ :

$$(3.5) \quad \exists K > 0, \quad \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K, \quad \|u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)} \leq K, \quad m \in \mathbb{N}$$

• la fonction de flux numérique Φ est lipschitzienne sur $[-K, K]^2$:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \exists C > 0, & |\Phi(u_g, u_d) - \Phi(v_g, v_d)| \leq C (|u_g - v_g| + |u_d - v_d|), \\ & u_g, u_d, v_g, v_d \in [-K, K] \end{cases}$$

• il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ telle que

$$(3.7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t) = u(x, t) \quad \text{pp}(x, t) .$$

Alors $u(\bullet, \bullet)$ est solution faible du problème de Cauchy avec la condition initiale u^0 .

• **Attention** : Le théorème précédent ne dit pas qu'un schéma de volumes finis conservatif et consistant converge. Il nous dit que **si** la famille de solutions numériques $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge, c'est vers une solution faible du problème de Cauchy. En fait, le schéma de Godunov converge vers la solution faible entropique bornée du problème de Cauchy. La preuve utilise des notions d'analyse fonctionnelle qui sont du domaine d'un cours spécialisé.

• **Définition 2. Consistance avec la condition d'entropie.**

Un schéma de volumes finis explicite à deux points est consistant avec l'inégalité d'entropie si, pour toute entropie mathématique η , il existe une fonction de flux numérique d'entropie ψ consistante avec le flux d'entropie ξ :

$$(3.8) \quad \psi(W, W) = \xi(W), \quad W \in \Omega$$

de sorte que si W_K^n est donné par le schéma numérique, *i.e.*

$$(3.9) \quad \frac{1}{\Delta t}(W_K^{n+1} - W_K^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi(W_K^n, W_{K+1}^n) - \Phi(W_{K-1}^n, W_K^n)] = 0$$

on a également une inégalité discrète d'entropie

$$(3.10) \quad \frac{1}{\Delta t} [\eta(W_K^{n+1}) - \eta(W_K^n)] + \frac{1}{\Delta x} [\psi(W_K^n, W_{K+1}^n) - \psi(W_{K-1}^n, W_K^n)] \leq 0.$$

Cette définition permet de compléter le théorème de Lax-Wendroff.

• **Proposition 4. Convergence de la méthode des volumes finis vers une éventuelle solution entropique.** Sous les hypothèses du théorème 1, si le schéma (3.3) est consistant avec la condition d'entropie au sens donné en (3.10) et que, pour toute entropie η , le flux numérique ψ est lipschitzien sur l'intervalle $[-K, K]$, alors la limite u introduite à la relation (3.7) est l'unique solution faible entropique bornée du problème de Cauchy.

• **Proposition 5. Le schéma de Godunov est consistant avec la condition d'entropie.** Le schéma de Godunov, défini aux relations (2.13) ou (2.14)-(2.15) est consistant avec la condition d'entropie. Le flux numérique d'entropie $\psi(\bullet, \bullet)$ s'évalue ainsi :

$$(3.11) \quad \psi(W_g, W_d) = \xi(\mathcal{U}(0; W_g, W_d)), \quad W_g, W_d \in \Omega.$$

Preuve de la proposition 5.

• Soit v une fonction admettant un ensemble fini de points de discontinuité sur l'intervalle $[0, \Delta x]$. On a alors

$$(3.12) \quad \eta\left(\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} v(\theta) d\theta\right) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \eta(v(\theta)) d\theta$$

qui est un cas particulier de l'inégalité de Jensen. Il suffit d'appliquer un argument classique sur les sommes de Riemann : on découpe l'intervalle $[0, \Delta x]$ en m intervalles de longueur $\frac{1}{m}\Delta x$. On a alors

$$(3.13) \quad \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta x}{m} v\left(k \frac{\Delta x}{m}\right) \rightarrow \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} v(\theta) d\theta \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

$$(3.14) \quad \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \eta\left(v\left(\frac{\Delta x}{m}\right)\right) \rightarrow \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \eta(v(\theta)) d\theta \quad \text{si } m \rightarrow \infty.$$

Introduction aux volumes finis

Mais on a aussi l'inégalité de convexité

$$(3.15) \quad \eta\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m v\left(k \frac{\Delta x}{m}\right)\right) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \eta\left(v\left(k \frac{\Delta x}{m}\right)\right).$$

A l'aide de (3.13) et (3.14), on passe à la limite dans les deux membres de la relation (3.15), ce qui établit l'inégalité (3.12).

- On applique l'inégalité de Jensen avec

$$(3.16) \quad v(x) = \begin{cases} \mathcal{U}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_{K-1}^n, W_K^n\right), & -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq 0 \\ \mathcal{U}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_K^n, W_{K+1}^n\right), & 0 \leq x \leq \Delta x/2 \end{cases}$$

et compte tenu de la définition (2.13) du schéma de Godunov, on obtient

$$(3.17) \quad \eta(W_K^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta(W(x, \Delta t)) dx, \quad K =]x_j, x_{j+1}[.$$

- On utilise maintenant le fait que la solution $W(x, t)$ est solution entropique de la loi de conservation (1.1). On a donc

$$(3.18) \quad \int_K \int_0^{\Delta t} \left[\frac{\partial \eta(W)}{\partial t} + \frac{\partial \xi(W)}{\partial x} \right] dx dt \leq 0$$

soit après intégration par parties

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [\eta(W(x, \Delta t)) - \eta(W(x, 0))] dx + \int_0^{\Delta t} [\xi(W(x_{j+1}, t)) - \xi(W(x_j, t))] dt \leq 0$$

id est

$$(3.19) \quad \begin{cases} \Delta x \left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta(W(x, \Delta t)) \frac{dx}{\Delta x} - \eta(W_K^n) \right] \\ + \Delta t [\xi(\mathcal{U}(0; W_K^n, W_{K+1}^n)) - \xi(\mathcal{U}(0; W_{K-1}^n, W_K^n))] \leq 0. \end{cases}$$

On déduit de (3.17) et (3.19) (pour $K =]x_j, x_{j+1}[$) :

$$\eta(W_K^{n+1}) \leq \eta(W_K^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\xi(\mathcal{U}(0; W_K^n, W_{K+1}^n)) - \xi(\mathcal{U}(0; W_{K-1}^n, W_K^n))]$$

ce qui établit l'ensemble des relations (3.10) et (3.11). □

- Nous revenons à la méthode des lignes introduite au début de ce chapitre. On dispose de fonctions $[0, +\infty[\ni t \mapsto W_K(t) \in \Omega$, $K \in \mathcal{T}^1$ qui satisfait au système (infini ?) suivant d'équations différentielles ordinaires

$$(3.20) \quad \frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] = 0, \quad t \geq 0, \quad K \in \mathcal{T}^1$$

pour une fonction de flux $\Phi(\bullet, \bullet)$ à deux points.

• **Définition 2. Consistance avec la condition d'entropie pour la méthode des lignes.** La méthode des lignes (3.20) est **consistante** avec la condition d'entropie si, pour toute entropie mathématique $\eta(\bullet)$, il existe un flux numérique d'entropie $\psi(\bullet, \bullet)$ qui satisfait à la relation de consistance (3.8) de sorte que si $t \mapsto W_K(t)$ est solution du système différentiel (3.20), on a aussi

$$(3.21) \quad \frac{d}{dt}\eta(W_K(t)) + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K)] \leq 0, \quad K \in \mathcal{T}^1.$$

• **Proposition 6. Condition suffisante de consistance entropique pour la méthode des lignes.** Soit $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ une entropie mathématique pour la loi de conservation (1.1), $\Omega \ni W \mapsto \pi(W) = \varphi \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des variables entropiques, *i.e.*

$$(3.22) \quad \pi_i(W) \equiv \varphi_i = \frac{\partial \eta(W)}{\partial W_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad W \in \Omega.$$

Si la fonction de flux numérique satisfait à

$$(3.23) \quad \mathcal{D}_{g,d} \equiv \int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\varphi [\Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d)) - f(W(\varphi))] \leq 0$$

pour tout couple (φ_g, φ_d) de variables entropiques, alors la méthode des lignes est consistante avec la condition d'entropie au sens de la définition 3, et on a un flux numérique d'entropie $\psi(\bullet, \bullet)$ qui peut être calculé par la relation

$$(3.24) \quad \psi(W_g, W_d) = \xi(W_d) + \varphi_d \bullet [\Phi(W_g, W_d) - f(W_d)].$$

• Ce résultat est dû à S. Osher (1984). Rappelons d'abord que l'entropie η est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω strictement convexe, donc l'application $\Omega \ni W \mapsto \pi(W) \in \mathbb{R}^N$ est injective. Elle est donc bijective sur son image ϕ :

$$(3.25) \quad \Omega \ni W \mapsto \pi(W) \in \phi, \quad \pi_i(W) = \frac{\partial \eta(W)}{\partial W_i} \equiv \varphi_i.$$

Une **variable entropique** φ est un "vecteur ligne", alors que l'état W est un "vecteur colonne". On introduit les fonctions duales de l'entropie η et du flux d'entropie ξ :

$$(3.26) \quad \eta^*(\varphi) \equiv \varphi \bullet W(\varphi) - \eta(W(\varphi))$$

$$(3.27) \quad \xi^*(\varphi) \equiv \varphi \bullet f(W(\varphi)) - \xi(W(\varphi))$$

où $\phi \ni \varphi \mapsto W(\varphi) \in \Omega$ est l'application réciproque de π . On a alors facilement

$$(3.28) \quad d\eta^*(\varphi) = d\varphi \bullet W(\varphi)$$

$$(3.28) \quad d\xi^*(\varphi) = d\varphi \bullet f(W(\varphi))$$

puisque $\eta(\bullet)$ est une entropie mathématique, donc $d\xi(W) = d\eta \bullet df = \varphi \bullet df$ avec $d\eta(W) = \varphi \bullet dW$.

Preuve de la proposition 6.

- On remarque d'abord que $\mathcal{D}_{g,d}$ peut s'écrire :

$$(3.30) \quad \mathcal{D}_{g,d} = (\varphi_d - \varphi_g) \Phi_{gd} - (\xi^*(\varphi_d) - \xi^*(\varphi_g))$$

avec $\Phi_{gd} \equiv \Phi(W_g, W_d) = \Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d))$ au vu de (3.23) et de la relation (3.29).

- On multiplie la relation (3.20) par $\varphi_K \equiv \eta(W_K)$. Il vient

$$0 = \varphi_K \bullet \left(\frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] \right)$$

soit

$$(3.31) \quad \frac{d}{dt} [\eta(W_K)] + \frac{1}{|K|} [\varphi_K \bullet \Phi(W_K, W_{K+1}) - \varphi_K \bullet \Phi(W_{K-1}, W_K)] = 0.$$

Or $\varphi_d \Phi_{gd} = \psi_{gd} - \xi_d + \varphi_d f_d$ (cf. (3.24)) qui est égal à $\psi_{gd} - \xi_d^*$ au vu de (3.27). De même,

$$\begin{aligned} \varphi_K \Phi(W_K, W_{K+1}) &= \varphi_{K+1} \Phi(W_K, W_{K+1}) - (\varphi_{K+1} - \varphi_K) \Phi(W_K, W_{K+1}) \\ &= \psi(W_K, W_{K+1}) - \xi^*(\varphi_{K+1}) - (\varphi_{K+1} - \varphi_K) \Phi(W_K, W_{K+1}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi_K [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] &= \\ &= \psi(W_K, W_{K+1}) - \xi^*(\varphi_{K+1}) - (\varphi_{K+1} - \varphi_K) \Phi(W_K, W_{K+1}) \\ &\quad - \psi(W_{K-1}, W_K) + \xi^*(\varphi_K) \\ &= \psi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K) - \mathcal{D}_{W_K, W_{K+1}} \end{aligned}$$

et on déduit de (3.31) :

$$(3.32) \quad \frac{d\eta(W_K)}{dt} + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K)] = \frac{1}{|K|} \mathcal{D}_{W_K, W_{K+1}}$$

ce qui établit la propriété. □

- La condition “de dissipation” (3.23) permet d'assurer que la méthode des lignes fournit un schéma consistant avec la condition d'entropie. La question naturelle qui suit concerne le schéma en temps : garde-t-on un schéma de volumes finis consistant avec la condition d'entropie après discrétisation en temps de l'équation différentielle (3.30) ? La réponse est à priori négative si on utilise un schéma explicite mais E. Tadmor (1987) a montré qu'avec un schéma implicite (donc non linéaire !) d'Euler, *i.e.*

$$(3.33) \quad \frac{1}{\Delta t} (W_K^{n+1} - W_K^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \Phi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})] = 0$$

elle est positive. Nous détaillons ce résultat dans la proposition qui suit.

• **Proposition 7. Condition d'entropie pour le schéma en temps implicite.** Soit $\Omega^2 \ni (W_g, W_d) \mapsto \Phi(W_g, W_d) \in \mathbb{R}^N$ une fonction de flux et $(W_K^n)_{K \in \mathcal{T}^1, n \geq 0}$ la solution (supposée exister !) du schéma de volumes finis à deux points implicite en temps (3.33). Si le flux numérique $\Phi(\bullet, \bullet)$ satisfait la condition (3.23), alors on a la condition d'entropie suivante :

$$(3.34) \quad \frac{1}{\Delta t} (\eta(W_K^{n+1}) - \eta(W_K^n)) + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \psi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})] \leq 0$$

où $\psi(\bullet, \bullet)$ est le flux numérique d'entropie proposé à la relation (3.24).

Preuve de la proposition 7.

• On écrit la convexité de la fonction η : le point $\eta(W_K^n)$ est “au-dessus” de la direction tangente issue de W_K^{n+1} :

$$(3.35) \quad \eta(W_K^n) \geq \eta(W_K^{n+1}) + \varphi_K^{n+1} \bullet (W_K^n - W_K^{n+1}).$$

On en déduit

$$\eta(W_K^n) \geq \eta(W_K^{n+1}) + \frac{\Delta t}{|K|} \varphi_K^{n+1} \bullet [\Phi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \Phi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})]$$

compte tenu de (3.33)

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(W_K^n) \geq \eta(W_K^{n+1}) + \\ \quad + \frac{\Delta t}{|K|} [\psi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \psi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1}) - \mathcal{D}_{K,K+1}^{n+1}] \end{array} \right.$$

au vu du calcul qui aboutit à (3.32) et la relation (3.36) s'écrit de manière équivalente :

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} [\eta(W_K^{n+1}) - \eta(W_K^n)] + \\ \quad + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \psi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})] \leq \frac{1}{|K|} \mathcal{D}_{K,K+1}^{n+1}. \end{array} \right.$$

L'inégalité (3.23) entraîne donc clairement l'inégalité (3.34) et la proposition est démontrée. \square

Problème de Riemann

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de Riemann pour un système hyperbolique de lois de conservation. Il s'agit d'un problème de Cauchy avec une condition initiale formée de deux états constants. Nous introduisons les ondes non linéaires au paragraphe 1 et nous les étudions ensuite en distinguant trois cas : ondes de détente (paragraphe 2), ondes de choc (paragraphe 3) et discontinuités de contact (paragraphe 3). Le dernier paragraphe permet de regrouper ces diverses ondes via la présentation classique introduite par Lax.

1) INTRODUCTION

- Nous étudions un système de lois de conservation à une dimension d'espace :

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad W(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Nous le supposons hyperbolique strictement : la matrice jacobienne $A(W) = df(W)$, d'ordre N , est diagonalisable sur \mathbb{R} et possède N valeurs propres $\lambda_j(W)$ toutes distinctes.

- **Définition 1. Système strictement hyperbolique.**

La matrice jacobienne $A(W) = df(W)$ possède N valeurs propres $\lambda_j(W)$ et N vecteurs propres $r_j(W)$:

$$(1.2) \quad A(W) \bullet r_j(W) = \lambda_j(W) r_j(W), \quad 1 \leq j \leq N, \quad W \in \Omega.$$

Les valeurs propres $\lambda_j(W)$ sont toutes distinctes :

$$(1.3) \quad \lambda_1(W) < \lambda_2(W) < \dots < \lambda_N(W), \quad W \in \Omega;$$

on les ordonne par ordre croissant.

- **Définition 2. Champ vraiment non linéaire.**

Le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire si et seulement si, pour tout $W \in \Omega$, on a

$$(1.4) \quad d\lambda_j(W) \bullet r_j(W) \neq 0, \quad \forall W \in \Omega.$$

- Si le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire, on **choisit** de normaliser le $j^{\text{ième}}$ vecteur propre $r_j(W)$ de sorte que

$$(1.5) \quad d\lambda_j(W) \bullet r_j(W) \equiv 1, \quad \forall W \in \Omega.$$

• **Définition 3. Champ linéairement dégénéré.**

Le $j^{\text{ième}}$ champ est linéairement dégénéré si et seulement si on a

$$(1.6) \quad d\lambda_j(W) \bullet r_j(W) = 0, \quad \forall W \in \Omega.$$

• On remarque que la négation d'être un champ vraiment non linéaire **n'est pas** d'être un champ linéairement dégénéré. Dans la suite, on supposera que les champs du système (1.1) sont ou bien vraiment non linéaires, ou bien linéairement dégénérés. Cette hypothèse exclut le cas de valeurs propres qui permettent à $d\lambda_j \bullet r_j$ d'être de signe variable en fonction de l'état $W \in \Omega$. On suppose que le système hyperbolique (1.1) admet une entropie strictement convexe $\eta(\bullet)$ de flux associé $\xi(\bullet)$. Si on se donne une condition initiale $W^0 \in (L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}))^N$, on rappelle qu'une solution faible entropique du problème de Cauchy formé de (1.1) et de la condition initiale

$$(1.7) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

consiste à chercher $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$ de sorte que

$$(1.8) \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left(W \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} W^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \right. \\ \left. \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N \right.$$

$$(1.9) \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left(\eta(W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \geq 0. \right. \\ \left. \forall \varphi \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, \infty[^N \right.$$

Dans la suite, on s'intéresse aux solutions "de classe \mathcal{C}^1 par morceaux", du problème de Cauchy de donnée initiale composée de deux états constants W_g et W_d .

• **Définition 4. Problème de Riemann.**

Soient W_g et W_d (appartenant à Ω), deux états constants. Le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ est le problème de Cauchy formé de la loi de conservation (1.1) et de la condition initiale suivante :

$$(1.10) \quad W^0(x) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

• Dans les paragraphes suivants, nous construisons d'abord diverses **solutions particulières** du problème de Riemann. Nous les assemblons ensuite pour construire une solution entropique de (1.1) et (1.10) sous la forme d'une fonction $W(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, ceci sous l'hypothèse où les états W_g et W_d sont assez proches l'un de l'autre.

Problème de Riemann

2) ONDES DE DÉTENTE

• L'idée de départ est de chercher une solution régulière **autosemblable** du système de lois de conservation (1.1). On pose :

$$(2.1) \quad W(x, t) = V\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0$$

et on injecte cette hypothèse au sein de (1.1). Il vient

$$-\frac{x}{t^2} V'\left(\frac{x}{t}\right) + A\left(V\left(\frac{x}{t}\right)\right) \bullet \frac{1}{t} V'\left(\frac{x}{t}\right) = 0, \quad \text{soit}$$

$$(2.2) \quad A(V(\xi)) \bullet V'(\xi) = \xi V'(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \xi = \frac{x}{t}.$$

On en déduit que, ou bien $V(\xi)$ est une fonction constante (pour une certaine plage de variation de la variable ξ), ou bien $V'(\xi)$ est vecteur propre de la matrice $A(V)$ pour une valeur propre $\lambda_j(V)$:

$$(2.3) \quad \exists j \in \{1, \dots, N\}, \exists \alpha(\xi) \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \frac{dV}{d\xi} = \alpha(\xi) r_j(\xi),$$

$$(2.4) \quad \lambda_j(V(\xi)) = \xi$$

et la relation (2.4) est une conséquence du fait qu'au sein de la relation (2.2), la valeur propre de la matrice $A(V)$ est nécessairement égale à ξ .

• On suppose dans la suite de ce paragraphe que le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire et on adapte pour le $j^{\text{ième}}$ vecteur propre $r_j(\bullet)$ la normalisation (1.5). On dérive la fonction $\xi \mapsto \lambda_j(V(\xi))$ pour une (éventuelle) solution de (2.3) (2.4). Il vient :

$$\frac{d\lambda_j}{d\xi} = d\lambda_j(V) \bullet \frac{dV}{d\xi} = \alpha(\xi) d\lambda_j(\xi) \bullet r_j(\xi) = \alpha(\xi)$$

et par ailleurs, compte tenu de (2.4) : $\frac{d\lambda_j}{d\xi} = 1$. On en déduit donc que $\alpha(\xi) = 1$. Nous venons de montrer la

• **Proposition 1. Onde de détente.**

Soit $(x, t) \mapsto V(x/t) \in \Omega$ une solution autosemblable non constante de la loi de conservation (1.1). Alors il existe un indice $j \in \{1, \dots, N\}$ de sorte que la relation (2.4) ait lieu. Si l'indice j correspond à un champ vraiment non linéaire, la fonction $\xi \mapsto V(\xi)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire.

$$(2.5) \quad \frac{dV}{d\xi} = r_j(V(\xi))$$

si le $j^{\text{ième}}$ vecteur propre est normalisé par la condition (1.5).

• **Théorème 1. Onde de détente dans l'espace des états.**

On suppose que le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire. On se donne un état $W_0 \in \Omega$. Alors il existe une courbe $\mathcal{R}_j(W_0)$ dans l'espace Ω formée par des états W qui peuvent être reliés à W_0 par une j -onde de détente. De plus, il existe une paramétrisation de $\mathcal{R}_j(W_0) : \epsilon \mapsto \Phi_j(\epsilon)$ pour $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ (ϵ_0 assez petit) de sorte que

$$(2.6) \quad \Phi_j(\epsilon) = W_0 + \epsilon r_j(W_0) + \frac{\epsilon^2}{2} dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + O(\epsilon^3).$$

Preuve du théorème 1.

• Soit $V : \xi \mapsto V(\xi)$ une solution du système différentiel

$$(2.7) \quad \frac{dV}{d\xi} = r_j(V(\xi)), \quad \xi > \lambda_j(W_0)$$

associé à la condition initiale

$$(2.8) \quad V(\lambda_j(W_0)) = W_0.$$

La fonction V existe pour $\lambda_j(W_0) \leq \xi < \lambda_j(W_0) + \epsilon_0$ avec ϵ_0 choisi assez petit.

On a alors

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_j(V(\xi)) = d\lambda_j(V) \bullet \frac{dV}{d\xi} = d\lambda_j(V(\xi)) \bullet r_j(\xi) = 1$$

compte tenu de (1.5), donc $\xi \mapsto V(\xi)$ vérifie :

$$\lambda_j(V(\xi)) - \lambda_j(V(\lambda_j(W_0))) = \xi - \lambda_j(W_0)$$

et compte tenu de la relation (2.8),

$$(2.9) \quad \lambda_j(V(\xi)) = \xi, \quad \lambda_j(W_0) \leq \xi < \lambda_j(W_0) + \epsilon,$$

ce qui montre que la relation (2.4) est satisfaite par une solution du système (2.7) (2.8).

• On pose alors :

$$(2.10) \quad \mathcal{R}_j(W_0) = \{ V(\xi), \text{ solution de (2.7) (2.8) (2.9)} \}$$

et la courbe $\mathcal{R}_j(W_0)$ est l'ensemble des états $W \in \Omega$ qui peuvent être reliés à W_0 par une j -onde de détente. Plus précisément, on fixe $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et on pose

$$(2.11) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_0, & \frac{x}{t} \leq \lambda_j(W_0) \\ V\left(\frac{x}{t}\right), & \lambda_j(W_0) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_j(W_0) + \epsilon \\ V(\lambda_j(W_0) + \epsilon), & \frac{x}{t} \geq \lambda_j(W_0) + \epsilon. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que la fonction ainsi construite est solution faible entropique du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_0, V(\lambda_j(W_0) + \epsilon))$.

Problème de Riemann

- On pose enfin

$$(2.12) \quad \Phi_j(\epsilon) = V(\lambda_j(W_0) + \epsilon), \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

On a

$$\begin{aligned} \Phi_j(0) &= W_0, \quad \frac{d}{d\epsilon} \Phi_j(0) = V'(\lambda_j(W_0)) = r_j(W_0), \\ \frac{d^2}{d\epsilon^2} \Phi_j(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon} (r_j(V(\lambda_j(W_0) + \epsilon))) = dr_j(\Phi_j(\epsilon)) \bullet V'(\lambda_j(W_0) + \epsilon) \\ &= dr_j(\Phi_j(\epsilon)) \bullet r_j(\Phi_j(\epsilon)), \quad \text{donc} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \Phi_j}{d\epsilon^2}(0) = dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0),$$

ce qui établit le développement (2.6) et achève la preuve du théorème. □

- **Définition 5. j -invariant de Riemann.**

Une fonction $\Omega \ni W \mapsto \beta(W) \in \mathbb{R}$ est un invariant de Riemann pour le $j^{\text{ième}}$ champ caractéristique (ou plus simplement un “ j -invariant de Riemann”) si et seulement si elle est dérivable et vérifie

$$(2.13) \quad d\beta(W) \bullet r_j(W) = 0, \quad \forall W \in \Omega.$$

- Si le $j^{\text{ième}}$ champ est linéairement dégénéré, alors la valeur propre $\lambda_j(\bullet)$ est elle-même un invariant de Riemann, comme le montre le rapprochement de (1.6) et (2.13).

- **Proposition 2.**

Un j -invariant de Riemann est constant le long d’une j -onde de détente.

Preuve de la proposition 2.

- On dérive par rapport à ξ la fonction $\xi \mapsto \beta(V(\xi))$, où $V(\bullet)$ est solution de (2.7) ; on a

$$\frac{d}{d\xi} \beta(V(\xi)) = d\beta(V(\xi)) \bullet \frac{dV}{d\xi} = d\beta(V(\xi)) \bullet r_j(\xi) = 0$$

compte tenu de (2.13). □

- **Proposition 3. Gaz parfait polytropique.**

Dans le cas du gaz parfait polytropique étudié dans les chapitres précédents, on a les invariants de Riemann suivants :

$$(2.14) \quad \beta_1^1(W) = s; \quad \beta_1^2(W) = u + \frac{2c}{\gamma - 1} \quad \text{pour } \lambda_1 = u - c$$

$$(2.15) \quad \beta_2^1(W) = u; \quad \beta_2^2(W) = p \quad \text{pour } \lambda_2 = u$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(2.16) \quad \beta_3^1(W) = s ; \quad \beta_3^2(W) = u - \frac{2c}{\gamma - 1} \quad \text{pour } \lambda_3 = u + c.$$

C'est un exercice élémentaire laissé au lecteur.

3) ONDES DE CHOC

- On peut construire une solution autosemblable de la loi de conservation (1.1) avec une fonction discontinue à travers une onde de célérité σ :

$$(3.1) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_0, & \frac{x}{t} < \sigma \\ W_1, & \frac{x}{t} > \sigma. \end{cases}$$

On sait qu'une telle fonction discontinue, mais de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, est solution faible de la loi de conservation (1.1) si et seulement si on a la relation de Rankine-Hugoniot :

$$(3.2) \quad f(W_1) - f(W_0) = \sigma(W_1 - W_0).$$

• **Définition 6. Ensemble de Rankine-Hugoniot.**

Soit $W_0 \in \Omega$. L'ensemble de Rankine-Hugoniot $\mathcal{RH}(W_0)$ relatif à l'état W_0 est l'ensemble des états $W \in \Omega$ tels qu'il existe $\sigma(W_0, W) \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$(3.3) \quad f(W) - f(W_0) = \sigma(W_0, W)(W - W_0).$$

- La structure de cet ensemble est formé de N courbes régulières au voisinage de W_0 , ainsi que l'énonce le théorème qui suit.

• **Théorème 2. Structure de l'ensemble de Rankine-Hugoniot.**

On suppose le système (1.1) strictement hyperbolique, et on considère $W_0 \in \Omega$. L'ensemble $\mathcal{RH}(W_0)$ est composé localement au voisinage de W_0 de N courbes régulières $\mathcal{S}_j(W_0)$ ($1 \leq j \leq N$). De plus, pour tout j , il existe une paramétrisation de $\mathcal{S}_j(W_0)$ de la forme $\epsilon \mapsto \psi_j(\epsilon)$ avec $|\epsilon| < \epsilon_1$, $\epsilon_1 > 0$ assez petit, de sorte que :

$$(3.4) \quad \psi_j(\epsilon) = W_0 + \epsilon r_j(W_0) + \frac{\epsilon^2}{2} dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + 0(\epsilon^3)$$

$$(3.5) \quad \sigma(W_0, \psi_j(\epsilon)) = \lambda_j(W_0) + \frac{\epsilon}{2} d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + 0(\epsilon^2).$$

Preuve du théorème 2.

- On écrit le membre de gauche de la relation de Rankine-Hugoniot (3.3) :

$$f(W) - f(W_0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(W_0 + s(W - W_0)) ds$$

Problème de Riemann

$$= \left(\int_0^1 A(W_0 + s(W - W_0)) ds \right) \bullet (W - W_0)$$

$$(3.6) \quad A(W_0, W) \equiv \int_0^1 A(W_0 + s(W - W_0)) ds$$

et la condition de saut s'écrit

$$(3.7) \quad (A(W_0, W) - \sigma(W_0, W) \text{Id}) \bullet (W - W_0) = 0.$$

La matrice $A(W_0, W)$ est carrée et d'ordre N . Elle vérifie

$$(3.8) \quad A(W_0, W_0) = A(W_0) = df(W_0),$$

et la matrice $A(W_0)$ a N valeurs propres distinctes $\lambda_1(W_0) < \lambda_2(W_0) < \dots < \lambda_N(W_0)$. De plus, la fonction $W \mapsto A(W_0, W)$ est continue. Il existe donc un voisinage \mathcal{V} de W_0 et N fonctions réelles $\mathcal{V} \ni W \mapsto \lambda_j(W_0, W) \in \mathbb{R}$ de sorte que $A(W_0, W)$ ait comme $j^{\text{ième}}$ valeur propre le nombre $\lambda_j(W_0, W)$, avec

$$(3.9) \quad \lambda_j(W_0, W_0) = \lambda_j(W_0), \quad 1 \leq j \leq N.$$

• on tire alors de la relation (3.7) que $W - W_0$ est vecteur propre de la matrice $A(W_0, W)$ et que la valeur propre correspondante est égale à $\lambda_j(W_0, W)$:

$$(3.10) \quad \sigma(W_0, W) = \lambda_j(W_0, W).$$

Notons $\ell_j(W_0, W)$ la $j^{\text{ième}}$ forme linéaire propre pour la matrice $A(W_0, W)$:

$$(3.11) \quad \ell_j(W_0, W) \bullet A(W_0, W) = \lambda_j(W_0, W) \ell_j(W_0, W).$$

Alors $W - W_0$ est vecteur propre de numéro j si et seulement si on a :

$$(3.12) \quad \ell_k(W_0, W) \bullet (W - W_0) = 0, \quad \forall k \neq j.$$

Ceci définit un ensemble de $(N - 1)$ équations qu'on peut écrire sous la forme

$$(3.13) \quad G_j(W) \equiv M_j(W) \bullet (W - W_0) = 0$$

où $M_j(W)$ est la matrice formée des $(N - 1)$ formes linéaires propres différentes de la $j^{\text{ème}}$:

$$(3.14) \quad M_j(W) = \begin{pmatrix} \ell_1(W_0, W) \\ \vdots \\ \ell_{j-1}(W_0, W) \\ \ell_{j+1}(W_0, W) \\ \vdots \\ \ell_N(W_0, W) \end{pmatrix}.$$

On a $G_j(W_0) = 0$ et $dG_j(W_0) = M_j(W_0)$, matrice d'ordre $(N - 1) \times N$ qui est formée des $(N - 1)$ vecteurs lignes $\ell_k(W_0)$ avec $k \neq j$. Donc la matrice $M_j(W_0)$ est de rang $(N - 1)$. Grâce au théorème des fonctions implicites, il existe une fonction

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$\theta \longmapsto \psi(\theta)$, $|\theta| \leq \theta_1$ assez petit, de sorte que toute solution W de l'équation (3.13) appartenant au voisinage \mathcal{V} (réduit au besoin) de W_0 s'écrive

$$(3.15) \quad W = \psi_j(\theta), \quad |\theta| \leq \theta_1$$

avec

$$(3.16) \quad \psi_j(0) = W_0.$$

L'ensemble de Rankine-Hugoniot est donc décomposé en un ensemble de N courbes de choc $\mathcal{S}_j(W_0)$ d'équation donnée en (3.14).

- Il reste à préciser le développement de la fonction $\psi_j(\bullet)$ et de la célérité $\sigma(\bullet)$.

On a

$$(3.17) \quad \sigma(W_0, \psi_j(\theta)) = \lambda_j(W_0, \psi_j(\theta))$$

et

$$(3.18) \quad \sigma(W_0, \psi_j(0)) = \lambda_j(W_0).$$

on tire par ailleurs de (3.12) :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \ell_k(W_0, \psi_j(\theta)) \bullet \frac{\psi_j(\theta) - \psi_j(0)}{\theta} = 0, \quad k \neq j,$$

relation qui montre que $\psi_j'(0)$ est nécessairement colinéaire au vecteur propre $r_j(W_0)$. Quitte à changer le paramétrage, on a :

$$(3.19) \quad \psi_j'(0) = r_j(W_0).$$

- On pose

$$(3.20) \quad A_j(\theta) = A(\psi_j(\theta)) \quad \text{et} \quad \sigma_j(\theta) = \lambda_j(W_0, \psi_j(\theta)).$$

On dérive la relation de Rankine-Hugoniot (3.3) relativement à θ . Il vient :

$$\sigma_j'(\theta) (\psi_j - W_0) + \sigma_j \psi_j'(\theta) = A_j(\theta) \bullet \psi_j'(\theta)$$

et après une nouvelle dérivation :

$$\sigma_j''(\theta) (\psi_j - W_0) + 2\sigma_j' \psi_j'(\theta) + \sigma_j \psi_j''(\theta) = A_j' \bullet \psi_j' + A_j \bullet \psi_j''.$$

Lorsque $\theta = 0$, on a donc

$$2\sigma_j'(0) r_j(W_0) + \lambda_j(W_0) \psi_j''(0) = A_j'(0) \bullet r_j(W_0) + A_j(W_0) \bullet \psi_j''(0)$$

soit

$$(3.21) \quad (A(W_0) - \lambda_j(W_0) \text{Id}) \bullet \psi_j''(0) + A_j'(0) \bullet r_j(W_0) = 2\sigma_j'(0) r_j(W_0).$$

- On a par ailleurs

$$A_j(\theta) \bullet r_j(\psi_j(\theta)) = \lambda_j(\psi_j(\theta)) r_j(\psi_j(\theta))$$

et on dérive cette relation par rapport à θ :

$$\begin{aligned} A_j'(\theta) \bullet r_j(\psi_j) + A_j \bullet dr_j(\psi_j) \bullet \psi_j' &= \\ &= (d\lambda_j(\psi_j) \bullet \psi_j'(\theta)) r_j(\psi_j(\theta)) + \lambda_j(\psi_j) dr_j(\psi_j) \bullet \psi_j'(\theta) \end{aligned}$$

qui donne pour $\theta = 0$:

Problème de Riemann

$$(3.22) \quad \begin{cases} ((A(W_0) - \lambda_j(W_0) \text{Id}) \bullet dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + A'_j(0) \bullet r_j(W_0) \\ - (d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0)) r_j(W_0) = 0 . \end{cases}$$

On soustrait la relation (3.22) de (3.21) et l'on trouve :

$$(3.23) \quad \begin{cases} (A(W_0) - \lambda_j(W_0) \text{Id}) \bullet (\psi_j''(0) - dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0)) \\ + (d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0)) r_j(W_0) = 2 \sigma'_j(0) r_j(W_0) . \end{cases}$$

On applique $\ell_j(W_0)$ à gauche de la relation (3.23), avec le choix de normalisation $\ell_j(W_0) \bullet r_j(W_0) \equiv 1$. Il vient

$$(3.24) \quad \sigma'_j(0) = \frac{1}{2} d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0)$$

et quand on injecte cette valeur de $\sigma'_j(0)$ au sein de la relation (3.23), on trouve :

$$(3.25) \quad (A(W_0) - \lambda_j(W_0) \text{Id}) \bullet (\psi_j''(0) - dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0)) = 0 .$$

Donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$(3.26) \quad \psi_j''(0) = dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + \beta r_j(W_0) .$$

• On change le paramétrage en θ pour un paramétrage avec une variable ϵ définie par :

$$(3.27) \quad \epsilon - \frac{1}{2} \beta \epsilon^2 = \theta .$$

On a alors, compte tenu de (3.17) et (3.23) :

$$\begin{aligned} \sigma(W_0, \psi_j(W_0)) &= \lambda_j(W_0) + \frac{\theta}{2} d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + 0(\theta^2) \\ &= \lambda_j(W_0) + \frac{\epsilon}{2} d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + 0(\epsilon^2) \end{aligned}$$

ce qui établit la relation (3.5). On a par ailleurs, compte tenu de (3.16), (3.19) et (3.26) :

$$\begin{aligned} \psi_j(\epsilon) &= W_0 + \theta r_j(W_0) + \frac{\theta^2}{2} (r_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + \beta r_j(W_0)) + 0(\theta^3) \\ &= W_0 + \epsilon r_j(W_0) + \frac{\epsilon^2}{2} dr_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + 0(\epsilon^3) \end{aligned}$$

qui constitue exactement le développement (3.4). □

• On remarque qu'on a

$$(3.28) \quad \lambda_j(\psi_j(\epsilon)) = \lambda_j(W_0) + \epsilon d\lambda_j(W_0) \bullet r_j(W_0) + 0(\epsilon^2) ,$$

donc, compte tenu de (3.5), on a :

$$(3.29) \quad \sigma(W_0, \psi_j(\epsilon)) = \frac{1}{2} (\lambda_j(W_0) + \lambda_j(\psi_j(\epsilon))) + 0(\epsilon^2) .$$

Au second ordre de précision près, la célérité du choc est égale à la moyenne arithmétique des célérités des ondes de part et d'autre de la discontinuité.

- On remarque aussi que si le champ de numéro j est vraiment non linéaire, l'onde de détente $\epsilon \mapsto \Phi_j(\epsilon) \in \Omega$ (relation (2.6)) et l'onde de choc paramétrée par $\epsilon \mapsto \psi_j(\epsilon) \in \Omega$ (relation (3.4)) sont identiques au **troisième ordre** près : elles ont mêmes éléments de contact d'ordre 1 (vecteur tangent) et d'ordre 2 (cercle osculateur).

- Au théorème 2, nous n'avons pas du tout pris en compte le caractère entropique des solutions faibles que nous recherchons. On doit en effet, non seulement satisfaire la condition de Rankine-Hugoniot (3.3), mais également l'inégalité d'entropie de Hugoniot (voir le chapitre 4) :

$$(3.30) \quad \sigma(W_0, W) (\eta(W) - \eta(W_0)) - \xi(W) + \xi(W_0) \geq 0$$

pour tout couple (η, ξ) d'entropie, flux d'entropie. Le théorème suivant permet d'éliminer toute la branche de la courbe de choc $\mathcal{S}_j(W_0)$ où l'inégalité (3.30) est en défaut.

- **Théorème 3. Chocs entropiques.**

Soit j tel que le $j^{\text{ième}}$ champ soit vraiment non linéaire, et (η, ξ) un couple d'entropie, flux d'entropie pour le système hyperbolique (1.1). Soit $\mathcal{D}_j(\epsilon)$ la production d'entropie définie par la relation suivante :

$$(3.31) \quad \mathcal{D}_j(\epsilon) \equiv \sigma(W_0, \psi_j(\epsilon)) (\eta(\psi_j(\epsilon)) - \eta(W_0)) - \xi(\psi_j(\epsilon)) + \xi(W_0).$$

On a alors le développement limité

$$(3.32) \quad \mathcal{D}_j(\epsilon) = -\frac{\epsilon^3}{12} d^2 \eta(W_0) \bullet (r_j(W_0), r_j(W_0)) + 0(\epsilon^4).$$

On déduit de ce développement que l'inégalité d'entropie (3.30) a lieu si et seulement si la relation (3.32) est satisfaite, c'est à dire pour $\epsilon \leq 0$ assez petit en valeur absolue. Nous retenons que la production d'entropie $\mathcal{D}_j(\epsilon)$ à travers un choc "faible" est du troisième ordre relativement au saut des variables conservées.

Preuve du théorème 3.

- La condition d'entropie (3.30) exprime que $\mathcal{D}_j(\epsilon) \geq 0$ et on étudie le développement de cette production d'entropie pour ϵ assez petit. On a clairement $\mathcal{D}_j(0) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_j(\epsilon) &= \sigma'_j(\epsilon) (\eta(\psi_j) - \eta(W_0)) + \sigma_j(\epsilon) d\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet \psi'_j(\epsilon) - d\xi(\psi_j(\epsilon)) \bullet \psi'_j(\epsilon) \\ &= \sigma'_j(\epsilon) (\eta(\psi_j(\epsilon)) - \eta(W_0)) - d\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (A(\psi_j(\epsilon)) - \sigma_j(\epsilon)) \bullet \psi'_j(\epsilon) \end{aligned}$$

car $d\xi = d\eta \bullet A$.

- Par ailleurs, on dérive par rapport à ϵ la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\sigma_j(\epsilon) (\psi_j(\epsilon) - W_0) = f(\psi_j(\epsilon)) - f(W_0);$$

on trouve :

Problème de Riemann

$$\sigma'_j(\epsilon)(\psi_j(\epsilon) - W_0) = (A(\psi_j(\epsilon)) - \sigma_j(\epsilon) \text{Id}) \bullet \psi'_j(\epsilon)$$

et on en déduit une nouvelle expression pour $\mathcal{D}'_j(\epsilon)$:

$$(3.33) \quad \mathcal{D}'_j(\epsilon) = \sigma'_j(\epsilon) [\eta(\psi_j(\epsilon)) - \eta(W_0) - d\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi_j(\epsilon) - W_0)]$$

et il est alors clair que $\mathcal{D}'_j(0) = 0$.

- On dérive une nouvelle fois la fonction $\epsilon \mapsto \mathcal{D}_j(\epsilon)$. En dérivant la relation (3.33), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}''_j &= \sigma''_j(\epsilon) [\eta(\psi_j(\epsilon)) - \eta(W_0) - d\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi_j(\epsilon) - W_0)] \\ &\quad - \sigma'_j(\epsilon) d^2\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi'_j(\epsilon), \psi_j(\epsilon) - W_0). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}''_j(0) = 0$. On dérive une fois de plus la fonction $\mathcal{D}_j(\bullet)$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'''_j(\epsilon) &= \sigma'''_j(\epsilon) [\eta(\psi_j(\epsilon)) - \eta(W_0) - d\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi_j(\epsilon) - W_0)] \\ &\quad - 2\sigma''_j(\epsilon) d^2\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi'_j(\epsilon), \psi_j(\epsilon) - W_0) \\ &\quad - \sigma'_j(\epsilon) \left[d^3\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi'_j(\epsilon), \psi'_j(\epsilon), \psi_j(\epsilon) - W_0) + \right. \\ &\quad \left. + d^2\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi''_j(\epsilon), \psi_j(\epsilon) - W_0) + d^2\eta(\psi_j(\epsilon)) \bullet (\psi'_j(\epsilon), \psi'_j(\epsilon)) \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'''_j(0) &= -\sigma'_j(0) d^2\eta(W_0) \bullet (r_j(W_0), r_j(W_0)) \\ &= -\frac{1}{2} d^2\eta(W_0) \bullet (r_j(W_0), r_j(W_0)) \end{aligned}$$

compte-tenu de (3.24) et de la normalisation (1.15) du vecteur propre $r_j(W_0)$. Le résultat (3.31) s'en déduit alors par utilisation de la formule de Taylor. \square

4) DISCONTINUITÉS DE CONTACT

- Lorsque le $j^{\text{ième}}$ champ est linéairement dégénéré, la courbe de détente dans l'espace des états $\epsilon \mapsto \Phi_j(\epsilon) \in \Omega$ est construite comme au théorème 1 par intégration du champ de vecteurs $r_j(\bullet)$:

$$(4.1) \quad \frac{dV}{d\theta} = r_j(V(\theta)), \quad V(\theta_0) = W_0.$$

Une conséquence remarquable de la linéaire dégénérescence du $j^{\text{ième}}$ champ est que l'onde de détente décrite en (4.1) coïncide avec la courbe de choc $\mathcal{S}_j(W_0)$ introduite localement au voisinage de l'état W_0 lors du théorème 2 (relation (3.4)). Nous précisons ce résultat au théorème suivant.

• **Théorème 4. Coïncidence du choc et de la détente.**

Si le $j^{\text{ième}}$ champ de vecteurs de la jacobienne $A(W) = df(W)$ est linéairement dégénéré, la courbe $\mathcal{S}_j(W_0)$ décrite au théorème 3 est une courbe intégrale du champ de vecteurs $r_j(\bullet)$. On a

$$(4.2) \quad \sigma_j(W_0, \psi_j(\epsilon)) = \lambda_j(\psi_j(\epsilon)) = \lambda_j(W_0)$$

et pour tout j -invariant de Riemann $\beta(\bullet)$:

$$(4.3) \quad \beta(\psi_j(\epsilon)) \equiv \beta(W_0) \quad \forall \epsilon .$$

Preuve du théorème 4.

• Soit $\theta \mapsto \Phi_j(\theta)$ une courbe intégrale du champ de vecteurs $r_j(\bullet)$, définie par la relation (4.1) au voisinage de l'état W_0 . Alors la relation de Rankine-Hugoniot (3.3) est valable, avec une célérité σ identique à $\lambda_j(W_0)$. La première remarque est que la valeur propre $\lambda_j(\Phi_j(\theta))$ est constante puisque le champ est linéairement dégénéré, comme le montre le calcul qui suit :

$$\frac{d}{d\theta} \lambda_j(\Phi_j(\theta)) = d\lambda_j(\Phi_j(\theta)) \bullet \frac{d\Phi_j(\theta)}{d\theta} = d\lambda_j(\Phi_j(\theta)) \bullet r_j(\Phi_j(\theta)) = 0$$

compte tenu de (1.6).

• On a par ailleurs

$$\begin{aligned} f(\Phi_j(\theta)) - f(W_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta} df(V(\xi)) \bullet \frac{d\Phi_j(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} df(V(\xi)) \bullet r_j(v(\xi)) d\xi && \text{cf. (4.1)} \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \lambda_j(v(\xi)) r_j(V(\xi)) d\xi && \text{par définition de } \lambda_j \\ &= \lambda_j(W_0) \int_{\theta_0}^{\theta} r_j(V(\xi)) d\xi && \text{car } \lambda_j(V(\xi)) \equiv \lambda_j(W_0) \\ &= \lambda_j(W_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\Phi_j(\xi)}{d\xi} d\xi && \text{cf. (4.1)} \\ &= \lambda_j(W_0) (\Phi_j(\theta) - W_0), \end{aligned}$$

donc

$$(4.4) \quad f(\Phi_j(\theta)) - f(W_0) = \lambda_j(W_0) (\Phi_j(\theta) - W_0), \quad \forall \theta$$

ce qui est exactement la relation de Rankine-Hugoniot (3.3), avec de plus le choix particulier (4.2) pour la célérité de la discontinuité.

• La courbe intégrale $\theta \mapsto \Phi_j(\theta)$ solution de l'équation différentielle (4.1) est donc incluse dans la courbe de choc $\mathcal{S}_j(W_0)$. Comme cette dernière a effectivement une structure de fonction à un paramètre $\epsilon \mapsto \Phi_j(\epsilon)$, ces deux courbes coïncident, au moins au voisinage de l'état W_0 . La relation (4.3) concernant les invariants de Riemann est alors une conséquence élémentaire de la définition (2.13) et de la proposition 2. □

Problème de Riemann

• **Proposition 4. Discontinuité de contact.**

Si le $j^{\text{ième}}$ champ est linéairement dégénéré, et ϵ tel que $|\epsilon| < \epsilon_1$ assez petit est fixé, la fonction $W(x, t) \in \Omega$ discontinue définie par

$$(4.5) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_0, & \frac{x}{t} < \lambda_j(W_0) \\ \Phi_j(\epsilon) & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_j(W_0) \end{cases}$$

est solution faible entropique du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_0, \psi_j(\epsilon))$ introduit à la définition 4 (relation (1.10)).

Preuve de la proposition 4.

• La fonction $W(\bullet)$ définie à la relation (4.5) est effectivement solution faible du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_0, \psi_j(\epsilon))$ car elle est de classe C^1 par morceaux et vérifie la condition de Rankine-Hugoniot (4.4) comme il a été prouvé au théorème 4. Il reste à vérifier que cette solution est entropique. Soit (η, ξ) un couple formé d'une entropie mathématique pour le système (1.1) et de son flux associé. On a :

$$\begin{aligned} \xi(\psi_j(\epsilon)) - \xi(W_0) &= \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} d\xi(V(\theta)) \bullet \frac{dV}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} d\eta(V(\theta)) \bullet df(V(\theta)) \bullet r_j(V(\theta)) d\theta \\ &= \lambda_j(W_0) \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} d\eta(V(\theta)) \bullet r_j(V(\theta)) d\theta \\ & \hspace{15em} \text{compte-tenu du calcul fait au théorème 4} \\ &= \lambda_j(W_0) \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} d\eta(V(\theta)) \bullet \frac{dV}{d\theta} d\theta \hspace{5em} \text{cf. (4.1)} \\ &= \lambda_j(W_0) (\eta(\psi_j(\epsilon)) - \eta(W_0)) \end{aligned}$$

et $\mathcal{D}_j(\epsilon)$ défini à la relation (3.31) est identiquement nul. Une **égalité** d'entropie est donc satisfaite à travers une discontinuité de contact. \square

5) SOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN

• Rappelons que nous supposons que le système de lois de conservation (1.1) possède une entropie $\eta(\bullet)$ de flux associé $\xi(\bullet)$, qu'il est strictement hyperbolique (relation (1.13)) et que chaque champ caractéristique est soit vraiment non linéaire, soit linéairement dégénéré. Nous cherchons à résoudre le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ formé de (1.1) et de la condition initiale

$$(5.1) \quad W^0(x) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0 \end{cases}$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

dans l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 par morceaux qui sont solutions faibles entropiques de (1.1) (5.1).

- Avec l'étude faite aux paragraphes précédents, nous disposons de solutions du problème de Riemann pour $W_g = W_0$, état fixé dans Ω et W_d choisi de manière appropriée.

- Si le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire, nous disposons de l'onde de détente $\mathcal{R}_j(W_0)$ paramétrée par $]0, \epsilon_0[\ni \epsilon \mapsto \Phi_j(\epsilon) \in \Omega$ qui permet de construire, pour ϵ fixé, la solution suivante du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_0, \Phi_j(\epsilon))$:

$$(5.2) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_0, & \frac{x}{t} \leq \lambda_j(W_0) \\ \Phi_j(\lambda_j(W_0) + \frac{x}{t} - \lambda_j(W_0)), & \lambda_j(W_0) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_j(W_0) + \epsilon \\ \Phi_j(\lambda_j(W_0) + \epsilon), & \frac{x}{t} \geq \lambda_j(W_0) + \epsilon. \end{cases}$$

Nous disposons aussi de l'onde de choc $\mathcal{S}_j(W_0)$ paramétrée par $] -\epsilon_1, 0[\ni \epsilon \mapsto \psi_j(\epsilon) \in \Omega$ qui permet, pour ϵ fixé, de construire un **choc entropique**, solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_0, \psi_j(\epsilon))$:

$$(5.3) \quad W^0(x) = \begin{cases} W_0, & \frac{x}{t} < \sigma(W_0, \psi_j(\epsilon)) \\ \psi_j(\epsilon), & \frac{x}{t} > \sigma(W_0, \psi_j(\epsilon)). \end{cases}$$

- **Définition 7. Courbe de choc-détente.**

Pour $W_0 \in \Omega$ et j champ vraiment non-linéaire, on pose

$$(5.3) \quad \chi_j(\epsilon, W_0) \equiv \begin{cases} \Phi_j(\epsilon) & \text{si } \epsilon \geq 0 \\ \psi_j(\epsilon) & \text{si } \epsilon \leq 0; \end{cases}$$

la courbe $\epsilon \mapsto \chi_j(\epsilon, W_0) \in \Omega$ définit la courbe $\mathcal{C}_j(W_0)$ de choc détente dans l'espace des états.

- Si le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment non linéaire et si $W_d \in \mathcal{C}_j(W_0)$, on dispose avec (5.2) et (5.3) de la solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_0, W_d)$. Si le $j^{\text{ième}}$ champ est linéairement dégénéré, la discontinuité de contact (4.5) définit une solution faible entropique de $\mathcal{R}(W_0, W_d)$ pour $W_d \in \mathcal{S}_j(W_0)$. On pose alors simplement

$$(5.5) \quad \chi_j(\epsilon, W_0) = \psi_j(\epsilon), \quad j^{\text{ième}} \text{ champ linéairement dégénéré.}$$

Il suffit de comparer ces solutions élémentaires pour construire une solution du problème de Riemann dans le cas général. C'est l'objet du théorème suivant.

• **Théorème 5. Construction de Lax.**

On suppose que pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, le $j^{\text{ième}}$ champ caractéristique est soit vraiment non linéaire, soit linéairement dégénéré. Alors pour tout $W_g \in \Omega$, il existe un voisinage \mathcal{W} de W_g dans Ω de sorte que si W_d appartient à \mathcal{W} , le problème de Riemann (1.1) (5.1) admet une solution faible entropique formée d'au plus $(N + 1)$ états constants séparés par au plus N ondes simples : chocs, détente, discontinuités de contact. De plus, une solution de ce type est unique.

Preuve du théorème 5.

• On fixe $W_g \equiv W_0 \in \Omega$ et on considère l'application χ suivante :

$$(5.6) \quad \begin{cases} \mathcal{V} \ni (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \equiv \epsilon \mapsto \chi(\epsilon) \in \mathcal{W} \subset \Omega \\ \chi(\epsilon) = \chi_N \left(\epsilon_N, \chi_{N-1}(\epsilon_{N-1}, \dots, \chi_1(\epsilon_1, W_0) \dots) \right). \end{cases}$$

Elle est définie depuis un voisinage \mathcal{V} de $0 \in \mathbb{R}^N$ et elle prend ses valeurs dans un voisinage \mathcal{W} de W_g dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On cherche à résoudre l'équation

$$(5.7) \quad \chi(\epsilon) = W_d.$$

Ainsi W_0 est connecté à $W_1 = \chi_1(\epsilon_1, W_0)$ par une 1-onde, W_1 à $W_2 = \chi_2(\epsilon_2, W_1)$ par 2-onde, \dots , W_{N-1} à $W_N = W_d = \chi_N(\epsilon_N, W_{N-1})$ par une N -onde simple et on dispose d'au plus (ϵ_j peut être nul !) $(N + 1)$ états constants connectés par au plus N ondes simples.

• Compte tenu des théorèmes 1 et 2, des relations (2.6), (3.4), (5.4) et (5.5), l'application $\epsilon \mapsto \chi(\epsilon)$ est de classe \mathcal{C}^2 , et on a

$$(5.8) \quad \chi(0) = W_0$$

$$(5.9) \quad \chi(\epsilon) = W_0 + \sum_{j=1}^N \epsilon_j r_j(W_0) + 0(|\epsilon|^2)$$

puisque $\chi_k(\epsilon_k, W) \equiv W + \epsilon_k r_k(W) + 0(\epsilon_k^2)$, donc

$$\begin{aligned} \chi_2(\epsilon_2, \chi_1(\epsilon_1, W_0)) &= \chi_1(\epsilon_1, W_0) + \epsilon_2 r_2(\chi_1(\epsilon_1, W_0)) + 0(\epsilon_2^2) \\ &= W_0 + \epsilon_1 r_1(W_0) + 0(\epsilon_1^2) + \epsilon_2 (r_2(W_0) + 0(\epsilon_2)) + 0(\epsilon_2^2) \\ &= W_0 + \epsilon_1 r_1(W_0) + \epsilon_2 r_2(W_0) + O(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \end{aligned}$$

et la preuve de la relation (5.9) suit par récurrence. La relation (5.9) définit exactement la dérivée de $\chi(\bullet)$ à l'origine :

$$(5.10) \quad d\chi(0) \bullet \eta = \sum_{j=1}^N \eta_j r_j(W_0), \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathbb{R}^N.$$

• Comme les vecteurs $(r_j(W_0))_{1 \leq j \leq N}$ sont linéairement indépendants, l'application $d\chi(0)$ est inversible. Grâce au théorème d'inversion locale, il existe un

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

voisinage \mathcal{W} de $W_g \in \Omega$ de sorte que pour **tout** $W_d \in \mathcal{W}$, l'équation (5.7) a une solution **unique** ϵ appartenant à un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^N . On obtient alors N états constants définis par

$$(5.11) \quad W_j = \chi_j(\epsilon_j, W_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq N$$

avec $W_N = W_d$ par construction. La $j^{\text{ième}}$ onde permet de relier W_{j-1} à W_j ; c'est une onde de choc-détente si le $j^{\text{ième}}$ champ est vraiment nonlinéaire, c'est une discontinuité de contact s'il est linéairement dégénéré. \square

Schémas de Godunov et de Roe

Nous particularisons l'étude du problème de Riemann aux équations de la dynamique des gaz. Dans le cas du gaz parfait polytropique, on peut mener de manière analytique (et graphique !) le calcul des ondes détente et de choc (paragraphe 1). Ainsi le schéma de Godunov se ramène à une utilisation particulière de la solution du problème de Riemann (paragraphe 2). Le schéma de Roe (paragraphe 3), fondé sur la même idée, permet d'éviter le calcul des ondes non linéaires, mais au prix d'une perte de la condition d'entropie, perte qu'il est possible de corriger (paragraphe 4).

1) TUBE À CHOC

- Le problème du tube à choc est la version "physique" du problème de Riemann ; la condition initiale est constituée de deux états constants

$$(1.1) \quad W^0(x) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0 \end{cases}$$

et on cherche $W(x, t)$ solution unidimensionnelle des équations de la dynamique des gaz :

$$(1.2) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

$$(1.3) \quad W = \left(\rho, q = \rho u, \zeta \equiv \rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right)^t$$

$$(1.4) \quad f(W) = \left(\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + p u \right)^t$$

satisfaisant la condition initiale

$$(1.5) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- La construction du schéma de Godunov demande de pouvoir calculer la solution entropique autosemblable $\mathcal{U}(\frac{x}{t}; W_g, W_d)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ défini par les conditions (1.1) à (1.5), formée d'au plus quatre états constants séparés par au plus trois ondes simples. On a en effet (voir la relation (2.15) du chapitre 6 relatif aux volumes finis) :

$$(1.6) \quad \Phi^G(W_g, W_d) = f(\mathcal{U}(0; W_g, W_d))$$

- On pourrait appliquer la construction de Lax développée au chapitre 7. Compte-tenu de la structure particulière des équations de la dynamique des gaz, on sait

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

que les champs numéros 1 et 3 sont vraiment non linéaires alors que le champ numéro 2 est linéairement dégénéré. Les invariants de Riemann, proposés à la proposition 3 du chapitre 7, sont rappelés ci-dessous :

$$(1.7) \quad \lambda_1 = u - c; \quad \beta_1^1(w) = s; \quad \beta_1^2(w) = u + \frac{2c}{\gamma - 1}$$

$$(1.8) \quad \lambda_2 = u; \quad \beta_2^1(w) = u; \quad \beta_2^2(w) = p$$

$$(1.9) \quad \lambda_3 = u + c; \quad \beta_3^1(w) = s; \quad \beta_3^2(w) = u - \frac{2c}{\gamma - 1}.$$

Il est donc intéressant de se placer dans le **plan** des invariants de Riemann du **second champ** linéairement dégénéré, qui sont constants le long de la discontinuité de contact, ainsi qu'énoncé au théorème 4 du chapitre 7.

- Etant donné W_g et W_d , on cherche W_1 et W_2 , états intermédiaires (Figure 1) de sorte que

$$(1.10) \quad W_g \rightarrow W_1 \quad \text{par une 1-onde de choc-détente}$$

$$(1.11) \quad W_1 \rightarrow W_2 \quad \text{par une 2-discontinuité de contact}$$

$$(1.12) \quad W_2 \rightarrow W_d \quad \text{par une 3-onde de choc-détente.}$$

On a alors

$$(1.13) \quad u(W_1) = u(W_2) \equiv u^*$$

$$(1.14) \quad p(W_1) = p(W_2) \equiv p^*$$

et on détermine d'abord les valeurs communes u^* de la vitesse et p^* de la pression de ces deux états intermédiaires.

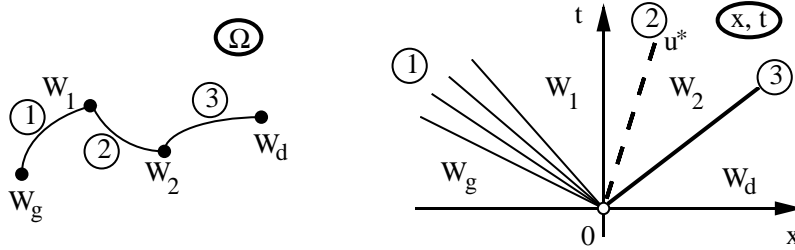


Figure 1. *Problème de Riemann pour la dynamique des gaz.*

- **Proposition 1. Onde de 1-choc-détente issue de l'état W_0 .**
Pour un gaz polytropique dont le rapport des chaleurs spécifiques est égal à $\gamma > 1$, on pose

$$(1.15) \quad \mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Si W est issu de l'état W_0 via une 1-onde de choc-détente, on a

$$(1.16) \quad u = \chi_1(p, W_0)$$

avec

$$(1.17) \quad \chi_1(p, W_0) = \begin{cases} u_0 - \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} (p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}), & p \leq p_0 \\ u_0 - \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\rho_0(p+\mu^2 p_0)}} (p-p_0), & p \geq p_0, \end{cases} \begin{array}{l} \text{1-détente} \\ \text{1-choc} \end{array}$$

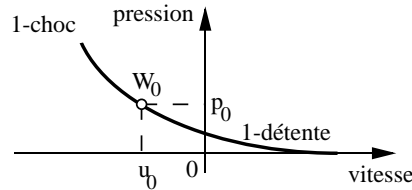


Figure 2. 1-onde de choc-détente issue de l'état W_0 , dans le plan vitesse-pression.

Preuve de la proposition 1.

- Elle consiste à développer divers calculs classiques de dynamique des gaz, d'intérêt nul pour l'enchaînement des idées qui nous intéresse ici. Nous renvoyons le lecteur aux livres de Landau et Lifchitz [*Fluid Mechanics*, 1954, Editions de Moscou, 1967], de Godlewski et Raviart [*Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996], ou à défaut à nos notes de cours pour l'Institut de Promotion des Sciences de l'Ingénieur [1992]. □

- Si l'onde $W_0 \rightarrow W_1$ est une 1-onde de choc-détente, on peut préciser complètement les états intermédiaires dans le cas d'une onde de détente et l'état aval dans le cas d'une onde de choc.

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(1.18) \quad \text{1-détente} \quad \begin{cases} u_0 - c_0 < \xi < u_1 - c_1, & p_1 < p_0, & u > u_0 \\ u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0 + \frac{2}{\gamma+1} c_0 + \frac{2}{\gamma+1} \xi \\ c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0 + \frac{2}{\gamma+1} c_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, & p = p_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

$$(1.19) \quad \text{1-choc} \quad \begin{cases} u_1 - c_1 < \sigma_1 < u_0 - c_0, & p_1 > p_0, & u_1 < u_0 \\ \rho_1 = \frac{p_1 + \mu^2 p_0}{p_0 + \mu^2 p_1} \rho_0, \\ \sigma_1 = u_0 - \sqrt{\frac{p_1 + \mu^2 p_0}{(1 - \mu^2) \rho_0}} \end{cases}$$

- Au lieu de poursuivre la construction de Lax, on utilise l'univariance des équations de la dynamique des gaz dans le changement $x \mapsto -x$ et $u \mapsto -u$, et cherchons l'ensemble des états W tels que $W \mapsto W_0$ via une 3-onde de choc détente. De cette façon, l'état W_2 est parfaitement paramétré en fonction de W_d et de la force de l'onde.

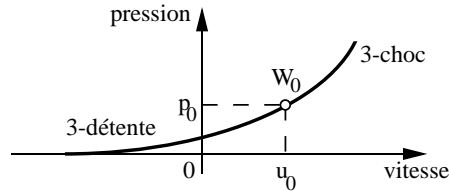


Figure 3. 3-onde de choc-détente aboutissant à l'état W_0 , dans le plan vitesse-pression.

- **Proposition 3.** Onde de 3-choc-détente aboutissant à l'état W_0 .

Pour un gaz parfait polytropique de rapport $\gamma > 1$ des chaleurs spécifiques, si l'état W_0 est issu de l'état W par une 3-onde de choc détente, on a :

$$(1.20) \quad u = \varphi_3(p, W_0)$$

avec

Schémas de Godunov et de Roe

$$(1.21) \quad \varphi_3(p, W_0) = \begin{cases} u_0 + \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right), & p \leq p_0 \\ u_0 + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\rho_0(p+\mu^2 p_0)}} (p-p_0), & p \geq p_0, \end{cases} \begin{array}{l} \text{3-détente} \\ \text{3-choc.} \end{array}$$

Le graphe de la fonction $\varphi_3(\bullet, W_0)$ est illustré figure 3.

- Si l'onde $W_2 \rightarrow W_0$ est une 3-onde de choc détente, on peut complètement paramétrer les états intermédiaires dans le cas d'une onde de détente

$$(1.22) \quad \text{3-détente} \quad \begin{cases} u_2 + c_2 < \xi < u_0 + c_0, & p_2 \leq p_0, & u_2 \leq u_0 \\ u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0 - \frac{2}{\gamma+1} c_0 + \frac{2}{\gamma+1} \xi \\ c = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_0 + \frac{2}{\gamma+1} c_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, & p = p_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

et préciser l'état W_2 et la célérité σ_3 du choc dans le cas d'un 3-choc $W_2 \rightarrow W_0$:

$$(1.23) \quad \text{3-choc} \quad \begin{cases} u_0 + c_0 < \sigma_3 < u_2 + c_2, & p_2 > p_0, & u_2 > u_0 \\ \rho_2 = \frac{p_2 + \mu^2 p_0}{p_0 + \mu^2 p_1} \rho_0, \\ \sigma_3 = u_0 + \sqrt{\frac{p_2 + \mu^2 p_0}{(1-\mu^2)\rho_0}} \end{cases}$$

2) SCHÉMA DE GODUNOV

- Comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre 6 d'introduction aux volumes finis, le schéma de Godunov consiste à remplacer le fluide par une succession de tubes à choc et d'états constants. Précisons les notations. On s'intéresse à l'étude de la dynamique des gaz à une dimension d'espace :

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

On discrétise l'espace \mathbb{R} avec un pas $h \equiv \Delta x$. On introduit de ce fait un maillage \mathcal{T} , l'ensemble \mathcal{T}^0 de ses sommets x_j :

$$(2.2) \quad x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$(2.3) \quad \mathcal{T}^0 = \{x_j, j \in \mathbb{Z}\},$$

et l'ensemble \mathcal{T}^1 des éléments $K_{j+1/2} \equiv]x_j, x_{j+1}[$ ou volumes de contrôle :

$$(2.4) \quad K_{j+1/2} =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(2.5) \quad \mathcal{T}^1 = \{K_{j+1/2}, j \in \mathbb{Z}\} .$$

- On se donne l'ensemble des valeurs moyennes $W_{j+1/2}^n$ de masse, impulsion, énergie au temps t^n dans la maille $K_{j+1/2}$:

$$(2.6) \quad W_{j+1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{K_{j+1/2}} W(x, t^n) dx .$$

On cherche à calculer ces mêmes valeurs moyennes au temps "suivant" t^{n+1} issu de t^n à l'aide du pas de temps Δt :

$$(2.7) \quad t^{n+1} = t^n + \Delta t .$$

Noter que le pas Δt doit être déterminé en fonction de Δx et du champ W^n au temps t^n :

$$(2.8) \quad \mathcal{W}^n = \{W_{j+1/2}^n, j \in \mathbb{Z}\} .$$

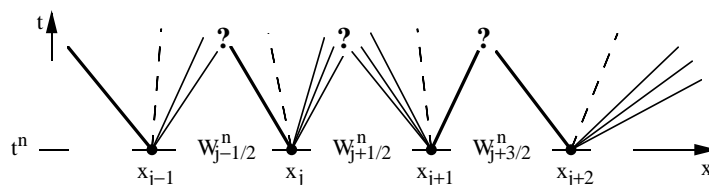


Figure 4. Idée du schéma de Godunov. À l'instant $t = t^n$, on "libère" les problèmes de Riemann à chaque interface $x = x_j$.

- L'idée de Godunov (1955) est de voir le fluide numérique \mathcal{W}^n comme une succession de tubes à choc (Figure 4). La remarque fondamentale est que pour un instant Δt assez petit, on connaît la solution $W(x, t)$ du problème formé de (2.1) et de la condition "initiale"

$$(2.9) \quad W^0(x) = W_{j+1/2}^n, \quad x \in K_{j+1/2}, \quad j \in \mathbb{Z} .$$

- On précise d'abord la notion de "vitesse maximale des ondes" dans la résolution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$, ou d'"effet de propagation à vitesse finie". Pour W_g, W_d états fluides ($W_g, W_d \in \Omega$) on note $a(W_g, W_d)$ la vitesse maximale des ondes du problème $\mathcal{R}(W_g, W_d)$.

- **Définition 1. Vitesse maximale des ondes du problème de Riemann** $\mathcal{R}(W_g, W_d)$. Soit $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ le problème de Riemann étudié dans la première partie. Si la 1-onde de choc détente est une détente, on pose

$$(2.10) \quad \alpha_1(W_g, W_d) = |u_g - c_g|$$

et si c'est un choc, on pose

$$(2.11) \quad \alpha_1(W_g, W_d) = |\sigma_1|$$

où σ_1 , calculé à la relation (1.19), est la célérité de l'onde de choc. De même, si la 3-onde est une détente, on pose

$$(2.12) \quad \alpha_3(W_g, W_d) = |u_d + c_d|$$

et si c'est un choc,

$$(2.13) \quad \alpha_3(W_g, W_d) = |\sigma_3|$$

avec σ_3 calculé à la relation (1.23). La célérité maximale des ondes $a(W_g, W_d)$ est définie par :

$$(2.14) \quad a(W_g, W_d) = \sup(\alpha_1(W_g, W_d), \alpha_3(W_g, W_d)) .$$

• **Proposition 3. Propagation à vitesse finie.**

Soit $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto \mathcal{U}(\frac{x}{t}; W_g, W_d) \in \Omega$ la solution autosemblable entropique du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ formée d'au plus quatre états constants séparés par des ondes simples. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $|\xi| > a(W_g, W_d)$. On a alors

$$(2.15) \quad \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) = \begin{cases} W_g & \text{si } \xi < -a(W_g, W_d) \\ W_d & \text{si } \xi > a(W_g, W_d) \end{cases}$$

• Si la célérité ξ de l'onde dépasse en valeur absolue la vitesse maximale $a(W_g, W_d)$ des ondes dans le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$, l'information contenue dans les ondes ne s'est pas propagée et les états de gauche et droite n'ont pas été perturbés (Figure 5).

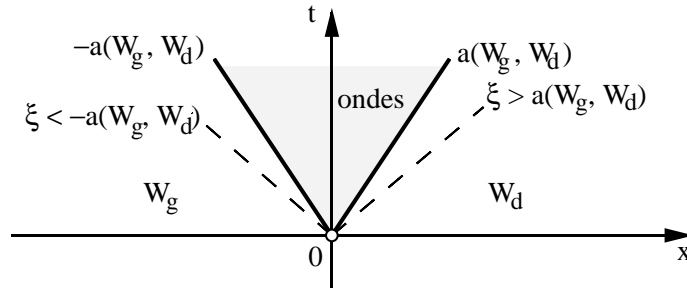


Figure 5. *Vitesse finie de propagation.*

Preuve de la proposition 3.

• Il suffit d'expliciter la fonction $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) \in \Omega$ qui décrit les ondes autosemblables du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$.

• Si la 1-onde est une détente, on a :

$$(2.16) \quad \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) = \begin{cases} W_g & \text{si } \xi \leq u_g - c_g \\ W(\xi) & \text{calculé en (1.18), avec } W_0 = W_g, \\ & u_g - c_g \leq \xi \leq u^* - c_1 \\ W_1 & \text{si } u^* - c_1 \leq \xi \leq u^*, \end{cases}$$

où u^* est la vitesse commune des états intermédiaires W_1 et W_2 (relation (1.13)).

Si la 1-onde est un choc (entropique), on a :

$$(2.17) \quad \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) = \begin{cases} W_g & \text{si } \xi < \sigma_1 \\ W_1 & \text{si } \sigma_1 < \xi < u^*. \end{cases}$$

• De manière analogue, si la 3-onde est une détente, on a

$$(2.18) \quad \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) = \begin{cases} W_2 & \text{si } u^* < \xi \leq u^* + c_2 \\ W_3(\xi) & \text{calculé en (1.22), avec } W_0 = W_d, \\ & u^* + c_2 \leq \xi \leq u_d + c_d \\ W_d & \text{si } \xi \geq u_d + c_d. \end{cases}$$

et si c'est un choc, il vient

$$(2.19) \quad \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) = \begin{cases} W_2 & \text{si } u^* < \xi < \sigma_3 \\ W_d & \text{si } \sigma_3 < \xi. \end{cases}$$

• On a donc

$$(2.20) \quad \begin{cases} \alpha_1(W_g, W_d) = \begin{cases} |u_g - c_g| & \text{si la 1-onde est une détente} \\ |\sigma_1| & \text{si la 1-onde est un choc} \end{cases} \\ \alpha_3(W_g, W_d) = \begin{cases} |u_d + c_d| & \text{si la 3-onde est une détente} \\ |\sigma_3| & \text{si la 3-onde est un choc} \end{cases} \end{cases}$$

et clairement

$$(2.21) \quad \mathcal{U}(\xi; W_g, W_d) = \begin{cases} W_g & \text{si } \xi < \alpha_1(W_g, W_d) \\ W_d & \text{si } \xi > \alpha_3(W_g, W_d). \end{cases}$$

compte tenu des relations (2.16) à (2.19). La conclusion (2.15) est alors une conséquence directe de la définition (2.14). \square

Proposition 4. Résolution du multi-tube à chocs.

On se donne une collection \mathcal{W}^n d'états fluides $W_{j+1/2}^n$ ($j \in \mathbb{Z}$) [relation (2.8)] de sorte que si on note a_j^n la vitesse maximale des ondes du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)$

$$(2.22) \quad a_j^n \equiv a(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n), \quad j \in \mathbb{Z},$$

on ait

$$(2.23) \quad a_j^n \equiv \sup_{j \in \mathbb{Z}} a_j^n < \infty .$$

Alors pour Δt choisi de sorte que

$$(2.24) \quad a^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} ,$$

le problème de Cauchy (2.1) (2.9) admet pour solution entropique la fonction $\mathbb{R} \times]0, \Delta t] \ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$ définie comme suit

$$(2.25) \quad W(x, t) = \begin{cases} \mathcal{U}\left(\frac{x-x_j}{t}; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n\right), \\ |x-x_j| \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad 0 < t \leq \Delta t . \end{cases}$$

Preuve de la proposition 4.

• Il suffit de regarder les figures 4 et 5. La fonction (2.25), assemblage de problèmes de Riemann, est solution du problème de Cauchy (2.1) (2.9) tant que les ondes issues de deux problèmes de Riemann voisins n'ont pas eu le temps matériel d'interagir. L'onde la plus rapide issue du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)$ est de célérité inférieure à a^n , donc ne traverse pas une demi-maille de longueur $\Delta x/2$ en un temps inférieur à $\frac{\Delta x}{2} \frac{1}{a^n}$. Tant que $t < \frac{\Delta x}{2a^n}$, c'est l'état $W_{j+1/2}^n$ qui est solution commune des **deux** problèmes de Riemann $\mathcal{R}(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)$ et $\mathcal{R}(W_{j+1/2}^n, W_{j+3/2}^n)$ au point $x_{j+1/2} = x(j + \frac{1}{2}) \Delta x$. On peut donc bien "recoller" les solutions $\mathcal{U}(\bullet; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)$, ainsi qu'exprimé à la relation (2.25), et la proposition en résulte. \square

• **Définition 2. Schéma de Godunov.**

Sous les conditions de la proposition 4, le schéma de Godunov est défini par

$$(2.26) \quad W_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} W(x, \Delta t) dx$$

où $\mathbb{R} \times]0, \Delta t] \ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$ est la fonction définie à la relation (2.25).

• **Proposition 5. Flux du schéma de Godunov.**

Sous les conditions de la proposition 4, le schéma de Godunov peut être mis en œuvre avec l'algorithme explicite en temps suivant

$$(2.27) \quad \frac{1}{\Delta t} (W_{j+1/2}^{n+1} - W_{j+1/2}^n) + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_j^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}$$

avec

$$(2.28) \quad f_{j+1/2}^n \equiv f(\mathcal{U}(0; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)), \quad j \in \mathbb{Z}$$

et Δt satisfaisant la condition de stabilité (2.24).

Preuve de la proposition 5.

• Elle est analogue à celle faite pour le cas scalaire. La fonction $W(\bullet, \bullet)$ de la relation (2.25) est solution faible de la loi de conservation (2.1), donc elle vérifie l'équation "en moyenne" dans le domaine d'espace temps $K_{j+1/2} \times]0, \Delta t[$ (Figure 6). On a donc

$$(2.29) \quad \int_{\partial(K_{j+1/2} \times]0, \Delta t[)} (W n_t + f(W) n_x) d\gamma(x, t) = 0$$

et quand on explicite les quatre termes du bord du rectangle, on trouve les relations (2.27) et (2.28), compte tenu de la définition (2.26) de l'état $W_{j+1/2}^{n+1}$ au temps d'arrêt $t^n + \Delta t$. □

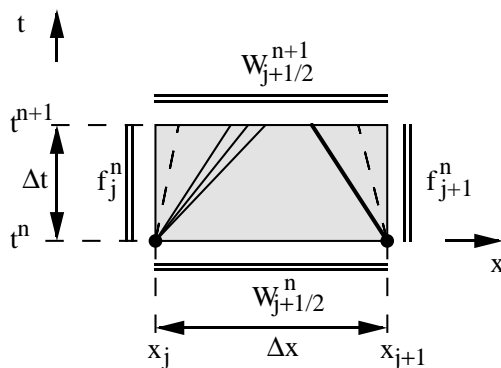


Figure 6. Schéma de Godunov.

On intègre la loi de conservation (2.1) dans un domaine d'espace-temps.

• **Remarque 1.**

En pratique, on évalue souvent la vitesse maximale des ondes a^n via l'algorithme

$$(2.30) \quad a^n \simeq \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|u_j^n| + c_j^n).$$

qui est sensiblement différent de (2.14) compte tenu de la valeur possible de la célérité des ondes de choc.

• Le schéma de Godunov demande d'évaluer l'état $\mathcal{U}(0; W_g, W_d)$ présent à l'interface entre deux mailles lors de la résolution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$. Ce calcul demande une connaissance approfondie des diverses ondes non linéaires ainsi qu'un algorithme itératif pour calculer la pression p^* et la vitesse u^* des états intermédiaires ; il induit donc une complexité et/ou un coût qui

est réhibitoire pour certains. Ainsi des schémas de Godunov approchés se sont développés au cours des années 1980. Celui proposé par P. Roe (1981) est le plus populaire. Nous le présentons au paragraphe suivant.

3) MATRICE DE ROE

- Le schéma de Godunov utilise la résolution d'un problème de Riemann de la forme $\mathcal{R}(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)$ à chaque interface x_j du maillage. La méthode de Roe consiste à remplacer ce problème de Riemann "exact" par un problème de Riemann linéarisé, et de résoudre à l'interface $x = x_j$ le problème suivant

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + A_j^n \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_{j-1/2}^n, & x < 0 \\ W_{j+1/2}^n, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

La matrice A_j^n est fixée en fonction des deux états $W_{j-1/2}^n$ et $W_{j+1/2}^n$ à travers une fonction générale $A : \Omega \times \Omega \rightarrow \{ \text{matrices } 3 \times 3 \}$.

• **Définition 3. Matrice de Roe.**

Une matrice 3×3 $A(W_g, W_d)$ est une matrice de Roe si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- (3.2) $A(W_g, W_d)$ est diagonalisable sur \mathbb{R}
- (3.3) $A(W, W) = df(W)$, matrice jacobienne du flux
- (3.4) $f(W_d) - f(W_g) = A(W_g, W_d) \bullet (W_d - W_g)$.

• **Théorème 1. Existence d'une matrice de Roe.**

Soit $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ une fonction de flux tel qu'il existe une entropie strictement convexe $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ associée à un flux $\xi(\bullet)$ de sorte que

$$(3.5) \quad d\xi(W) = d\eta(W) \bullet df(W), \quad \forall W \in \Omega.$$

Alors le système de lois de conservation

$$(3.6) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

possède une matrice de Roe $A(W_g, W_d)$, pour tout $(W_g, W_d) \in \Omega \times \Omega$.

Preuve du théorème 1.

- On rappelle que si $\eta(\bullet)$ est une entropie pour le système (3.6), alors la matrice $H(W) \bullet df(W)$ est symétrique, avec $H_{ij} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_j}$ (cf. la proposition 3 du chapitre 6). On introduit les variables entropiques φ par $\varphi_j = \frac{\partial \eta}{\partial W_j}$ et on pose

$$(3.7) \quad g(\varphi) = f(W(\varphi)).$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

Alors la matrice $dg(\varphi)$ est une matrice symétrique, comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} dg(\varphi) &= df(W) \bullet dW(\varphi) = df(W) \bullet d\varphi(W)^{-1} = \\ &= df(W) \bullet H(W)^{-1} \qquad \text{car } \varphi = d\eta(W) \\ (3.8) \quad dg(\varphi) &= H^{-1}(W) \bullet (H(W) \bullet df(W)) \bullet H(W)^{-1}. \end{aligned}$$

La matrice $H(W)$ est symétrique définie positive car $\eta(\bullet)$ est strictement convexe, donc il en est de même de $H(W)^{-1}$. Par ailleurs la matrice $H(W) \bullet df(W)$ est symétrique, comme nous venons de le rappeler. Donc la matrice $dg(\varphi)$, est une matrice symétrique elle aussi.

• On factorise la différence $f(W_d) - f(W_g) = g(\varphi_d) - g(\varphi_g)$ [notations claires !] en suivant la ligne droite dans l'espace des variables entropiques :

$$(3.9) \quad \varphi(\theta) = \varphi_g + \theta(\varphi_d - \varphi_g), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Il vient

$$\begin{aligned} f(W_d) - f(W_g) &= g(\varphi_d) - g(\varphi_g) = g(\varphi(1)) - g(\varphi(0)) \\ &= \int_0^1 dg(\varphi(\theta)) \bullet \varphi'(\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad f(W_d) - f(W_g) = \left(\int_0^1 dg(\varphi(\theta)) d\theta \right) \bullet (\varphi_d - \varphi_g).$$

Comme $dg(\theta)$ est une matrice symétrique pour tout $\theta \in [0, 1]$, la matrice S_{gd} définie par

$$(3.11) \quad S_{gd} = \int_0^1 dg(\varphi(\theta)) d\theta$$

est symétrique.

• On a par ailleurs, en suivant cette fois la ligne droite dans l'espace Ω des variables conservatives :

$$(3.12) \quad W(\theta) = W_g + \theta(W_d - W_g), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\varphi_d - \varphi_g = \int_0^1 d\varphi(W(\theta)) \bullet W'(\theta) d\theta$$

$$(3.13) \quad \varphi_d - \varphi_g = \left(\int_0^1 H(W(\theta)) d\theta \right) \bullet (W_d - W_g)$$

La matrice H_{gd} définie par

$$(3.14) \quad H_{gd} = \int_0^1 (H(W(\theta)) d\theta$$

est symétrique définie positive car c'est le cas pour $H(W(\theta))$, que que soit $\theta \in [0, 1]$.

- On tire de (3.10) (3.11) (3.13) et (3.14) :

$$(3.15) \quad f(W_d) - f(W_g) = S_{gd} \bullet H_{gd} \bullet (W_d - W_g) .$$

Alors la matrice $A(W_g, W_d)$ définie par

$$(3.16) \quad A(W_g, W_d) = S_{gd} \bullet H_{gd}$$

est une matrice de Roe pour le système (3.6). Elle est bien diagonalisable, comme conjuguée d'une matrice symétrique :

$$S_{gd} \bullet H_{gd} = H_{gd}^{-1/2} \bullet \left(H_{gd}^{1/2} \bullet S_{gd} \bullet H_{gd}^{1/2} \right) \bullet H_{gd}^{1/2} .$$

De plus, si $W_g = W_d = W$, alors les chemins (3.9) et (3.12) sont stationnaires, $S_{gd} = dg(\varphi)$, $H_{gd} = d\varphi(W)$, donc $A(W, W) = dg(\varphi) \bullet d\varphi(W) = df(W)$ et la relation (3.3) est satisfaite. Enfin, la relation (3.4) est vérifiée par construction compte tenu des relations (3.15) et (3.16). Le théorème est établi. \square

- Le théorème précédent, s'il donne l'existence d'une matrice de Roe dans un cadre théorique très large, ne permet pas un calcul explicite de la matrice A_j^n de la relation (3.1) de manière à construire un schéma de Godunov approché. On remarque également que les relations (3.2) à (3.4) qui définissent une matrice de Roe ne garantissent pas (sauf dans le cas d'une équation scalaire) l'unicité ! Ce sont d'autres matrices de Roe que celle de la relation (3.16) qui sont utilisées en pratique ; nous présentons dans les propositions suivantes l'idée initiale de Roe pour le gaz parfait polytropique.

• **Proposition 6. Matrice jacobienne.**

Pour le gaz parfait polytropique de rapport $\gamma > 1$ des chaleurs spécifiques, la jacobienne $df(W)$ du flux $f(\bullet)$ défini en (1.3) (1.4) a pour expression

$$(3.17) \quad df(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 1)H - u^2 - c^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 2)uH - uc^2 & H - (\gamma - 1)u^2 & u \end{pmatrix}$$

où H est l'enthalpie totale, définie par

$$(3.18) \quad H \equiv E + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

et c la célérité des ondes sonores :

$$(3.19) \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho} .$$

Les vecteurs propres de la matrice jacobienne donnée en (3.17), associés aux valeurs propres $\lambda_j(W)$, avec, rappelons-le :

$$(3.20) \quad \lambda_1(W) \equiv u - c < \lambda_2(W) \equiv u < \lambda_3(W) \equiv u + c ,$$

sont données grâce aux expressions suivantes :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(3.21) \quad r_1(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}; \quad r_2(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix}; \quad r_3(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix}.$$

- La preuve de la proposition 6 est élémentaire ; elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.

• **Proposition 7. Matrice de Roe pour le gaz polytropique.**

Soient W_g et W_d deux états, ρ_g, u_g, H_g et ρ_d, u_d, H_d leurs densités, vitesses et enthalpies totales respectives. On introduit un état intermédiaire $W^*(W_g, W_d)$ grâce à sa densité ρ^* , sa vitesse u^* et son enthalpie totale H^* selon les relations suivantes :

$$(3.22) \quad \rho^* = \sqrt{\rho_g \rho_d}$$

$$(3.23) \quad u^* = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(3.24) \quad H^* = \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}.$$

Alors la matrice $A(W_g, W_d)$ définie comme matrice jacobienne de l'état intermédiaire $W^*(W_g, W_d)$, c'est-à-dire

$$(3.25) \quad A(W_g, W_d) = df(W^*(W_g, W_d))$$

est une matrice de Roe pour le gaz parfait polytropique.

- La preuve demande des calculs algébriques relativement longs qui n'apportent pas d'idée supplémentaire pour notre propos. Nous renvoyons par exemple à l'ouvrage de Godlewski et Raviart [*Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996].

• **Proposition 8. Flux de Roe.**

Soient W_g et W_d deux états de fluide, supposé être un gaz parfait polytropique. On note W^* l'état fluide défini aux relations (3.22) à (3.24), c^* sa célérité du son

$$(3.26) \quad c^* = \sqrt{(\gamma - 1)(H^* - \frac{1}{2}(u^*)^2)},$$

λ_j^* ($1 \leq j \leq 3$) les valeurs propres de la matrice $A^* = df(W^*)$ définie en (3.25) et r_j^* les vecteurs propres correspondants, calculés à la relation (3.21). Soit $f_R(W)$ la fonction de flux approchée de Roe :

$$(3.27) \quad f_R(W) = f(W_g) + A^* \bullet (W - W_g)$$

Schémas de Godunov et de Roe

et $\mathcal{U}_R(\frac{x}{t}; W_g, W_d)$ la solution autosemblable du problème de Riemann approché suivant

$$(3.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + A^* \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Le flux de Roe $\Phi_R(W_g, W_d)$, défini par analogie avec le flux de Godunov par la relation

$$(3.29) \quad \Phi_R(W_g, W_d) \equiv f_R(\mathcal{U}_R(0; W_g, W_d))$$

admet les trois expressions suivantes

$$(3.30) \quad \Phi_R(W_g, W_d) = f(W_g) + \sum_{j=1}^3 (\lambda_j^*)^- \alpha_j r_j^*$$

$$(3.31) \quad \Phi_R(W_g, W_d) = f(W_g) - \sum_{j=1}^3 (\lambda_j^*)^+ \alpha_j r_j^*$$

$$(3.32) \quad \Phi_R(W_g, W_d) = \frac{1}{2}(f(W_g) + f(W_d)) - \frac{1}{2}|A^*| \bullet (W_d - W_g)$$

où

$$(3.33) \quad x^+ \equiv \max(0, x), \quad x^- \equiv \min(0, x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

et où les α_j sont les composantes de la différence $W_d - W_g$ dans la base des vecteurs r_j^* :

$$(3.34) \quad W_d - W_g \equiv \sum_{j=1}^3 \alpha_j r_j^*$$

explicités par les relations suivantes

$$(3.35) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2(c^*)^2} [(p_d - \rho^* c^* u_d) - (p_g - \rho^* c^* u_g)] \\ \alpha_2 = -\frac{1}{(c^*)^2} [(p_d - (c^*)^2 \rho_d) - (p_g - (c^*)^2 \rho_g)] \\ \alpha_3 = \frac{1}{2(c^*)^2} [(p_d + \rho^* c^* \rho_d) - (p_g + \rho^* c^* \rho_g)]. \end{cases}$$

- les propositions 7 et 8 définissant complètement un algorithme de calcul qui est à la fois élégant et facile à mettre en œuvre *via* une programmation puis une exécution sur ordinateur. Ceci explique la popularité du flux de Roe.

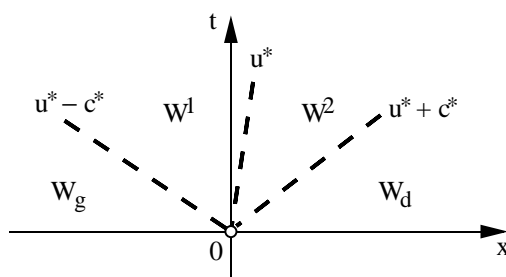


Figure 7. Schéma de Roe. Les ondes non linéaires du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ sont remplacées par des discontinuités de contact.

- On note que le flux (3.27) est une approximation affine de la fonction $W \mapsto f(W)$ qui vérifie

$$(3.36) \quad f_R(W_g) = f(W_g), \quad f_R(W_d) = f(W_d)$$

puisque $f(W_d) = f(W_g) + A^* \bullet (W_d - W_g)$, compte tenu de la définition (3.27) et de la relation (3.4).

- Les trois expressions du flux (3.30) à (3.32) sont illustrées à la figure 7. Pour calculer le flux pour l'état stationnaire (sur l'axe $x/t = 0$), on part du flux de gauche et on ajoute les contributions des ondes de célérité négative (relation (3.30)), ou bien on part du flux de droite et on retranche les contributions des ondes de célérité positive (relation (3.31)). On peut prendre aussi la demi-somme, qui revient *in fine* à écrire simplement que $|x| = x^+ - x^-$, si x^+ et x^- sont définis en (3.33).

4) CORRECTION D'ENTROPIE

- Le défaut principal du schéma de Roe est qu'il peut permettre des solutions numériques qui ne satisfont pas la condition d'entropie, *i.e.* approchent des solutions faibles non entropiques, soit des faux chocs en pratique. Considérons par exemple l'équation de Burgers

$$(4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0,$$

avec la condition initiale

$$(4.2) \quad u(x, 0) = u^0(x) \equiv \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

La solution entropique du problème de Riemann (4.1) (4.2) contient une onde de détente **sonique** :

Schémas de Godunov et de Roe

$$(4.3) \quad u(x, t) = \begin{cases} -1, & x \leq t \\ \frac{x}{t}, & -t \leq x \leq t \\ +1, & x \geq t. \end{cases}$$

- Cherchons quelle approximation le schéma de Roe donne du problème (4.1) (4.2). Comme il s'agit d'une équation scalaire, la matrice de Roe $A(u_g, u_d)$ (qui est un scalaire ici !) vaut simplement, suite à (3.4) :

$$(4.4) \quad A(u_g, u_d) = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} = \frac{1}{2}(u_g + u_d)$$

et le flux du schéma de Roe revient simplement à résoudre une advection de célérité $a^* = \frac{1}{2}(u_g + u_d)$:

$$(4.5) \quad \Phi_R(u_g, u_d) = \begin{cases} f(u_g) = \frac{1}{2}u_g^2 & \text{si } \frac{1}{2}(u_g + u_d) \geq 0 \\ f(u_d) = \frac{1}{2}u_d^2 & \text{si } \frac{1}{2}(u_g + u_d) \leq 0. \end{cases}$$

- Avec la méthode des volumes finis et le flux de Roe on a l'évolution discrète

$$(4.6) \quad \frac{1}{\Delta t}(u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi_R(u_{j+1/2}^n, u_{j+3/2}^n) - \Phi_R(u_{j-1/2}^n, u_{j+1/2}^n)] = 0$$

valable pour $j \in \mathbb{Z}$. Avec la condition initiale (4.2), trois cas de figure se présentent pour le calcul du flux numérique : $u_g = u_d = -1$, $u_g = -1$ et $u_d = +1$, $u_g = u_d = +1$. Dans les trois cas, le flux numérique $\Phi_R(u_g, u_d)$ vaut $1/2$ (voir la relation (4.5)) et la différence des flux de la relation (4.6) est nulle pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

- La "solution numérique" du problème de Riemann (4.1) (4.2) avec le flux de Roe n'évolue pas, le schéma numérique approche en fait la solution faible

$$(4.7) \quad u(x, t) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

qui est le choc non entropique. On dit que le flux de Roe remplace les détente soniques par des faux chocs. La condition d'entropie est en défaut et on doit ajouter au schéma de Roe une correction d'entropie.

- Diverses corrections d'entropie ont été proposées pour remédier au problème précédent (voir les références dans l'ouvrage de Godlewski et Raviart par exemple). Nous proposons dans la suite une approche non paramétrée qui permet de satisfaire à la condition d'entropie discrète exposée au théorème 3 du chapitre 6 sur les variables entropiques

$$(4.8) \quad \int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\varphi [\Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d)) - f(W(\varphi))] \leq 0, \quad \forall \varphi_g, \varphi_d \in \phi.$$

Il s'agit de **détecter les détonations soniques**, *i.e.* les paires d'états (u_g, u_d) de sorte que

$$(4.9) \quad \lambda(u_g) < 0 < \lambda(u_d)$$

où $\lambda(\bullet)$ est la vitesse des ondes associées au flux scalaire $f(\bullet)$ pour fixer les idées. On remplace ensuite le flux physique $f(\bullet)$ non par une approximation affine comme la relation (3.27) mais par une approximation **cubique** $p(\bullet)$ dans l'intervalle $[u_g, u_d]$:

$$(4.10) \quad \begin{cases} p(u) = \text{polynôme d'interpolation de Hermite sur } [u_g, u_d], \text{ tel que} \\ p(u_g) = f(u_g), p'(u_g) = \lambda(u_g), p(u_d) = f(u_d), p'(u_d) = \lambda(u_d). \end{cases}$$

Par ailleurs, le flux $g(\bullet)$ est affine hors de l'intervalle (u_g, u_d) :

$$(4.11) \quad g(u) = \begin{cases} p(u) \text{ donné en (4.10)} & \text{si } u \in [u_g, u_d] \\ f(u_g) + \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}(u - u_g) & \text{si } u \notin [u_g, u_d]. \end{cases}$$

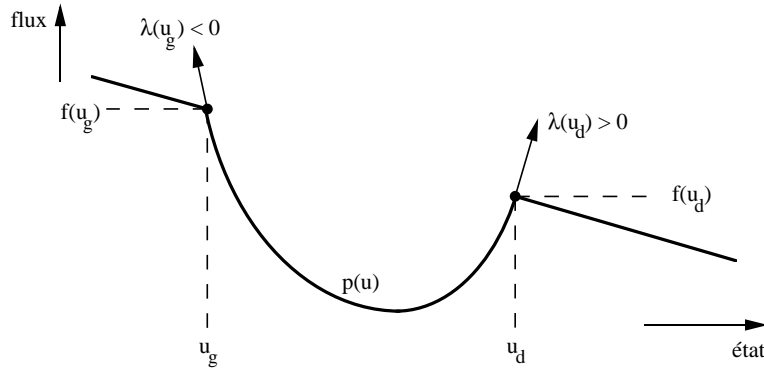


Figure 8. Fonction de flux modifiée $u \mapsto p(u)$ pour une détonation sonique.

- L'idée de notre correction d'entropie est de remplacer le problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ par un problème de Riemann $\mathcal{M}(u_g, u_d)$ "modifié" relatif à la fonction de flux $g(\bullet)$ définie en (4.11) :

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g, & x < 0 \\ u_d, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

et de définir le flux de Roe modifié comme pour les schémas de Godunov et Roe :

$$(4.13) \quad \Phi_R^{\text{mod}}(u_g, u_d) = g(\mathcal{U}_g(0; u_g, u_d)),$$

où $\mathcal{U}_g(\frac{x}{t}; u_g, u_d)$ est la solution **exacte** du problème de Riemann (4.12), que l'on sait calculer explicitement (voir par exemple le livre de D. Serre [*Systèmes hyperboliques de lois de conservation*, Diderot, Paris, 1996]). Le calcul du flux de Roe modifié est présenté à la proposition suivante ; pour la preuve, nous renvoyons à notre contribution avec G. Mehlman (*Numerische Mathematik*, vol 73, p. 169-208, 1996).

• **Proposition 9. Flux de Roe modifié.**

Soit $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ une fonction de flux convexe, u_g, u_d deux états séparés par une détente sonique :

$$(4.14) \quad \lambda_g \equiv f'(u_g) < 0 < f'(u_d) \equiv \lambda_d .$$

Alors le polynôme d'interpolation de Hermite $p(\bullet)$ défini en (4.10) peut s'écrire sous la forme

$$(4.15) \quad p(u) = f(u_g) + a(u - u_g)^3 + b(u - u_g)^2 + c(u - u_g)$$

avec

$$(4.16) \quad a = \frac{\lambda_g + \lambda_d - 2\lambda^*}{(u_d - u_g)^2}, \quad b = \frac{3\lambda^* - 2\lambda_g - \lambda_d}{(u_d - u_g)}, \quad c = \lambda_g$$

et $\lambda^* = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}$; il admet un minimum au point w^* qui vérifie

$$(4.17) \quad w^* = \frac{-\lambda_g(u_d - u_g)}{3\lambda^* - 2\lambda_g - \lambda_d + \sqrt{(3\lambda^* - \lambda_g - \lambda_d)^2 - \lambda_g\lambda_d}} .$$

Le flux de Roe modifié Φ_R^{mod} défini à la relation (4.13) admet l'expression

$$(4.18) \quad \Phi_R^{\text{mod}}(u_g, u_d) = \Phi_R(u_g, u_d) + \sup\left(p(w^*), p(w^*) - (f(u_d) - f(u_g))\right) .$$

• **Théorème 2. Condition d'entropie.**

Soit $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ une fonction de flux convexe, et $\eta(u) = \frac{1}{2}u^2$ l'entropie quadratique, pour laquelle $\varphi \equiv u$. Soit $\Phi_R^{\text{mod}}(u_g, u_d)$ égal à $\Phi_R(u_g, u_d)$ si la condition de détente sonique (4.14) n'est pas réalisée et égal à l'expression donnée par la relation (4.18) si (4.14) a lieu. On a alors la condition d'entropie

$$(4.19) \quad \int_{u_g}^{u_d} du(\Phi_R^{\text{mod}}(u_g, u_d) - f(u)) \leq 0 .$$

• Ce résultat permet finalement, *modulo* des développements mathématiques qui dépassent le cadre de ce cours, de montrer que le schéma de volumes finis continu en temps (méthode des lignes, voir le chapitre d'introduction aux volumes finis) converge vers la solution entropique pour une équation hyperbolique scalaire de flux convexe.

• Dans le cas d'un système hyperbolique de lois de conservation, on effectue la correction précédente sur chaque champ caractéristique vraiment non linéaire. Nous présentons le schéma obtenu pour le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz. On se donne deux états W_g, W_d et $A^* = A(W_g, W_d)$ une matrice de Roe entre ces deux états, r_j^* les vecteurs propres associées :

$$(4.20) \quad A^* \bullet r_j^* = \lambda_j^* r_j^*, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

On décompose la différence $W_d - W_g$ sur cette base de vecteurs propres, mettant en évidence les variables caractéristiques α_j :

$$(4.21) \quad W_d - W_g = \sum_{j=1}^3 \alpha_j r_j^*.$$

On introduit aussi les deux états intermédiaires W^1 et W^2 dans la résolution du problème de Riemann linéarisé (3.28) entre les états $W^0 \equiv W_g$ et $W^3 \equiv W_d$ (voir la figure 7).

• On cherche les **détentes soniques**, *i.e.* les ondes (non linéaires) telles que la j^o valeur propre λ_j change de signe entre l'état constant W^{j-1} "avant" l'onde et l'état constant W^j après :

$$(4.22) \quad j \in S \iff \lambda_j(W^{j-1}) < 0 < \lambda_j(W^j)$$

et on note S l'ensemble des "indices soniques". Dans le cas où une onde sonique est présente ($S \neq \emptyset$), on modifie le flux de Roe $\Phi_R(W_g, W_d)$ comme suit.

• On introduit le polynôme $p_j(\bullet)$ de degré 3 d'interpolation de Hermite ; tel que

$$(4.23) \quad p_j(0) = 0, \quad p_j'(0) = \lambda_j(W^{j-1}), \quad p_j(\alpha_j) = \lambda_j^*, \quad p_j'(\alpha_j) = \lambda_j(W^j), \quad j \in S$$

qui définit explicitement $p_j(\xi)$ par :

$$(4.24) \quad \begin{cases} p_j(\xi) = \frac{1}{\alpha_j^2} (\lambda_j(W^j) + \lambda_j(W^{j-1}) - 2\lambda_j^*) \xi^3 + \\ + \frac{1}{\alpha_j} (3\lambda_j^* - 2\lambda_j(W^{j-1}) - \lambda_j(W^j)) \xi^2 + \lambda_j(W^{j-1}) \xi. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $j \in S$, le polynôme $p_j(\bullet)$ a un unique minimum dans l'intervalle $(0, \alpha_j)$; son argument ξ_j^* est donné par

$$(4.25) \quad \xi_j^* = \frac{-\lambda_j(W^{j-1}) \alpha_j}{\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda_j^* - 2\lambda_j(W^{j-1}) - \lambda_j(W^j) + \\ + \sqrt{(3\lambda_j^* - \lambda_j(W^j) - \lambda_j(W^{j-1}))^2 - \lambda_j(W^{j-1}) \lambda_j(W^j)} \end{array} \right\}}.$$

On corrige le flux de Roe selon une relation analogue à (4.18) :

$$(4.26) \quad \Phi_R^{\text{mod}}(W_g, W_d) = \Phi_R(W_g, W_d) + \sum_{j \in S} \max \left\{ \frac{p_j(\xi_j^*)}{\alpha_j}, \frac{p_j(\xi_j^*)}{\alpha_j} - \lambda_j^* \right\} \alpha_j r_j^*$$

Schémas de Godunov et de Roe

qui met en évidence la “viscosité numérique” qu’il convient d’ajouter à la méthode initiale. Cette correction conduit au résultat suivant.

• **Théorème 3. Condition d’entropie.**

Si le système strictement hyperbolique de flux $f(\bullet)$ dispose de champs **tous** vraiment non linéaires, admet une entropie mathématique $\eta(\bullet)$ et si les deux états W_g et W_d sont assez voisins, on a l’inégalité d’entropie suivante

$$(4.27) \quad \int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\varphi \left(\Phi_R^{\text{mod}}(W_g, W_d) - f(W(\varphi)) \right) \leq 0 ,$$

où $W_g = W(\varphi_g)$ et $W_d = W(\varphi_d)$.

Vers la mécanique des fluides numérique

La mécanique des fluides numérique est en train de devenir une discipline de l'ingénieur à part entière (paragraphe 1). Nous présentons sur trois exemples un échantillon de méthodes en plein foisonnement, comme l'approche de Van Leer (paragraphe 2), un traitement possible pour les conditions aux limites (paragraphe 3) et une proposition classique de mise en œuvre des volumes finis dans le cas multidimensionnel (paragraphe 4).

1) INTRODUCTION

- Nous avons vu dans les chapitres précédents comment la théorie mathématique des systèmes hyperboliques de lois de conservation permet de donner un sens à des solutions faibles discontinues, et comment renforcer la propriété d'unicité grâce à la notion d'entropie mathématique. Cette approche permet d'utiliser des ondes simples non linéaires pour construire une solution entropique du problème de Riemann. Avec cet "brique mathématique" de base, la méthode des volumes finis permet de construire des approximations numériques de problèmes monodimensionnels, en particulier pour la dynamique des gaz.
- On peut aussi prendre le point de vue des applications industrielles. Pour concevoir un avion par exemple, les qualités aérodynamiques sont un élément premier pour assurer la portance de l'objet et minimiser les coûts de consommation de combustibles. L'approche traditionnelle consiste à utiliser l'invariance d'échelle spatiale et l'invariance de Galilée de la physique classique et modéliser l'objet volant à l'aide d'une maquette en soufflerie. Le savoir-faire acquis grâce à cette approche est primordial pour la compréhension de la complexité des problèmes à résoudre. Mais il est fort coûteux et des approches plus conceptuelles ont depuis longtemps été développées, grâce au modèle mathématique de la variable complexe et des transformations conformes (voir par exemple une introduction dans le livre de P. Germain et P. Muller [*Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980]) et depuis les années 1950, grâce aux "méthodes numériques" (on peut voir à ce sujet le livre de J.D. Anderson [*Modern Compressible Flow*, Mac Graw Hill, New York, 1982]).
- Il est aujourd'hui admis au sein de la communauté des aérodynamiciens que la "résolution numérique des équations d'Euler" fournit l'essentiel de l'information utile pour prédire le champ de pression sur la paroi d'un objet volant. De nombreux

logiciels existent et permettent d'effectuer des simulations réalistes de dynamique des gaz. Les fondements conceptuels et mathématiques de ces outils logiciels ont été proposés dans les chapitres précédents. Mais il faut insister sur le fait qu'il ne s'agit pas d'une quelconque preuve. En effet, les résultats les plus avancés sur la théorie mathématique des systèmes de lois de conservation proposent des théorèmes d'existence (et parfois d'unicité) pour des systèmes plus simples que ceux de la dynamique des gaz et à une dimension d'espace (voir par exemple les livres de P.L. Lions [*Mathematical Foundations of Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Science Publishing, 1996] et D. Serre [*Systèmes hyperboliques de lois de conservation*, Diderot, Paris, 1996]), alors que le besoin des ingénieurs est de disposer de résultats pour le modèle tridimensionnel de la dynamique des gaz.

- La conception de modèles numériques pour la mécanique des fluides "concrète" s'appuie donc à la fois sur les résultats mathématiques pour des problèmes simplifiés et sur l'art de l'ingénieur qui consiste à assembler au mieux des méthodes numériques qui ne sont justifiées rigoureusement que dans certains cas particuliers. La mécanique des fluides numérique est cet art de l'ingénieur. Dans la suite de ce chapitre, nous présentons à titre d'introduction trois thèmes d'extensions vers la précision du second ordre en espace, les conditions aux limites et les aspects bidimensionnels.

2) MÉTHODE DE VAN LEER

- On se restreint dans ce paragraphe au cas d'une équation scalaire

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

avec une fonction de flux $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ régulière et convexe. La méthode de Godunov consiste à introduire une fonction de flux numérique $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Phi(u_g, u_d)$ approche le flux de la solution autosemblable $\mathcal{U}(\frac{x}{t}; u_g, u_d)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ pour $\frac{x}{t} = 0$:

$$(2.2) \quad \Phi(u_g, u_d) \simeq f(\mathcal{U}(0; u_g, u_d)), \quad u_g, u_d \in \mathbb{R}.$$

Le schéma numérique s'écrit

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n) + \frac{1}{\Delta x} \left[\Phi(u_{j+1/2}^n, u_{j+3/2}^n) \right. \\ \left. - \Phi(u_{j-1/2}^n, u_{j+1/2}^n) \right] = 0. \end{array} \right.$$

- L'approche de Van Leer (1979) consiste à calculer le flux numérique f_j^n à l'interface x_j non avec le choix de Godunov, *id est* $f_j = \Phi(u_{j-1/2}^n, u_{j+1/2}^n)$, qui suppose une interpolation constante (polynôme de degré zéro) du champ $u^n(\bullet)$ dans la maille $K_{j+1/2}$:

$$(2.4) \quad u^n(x) = u_{j+1/2}^n, \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad t = t^n,$$

mais avec son extension

$$(2.5) \quad f_j = \Phi(u_{j,-}^n, u_{j,+}^n), \quad j \in \mathbb{Z}$$

obtenue en supposant d'une part le champ $u(\bullet)$ interpolé par une fonction affine dans la maille $K_{j+1/2}$ [on supprime l'indice n pour alléger l'écriture] :

$$(2.6) \quad u^n(x) = u_{j+1/2} + g_{j+1/2} (x - x_{j+1/2}), \quad x_j < x < x_{j+1}$$

et d'autre part en prenant comme données u_g et u_d du flux numérique $\Phi(\bullet, \bullet)$ les valeurs $u_{j,-}$ extrapolée depuis la maille $K_{j-1/2}$ et $u_{j,+}$ extrapolée depuis la maille $K_{j+1/2}$:

$$(2.7) \quad \begin{cases} u_{j,-} = u_{j-1/2} + g_{j-1/2} \cdot \frac{\Delta x}{2}, & x < x_j \\ u_{j,+} = u_{j+1/2} - g_{j+1/2} \cdot \frac{\Delta x}{2}, & x > x_j. \end{cases}$$

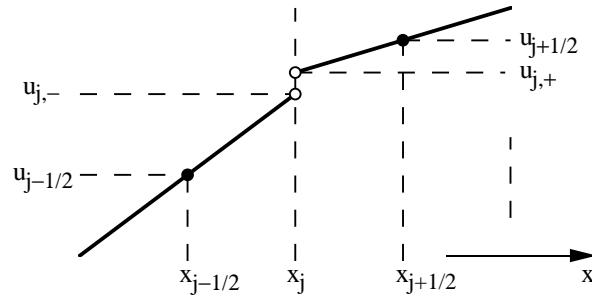


Figure 1. Valeurs extrapolées $u_{j,-}$ et $u_{j,+}$ de Van Leer à l'interface x_j .

• **Proposition 1. Approche linéaire.**

Pour l'équation d'advection, où

$$(2.8) \quad f(u) = a u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

et le choix du flux numérique décentré, *i.e.*

$$(2.9) \quad \Phi(u, v) = a u, \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

le schéma de Van Leer défini par (2.5)(2.7) est lié à la construction d'un gradient discret $g_{j+1/2}^n$ dans la maille $K_{j+1/2}$ au temps t^n . Dans le cas où l'on approche la "pente" $g_{j+1/2}^n$ par un schéma aux différences centré, *i.e.*

$$(2.10) \quad g_{j+1/2}^n = \frac{1}{2 \Delta x} (u_{j+3/2}^n - u_{j+1/2}^n), \quad j \in \mathbb{Z}$$

le schéma de volumes finis s'écrit :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n) + \frac{a}{\Delta x} \left\{ \left[u_{j+1/2}^n + \frac{1}{4}(u_{j+3/2}^n - u_{j-1/2}^n) \right] \right. \\ \left. - \left[u_{j-1/2}^n + \frac{1}{4}(u_{j+1/2}^n - u_{j-3/2}^n) \right] \right\} \end{array} \right\} = 0.$$

Il est d'ordre deux en espace, d'ordre un en temps et est linéairement **instable** pour tout $\Delta t > 0$.

Preuve de la proposition 1.

- Le schéma de volumes finis (2.3) s'écrit aussi

$$(2.12) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n) + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

et l'emploi du flux de Van Leer (2.5) joint au choix du schéma (2.9) conduit à :

$$(2.13) \quad f_j^n = a u_{j,-}^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Les relations (2.7) et (2.10) permettent d'écrire

$$(2.14) \quad u_{j,-}^n = u_{j-1/2}^n + \frac{1}{4}(u_{j+1/2}^n - u_{j-3/2}^n)$$

et l'ensemble (2.12) (2.13) (2.14) exprime exactement le schéma (2.11).

- Pour étudier la précision du schéma, on fixe un point (x, t) dans l'espace-temps et on introduit l'erreur de troncature \mathcal{T} définie au chapitre 2 sur l'approximation par différences finies de l'équation d'advection :

$$(2.15) \quad \mathcal{T} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) + \\ + \frac{a}{\Delta x} \left\{ \left[u(x, t) + \frac{1}{4}(u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)) \right] \right. \\ \left. - \left[u(x - \Delta x, t) + \frac{1}{4}(u(x, t) - (u(x - 2\Delta x, t))) \right] \right\} \end{array} \right\}$$

et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) + a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - \frac{1}{4} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(\Delta x^3) \right] \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) - \frac{1}{12}\Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3) \end{aligned}$$

et si $u(\bullet, \bullet)$ est solution de l'équation d'advection, il vient

$$(2.16) \quad \mathcal{T} = \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{12}\Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^3),$$

ce qui établit l'ordre du schéma.

- On introduit ensuite une onde de la forme

$$(2.17) \quad u_{j+1/2}^n = \widehat{u}_k e^{ik(j+1/2)\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

on pose

$$(2.18) \quad \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}, \quad \xi = k\Delta x,$$

et on cherche le coefficient d'amplification $g(\sigma, \xi)$ du schéma, tel que

$$(2.19) \quad u_{j+1/2}^{n+1} \equiv g(\sigma, \xi) u_{j+1/2}^n \quad \text{et } u_{j+1/2}^n \text{ donné en (2.17).}$$

Compte tenu de (2.11), il vient :

$$\begin{aligned} g(\sigma, \xi) &= 1 - \sigma(1 - e^{-i\xi}) - \frac{\sigma}{4}(e^{i\xi} - 1 - e^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) \\ &= 1 - \sigma(1 - \cos \xi) - \frac{\sigma}{4}(-1 + 2 \cos \xi) - i\sigma \left(\sin \xi + \frac{1}{2} \sin \xi - \frac{1}{4} \sin 2\xi \right) \\ &= 1 - \sigma \left(1 - \cos \xi + \frac{1}{4}(2 \cos^2 \xi - 2) \right) - i\sigma \left(\frac{3}{2} \sin \xi - \frac{1}{2} \sin \xi \cos \xi \right) \\ (2.20) \quad g(\sigma, \xi) &= 1 - \frac{\sigma}{2}(1 - \cos \xi)^2 - i \frac{\sigma}{2} \sin \xi (3 - \cos \xi). \end{aligned}$$

Pour ξ infiniment petit, on a $|g(\sigma, \xi)|^2 = 1 + \sigma^2 \xi^2 + O(\xi^4)$, qui est strictement supérieur à 1 pour $\sigma \neq 0$, ce qui établit l'instabilité du schéma. \square

- L'approche linéaire n'aboutit pas ; on la remplace par une approche **non linéaire**, même pour approche l'équation d'advection, qui est linéaire. On commence par réécrire la valeur extrapolée $u_{j,-}$ de la relation (2.14) à l'aide du rapport $r_{j+1/2}$ des pentes discrètes successives de part et d'autre de la maille $K_{j+1/2}$:

$$(2.21) \quad r_{j+1/2} \equiv \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{u_{j+3/2} - u_{j+1/2}}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

et on a, si $u_{j,-}$ vérifie (2.14) :

$$\begin{aligned} u_{j+1,-} &= u_{j+1/2} + \frac{1}{4} [(u_{j+3/2} - u_{j+1/2}) + (u_{j+1/2} - u_{j-1/2})] \\ &= u_{j+1/2} + \frac{1}{4} (1 + r_{j+1/2})(u_{j+3/2} - u_{j+1/2}). \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} u_{j+1,+} &= u_{j+3/2} - \frac{u_{j+5/2} - u_{j+1/2}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\ &= u_{j+3/2} - \frac{1}{4} ((u_{j+5/2} - u_{j+3/2}) + (u_{j+3/2} - u_{j+1/2})) \\ &= u_{j+3/2} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{r_{j+3/2}} \right) (u_{j+3/2} - u_{j+1/2}). \end{aligned}$$

On réécrit (depuis Sweby (1984)) cette interpolation sous la forme

$$(2.22) \quad \begin{cases} u_{j+1,-} = u_{j+1/2} + \frac{1}{2} \varphi(r_{j+1/2}) (u_{j+3/2} - u_{j+1/2}) \\ u_{j+1,+} = u_{j+3/2} - \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{r_{j+3/2}}\right) (u_{j+3/2} - u_{j+1/2}) \end{cases}$$

$$(2.23) \quad \varphi(r) = \frac{1}{2} (1 + r).$$

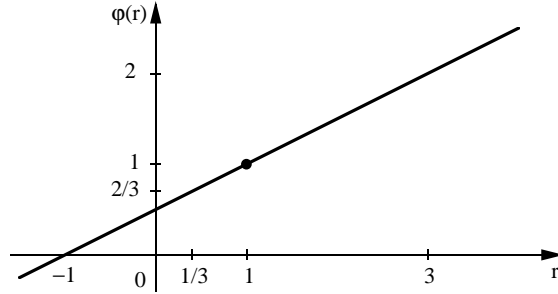


Figure 2. Cas linéaire $\varphi(r) = \frac{1}{2} (1 + r)$

- Le “limiteur de pente” $\varphi(r)$ de la relation (2.23) est représenté à la figure 2. On modifie le schéma (2.22) (2.23) en changeant le limiteur $\mathbb{R} \ni r \mapsto \varphi(r) \in \mathbb{R}$ de manière à garantir la **monotonie** du schéma.

• **Définition 1. Monotonie de l’interpolation.**

L’interpolation (2.22) est monotone si quel que soit l’ensemble $\{u_{j+1/2}, u_{j+3/2}, r_{j+1/2}, r_{j+3/2}\}$ les états interpolés $u_{j+1,+}$ et $u_{j+1,-}$ définis aux relations (2.22) appartiennent à l’intervalle $[u_{j+1/2}, u_{j+3/2}]$ (ou $[u_{j+3/2}, u_{j+1/2}]$) :

$$(2.24) \quad u_{j+1,\pm} \in [\min(u_{j+1/2}, u_{j+3/2}), \max(u_{j+1/2}, u_{j+3/2})].$$

• **Proposition 2. Limiteur de pente monotone.**

L’interpolation (2.22) est monotone au sens de la définition 1 (relation (2.24)) si et seulement si on a :

$$(2.25) \quad 0 \leq \varphi(r) \leq 2, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Preuve de la proposition 2.

- Les relations (2.22) peuvent se réécrire sous la forme de combinaisons

$$u_{j+1,-} = \left(1 - \frac{1}{2} \varphi(r_{j+1/2})\right) u_{j+1/2} + \frac{1}{2} \varphi(r_{j+1/2}) u_{j+3/2}$$

$$u_{j+1,+} = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{r_{j+3/2}}\right)u_{j+1/2} + \left(1 - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{r_{j+3/2}}\right)\right)u_{j+3/2}$$

qui sont convexes si et seulement si la relation (2.25) est satisfaite. \square

- La fonction $\varphi(\bullet)$ va donc “limiter la pente” pour garantir la monotonie, en particulier lorsque deux “pentes discrètes” ($u_{j+3/2} - u_{j+1/2}$) et ($u_{j+1/2} - u_{j-1/2}$) sont de signe contraire, ce qui se produit lorsque l'état $u_{j+1/2}$ est un extremum de la suite ($u_{j-1/2}, u_{j+1/2}, u_{j+3/2}$). Le “limiteur” est également actif lorsque le rapport des pentes successives est trop grand (supérieur à 2). On garde aussi comme contrainte la linéarité de l'interpolation $x \mapsto u(x)$ dans la maille $K_{j+1/2}$, sachant que $u(x_j) = u_{j,+}$, $u(x_{j+1}) = u_{j+1,-}$ ainsi qu'illustré figure 3.

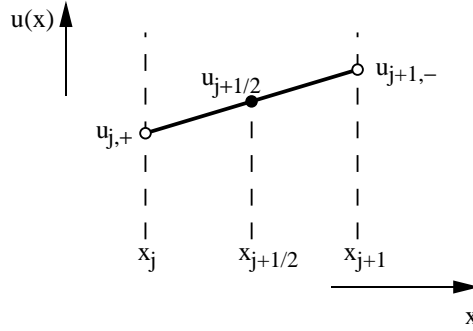


Figure 3. Linéarité de l'interpolation interne dans la maille $K_{j+1/2}$.

- Cette condition s'exprime sous la forme

$$(2.26) \quad \frac{1}{2}(u_{j,+} + u_{j+1,-}) = u_{j+1/2}.$$

Or si la condition (2.22) a lieu, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_{j,+} + u_{j+1,-}) &= \frac{1}{2} \left[u_{j+1/2} - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{r_{j+3/2}}\right)(u_{j+1/2} - u_{j-1/2}) \right. \\ &\quad \left. + u_{j+1/2} + \frac{1}{2}\varphi(r_{j+1/2})(u_{j+3/2} - u_{j+1/2}) \right] \\ &= u_{j+1/2} + \frac{1}{4} \left(\varphi(r_{j+1/2}) - r_{j+1/2}\varphi\left(\frac{1}{r_{j+1/2}}\right) \right) (u_{j+3/2} - u_{j+1/2}) \end{aligned}$$

et la condition (2.26) est alors satisfaite pour un jeu arbitraire de données si et seulement si

$$(2.27) \quad \varphi\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\varphi(r), \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

• **Définition 1. Interpolation interne affine.**

L'interpolation (2.22) est compatible avec une représentation affine $x \mapsto u(x)$ dans la maille $K_{j+1/2}$ lorsque la condition (2.27) sur le limiteur de pente est satisfaite.

• On remarque que les conditions (2.25) et (2.27) entraînent

$$(2.28) \quad \varphi(r) \equiv 0 \quad \text{si } r \leq 0$$

et que pour $r > 0$, on doit avoir

$$(2.29) \quad 0 \leq \varphi(r) \leq \min(2r, 2), \quad r > 0.$$

Le choix de Van Leer (1977) a été celui d'une fonction $\varphi(r)$ fondée sur la relation (2.23), tant qu'elle est compatible avec les conditions (2.28) et (2.29). Ceci conduit au limiteur suivant

$$(2.30) \quad \varphi(r) = \begin{cases} \min\left(2r, \frac{1}{2}(1+r), 2\right), & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

appelé "Towards 4" et représenté à la figure 4.

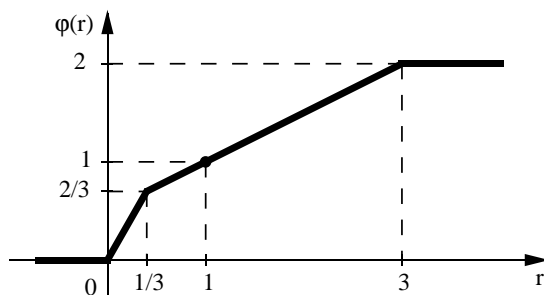


Figure 4. *Limiteur "Towards 4" de Van Leer.*

• On peut montrer facilement que pour l'équation d'advection, le schéma (2.5) (2.9) (2.22) (2.30) est linéairement instable ; sa version linéaire correspond à la fonction $\varphi(\bullet)$ donnée en (2.23), étudié à la proposition 1. L'analyse de stabilité est finalement **non linéaire** et se fonde sur une propriété de décroissance de la variation totale pour le problème de Cauchy.

• **Théorème 1. Décroissance de la variation totale.**

Soit $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ une fonction de flux de classe \mathcal{C}^1 , $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ une condition initiale :

$$(2.31) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

qu'on suppose de plus de variation totale bornée, c'est à dire

$$(2.32) \quad TV(u_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} |u^0(x+h) - u^0(x)| dx < \infty.$$

Alors la solution entropique unique $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ du problème de Cauchy (2.1)(2.31) donnée par le théorème de Kručkov (voir le chapitre 4 sur la notion d'entropie mathématique) satisfait de plus

$$(2.33) \quad TV(u(\bullet, t)) \leq TV(u^0), \quad \forall t \geq 0.$$

- En prenant une condition "initiale" à l'instant t^n et en regardant la relation (2.33) à l'instant $t = t^n + \Delta t$, on a donc

$$TV(u(\bullet, t^n + \Delta t)) \leq TV(u(\bullet, t^n)), \quad \Delta t > 0$$

qui exprime mieux la décroissance de la variation totale pour la solution entropique du problème (2.1) (2.31).

- L'analogie pour un schéma numérique est facile. Etant donné une suite $(u_{j+1/2})_{j \in \mathbb{Z}}$ de valeurs moyennes discrètes, on dit qu'elle est de variation totale bornée (et on écrit $u \in BV(\mathbb{Z})$) si on a

$$(2.34) \quad TV(u) \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+3/2} - u_{j+1/2}| < \infty; \quad u \in BV(\mathbb{Z}).$$

Le théorème suivant montre que le schéma de Van Leer est à variation totale décroissante, ce qui garantit la stabilité.

• **Théorème 2. Schéma à variation totale décroissante.**

Pour l'équation d'advection (2.1) (2.8) et un flux numérique décentré, le schéma de Van Leer défini par le flux décentré (2.9), l'interpolation (2.22) et le limiteur de pente $\varphi(\bullet)$ de la relation (2.30) s'écrit :

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} \left[u_{j+1/2}^n + \frac{1}{2} \varphi(r_{j+1/2}^n) (u_{j+3/2}^n - u_{j+1/2}^n) \right. \\ \left. - \left(u_{j-1/2}^n + \frac{1}{2} \varphi(r_{j-1/2}^n) (u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n) \right) \right] = 0. \end{array} \right.$$

Il est d'ordre un en temps, deux en espace hors des extrema, et à variation totale décroissante :

$$(2.36) \quad TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

sous la condition "CFL" suivante :

$$(2.37) \quad a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}.$$

• **Lemme 1.**

Le limiteur $\varphi(r)$ défini à la relation (2.30) vérifie

$$(2.38) \quad 1 + \frac{1}{2} \frac{\varphi(r)}{r} - \frac{1}{2} \varphi(r') \geq 0, \quad \forall r, r' \in \mathbb{R}.$$

Preuve du lemme 1.

• Si r et r' sont négatifs, la relation (2.38) est claire puisque $\varphi(r) = \varphi(r') = 0$. Si $r' \leq 0$ et $r > 0$, la condition d'interpolation interne affine (2.27) exprime que $\frac{1}{r} \varphi(r) = \varphi(\frac{1}{r})$ qui est positif compte tenu de (2.25), donc la relation (2.38) est encore vérifiée. Si $r' > 0$ et $r \leq 0$, on a $\varphi(r') \leq 2$ compte tenu de (2.25) et (2.38) en découle dans ce cas.

• Si $r > 0$ et $r' > 0$, on a

$$\varphi(r') \leq 2 \leq 2 + \frac{1}{r} \varphi(r)$$

compte tenu de (2.25) et la relation (2.38) en résulte. □

Preuve du théorème 2.

• L'expression (2.35) est claire compte tenu de ce qui a été évoqué pour l'interpolation et le cas du schéma linéaire instable. Pour l'erreur de troncature, on fixe un point (x, t) de sorte que $x \mapsto u(x, t)$ n'ait pas d'extremum en ce point :

$$(2.39) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \neq 0.$$

On pose

$$(2.40) \quad r(x, t, \Delta x) = \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}.$$

On a

$$\begin{aligned} r(x, t, \Delta x) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^2)}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} + O(\Delta x^2) \right) \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} + O(\Delta x^2) \right) \end{aligned}$$

et

$$(2.41) \quad r(x, t, \Delta x) = 1 - \Delta x \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} + O(\Delta x^2) \quad \text{si } \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0.$$

De même,

$$\begin{aligned}
 r(x - \Delta x, t, \Delta x) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{2} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^2)}{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^2)} \\
 &= \left(1 - \frac{3}{2} \Delta x \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} + O(\Delta x^2) \right) \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} + O(\Delta x^2) \right) \\
 (2.42) \quad r(x - \Delta x, t, \Delta x) &= 1 - \Delta x \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} + O(\Delta x^2) \quad \text{si } \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0.
 \end{aligned}$$

• On a alors pour l'erreur de troncature :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2) + a \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta x}{2} \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(\Delta x^3) \right\} \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)
 \end{aligned}$$

et le résultat sur l'erreur de troncature est établi.

• Pour la variation totale, on pose

$$(2.43) \quad \Delta_j \equiv u_{j+1/2} - u_{j-1/2}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

On a

$$\begin{aligned}
 \Delta_j^{n+1} &= u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1} \\
 &= u_{j+1/2}^n - \sigma \left(\Delta_j^n + \frac{1}{2} \varphi_{j+1/2} \Delta_{j+1}^n - \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \Delta_j^n \right) \\
 &\quad - u_{j-1/2}^n + \sigma \left(\Delta_{j-1}^n + \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \Delta_j^n - \frac{1}{2} \varphi_{j-3/2} \Delta_{j-1}^n \right)
 \end{aligned}$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$= \Delta_j^n - \sigma \left(\Delta_j^n + \frac{1}{2} \varphi_{j+1/2} \frac{\Delta_j^n}{r_{j+1/2}} - \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \Delta_j^n \right) \\ + \sigma \left(\Delta_{j-1}^n + \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \frac{\Delta_{j-1}^n}{r_{j-1/2}} - \frac{1}{2} \varphi_{j-3/2} \Delta_{j-1}^n \right).$$

Donc

$$TV(u^{n+1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j^{n+1}| \\ \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[1 - \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} - \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \right) \right] |\Delta_j^n| \right. \\ \left. + \sigma \left[1 - \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{j-1/2}}{r_{j-1/2}} - \frac{1}{2} \varphi_{j-3/2} \right) \right] |\Delta_{j-1}^n| \right\}$$

compte tenu de (2.38), de l'inégalité $1 + \frac{\varphi_{j+1/2}}{2r_{j+1/2}} - \frac{1}{2}\varphi_{j+1/2} \leq 2$ et de la condition de Courant (2.37) qui rendent positifs les crochets. Donc après une transformation d'Abel,

$$TV(u^{n+1}) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[1 - \sigma \left(1 + \frac{\varphi_{j+1/2}}{2r_{j+1/2}} - \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \right) \right] |\Delta_j^n| \right. \\ \left. + \sigma \left[1 - \sigma \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{j+1/2}}{r_{j+1/2}} - \frac{1}{2} \varphi_{j-1/2} \right) \right] |\Delta_j^n| \right\} \\ \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j^n| = TV(u^n)$$

ce qui établit le théorème. □

- On étend sans difficulté le résultat précédent lorsqu'on emploie un flux numérique $\Phi(\bullet, \bullet)$ **monotone**, c'est à dire régulier et tel que

$$(2.44) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \geq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \leq 0.$$

Le passage au second ordre en temps n'offre pas de difficulté si on utilise un schéma de Heun construit à partir de la relation (2.35) et de la relation (1.24) du chapitre 6 relatif aux volumes finis. La propriété de décroissance de la variation totale qui garantit maintenant la stabilité du schéma est maintenue. C'est un (excellent !) exercice laissé au lecteur.

3) CONDITIONS AUX LIMITES

- Pour se familiariser avec le traitement des conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques, le plus simple est de reprendre rapidement ce qui a été vu pour l'équation d'advection au chapitre 1. On cherche à résoudre l'équation d'advection dans le quart d'espace $t > 0, x > 0$:

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0.$$

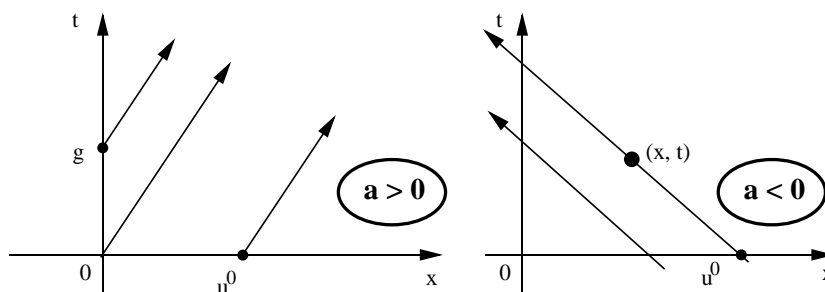


Figure 5. Condition à la limite pour l'équation d'advection. Si $a > 0$ (à gauche), les caractéristiques “entrent” dans le domaine d'étude $\{x > 0\}$ et une condition limite du type $u(0, t) = g(t)$ doit être imposée. Si $a < 0$ (à droite), les caractéristiques “sortent” du domaine d'étude $\{x > 0\}$ et aucune condition limite en $x = 0$ ne doit être donnée.

Si $a > 0$, (Figure 5), la méthode des caractéristiques, qui indique que toute solution régulière de (3.1) est constante le long de toute droite d'équation

$$(3.2) \quad \frac{dx}{dt} = a,$$

a besoin d'une donnée sur la frontière $x = 0$:

$$(3.3) \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad a > 0.$$

Si $a < 0$ (figure 5), les caractéristiques solutions de (3.2) et passant par la frontière $\{x = 0\}$ ont une origine en $t = 0$ à l'intérieur du domaine d'étude $\{x > 0\}$. La méthode des caractéristiques indique simplement que la valeur $u(0, t)$ sur la frontière $\{x = 0\}$ est donnée par la relation

$$(3.4) \quad u(0, t) = u_0(-at), \quad t > 0, \quad a < 0$$

avec $u_0(\bullet)$ condition initiale pour le problème (3.1) dit “avec condition initiale et à la limite” :

$$(3.5) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x > 0.$$

• **Proposition 3. Condition limite pour l'advection.**

Soit $[0, \infty[\ni x \mapsto u_0(x) \in \mathbb{R}$ et $[0, \infty[\ni t \mapsto g(t) \in \mathbb{R}$ deux fonctions bornées, *i.e.* appartenant à l'espace $L^\infty(]0, +\infty[)$:

$$(3.6) \quad u_0 \in L^\infty(]0, +\infty[), \quad g \in L^\infty(]0, +\infty[).$$

Si $a > 0$, le problème (3.1) (3.3) (3.5) avec condition initiale et condition limite a une unique solution $[0, \infty[^2 \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ faible entropique bornée. Si $a < 0$, le problème (3.1) (3.5) avec condition initiale et **sans** donnée de condition à la limite en $x = 0$ a une unique solution $[0, \infty[^2 \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ faible entropique bornée.

• Si $a = 0$, on dit que la frontière $\{x = 0\}$ est **caractéristique**. C'est le prototype du cas délicat à étudier qui n'est pas abordé dans ce cours introductif. On généralise l'étude précédente au cas d'un système hyperbolique linéaire de la forme

$$(3.7) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad W(x, t) \in \mathbb{R}^N.$$

On diagonalise la matrice A et on suppose que la frontière $\{x = 0\}$ est **non caractéristique**, *id est* qu'il n'y a pas de valeur propre nulle :

$$(3.8) \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_{N-p} < \lambda_{N-p+1} < \dots < \lambda_N.$$

Les $(N - p)$ premières valeurs propres correspondent à des directions caractéristiques "sortantes" du domaine d'étude $\{x > 0\}$ alors que les p dernières sont relatives à des directions "entrantes" (Figure 6).

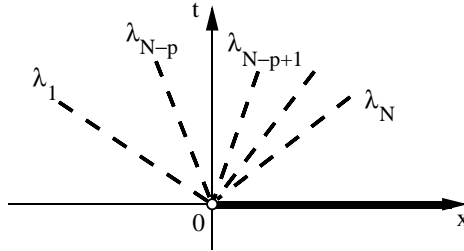


Figure 6. Condition limite pour un problème hyperbolique linéaire. Les variables caractéristiques "entrantes" sont une fonction affine des caractéristiques "sortantes".

On note E_- (respectivement E_+) les sous-espace de \mathbb{R}^N engendré par les $(N-p)$ premiers vecteurs propres de A (respectivement les p derniers). On a donc

$$(3.9) \quad W = P_- \bullet W + P_+ \bullet W \in E_- \oplus E_+ = \mathbb{R}^N.$$

Une généralisation naturelle de la proposition 3 consiste à ne pas se donner de condition limite pour les directions caractéristiques sortantes, *i.e.* pour $P_- \bullet W$, et imposer la valeur du champ pour les caractéristiques entrantes :

$$(3.10) \quad P_+ \bullet W(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

où $[0, \infty[\ni t \mapsto g(t) \in E_+$ est, par exemple, une fonction régulière.

- Toutefois, le problème formé de l'équation (3.7) et d'une condition initiale

$$(3.11) \quad W(x, 0) = W_0(x), \quad x > 0$$

reste **bien posé** par exemple dans le cadre d'une approche mathématique introduite par H.O. Kreiss (1970) et que nous ne développons pas ici. On peut généraliser la condition à la limite (3.10) de la manière suivante. On considère une application linéaire $E_- \ni W \mapsto S \bullet W \in E_+$ fixée, qui transforme un état $W \in E_-$ "sortant" en un état $S \bullet W \in E_+$ "entrant". C'est un "opérateur de **réflexion**" à la frontière. La condition limite

$$(3.12) \quad P_+ \bullet W(0, t) = S \bullet P_- \bullet W(0, t) + g(t), \quad t > 0,$$

exprime que les composantes "entrantes" sont une fonction **affine** des composantes "sortantes". Le problème (3.7) (3.11) (3.12) avec condition initiale et condition limite est bien posé mathématiquement.

- L'application des énoncés précédents pour l'étude de la dynamique des gaz est naturelle dans le cadre d'une **linéarisation** des équations d'Euler autour d'un état fixe W_0 . Le plus simple est d'écrire les équations de la dynamique des gaz en variables d'état de densité, vitesse et entropie :

$$(3.13) \quad V = (\rho - \rho_0, u - u_0, s - s_0)^t \equiv (\rho', u', s')^t.$$

La dynamique des gaz linéarisée s'écrit alors

$$(3.14) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ c_0^2/\rho_0 & u_0 & \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \bullet \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0$$

et les vecteurs propres r_j^0 donnés par :

$$(3.15) \quad r_1^0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2^0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_0 \\ 0 \\ -c_0^2 \end{pmatrix}, \quad r_3^0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ c_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et le vecteur incrément V qui se développe sur la base $(r_j^0)_{1 \leq j \leq 3}$ avec les variables caractéristiques φ_j

$$(3.16) \quad V = \sum_{j=1}^3 \varphi_j r_j^0.$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

L'expression des φ_j est simple si on introduit la pression linéarisée :

$$(3.17) \quad p' \equiv c_0^2 \rho' + \frac{\partial p}{\partial s}(W_0) s' \simeq p - p_0$$

et on a :

$$(3.18) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} (p' - \rho_0 c_0 u') \\ \varphi_2 = -\frac{1}{c_0^2} s' \\ \varphi_3 = \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} (p' + \rho_0 c_0 u') \end{cases}$$

• Les conditions limites qu'on se donne classiquement pour le système (3.14) des équations d'Euler linéarisées s'écrivent sous la forme (3.12). On décrit ci-dessous la discussion classique, issue des divers choix possibles pour les signes des valeurs propres.

(i) $u_0 > c_0$: **entrée supersonique.**

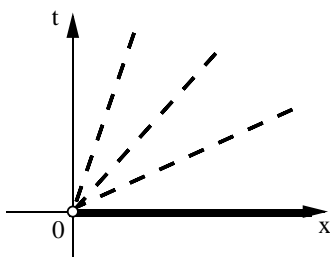


Figure 7. *Entrée supersonique : $u_0 > c_0$.
On se donne tout un état à l'entrée $x = 0$.*

On a dans ce cas

$$(3.19) \quad 0 < \lambda_1^0 = u_0 - c_0 < \lambda_2^0 = u_0 < \lambda_3^0 = u_0 + c_0,$$

donc $E_-^0 = \{0\}$, $E_+^0 = \mathbb{R}^3$ et l'opérateur S est nécessairement nul (Figure 7).

La condition limite (3.12) se réduit à

$$(3.20) \quad W(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

où $g(t)$ est un état fluide linéarisé, qui dépend donc de trois paramètres scalaires indépendants.

(ii) $c_0 > u_0 > 0$: **entrée subsonique.**

Dans ce cas, on a une valeur propre négative, et deux positives :

$$(3.21) \quad \lambda_1^0 = u_0 - c_0 < 0 < \lambda_2^0 = u_0 < \lambda_3^0 = u_0 + c_0.$$

On a $E_-^0 = \mathbb{R} r_1^0$ et $E_+ = \langle r_2^0, r_3^0 \rangle$. L'opérateur S de réflexion peut donc s'écrire sous la forme

$$(3.22) \quad \varphi_2 = \alpha \varphi_1, \quad \varphi_3 = \beta \varphi_1$$

et l'état linéarisé $g(t)$ appartient à l'espace "entrant" E_+^0 .

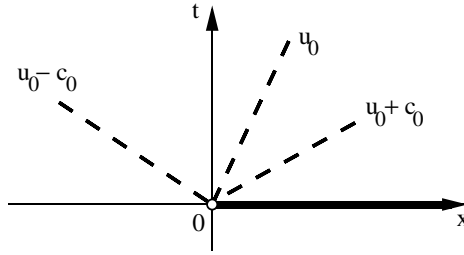


Figure 8. Entrée subsonique : $0 < u_0 < c_0$.
On se donne deux scalaires indépendants.

• **Proposition 4. Condition limite de "débit-température".**

La condition limite de débit température qui consiste à se donner le débit ρu et l'énergie interne e , soit

$$(3.23) \quad \rho u = Q, \quad e = \epsilon$$

se linéarise autour d'un état de référence W_0 sous la forme (3.12), avec

$$(3.24) \quad S = \begin{pmatrix} 2(\gamma - 1) \frac{\rho_0 c_0}{(c_0 + \gamma u_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0} & \frac{c_0 - \gamma u_0}{c_0 + \gamma u_0} \end{pmatrix}^t$$

$$(3.25) \quad g = \begin{cases} \frac{(\gamma - 1) c_0^2 (Q - \rho_0 u_0) - \gamma \rho_0 (u_0 + c_0) (\epsilon - e_0)}{c_0^2 (c_0 + \gamma u_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0} r_2^0 + \\ + \frac{c_0^2 (Q - \rho_0 u_0) + \gamma (\gamma - 1) \rho_0 u_0 (\epsilon - e_0)}{\rho_0 c_0^2 (c_0 + \gamma u_0)} r_3^0. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 4.

• Il s'agit simplement de linéariser la relation (3.23), ce qui s'écrit autour de l'état de référence W_0 :

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$(3.26) \quad \rho_0 u' + \rho' u_0 = Q - \rho_0 u_0$$

$$(3.27) \quad \frac{1}{\rho_0} p' - \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho' = (\gamma - 1)(\epsilon - e_0).$$

• On a, compte tenu de (3.17) :

$$(3.28) \quad \rho' = \frac{1}{c_0^2} p' + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2 = \rho_0 (\varphi_1 + \varphi_3) + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} p' - \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho' &= \frac{1}{\rho_0} p' - \frac{c_0^2}{\gamma \rho_0} \rho' = \frac{1}{\rho_0} p' - \frac{c_0^2}{\gamma \rho_0} \left(\rho_0 (\varphi_1 + \varphi_3) + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2 \right) \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma \rho_0} p' - \frac{c_0^2}{\gamma \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_0^2 (\varphi_1 + \varphi_3) - \frac{c_0^2}{\gamma \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2. \end{aligned}$$

On injecte par ailleurs la relation (3.28) au sein de (3.26). Il vient :

$$\begin{aligned} \rho_0 u' + \rho' u_0 &= \rho_0 c_0 (-\varphi_1 + \varphi_3) + u_0 \rho_0 (\varphi_1 + \varphi_3) + \rho_0 u_0 \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2 \\ &= -\rho_0 (c_0 - u_0) + \rho_0 (u_0 + c_0) \varphi_3 + \rho_0 u_0 \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2, \end{aligned}$$

et les relations précédentes conduisent au système linéaire suivant :

$$(3.29) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 u_0 \varphi_2 + \rho_0 (u_0 + c_0) \varphi_3 = (Q - \rho_0 u_0) - \rho_0 (u_0 - c_0) \varphi_1 \\ \frac{-1}{\gamma - 1} \frac{c_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0 \varphi_2 + c_0^2 \varphi_3 = \gamma (\epsilon - e_0) - c_0^2 \varphi_1. \end{cases}$$

• La résolution du système linéaire (3.29) d'inconnue les variables caractéristiques entrantes φ_2 et φ_3 conduit à :

$$\varphi_2 = \frac{\gamma - 1}{c_0^2 (c_0 + \gamma u_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_0} \left[c_0^2 (Q - \rho_0 u_0) - \gamma \rho_0 (u_0 + c_0) (\epsilon - e_0) + 2 \rho_0 c_0^3 \varphi_1 \right]$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{c_0 + \gamma u_0} \left[\frac{1}{\rho_0} (Q - \rho_0 u_0) + \gamma (\gamma - 1) \frac{u_0}{c_0^2} (\epsilon - e_0) + (c_0 - \gamma u_0) \varphi_1 \right],$$

ce qui établit les relations (3.24) et (3.25). □

(iii) $-c_0 < u_0 < 0$: sortie subsonique.

On dispose de deux valeurs propres négatives et d'une positive :

$$(3.30) \quad \lambda_1^0 = u_0 - c_0 < \lambda_2^0 = u_0 < 0 < \lambda_3^0 = u_0 + c_0,$$

ce qui conduit à un espace "sortant" $E_- = \langle r_1^0, r_2^0 \rangle$ de dimension deux et un espace "entrant" $E_+ = \mathbb{R} r_3^0$ de dimension un. L'introduction d'un opérateur de réflexion S à la frontière revient à lier les variables caractéristiques sous la forme

$$(3.31) \quad \varphi_3 = \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2$$

avec un état $g(t)$ qui est proportionnel au troisième vecteur propre r_3^0 (Figure 9).

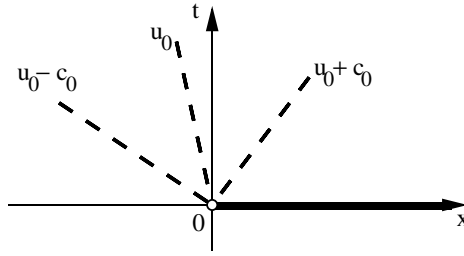


Figure 9. *Sortie subsonique : $-c_0 < u_0 < 0$. Une donnée scalaire doit être introduite à la frontière pour “poser” correctement la condition à la limite.*

• **Proposition 5. Condition limite de pression imposée.**

La condition de pression en sortie subsonique, c’est à dire

$$(3.32) \quad p = P$$

se linéarise autour d’un état de référence W_0 qui vérifie les relations (3.30) sous la forme d’une fonction affine (3.12), avec

$$(3.33) \quad S = (-1 \quad 0)$$

$$(3.34) \quad g = \frac{P - p_0}{\rho_0 c_0^2} r_3^0.$$

Preuve de la proposition 5.

• Il suffit d’exprimer la condition linéarisée de (3.32) autour de W_0 , c’est à dire

$$(3.35) \quad p' = P - p_0$$

à l’aide des variables caractéristiques. Or compte tenu de (3.18), on a

$$(3.36) \quad \varphi_1 + \varphi_3 = \frac{p'}{\rho_0 c_0^2}.$$

La proposition en résulte. □

(iv) $u_0 < -c_0$: **sortie supersonique.**

Toutes les valeurs propres de l’état de référence W_0 sont négatives :

$$(3.37) \quad \lambda_1^0 = u_0 - c_0 < \lambda_2^0 = u_0 < \lambda_3^0 = u_0 + c_0 < 0,$$

et le sous-espace sortant E_-^0 recouvre \mathbb{R}^3 tout entier. Les variables “entrantes” sont toujours nulles et la relation (3.12) ne dit rien : il n’y a pas de donnée numérique à fournir pour une condition limite de sortie supersonique (Figure 10).

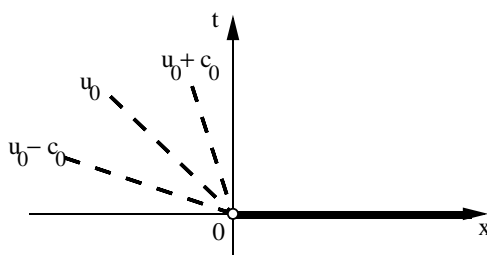


Figure 10. *Sortie supersonique : $u_0 < -c_0 < u_0$. Aucune donnée numérique n’est nécessaire pour traiter cette condition à la limite.*

- Nous n’avons pas traité le cas d’une paroi en $x = 0$, qui correspond à la version unidimensionnelle d’une condition de non-pénétration. Cette condition limite s’écrit simplement

$$(3.38) \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Elle correspond à une frontière caractéristique, puisque la relation (3.38) peut s’écrire aussi $\lambda_2(W(0, t)) = 0$. L’étude mathématique de telles conditions aux limites est très délicate, aussi nous préférons indiquer ici comment mettre en œuvre la condition (3.38) si on utilise le schéma de Godunov.

- L’idée est de se restreindre au cas d’un schéma numérique avec la méthode des volumes finis. La frontière $\{x = 0\}$ borde la “première maille” $K_{1/2}$ du domaine de calcul (Figure 11), à l’intérieur de laquelle “vit” l’état $W_{1/2}^n$.

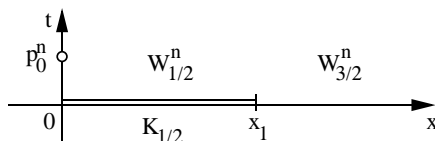


Figure 11. *Mise en œuvre de la condition limite de paroi solide.*

La méthode des volumes finis s’écrit

$$(3.39) \quad \frac{1}{\Delta t} (W_{1/2}^{n+1} - W_{1/2}^n) + \frac{1}{\Delta x} (f_1^n - f_0^n) = 0, \quad n \geq 0$$

et si le flux f_1^n peut être calculé avec le schéma de Godunov en utilisant l'état voisin $W_{3/2}^n$, soit

$$(3.40) \quad f_1^n = f\left(\mathcal{U}(0; W_{1/2}^n, W_{3/2}^n)\right), \quad n \geq 0,$$

on manque de donnée "à gauche" pour faire de même pour le **flux à la frontière** f_0^n . Compte tenu de la structure algébrique des équations d'Euler, la relation (3.38) impose au flux f_0^n la forme suivante :

$$(3.41) \quad f_0^n = (0, p_0^n, 0)^t$$

et il suffit de déterminer une valeur de la pression paroi p_0^n pour définir complètement le schéma de volumes finis qui prenne en compte la condition de non-pénétration (3.38).

- On suit pour cela l'approche linéarisée développée aux paragraphes précédents. On linéarise les équations de la dynamique des gaz autour de l'état connu $W_{1/2}^n$ qui est par hypothèse un état subsonique ($|u_0| < c_0$) mais ne satisfait pas forcément la condition limite $u_0 = 0$, qui a lieu sur le bord $x = 0$ et non en moyenne dans la première maille ! La linéarisation de (3.38) s'écrit :

$$(3.42) \quad u' = -u_{1/2}^n.$$

- Pour construire la condition limite, on écrit qu'au lieu de résoudre un problème de Riemann entre un état inconnu $W_{-1/2}^n$ et $W_{1/2}^n$, on résout un problème de Riemann **partiel** entre la variété des états W qui vérifient (3.38) et l'état $W_{1/2}^n$. Cette méthodologie dépasse le cadre de ce cours (voir par exemple notre article "Partial Riemann problem, Boundary conditions and gas dynamics" dans l'ouvrage [*Absorbing boundaries and layers, domain decomposition methods, application to large scale computers*, Nova Science Publishers, New York, p. 16-77, 2001] édité par L. Halpern et L. Tourette) et nous retenons ici qu'il suffit de linéariser la 3-onde, qui permet de propager l'information vers l'intérieur. On a donc

$$(3.43) \quad u' - \frac{c_{1/2}^n}{\rho_{1/2}^n} \rho' = 0, \quad s' = 0$$

soit, compte tenu de l'expression (3.17) de la pression linéarisée

$$(3.44) \quad p' - \rho_{1/2}^n c_{1/2}^n u' = 0.$$

- Quand on remplace u' par sa valeur obtenue en (3.42) et p' par $p_0^n - p_{1/2}^n$, il vient :

$$(3.45) \quad p_0^n = p_{1/2}^n - \rho_{1/2}^n c_{1/2}^n u_{1/2}^n$$

qui, joint à (3.41), est la façon la plus simple de traiter numériquement le cas d'une paroi solide avec la méthode des volumes finis.

4) ASPECTS BIDIMENSIONNELS

- La première propriété qui est utilisée pour mettre en œuvre la méthode des volumes finis à deux dimensions d'espace est l'invariance par rotation. On rappelle que les équations d'Euler de la dynamique des gaz prennent la forme

$$(4.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E \equiv \rho e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2))^t \\ f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t \\ g(W) = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t. \end{cases}$$

- Nous étudions leur invariance dans une rotation R_θ de \mathbb{R}^2 d'angle θ :

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pour un vecteur $\xi \equiv (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t$ de \mathbb{R}^4 , on pose :

$$(4.4) \quad \bar{R}_\theta \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \cos \theta \beta - \sin \theta \gamma \\ \sin \theta \beta + \cos \theta \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

et on a alors les propriétés algébriques suivantes.

- **Proposition 6. Transformation du flux par rotation.**

Pour R_θ rotation du plan \mathbb{R}^2 donnée à la relation (4.3), on a :

$$(4.5) \quad f(\bar{R}_\theta \cdot W) = \cos \theta \bar{R}_\theta \cdot f(W) - \sin \theta \bar{R}_\theta \cdot g(W)$$

$$(4.6) \quad g(\bar{R}_\theta \cdot W) = \sin \theta \bar{R}_\theta \cdot f(W) + \cos \theta \bar{R}_\theta \cdot g(W),$$

avec $f(\bullet)$ et $g(\bullet)$ introduits en (4.2) et \bar{R}_θ défini à la relation (4.4).

Preuve de la proposition 6.

- Considérées sur la première et la quatrième composante, les relations (4.5) et (4.6) sont une conséquence directe de (4.4). Pour la seconde et la troisième composante, il faut effectuer le calcul qui suit :

$$\begin{aligned} & \cos \theta R_\theta \cdot \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho u v \end{pmatrix} - \sin \theta R_\theta \cdot \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} = \\ & = \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta (\rho u^2 + p) - \sin \theta \rho u v \\ \sin \theta (\rho u^2 + p) + \cos \theta \rho u v \end{pmatrix} \\ & \quad - \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \rho u v - \sin \theta (\rho v^2 + p) \\ \sin \theta \rho u v + \cos \theta (\rho v^2 + p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vers la mécanique des fluides numérique

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \rho [\cos \theta (\cos \theta u^2 - \sin \theta uv) - \sin \theta (\cos \theta uv - \sin \theta v^2)] + p \\ \rho [\cos \theta (\sin \theta u^2 + \cos \theta uv) - \sin \theta (\sin \theta uv + \cos \theta v^2)] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho [\cos^2 \theta u^2 - 2 \sin \theta \cos \theta uv + \sin^2 \theta v^2] + p \\ \rho [\sin \theta \cos \theta u^2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) uv - \sin \theta \cos \theta v^2] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho (u \cos \theta - v \sin \theta)^2 + p \\ \rho (u \cos \theta - v \sin \theta) (u \sin \theta + v \cos \theta) \end{pmatrix} = f(\overline{R}_\theta \bullet W)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sin \theta R_\theta \bullet \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{pmatrix} + \cos \theta R_\theta \bullet \begin{pmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix} &= \\
 = \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \theta (\rho u^2 + p) - \sin \theta \rho uv \\ \sin \theta (\rho u^2 + p) + \cos \theta \rho uv \end{pmatrix} &+ \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \rho uv - \sin \theta (\rho v^2 + p) \\ \sin \theta \rho uv + \cos \theta (\rho v^2 + p) \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} \rho [\sin \theta (\cos \theta u^2 - \sin \theta uv) + \cos \theta (\cos \theta uv - \sin \theta v^2)] \\ \rho [\sin \theta (\sin \theta u^2 + \cos \theta uv) + \cos \theta (\sin \theta uv + \cos \theta v^2)] \end{pmatrix} + p \\
 = \begin{pmatrix} \rho [\sin \theta \cos \theta u^2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) uv - \sin \theta \cos \theta v^2] \\ \rho [\sin \theta u^2 + 2 \sin \theta \cos \theta uv + \cos^2 \theta v^2] \end{pmatrix} + p \\
 = \begin{pmatrix} \rho (u \cos \theta - v \sin \theta) (u \sin \theta + v \cos \theta) \\ \rho (u \cos \theta + v \sin \theta)^2 + p \end{pmatrix} = g(\overline{R}_\theta \bullet W).
 \end{aligned}$$

Les relations (4.5) et (4.6) sont alors établies. \square

- Si on dispose d'une solution $(x, y, t) \mapsto W(x, y, t) \in \Omega$ des équations d'Euler (4.1), l'invariance par rotation permet d'en fabriquer une nouvelle sous la forme

$$(4.7) \quad V(x', y', t') = \overline{R}_\theta \bullet W \left(R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t' \right)$$

où R_θ est la matrice de rotation proposée en (4.3).

- **Proposition 7. Invariance par rotation des équations d'Euler.**

Si $X(x, y, t)$ est solution de (4.1), alors la fonction $V(\bullet)$ donnée à la relation (4.7) est encore solution des équations d'Euler. On a :

$$(4.8) \quad \frac{\partial V}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} f(V) + \frac{\partial}{\partial y'} g(V) = 0.$$

Preuve de la proposition 7.

• On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} f(V) + \frac{\partial}{\partial y'} g(V) &= \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{R}_\theta \bullet W \left(R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[f \left(\bar{R}_\theta \bullet W \left(R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \right) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y'} \left[g \left(\bar{R}_\theta \bullet W \left(R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \right) \right) \right] \\
 &= \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\cos \theta (\bar{R}_\theta \bullet f) (W(x' \cos \theta + y' \sin \theta, -x' \sin \theta + y' \cos \theta, t)) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \sin \theta (\bar{R}_\theta \bullet g) (W(x' \cos \theta + y' \sin \theta, -x' \sin \theta + y' \cos \theta, t)) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\sin \theta (\bar{R}_\theta \bullet f) (W(x' \cos \theta + y' \sin \theta, -x' \sin \theta + y' \cos \theta, t)) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \cos \theta (\bar{R}_\theta \bullet g) (W(x' \cos \theta + y' \sin \theta, -x' \sin \theta + y' \cos \theta, t)) \right] \\
 &= \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + \cos \theta \left[\cos \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial f}{\partial x} - \sin \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial g}{\partial y} \right] \\
 &\quad - \sin \theta \left[\cos \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial g}{\partial x} - \sin \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial f}{\partial y} \right] \\
 &\quad + \sin \theta \left[\sin \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial f}{\partial y} \right] \\
 &\quad + \cos \theta \left[\sin \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial g}{\partial x} + \cos \theta \bar{R}_\theta \bullet \frac{\partial g}{\partial y} \right] \\
 &= \bar{R}_\theta \bullet \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) \right) \left(R_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \right) = 0,
 \end{aligned}$$

ce qui établit la propriété. □

• Si on cherche à discrétiser les équations d'Euler de la dynamique des gaz à deux dimensions avec la méthode des volumes finis, on recouvre le domaine d'étude Ω par des éléments triangulaires ou (le plus souvent) quadrangulaires avec un maillage \mathcal{T} . On dispose donc des éléments $K \in \mathcal{T}^2$, des interfaces $a \in \mathcal{T}^1$ et des sommets $S \in \mathcal{T}^0$ comme représenté par exemple sur la figure 12.

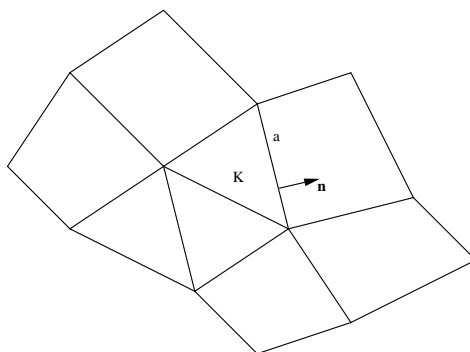


Figure 12. *Volumes finis bidimensionnels.*

Par intégration de la loi de conservation (4.1) dans le volume K , en posant

$$(4.9) \quad W_K = \frac{1}{|K|} \int_K W(x, t) dx ,$$

il vient :

$$(4.10) \quad \frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} (f n_x + g n_y) d\gamma = 0 , \quad K \in \mathcal{T}^2 .$$

Il suffit de déterminer le flux normal moyen d'interface $(f n_x + g n_y)(a)$ en fonction de l'ensemble des valeurs moyennes $\{W_L, L \in \mathcal{T}^2\}$ pour définir complètement le schéma de volumes finis dans son approximation spatiale, avant d'intégrer l'équation différentielle ordinaire (4.10) avec un schéma approprié. Si on se borne à un schéma à deux points pour le flux, le flux moyen $(f n_x + g n_y)(a)$ est approché par une fonctionnelle qui ne dépend que des états dans les mailles à gauche de l'interface K_g et à droite K_d , et de la normale n_a (Figure 13) :

$$(4.11) \quad \frac{1}{|a|} \int_a (f n_x + g n_y) d\gamma \simeq \Phi(W_{K_g^a}, n^a, W_{K_d^a}) .$$

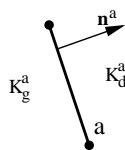


Figure 13. *Notations.*

- Compte tenu de l'invariance par rotation exposée à la proposition 7, ce flux numérique doit se transformer comme les flux physiques des équations d'Euler,

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

dans une rotation arbitraire R_θ telle que définie par exemple en (4.3). Nous proposons

$$(4.12) \quad \Phi\left(\overline{R}_\theta \bullet W_{K_g^a}, R_\theta \bullet n^a, \overline{R}_\theta \bullet W_{K_d^a}\right) = \overline{R}_\theta \bullet \Phi\left(W_{K_g^a}, n^a, W_{K_d^a}\right).$$

L'adaptation bidimensionnelle du schéma de Godunov consiste d'abord à traiter le cas particulier où la normale n^a est alignée avec le vecteur de base $(1, 0)$. Dans ce cas, le flux $\Phi(\bullet)$ est la valeur du flux de la solution autosemblable du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ monodimensionnel suivant :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u E + p u \end{pmatrix} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Nous posons alors

$$(4.14) \quad \Phi\left(W_g, (1, 0), W_d\right) = f\left(\mathcal{U}(0; W_g, W_d)\right).$$

- La résolution du problème (4.13) diffère en très peu de points de celle proposée au chapitre 8. Nous laissons l'étude de cette variante en exercice au lecteur. Dans le cas d'une direction normale quelconque, on se ramène au cas précédent en utilisant la matrice de rotation R_θ telle que

$$(4.15) \quad R_\theta \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = n^a.$$

Exercices corrigés

Les exercices proposés cherchent à illustrer le cours. Les notations en sont parfois différentes.

1) ENONCÉS

1) Trafic routier

• Soient \mathbb{R} une route droite, $0 \leq u(t, x) \leq u_{\max}$ la vitesse des véhicules à l'instant $t \geq 0$ et au point x , et $\rho(t, x)$ la densité de véhicules à l'instant t et au point x . Le nombre de véhicules entre x_0 et $x_1 \geq x_0$ à l'instant t est représenté par l'intégrale de la densité de véhicules

$$N(t, x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(t, x) dx.$$

• Puis on fait l'hypothèse de modélisation : la vitesse est une fonction positive ou nulle (on est sur une autoroute) de la densité $u = u(\rho) : [0, \rho_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $u(\rho_{\max}) = 0$. Par exemple $u = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$.

a) Montrer que l'on a l'équation

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0.$$

b) On considère ainsi l'équation hyperbolique de taille $d = 1$ et en dimension $n = 1$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, & f(\rho) = \rho u(\rho), \\ \rho(t = 0, x) = \rho_0(x). \end{cases}$$

On fait l'hypothèse qu'il existe une solution $\rho \in C^1([0, T[\times \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction

$$\begin{cases} x : [0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, X) \mapsto x(t, X), \end{cases}$$

avec $\rho(t, x(t, X)) = \rho_0(X)$.

c) Montrer que les solutions sont des droites dans le plan (t, X) . Ces droites sont appelées les caractéristiques.

2) Système de Saint Venant des eaux peu profondes

- On considère un fluide (de l'eau typiquement) incompressible $\rho(t, x) \approx \bar{\rho}$ constant s'écoulant sur un fond plat. Soit $h(t, x)$ la hauteur d'eau. Appelons $M(t, x_0, x_1)$ la masse totale d'eau présente en $x_0 \leq x \leq x_1$ à l'instant t :

$$M(t, x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} (\bar{\rho}h(t, x)) dx.$$

Soit $u(t, x)$ est la valeur moyenne de la composante horizontale de la vitesse

$$u(t, x) = \frac{1}{h(t, x)} \int_0^{h(t, x)} h(t, y)u(t, x, y) dy.$$

- a) Montrer que l'on a l'équation $\partial_t h + \partial_x(hu) = 0$.
 b) Soient (h, u) une solution. On considère

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t, X)}{\partial t} = u(t, x(t, X)), \\ x(0, X) = X. \end{cases}$$

Montrer que la masse d'eau présente entre $x_0(t) = x(t, X_0)$ et $x_1(t) = x(t, X_1)$ est constante.

- c) On définit

$$u_{x_0, x_1}(t) = \frac{\int_{x_0(t)}^{x_1(t)} (\bar{\rho}h(t, x)u(t, x)) dx}{M_{x_0, x_1}},$$

ainsi que la pression hydrostatique intégrée au point x

$$p(x, t) = \int_{y=0}^{y=h} [g(h - y)] dy = \frac{1}{2}gh^2,$$

où g est la constante de gravitation. Justifier l'équation

$$M_{x_0, x_1} \frac{d}{dt} u_{x_0, x_1}(t) = \bar{\rho} (p(x_0, t) - p(x_1, t)).$$

- d) En déduire le système de lois de conservation (dit système de Saint-Venant)

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) + \partial_x p = 0. \end{cases}$$

3) Linéarisation d'un système de lois de conservation

- Soit le système de lois de conservation

$$\partial_t W + \partial_x f(W) = 0, \quad W(t, x) \in \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Nous étudions la stabilité des solutions de petite amplitude autour des constantes :

Exercices corrigés

$$W_\varepsilon(t, x) = W_0 + \varepsilon V(t, x) + o(\varepsilon).$$

- a) Montrer que V est solution (au premier ordre) de

$$\partial_t V + A \partial_x V = 0, \quad A = \frac{\partial f}{\partial W}(U_0).$$

- b) Après passage en Fourier on étudie les solutions du type

$$V(t, x) = e^{i(kx - \lambda k t)} Z$$

où $Z \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur que l'on va préciser et $k \in \mathbb{R}$. Montrer la relation

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = 0.$$

- c) Une condition nécessaire de stabilité est

$$\text{Im}(\lambda k) \leq 0.$$

Montrer que si le système stable alors toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont réelles $\text{Im}(\lambda) = 0$.

- d) La condition d'hyperbolicité du cours impose une condition plus forte sur la matrice A , à savoir la matrice A est diagonalisable à valeurs propres réelles et vecteurs propres réelles. Les systèmes suivants sont-ils hyperboliques ?

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \quad \partial_t v + \partial_x u = 0,$$

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \quad \partial_t v - \partial_x u = 0,$$

$$\partial_t u + \partial_x v = 0, \quad \partial_t v = 0.$$

Et pour le système de Saint Venant ?

4) Équation de Burgers : modélisation

- L'équation de Burgers est centrale dans l'étude des équations non linéaires.

- a) Soit l'équation non linéaire générale

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

où le flux $f(u)$ est vraiment non linéaire au sens $f''(u) \neq 0$. Mettre cette équation sous la forme $\partial_t v + \partial_x \frac{v^2}{2} = 0$ pour un v que l'on déterminera. Vérifier que cette transformation est licite pour les solutions C^1 et illicite pour les solutions faibles (qui peuvent *a priori* être discontinues).

- b) Montrer que l'équation du trafic routier

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$$

avec $u(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ est équivalente à l'équation de Burgers même pour les solutions faibles.

5) Equation de Burgers et transformation de Cole-Hopf

- Nous considérons l'équation de Burgers visqueuse dans le régime $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \partial_x \left(\frac{u_\varepsilon^2}{2} \right) = \varepsilon \partial_{xx} u_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

- a) Nous faisons l'hypothèse que u_ε tend vers une limite u quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$: u est la limite visqueuse ; on peut faire le parallèle avec les fluides de faible viscosité. Plus précisément on suppose que

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \exists C > 0, \|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Montrer que u est solution faible de l'équation de Burgers.

- b) Le reste de l'exercice consiste à calculer u_ε , ce qui permettra de passer à la limite ensuite. On pose $\partial_x \varphi_\varepsilon = u_\varepsilon$. Trouver une fonction f telle que $\psi_\varepsilon = f(\varphi_\varepsilon)$ satisfasse à l'équation de la chaleur linéaire

$$\partial_t \psi_\varepsilon = \varepsilon \partial_{xx} \psi_\varepsilon.$$

Calculer la donnée initiale $\psi_\varepsilon(0, x)$ en fonction de u_0 .

- c) On rappelle que le noyau de l'équation de la chaleur est

$$G_\varepsilon(t, x) = \exp\left(-\frac{\frac{x^2}{4\varepsilon t}}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\right).$$

Calculer $\psi_\varepsilon(t)$.

- d) Montrer que

$$u_\varepsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u_0(x-y) \psi_\varepsilon(0, x-y) G_\varepsilon(t, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(0, x-y) G_\varepsilon(t, y) dy}.$$

Que dire pour le maximum de $u(t, x)$?

- e) Soit l'intégrale

$$A_\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-\frac{G(y)}{2\varepsilon}} dy.$$

La méthode des points stationnaires montre que

$$A_\varepsilon \approx \sum_i g(y_i) \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|G''(y_i)|}} \exp\left(-\frac{G(y_i)}{2\varepsilon}\right),$$

où les points stationnaires y_i sont solutions de $G'(y_i) = 0$. Appliquer à l'étude de $u(t, x)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exercices corrigés

f) On suppose que le profil initial est régulier et monotone croissant $u'_0(x) \geq 0$. Montrer l'unicité du point stationnaire. En déduire la limite u . Montrer que la solution est régulière.

6) Entropies de Kručkov

- Soit l'équation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0.$$

a) Soit $\eta(u)$ une fonction deux fois dérivable et convexe $\eta''(u) > 0$. Rappeler pourquoi les "bonnes" solutions au sens faible de l'équation vérifient l'inégalité d'entropie au sens faible

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x \xi(u) \leq 0.$$

b) On considère les entropies de Kručkov $\eta_k(u) = |u - k|$ et les flux d'entropie $\xi_k(u) = (\text{signe}(u - k))(f(u) - f(k))$. Montrer que la solution entropique vérifie au sens faible

$$\partial \eta_k(u) + \partial_x \xi_k(u) \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

b) Réciproquement montrer qu'une solution entropique pour toutes les entropies de Kručkov est entropique pour toutes les entropies deux fois dérivables.

7) Un système de taille deux

- On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_x [(a^2 - 1)b] = 0, \\ \partial_t b + \partial_x [(b^2 - 1)a] = 0. \end{cases}$$

a) Déterminer le domaine d'hyperbolicité de ce système.

b) Soit $\eta = \pm \frac{1}{2}(a^2 - 1)(b^2 - 1)$. Trouver une loi de conservation supplémentaire pour η , vérifiée par les solutions régulières du système.

c) A quelle condition η est-elle une entropie ? Cette condition est-elle compatible avec le domaine d'hyperbolicité ? Calculer les variables adjointes.

8) Dissipation

- On considère le système général

$$\partial_t W + \partial_x f(W) = \varepsilon \partial_x (D(\varphi) \partial_x W), \quad \varepsilon \geq 0.$$

La partie hyperbolique est munie d'un couple entropie-flux d'entropie $(\eta(W), \xi(W))$. Ici φ est la variable adjointe (ou variable entropique) $\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial W}$.

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

- a) Trouver une condition suffisante sur la matrice $E(\varphi) = D(\varphi) \frac{\partial W}{\partial \varphi}$ pour que toutes les solutions régulières du modèle vérifient

$$\partial \eta(W) + \partial_x \xi(W) \leq \varepsilon \partial_x(\varphi, E(\varphi) \partial_x \varphi).$$

- b) Calculer la matrice $E(\varphi)$ pour le système de la dynamique des gaz en coordonnées d'Euler avec viscosité et dissipation thermique.

9) Dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange

- Le système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange s'écrit, en une dimension d'espace,

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, & \tau = \frac{1}{\rho}, \\ \partial_t u + \partial_m p = 0, \\ \partial_t e + \partial_m pu = 0. \end{cases}$$

Nous adoptons une loi de gaz parfait $p = (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\tau}$.

- a) Quel est le couple entropie-flux d'entropie ? Quels sont les variables adjointes ?
- b) Soit un système hyperbolique tel que le flux d'entropie est nul. Montrer que le flux $f(W)$ est une fonction homogène de degré zéro en fonction de la variable adjointe $\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial W}$.
- c) Une réciproque est la suivante. On se donne une fonction strictement convexe $\eta(W)$. Soit le système abstrait de lois de conservation

$$\partial_t W + \partial_m \begin{pmatrix} M\Psi \\ -\frac{1}{2}(\Psi, M\Psi) \end{pmatrix} = 0,$$

où $W = (W_1, \dots, W_n)$, $\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial W} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $\Psi = (\frac{\varphi_1}{\varphi_n}, \dots, \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n})$. Montrer que si $M = M^t$ est une matrice constante, alors le flux d'entropie est nul. Calculer M et Ψ pour l'exemple.

10) Schéma de Godunov pour l'équation de Burgers

- On considère l'équation de Burgers.
- a) Rappeler la solution du problème de Riemann.
- b) Construire le schéma de Godunov.
- c) Montrer que le schéma de Godunov vérifie le principe du maximum (sous CFL $\leq \frac{1}{2}$).
- d) On suppose que la CFL est inférieure à $\frac{1}{2}$. Montrer que le schéma de Godunov vérifie l'inégalité de variation totale décroissante

Exercices corrigés

$$\sum_j |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| \leq \sum_j |u_j^n - u_{j-1}^n|.$$

11) Preuve de convergence du schéma de Godunov

- Pour une fonction $v \in L^1(\mathbb{R})$ on pose

$$|v|_{BV(\mathbb{R})} = \sup_{\varphi} \int_{\mathbb{R}} v(x)(-\varphi'(x)) dx$$

où φ est choisi dans l'ensemble des fonctions à support compact de $C^1(\mathbb{R})$, avec $|\varphi(x)| \leq 1$ partout.

- a) Pour v telle que $v' \in L^1$, montrer que $|v|_{BV} = \|v'\|_{L^1}$. Si la fonction v est constante par morceaux, montrer que

$$|v|_{BV} = \sum_{x_i \in D} |v(x_i^+) - v(x_i^-)|$$

où D est l'ensemble des points de discontinuité de v . Justifier le terme de schéma à variation totale décroissante pour le schéma de Godunov.

- b) Nous admettons le théorème de Helly, détaillé par exemple dans le livre de Le Veque [*Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, 1990], lequel est un résultat de **compacité** :

Théorème : $L^1 \cap BV$ est compact dans L^1_{loc} .

Le même résultat est vrai en dimension deux d'espace pour

$$|w|_{BV(\mathbb{R}^2)} = \begin{cases} \sup_{\varphi(t,x)} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} w(t,x)(-\partial_x \varphi(t,x)) dt dx \\ + \sup_{\varphi(t,x)} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} w(t,x)(-\partial_t \varphi(t,x)) dt dx. \end{cases}$$

Montrer qu'un schéma à variation totale décroissante permet de construire une solution approchée $u_{\Delta x}$ constante par rectangle dans le plan (t,x) , telle que la variation totale est bornée uniformément en Δx

$$|u_{\Delta x}|_{BV([0,T] \times \mathbb{R})} \leq C.$$

On supposera que la donnée initiale est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$.

- c) Montrer la convergence dans L^1 de la solution numérique calculée à l'exercice précédent (Schéma de Godunov pour l'équation de Burgers). Montrer que le limite u est une solution au sens faible de l'équation.

- d) Montrer le

Théorème : Soit un flux $f(u)$ convexe et Lipschitz. Soit $u_0 \in L^1 \cap BV$. Alors il existe au moins une solution de

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x).$$

12) Ondes linéaires

- Soit le système des ondes linéaires

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u - \partial_x v = 0. \end{cases}$$

- Quels sont les solutions discontinues ? La condition d'entropie joue-t-elle un rôle ? Vérifier que chacune des deux solutions discontinues construites correspond à la continuité de $v + u$ ou $v - u$.
- Existe-t-il des solutions régulières auto-semblables (des détentes) ?
- Construire la solution du problème de Riemann.

13) Le p-système

- Soit le système des eaux peu profondes, en coordonnées de Lagrange,

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(v) = 0. \end{cases}$$

Ici $p(v)$ est la pression : on pourra prendre $p(v) = v^{-2}$; $p'(v) < 0$. On rappelle que ce système correspond à l'écriture du système des eaux peu profondes en coordonnées de Lagrange (le vérifier si nécessaire).

- Re-vérifier que le système est hyperbolique.
- Quels sont les solutions discontinues ? La condition d'entropie joue-t-elle un rôle ? On pourra penser à éliminer u^+ et u^- dans l'inégalité d'entropie. Montrer que la condition d'entropie revient à dire que les "vagues" ne peuvent être que "croissantes".
- Existe-t-il des solutions régulières auto-semblables (des détentes) ?
- Existe-t-il des discontinuités de contact non triviales ?
- On considère la rupture brutale d'un barrage sur fond non sec. Construire la solution du problème de Riemann (on pourra se contenter de rester en variable de Lagrange) : on vérifiera que cette solution se compose d'une détente du côté du barrage et d'un choc (*i.e.* une vague) du côté de la rivière aval.

14) Chocs pour la dynamique de gaz

- Soit les relations de Rankine-Hugoniot

$$\begin{cases} -\sigma(\rho^+ - \rho^-) + (\rho^+ u^+ - \rho^- u^-) = 0, \\ -\sigma(\rho^+ u^+ - \rho^- u^-) + (\rho^+ (u^+)^2 + p^+ - \rho^- (u^-)^2 - p^-) = 0, \\ -\sigma(\rho^+ e^+ - \rho^- e^-) + (\rho^+ u^+ e^+ + p^+ u^+ - \rho^- u^- e^- - p^- u^-) = 0, \\ -\sigma(\rho^+ S^+ - \rho^- S^-) + (\rho^+ u^+ S^+ - \rho^- u^- S^-) \geq 0. \end{cases}$$

- a) Montrer quelles sont équivalentes à (j à déterminer)

$$\begin{cases} -j(\tau^+ - \tau^-) - (u^+ - u^-) = 0, \\ -j(u^+ - u^-) + (p^+ - p^-) = 0, \\ -j(e^+ - e^-) + (p^+ u^+ - p^- u^-) = 0, \\ -j(S^+ - S^-) \geq 0. \end{cases}$$

avec $p = (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\tau}$.

- b) Exprimer ε^+ en fonction de τ^+ et des données. Montrer que le facteur maximal de compression sous choc est $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$.

- c) On suppose j positif. Montrer que la partie admissible (au sens de la condition d'entropie) de la courbe correspond à $p \geq p^+$, $\tau \leq \tau^+$, $\rho \geq \rho^+$, $u \geq u^+$, $T \geq T^+$.

2) PROPOSITION DE CORRECTION DES EXERCICES

1) Trafic routier

- a) Soit $N_{x_0, x_1}(t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(t, x) dx$ le nombre de véhicules entre x_0 et $x_1 > 0$ à l'instant t . Alors

$$N'_{x_0, x_1}(t) = u(t, x_0)\rho(t, x_0) - u(t, x_1)\rho(t, x_1).$$

Donc

$$\int_{x_0}^{x_1} \partial_t \rho(t, x) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \partial_x (\rho u)(t, x) dx.$$

Cela étant vrai pour tout x_0, x_1 on en déduit l'équation $\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0$.

- b) Supposons que la fonction $x(t, X)$ existe telle que $\rho(t, x(t, X)) = \rho_0(X)$. Alors

$$0 = \frac{d}{dt} \rho(t, x(t, X)) = \partial_t \rho(t, x(t, X)) + \partial_x \rho(t, x(t, X)) \partial_t x(t, X).$$

Or on a $\partial_t \rho + \frac{d}{d\rho}(\rho u) \partial_x \rho = 0$. Par identification nous trouvons

$$\partial_t x(t, X) = \frac{d}{d\rho}(\rho u)(t, x(t, X)), \quad x(0, X) = X.$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

Grâce au théorème de Cauchy-Lipshitz, il y a existence et unicité de la fonction $x(t, X)$ tant que $\frac{d}{d\rho}(\rho u)(t, x)$ est une fonction C^1 .

c) L'expression $\frac{d}{d\rho}(\rho u)$ est une fonction de ρ , lequel est constant le long de la courbe $t \mapsto x(t, X)$. Donc

$$\frac{d}{d\rho}(\rho u)(t, x(t, X)) = \frac{d}{d\rho}(\rho u)(0, x(0, X))$$

et

$$x(t, X) = X + t \frac{d}{d\rho}(\rho u)(0, X).$$

2) Système de Saint Venant des eaux peu profondes

• On applique essentiellement le même raisonnement que pour l'équation du trafic routier. Un point intéressant est que cela fournit une valeur de la pression.

a) On a

$$\partial_t M(t, x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} (\bar{\rho} \partial_t h(t, x)) dx = u(t, x_0) \bar{\rho} h(t, x_0) - u(t, x_1) \bar{\rho} h(t, x_1).$$

D'où le résultat.

b) Soit (h, u) une solution. A présent nous déterminons la masse d'eau présente dans un volume mobile. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t, x_0(t), x_1(t)) &= \partial_t M(t, x_0, x_1) + \partial_{x_0} M(t, x_0, x_1) + \partial_{x_1} M(t, x_0, x_1) \\ &= \partial_t M(t, x_0, x_1) + x_1'(t) h(t, x_1(t)) - x_0'(t) h(t, x_0(t)) = 0 \end{aligned}$$

grâce à la définition de $x(t, X)$.

c) Le résultat est une application de la loi de Newton $mx'' = f$, où la colonne d'eau de masse constante égale à $M(t, x_0(t), x_1(t))$ joue le rôle de la particule matérielle de vitesse $u_{x_0, x_1}(t)$. Le bilan des forces qui s'applique sur les faces avant et arrière de la colonne se calcule en fonction de la pression hydrostatique $p_h = \bar{\rho} p$. On a

$$M(t, x_0(t), x_1(t)) \frac{d}{dt} u_{x_0(t), x_1(t)}(t) = p_h(t, x_0(t)) - p_h(t, x_1(t)).$$

En faisant tendre x_0 vers x_1 et en simplifiant par $\bar{\rho}$ nous obtenons

$$h(t, x)(\partial_t + u(t, x)\partial_x)u(t, x) = -\partial_x p.$$

d) On a

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) + \partial_x p = u[\partial_t(hu) + \partial_x(hu)] + [h(\partial_t + u\partial_x)u + \partial_x p] = 0.$$

Exercices corrigés

3) Linéarisation d'un système de lois de conservation

a) On a

$$\partial_t \left(\frac{W_\varepsilon - W}{\varepsilon} \right) + \partial_x \left(\frac{f(W_\varepsilon) - f(W)}{\varepsilon} \right) = 0.$$

Or $\frac{W_\varepsilon - W}{\varepsilon} = V + O(\varepsilon)$ et $\frac{f(W_\varepsilon) - f(W)}{\varepsilon} = AV + O(\varepsilon)$ sous des conditions raisonnables de régularité. On obtient l'équation cherchée en négligeant les $O(\varepsilon)$.

b) L'équation en Z est

$$(\partial_t + A\partial_x) e^{i(kx - \lambda kx)} Z = 0,$$

c'est à dire

$$(ik \lambda \text{Id} - ikA) Z = 0.$$

C'est donc que $Z \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de la matrice A . L'équation des valeurs propres est $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$.

c) La condition $\text{Im}(\lambda k) \leq 0$ contrôle le taux de croissance de la fonction V . Changeant k en $-k$, on obtient $\text{Im}(\lambda) = 0$.

d) La réponse est positive pour le premier système et pour Saint Venant, et négative pour les deux autres.

4) Equation de Burgers

a) Pour un $u \in C^1$ on a

$$\partial_t u + f'(u) \partial_x u = 0 \iff f''(u)(\partial_t u + f'(u) \partial_x u) = 0$$

à condition que $f''(u) \neq 0$. Posons $v = f'(u)$. Alors $\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0$. Pour les solutions faibles sans hypothèse de régularité autre que $u \in L^\infty$ (la fonction test $\varphi \in C_0^1$ est à support compact) on a

$$\int_t \int_x (u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi) dt dx = 0$$

et on ne peut pas appliquer l'algèbre précédente.

b) Pour l'équation du trafic routier on commence par le changement de coordonnées $(s, y) = (t, -x)$ d'où

$$\partial_s \rho - \partial_y(\rho u) = \partial_s \rho + \partial_y \left(-\rho u_{\max} + \frac{u_{\max}}{\rho_{\max}} \rho^2 \right) = 0$$

puis on fait $(r, z) = (s, y + u_{\max} s)$:

$$\partial_r \rho + \partial_z \left(\frac{u_{\max}}{\rho_{\max}} \rho^2 \right) = 0$$

et enfin $(t, x) = (r, \frac{2\rho_{\max}}{u_{\max}} z)$:

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$\partial_t v + \partial_x \frac{v^2}{2} = 0.$$

A la différence du a) il s'agit ici de transformation de coordonnées : cela est donc valable aussi pour les solutions faibles.

5) Equation de Burgers et transformation de Cole-Hopf

a) Prenons un flux $f(u)$ général. On a

$$\int_t \int_x (u_\varepsilon \partial_t \varphi + f(u_\varepsilon) \partial_x \varphi) dt dx + \int_t \int_x (\varepsilon u_\varepsilon \partial_{xx} \varphi) dt dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_t \int_x (u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi) dt dx + \int_t \int_x [(u_\varepsilon - u) \partial_t \varphi + \\ + (f(u_\varepsilon) - f(u)) \partial_x \varphi] dt dx + \int_t \int_x (\varepsilon u_\varepsilon \partial_{xx} \varphi) dt dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1. \end{aligned}$$

Or

$$\left| \int_t \int_x (u_\varepsilon - u) \partial_t \varphi \right| \leq \|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\text{supp}(\varphi))} \times \max |\partial_t \varphi|,$$

et comme on a $\max_{t,x,\varepsilon} |u_\varepsilon(t,x)| \leq C$, on en déduit

$$\left| \int_t \int_x (f(u_\varepsilon) - f(u)) \partial_x \varphi \right| \leq C |f'(v)| \times \|u_\varepsilon - u\|_{L^1(\text{supp}(\varphi))} \times \max |\partial_x \varphi|,$$

et enfin

$$\left| \int_t \int_x (\varepsilon u_\varepsilon \partial_{xx} \varphi) dt dx \right| \leq \varepsilon \times C \times \max |\partial_{xx} \varphi|.$$

Après passage à la limite on obtient le résultat.

b) Une hypothèse pratique pour les calculs intermédiaires mais que l'on peut éliminer à la fin est $u(t, x=0) = 0$. On a

$$\partial_t \varphi_\varepsilon + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi_\varepsilon)^2 = \varepsilon \partial_{xx} \varphi_\varepsilon.$$

Pour $\psi_\varepsilon = \exp\left(-\frac{\varphi_\varepsilon}{2\varepsilon}\right)$ on obtient l'équation linéaire

$$\partial_t \psi_\varepsilon = \varepsilon \partial_{xx} \psi_\varepsilon.$$

La donnée initiale est

$$\psi_\varepsilon(0, x) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x u_0(y) dy\right).$$

c) On a $\psi_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(0, x-y) G_\varepsilon(t, y) dy.$

Exercices corrigés

d) On a $u_\varepsilon = -2\varepsilon \partial_x \log \Psi_\varepsilon$. D'où par calcul direct

$$u_\varepsilon(t, x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u_0(x-y) \psi_\varepsilon(0, x-y) G_\varepsilon(t, y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(0, x-y) G_\varepsilon(t, y) dy}.$$

Il s'ensuit que $u_\varepsilon(t, x)$ est une moyenne des $u_0(t, y)$. D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty},$$

ce qui remplit une des conditions d'application du passage à la limite.

e) Pour $g(y) = u_0(x-y)$ et

$$G(y) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{x-y} u_0(z) dz - \frac{y^2}{4\varepsilon t}\right),$$

on obtient

$$G'(y) = \left(u_0(x-y) - \frac{y}{t}\right) \frac{G(y)}{2\varepsilon}.$$

Posons $z_i = x - y_i$. Donc $G'(y_i) = 0$ si et seulement si

$$u_0(z_i) - \frac{x - z_i}{t} = 0 \iff x = z_i + t u_0(z_i).$$

Nous retrouvons l'équation des droites caractéristiques !!! D'où avec des notations évidentes

$$u_\varepsilon(t, x) \approx \frac{\sum_i u_0(z_i) \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|G''(y_i)|}} e^{-\frac{G(y_i)}{2\varepsilon}}}{\sum_i \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|G''(y_i)|}} e^{-\frac{G(y_i)}{2\varepsilon}}}.$$

f) Pour un t et un x donnés, on résout $x = z + t u_0(z)$. Comme $\frac{\partial x}{\partial z} > 0$, on obtient l'existence et l'unicité de z . Il y a une et une seule caractéristique qui passe en (t, x) . Donc $u(t, x) = u_0(z)$.

6) Entropies de Kručkov

a) Rappelons le principe de la limite visqueuse. Soit u_ε solution de

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} u_\varepsilon$$

plus une condition initiale. Alors

$$\partial_t \eta(u_\varepsilon) + \partial_x \xi(u_\varepsilon) = \eta'(u_\varepsilon) \varepsilon \partial_{xx} u_\varepsilon = \varepsilon \partial_x (\eta'(u_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon) - \varepsilon \eta''(u_\varepsilon) (\partial_x u_\varepsilon)^2.$$

Alors on suppose que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans L^1_{loc} et en restant uniformément borné. On passe à la limite au sens des distributions après multiplication par des fonctions test positives. D'où le résultat

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

$$- \int_t \int_x (\eta(u) \partial_t \varphi + \xi(u) \partial_x \varphi) dt dx \leq 0, \quad \varphi \geq 0.$$

b) Soit $\eta_k^\alpha(u)$ une régularisation convexe de la fonction $\eta_k(u) = |u - k|$. On commence par écrire l'inégalité d'entropie au sens faible pour $\eta_k^\alpha(u)$ grâce au a), puis on passe à la limite $\eta_k^\alpha \rightarrow \eta_k$. L'hypothèse $u \in L^\infty$ est utile.

c) Soit η régulier et $A > 0$ grand. Posons

$$S(u) = \int_{-A}^A \frac{\eta''(k)}{2} \eta_k(u) dk$$

et

$$F'(u) = f'(u)S'(u).$$

Alors (petit calcul)

$$S''(u) = \eta''(u).$$

Donc $S - \eta$ est une fonction affine de u que nous pouvons négliger dans le bilan d'entropie (cela veut dire que l'on peut retrancher la partie affine grâce à l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$). Donc $S = \eta$ (à une fonction affine de u près). Donc

$$\begin{aligned} & - \int_t \int_x (\eta(u) \partial_t \varphi + \xi \partial_x \varphi) dt dx = \\ & = \int_{-A}^A \frac{\eta''(k)}{2} \left(- \int_t \int_x (\eta(u) \partial_t \varphi + \xi \partial_x \varphi) dt dx \right) dk \leq 0. \end{aligned}$$

7) Un système de taille deux

a) La matrice Jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} 2ab & a^2 - 1 \\ b^2 - 1 & 2ab \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont les racines de $\lambda^2 - 4ab\lambda + 4a^2b^2 - (a^2 - 1)(b^2 - 1) = 0$,

$$\Delta = 16a^2b^2 - 4(4a^2b^2 - (a^2 - 1)(b^2 - 1)) = 4(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 4\Delta',$$

$$\lambda_\pm = 2ab \pm \sqrt{\Delta'}.$$

Une première condition nécessaire d'hyperbolicité est $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$. Une condition suffisante est $(a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0$. Si $\Delta' = 0$ mais que $a^2 \neq 1$ ou $b^2 \neq 1$ alors J n'est pas diagonalisable. Le domaine d'hyperbolicité est ainsi $\Delta' > 0$ plus les quatre coins $(\pm 1, \pm 1)$.

b) On a

$$\partial_t \eta + \partial_x (2ab\eta) = 0$$

pour les solutions régulières.

Exercices corrigés

c) la fonction $\eta = +\frac{1}{2}(a^2 - 1)(b^2 - 1)$ est une entropie si et seulement si η est strictement convexe c'est dire si

$$d^2\eta = \begin{pmatrix} -b^2 + 1 & -2ab \\ -2ab & -a^2 + 1 \end{pmatrix} > 0$$

c'est dire si $2 - a^2 - b^2 > 0$ et $(-a^2 + 1)(-b^2 + 1) - 4a^2b^2 > 0$. Pour $\eta = -\frac{1}{2}(a^2 - 1)(b^2 - 1)$ on obtient $2 - a^2 - b^2 < 0$ et $(-a^2 + 1)(-b^2 + 1) - 4a^2b^2 > 0$. En résumé $\pm\eta$ est une entropie si et seulement si $(-a^2 + 1)(-b^2 + 1) - 4a^2b^2 > 0$. On obtient un domaine de stricte concavité situé à l'intérieur du domaine d'hyperbolicité. Cela est en accord avec le théorème du cours. Les variables adjointes sont

$$\pm\nabla_{a,b} \frac{1}{2}(a^2 - 1)(b^2 - 1) = \pm \begin{pmatrix} a(b^2 - 1) \\ b(a^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

8) Dissipation

a) On a $d(\varphi)\partial_x W = E(\varphi)\partial_x\varphi$. D'où

$$\partial_t\eta(W) + \partial_x\xi(W) = \varepsilon(\varphi, \partial_x(E(\varphi)\partial_x\varphi)) = \varepsilon\partial_x(\varphi, E(\varphi)\partial_x\varphi) - \varepsilon(\partial_x\varphi, E(\varphi)\partial_x\varphi).$$

L'hypothèse nécessaire et suffisante $E(\varphi) + E^t(\varphi) \geq 0$ convient. L'hypothèse $E(\varphi) = E(\varphi)^t \geq 0$ est parfois dénommée hypothèse d'Onsager.

a) Pour la dynamique des gaz compressibles, des calculs longs et douloureux montrent que

$$\begin{aligned} W &= (\rho, \rho u, \rho e), \quad \varphi = \frac{1}{T}(T\eta + u^2 - e - p\tau, -u, 1), \\ \partial_t W + \partial_x f(W) &= \partial_x \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda + \mu)u \\ -(\lambda + \mu)u^2 + \kappa T \end{pmatrix} = \partial_x \begin{pmatrix} 0 \\ -(\lambda + \mu)\frac{\varphi_2}{\varphi_3} \\ +(\lambda + \mu)\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\partial_x\frac{\varphi_2}{\varphi_3} + \kappa\frac{1}{\varphi_3} \end{pmatrix} \\ &= \partial_x \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu)\frac{1}{\varphi_3} & (\lambda + \mu)\frac{\varphi_2}{\varphi_3} \\ 0 & (\lambda + \mu)\frac{\varphi_2}{\varphi_3} & -(\lambda + \mu)\frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2} - \kappa\frac{1}{\varphi_3} \end{pmatrix} \partial_x\varphi \right). \end{aligned}$$

Sur cet exemple on a bien $E = E^t \leq 0$ (mais on a pris l'entropie physique qui est concave).

9) Dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange

a) Ce point est calculatoire. On peut utiliser la loi $p = (\gamma - 1)\frac{\varepsilon}{\tau}$ pour simplifier les calculs intermédiaires. On vérifie alors que (η, ξ) est un couple entropie-flux d'entropie : $\eta = \log(\varepsilon \tau^{\gamma-1})$ et $\xi = 0$.

b) Le flux d'entropie est nul, *i.e.*

$$0 = \varphi^t \frac{\partial f(W)}{\partial W} = \varphi^t \frac{\partial f(W(\varphi))}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial W}.$$

Donc $0 = \varphi^t \frac{\partial f(W(\varphi))}{\partial \varphi} = \varphi^t \frac{\partial^2 \xi^*(\varphi)}{\partial \varphi^2}$, où par définition $\xi^*(\varphi) = \varphi \cdot f(W(\varphi)) - \xi(W(\varphi))$. Puis, en utilisant la symétrie de $\frac{\partial^2 \xi^*(\varphi)}{\partial \varphi^2}$:

$$\frac{\partial^2 \xi^*(\varphi)}{\partial \varphi^2} \varphi = \frac{\partial f(W(\varphi))}{\partial \varphi} \varphi = 0.$$

Ceci est exactement la condition d'Euler qui caractérise les fonctions homogènes de degré 0. D'où le résultat : le flux est une fonction homogène de degré 0 en la variable φ .

c) On a $\Psi = (p, -u)$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10) Schéma de Godunov pour l'équation de Burgers

a) Soit $u^g \geq u^d$: on a un choc qui se propage à la vitesse $\sigma = \frac{1}{2}(u_g + u_d)$. Soit $u_g < u^d$: on a une détente comprise entre $u_g \leq \frac{x}{t} \leq u_d$.

b) Nous avons besoin de connaître le flux en $x = 0$. Pour cela on distingue entre choc et détente en prenant garde aux vitesses $\frac{1}{2}(u_g + u_d)$ (choc) et u_g ou u_d (détente).

c) La solution exacte vérifie le principe du maximum. La projection aussi. D'où le résultat.

d) On a nécessairement

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= (1 - C_j^n - D_j^n)u_j^n + C_j^n u_{j-1}^n + D_j^n u_{j+1}^n = \\ &= u_j^n - C_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) + D_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n), \end{aligned}$$

avec $C_j^n, D_j^n \geq 0$ et $C_j^n + D_j^n \leq 1$ (sous CFL ≤ 1) et $C_j^n, D_j^n \leq \frac{1}{2}$ (sous CFL $\leq \frac{1}{2}$). D'où

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= u_j^n - C_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) + D_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\quad - (u_{j-1}^n - C_{j-1}^n (u_{j-1}^n - u_{j-2}^n) + D_{j-1}^n (u_j^n - u_{j-1}^n)) \\ &= (u_j^n - u_{j-1}^n)(1 - C_j^n - D_{j-1}^n) + D_j^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + C_{j-1}^n (u_{j-1}^n - u_{j-2}^n). \end{aligned}$$

Puis grâce aux diverses majorations,

Exercices corrigés

$$|u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| \leq |u_j^n - u_{j-1}^n| (1 - C_j^n - D_{j-1}^n) + D_j^n |u_{j+1}^n - u_j^n| + C_{j-1}^n |u_{j-1}^n - u_{j-2}^n|.$$

Après sommation en j , on obtient le résultat demandé.

11) Preuve de convergence du schéma de Godunov

a) La preuve est une aimable variation du théorème de Lax-Wendroff (voir le cours). Le seul point délicat est qu'il faut vérifier que la solution numérique est BV en espace-temps. Pour cela on se sert du schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n)}{\Delta x} = 0,$$

où les $u_{j+\frac{1}{2}}^n$ sortent des problèmes de Riemann. Grâce à la linéarisation

$$f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n) = f'(c)(u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

puis à

$$\left| u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right| \leq |u_{j+1}^n - u_j^n| + |u_j^n - u_{j-1}^n|,$$

on obtient un contrôle des $\left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right|$. On en déduit l'estimation BV en espace-temps recherchée à partir de l'estimation BV en espace.

12) Ondes linéaires

a) Les solutions discontinues sont du type

$$-\sigma(v^+ - v^-) - (u^+ - u^-) = 0, \quad -\sigma(u^+ - u^-) - (v^+ - v^-) = 0.$$

On obtient $(\sigma^2 - 1)(u^+ - u^-) = 0$. Les solutions chocs non triviales sont données par $\sigma = \pm 1$. Pour un problème de ce type avec des champs linéairement dégénérés la condition d'entropie ne joue pas de rôle : en effet $\eta = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ et $\xi = -uv$. La condition d'entropie est

$$-\sigma(\eta^+ - \eta^-) + \xi^+ - \xi^- \leq 0,$$

déjà vérifiée par les solutions. Pour $\sigma = \pm 1$ on a la continuité de $v \pm u$.

b) Non !! Le mode de construction de solutions en $\frac{x}{t}$ ne fonctionne pas pour les champs linéairement dégénérés.

c) Soient deux états (v_G, u_G) et (v_D, u_D) . L'état intermédiaire est construit grâce à

$$v^* - u^* = v_G - u_G, \quad v^* + u^* = v_D + u_D,$$

i.e.

$$\begin{cases} v^* = \frac{1}{2}(v_G + v_D) + \frac{1}{2}(u_D - u_G), \\ u^* = \frac{1}{2}(u_G + u_D) + \frac{1}{2}(v_D - v_G). \end{cases}$$

13) Le p-système

b) Les solutions discontinues sont du type

$$-\sigma(v^+ - v^-) - (u^+ - u^-) = 0, \quad -\sigma(u^+ - u^-) + (p(v^+) - p(v^-)) = 0.$$

D'où

$$\sigma^2 = -\frac{p(v^+) - p(v^-)}{v^+ - v^-} = \frac{v^+ + v^-}{(v^+ v^-)^2}.$$

L'entropie est $\eta = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{v}$, $\xi = up$. Après élimination de l'énergie cinétique, la condition d'entropie $-\sigma(\eta^+ - \eta^-) + \xi^+ - \xi^- \leq 0$ se ramène à

$$-\sigma \left(\frac{1}{v^+} - \frac{1}{v^-} \right) + \frac{1}{2}(p^+ + p^-)(u^+ - u^-) \leq 0,$$

c'est à dire (après élimination de $u^+ - u^-$) à $-\sigma \frac{(v^+ - v^-)^3}{(v^+ v^-)^2} \leq 0$,

sachant que $v^\pm > 0$ pour les solutions physiques. Pour $\sigma > 0$ cela revient à $v^+ \geq v^-$ (pour $\sigma < 0$ on a $v^+ \leq v^-$). Comme $v = \frac{1}{h}$ on a selon le signe de σ , $h^+ \geq h^-$ pour $\sigma > 0$ ou $h^+ \leq h^-$ pour $\sigma < 0$. Dans les deux cas de figures cela correspond à une vague discontinue (*i.e.* abrupte dans la "vraie vie") montante : c'est à dire que le niveau d'eau est supérieur après la vague.

c) Les solutions auto-semblables en $y = \frac{x}{t}$ se déterminent par l'étude du système

$$\begin{cases} -y v'(y) - u'(y) = 0, \\ -y u'(y) + (p(v))'(y) = 0. \end{cases}$$

D'où après élimination de u'

$$v'(y) \left(\frac{2}{v(y)^3} - y^2 \right) = 0.$$

Les solutions non triviales sont données par $\frac{2}{v(y)^3} - y^2 = 0$ *i.e.* $v(y) = \left(\frac{2}{y^2} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Cela est valable pour $y_G \leq y \leq y_D$, ce qui conduit naturellement à

$$v(y_D) \geq v(y_D), \quad y > 0, \quad v(y_D) \leq v(y_D), \quad y < 0.$$

Pour trouver $u(y)$ on choisit l'une ou l'autre des deux équations. On obtient

$$u(y) = u(y_0) + \int_{y_0}^y (-y v'(y)) dy = u(y_0) + \frac{4}{3} \int_{y_0}^y \frac{dy}{y^2} = u(y_0) + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \right).$$

Exercices corrigés

- d) Non.
 e) Faire un dessin.

14) Chocs pour la dynamique des gaz

• L'exercice est plus une question de calcul qu'autre chose. En revanche la conclusion intéressante est que la condition d'entropie sélectionne les chocs compressifs, c'est à dire les "bons" chocs. On pourra comparer avec l'exercice précédent.

a) Les vitesses de choc sont reliés par

$$j = \rho(\sigma - u).$$

Pour $j > 0$, l'état \cdot^+ est l'état avant choc. L'état \cdot^- est l'état après choc. Montrer que le choc est compressif revient alors à montrer que $\rho^- \geq \rho^+$.

b) A partir du système du a), on obtient après élimination de l'énergie cinétique

$$\varepsilon^+ - \varepsilon^- + \frac{p^+ + p^-}{2}(\tau^+ - \tau^-) = 0.$$

On a en déduit pour une loi de gaz parfait

$$\varepsilon^+ = \frac{(\gamma + 1) + (1 - \gamma)x}{(\gamma + 1)x + (1 - \gamma)} \times x \times \varepsilon^-,$$

où on a posé $x = \frac{\tau^+}{\tau^-}$. Le domaine de validité de cette expression se limite à

$$(\gamma + 1) + (1 - \gamma)x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \Leftrightarrow \rho^- \leq \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right) \rho^+.$$

Pour l'air $\gamma = 1.4$, le facteur maximal de compression sous choc est de 6.

c) Un choix possible consiste à conserver le couple (τ, p) comme variables indépendantes. Soit

$$f(x) = \frac{\varepsilon^+(\tau^+)^{\gamma-1}}{\varepsilon^-(\tau^-)^{\gamma-1}} = \frac{\gamma + 1 - (\gamma - 1)x}{(\gamma + 1)x - (\gamma - 1)} \times x^\gamma = g(x) x^\gamma.$$

La condition d'entropie se réécrit ainsi $f(x) \geq 1$. Or

$$g(x) = \frac{1 - \alpha x}{x - \alpha} = \frac{1 - \alpha^2}{x - \alpha} - \alpha, \text{ avec } \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} < 1.$$

$$g'(x) = -\frac{1 - \alpha^2}{(x - \alpha)^2}, \quad g'(1) = -\gamma,$$

$$g''(x) = 2\frac{1 - \alpha^2}{(x - \alpha)^3}, \quad g''(1) = \gamma^2 + \gamma,$$

$$g'''(x) = -6\frac{1 - \alpha^2}{(x - \alpha)^4}, \quad g'''(1) = -\frac{3}{2}(\gamma^2 + \gamma)(\gamma + 1).$$

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

Les dérivées successives de f en $x = 1$ sont

$$f'(1) = f''(1) = 0, \quad f'''(1) = \frac{\gamma(\gamma+1)^2}{2} > 0.$$

Or

$$f(x) = 1 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 + O((x-1)^4).$$

La condition d'entropie impose $f(x) \geq 0$, d'où $x \geq 1$ puis $\tau^+ \geq \tau^-$. D'où $\rho^+ \leq \rho^-$ ainsi que les autres relations. La conclusion est que les chocs sont compressifs.

Bibliographie

- G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation. Une introduction à la modélisation numérique et à la simulation numérique*, Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, 2005.
- J.D. Anderson. *Modern Compressible Flow*, Mac Graw Hill, New York, 1982.
- J.M. Bony. *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, 2001.
- H. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, John Wiley & Sons, seconde édition, 1985.
- C. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Grundlehren des mathematischen Wissenschaften, vol. 325, Springer, New York, 2000.
- P. Germain, P. Muller. *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980.
- V. Girault, P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, 1986.
- C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- E. Godlewski, P.A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, 1996.
- S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, G. Prokopov. *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, Editions Mir, Moscou, 1979.
- E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit. *Hydrodynamique physique*, CNRS-Inter-Editions, 1991.
- L. Landau, E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*, 1954, Editions Mir, Moscou, 1967.
- L. Landau, E. Lifchitz. *Physique statistique*, 1953, Editions Mir, Moscou, 1967.
- P.D. Lax. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, Conf. Board in Mathematical Sciences, vol. 11, SIAM, Philadelphia, 1973.
- B. Larrouturou. *Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur*, Ecole polytechnique, 1997.

Systèmes hyperboliques de lois de conservation

- R.J. Le Veque. *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, 1990.
- P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Science Publications, 1996.
- R. Richtmyer, K. Morton. *Difference Methods for initial-value problems*, Interscience, J. Wiley, 1967.
- L. Schwartz. *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950.
- D. Serre. *Systèmes hyperboliques de lois de conservation*, Diderot, Paris, 1996.
- R. Temam. *Navier Stokes equations*, North Holland, Amsterdam, 1977.
- L. Tourrette, L. Halpern (eds). *Absorbing Boundaries and Layers, Domain Decomposition Methods. Applications to Large Scale Computations*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2001.



Bruno Després



François Dubois

Bruno Després est directeur de Recherches au Commissariat à l'énergie atomique, professeur associé à l'Université Pierre et Marie Curie et professeur chargé de cours à l'Ecole Polytechnique. Il s'intéresse à l'analyse mathématique et numérique des équations aux dérivées partielles provenant de la mécanique des milieux continus. Il s'est intéressé récemment à la structure mathématique des systèmes lagrangiens de lois de conservation en vue des applications à la mécanique des fluides numérique ainsi qu'à l'analyse des méthodes de volumes finis linéaires.

François Dubois est professeur des Universités, en poste au Conservatoire national des arts et métiers à Paris et professeur chargé de cours à l'Ecole Polytechnique. Au début des années quatre vingt-dix, il a participé au développement industriel des méthodes de calcul décrites dans cet ouvrage pour l'aérodynamique hypersonique. Ses travaux de recherche portent sur les systèmes hyperboliques de lois de conservation, la conception et l'analyse de méthodes numériques et l'approximation des champs de vecteurs.