



**HAL**  
open science

# Super-résolution hyperspectrale et démixage conjoints : approche tensorielle sous contraintes de positivité et semi-aveugle basée sur la $\beta$ -divergence

Clémence Prévost, Valentin Leplat

## ► To cite this version:

Clémence Prévost, Valentin Leplat. Super-résolution hyperspectrale et démixage conjoints : approche tensorielle sous contraintes de positivité et semi-aveugle basée sur la  $\beta$ -divergence. GRETSI 2023 XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Aug 2023, Grenoble, France. hal-04138618

**HAL Id: hal-04138618**

**<https://hal.science/hal-04138618>**

Submitted on 23 Jun 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Super-résolution hyperspectrale et démixage conjoints : approche tensorielle sous contraintes de positivité et semi-aveugle basée sur la $\beta$ -divergence

Clémence PRÉVOST<sup>1</sup> Valentin LEPLAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Univ. Lille, CNRS Centrale Lille, UMR 9189 CRISTAL, F-59000 Lille, France

<sup>2</sup>Skoltech, Center for Artificial Intelligence Technology (CAIT), Moscou, Russie

**Résumé** – Dans ce papier, nous résolvons simultanément les problèmes de super-résolution hyperspectral et de démixage de l’image à super-résolution dans le contexte dit ”semi-aveugle”. Notre approche est basée sur trois piliers : (i) l’estimation des matrices de couplage, (ii) une décomposition tensorielle couplée de rang faible avec des mises à jour multiplicatives et (iii) une famille de problèmes d’optimisation basés sur la  $\beta$ -divergence. Nous proposons une famille d’algorithmes simples et robustes adaptés à diverses statistiques de bruit. Nos simulations sur données réelles montrent les performances de notre approche, et ce pour les deux problèmes considérés.

**Abstract** – We present a new method for solving simultaneously hyperspectral super-resolution and spectral unmixing of the unknown super-resolution image in the semi-blind case. Our method relies on three key elements: (i) estimation of the coupling matrices, (ii) joint tensor factorization with multiplicative updates, and (iii) a family of optimization problems with  $\beta$ -divergences cost functions. We come up with a family of simple, robust and efficient algorithms, adaptable to various noise statistics. Experiments show that our approach competes favorably with state-of-the-art for solving both problems with various noise statistics.

## 1 Introduction

En télédétection, les images hyperspectrales (IHS) présentent une forte résolution spectrale mais de faibles résolutions spatiales [20], tandis que les images multispectrales (IMS) sont fortement résolues spatialement mais dégradées spectralement. Chaque pixel d’une IHS est constitué d’une somme de signatures spectrales (aussi appelés spectres de réflectance) selon le modèle de mélange linéaire (MML). Ce modèle permet d’effectuer le démixage spectral de ces images, c’est-à-dire d’extraire les matériaux composant l’image et leur abondance.

Le problème de super-résolution hyperspectral (SRH), quant à lui, [26] consiste à fusionner une IHS et une IMS d’une même scène, afin de reconstruire une image à super-résolution (ISR), ayant à la fois de fortes résolutions spatiales et spectrales. L’ISR permettra, à terme, un démixage de haute résolution, d’où l’intérêt de développer une méthode permettant de résoudre conjointement les deux problèmes.

La plupart des approches matricielles pour la SRH [27, 21, 25] s’appuient sur le MML, certaines sont donc capables d’effectuer conjointement SRH et démixage [13, 27].

Des approches tensorielles ont également été développées [24], mais ne permettaient pas d’effectuer le démixage des images. La décomposition en termes de rang faible a été récemment proposée en fusion [28, 7] ou pour le démixage de l’ISR [18], mais non les deux. Dans de précédents travaux [15], nous avons utilisé cette décomposition pour la SRH et le démixage conjoint en présence de variabilité spectrale. Cette approche était peu robuste au bruit et à l’initialisation des facteurs. De plus, basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, sa convergence dépendait fortement du bon choix pour certains paramètres (réglés manuellement dans ce travail).

**Contributions** : (i) Nous proposons une nouvelle famille de

problèmes d’optimisations sous contraintes de positivité pour la décomposition tensorielle en termes de rang faible (ii) Nous développons une famille d’algorithmes basés sur des mises à jour multiplicatives permettant de résoudre les problèmes de SRH et de démixage dans le contexte dit ”semi-aveugle”, c’est-à-dire que certains opérateurs de couplage dans le modèle de fusion sont potentiellement inconnus et doivent donc être estimés. Ces algorithmes possèdent des garanties de convergence vers des points stationnaires. (iii) À l’aide de  $\beta$ -divergences, nous prenons en compte différentes statistiques de bruit, ce qui rend notre approche robuste au type de bruit présent dans les données. Par ailleurs, nous proposons d’initialiser nos algorithmes avec une nouvelle approche robuste et numériquement stable. Nos simulations sur données réelles montrent les performances compétitives de notre méthode pour la résolution conjointe des deux problèmes considérés, avec différentes statistiques de bruit. Un document de travail [16] étend ce papier. **Notations** : Ce papier utilise les notations de [11, 2] en ce qui concerne les scalaires, les vecteurs, les matrices et les tenseurs. La transposée de la matrice  $\mathbf{A}$  se note  $\mathbf{A}^T$ . La matrice identité de taille  $N \times N$  se note  $\mathbf{I}_N$ , tandis que  $\mathbf{0}_{L \times K}$  est la matrice composée de  $L \times K$  zéros. Le vecteur rempli de 1 de taille  $L \times 1$  se note  $\mathbf{1}_L$ . La notation  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$  encode une matrice  $\mathbf{X}$  positive. Les opérations  $\boxtimes$  et  $\odot$  sont les produits de Kronecker et de Khatri-Rao, respectivement.

## 2 Formulation des problèmes

Soient une IHS  $\mathcal{Y}_1 \in \mathbb{R}^{I_1 \times J_1 \times K_1}$  et une IMS  $\mathcal{Y}_2 \in \mathbb{R}^{I_2 \times J_2 \times K_2}$ . Nous supposons ici que  $I_1 < I_2$ ,  $J_1 < J_2$  et  $K_2 < K_1$ . Par ailleurs, pour alléger la notation, notons  $I = I_2$ ,  $J = J_2$  et  $K = K_1$ . Les indices  $I_\ell$ ,  $J_\ell$  encodent

les dimensions spatiales tandis que  $K_\ell$  encodent la dimension spectrale ( $\ell = 1, 2$ ). Les observations  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  sont deux versions dégradées d'une même ISR  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ .

Premièrement, on suppose que dans le cas sans bruit, le tenseur  $\mathcal{Y}$  admet une décomposition en termes de rangs  $L_r, L_r, 1$  (notée  $L_r L_r 1$ -BTD pour "block-term decomposition") telle que

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \otimes \mathbf{c}_r, \quad (1)$$

où  $\otimes$  est le produit extérieur, et  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{I \times L_r}$ ,  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{J \times L_r}$ , et  $\mathbf{c}_r \in \mathbb{R}^K$  ( $r \in \{1, \dots, R\}$ ) sont les facteurs de rang faible. Par ailleurs, on note  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_R] \in \mathbb{R}^{I \times \sum_r L_r}$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_R] \in \mathbb{R}^{J \times \sum_r L_r}$  et  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_R] \in \mathbb{R}^{K \times R}$ . Sous contraintes de positivité, on peut interpréter les facteurs  $\mathbf{c}_r$  comme les signatures spectrales associées aux  $R$  matériaux constitutifs de  $\mathcal{Y}$ . Sous les mêmes contraintes, les facteurs  $\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T$ , notés ici  $\mathbf{S}_r \in \mathbb{R}^{I \times J}$ , représentent les cartes d'abondance de chaque matériau.

Par ailleurs, on suppose que les cartes d'abondances  $\mathbf{S}_r$  sont de rang faible, i.e.,  $\mathbf{S}_r \approx \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T \in \mathbb{R}^{I \times J}$  ( $r \in \{1, \dots, R\}$ ) où  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{I \times L}$  et  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{J \times L}$  sont des matrices de rang faible  $L_r$ .

Le modèle de fusion considéré dans la littérature (voir [24]) exprime l'IHS et l'IMS observées comme des contractions de l'ISR par le biais de matrices de dégradation non-inversibles. Sous l'hypothèse de rang faible (1), ce modèle est une  $L_r L_r 1$ -BTD couplée décrite ci-après :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_1 \approx \sum_{r=1}^R (\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_r (\mathbf{P}_2 \mathbf{B}_r)^T) \otimes \mathbf{c}_r, \\ \mathcal{Y}_2 \approx \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \otimes \mathbf{P}_3 \mathbf{c}_r, \end{cases} \quad (2)$$

Les matrices  $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{I_1 \times I}$ ,  $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{J_1 \times J}$  sont de rang plein et représentent un terme de flou Gaussien et de sous-échantillonnage régulier [23], i.e., on suppose la dégradation spatiale séparable. La matrice  $\mathbf{P}_3 \in \mathbb{R}^{K_2 \times K}$  contient la caractérisation spectrale de l'appareil d'acquisition de l'IMS. Le symbole  $\approx$  encode la contamination au bruit des observations.

Traditionnellement, en démélange, l'on estime les facteurs  $\{\mathbf{S}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T\}_{r=1}^R$  et  $\mathbf{C}$  à partir de l'ISR  $\mathcal{Y}$ . Néanmoins, dans notre cas,  $\mathcal{Y}$  est inconnue et seule l'IHS  $\mathcal{Y}_1$  est observée avec une forte résolution spectrale. Ainsi, les approches classiques de démélange appliquées au modèle (2) estiment des cartes d'abondance dégradées spatialement.

Cette limitation motive l'intérêt pour le problème de fusion de données. Par ailleurs, les matrices de dégradation  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  et  $\mathbf{P}_3$  dépendant des caractéristiques de l'imageur hyperspectrale, leur connaissance n'est pas toujours garantie. Dans de tels cas, le problème de super-résolution est considéré *aveugle*, et  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  et  $\mathbf{P}_3$  sont des paramètres à estimer.

Dans ce contexte, les problèmes de super-résolution hyperspectrale et démélange conjoints consistent à estimer les facteurs  $\{\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T\}_{r=1}^R$ ,  $\mathbf{C}$  et les matrices  $\mathbf{P}_i$  ( $i \in \{1, \dots, 3\}$ ) présents dans (2) sous contraintes de positivité :

$$\{\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T\}_{r=1}^R \geq \mathbf{0}, \mathbf{C} \geq \mathbf{0}, \mathbf{P}_i \geq \mathbf{0} \text{ for } i \in \{1, \dots, 3\}. \quad (3)$$

Afin d'estimer ces facteurs, nous proposons de résoudre la famille de problèmes d'optimisation suivants :

$$\Phi = D_\beta \left( \mathcal{Y}_1 \parallel \sum_{r=1}^R (\mathbf{P}_1 \mathbf{A}_r (\mathbf{P}_2 \mathbf{B}_r)^T) \otimes \mathbf{c}_r \right) + \lambda D_\beta \left( \mathcal{Y}_2 \parallel \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \otimes \mathbf{P}_3 \mathbf{c}_r \right) \quad (4)$$

sous contraintes de positivité (3), avec  $\lambda > 0$ .

Pour un tenseur positif  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ , l'adéquation aux données se mesure par une divergence tensorielle :

$$D_\beta \left( \mathcal{Y} \parallel \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \otimes \mathbf{c}_r \right) = \sum_{i,j,k} d_\beta \left( (\mathcal{Y})_{i,j,k} \parallel \left( (\mathbf{A}_r)_{i,:} (\mathbf{B}_r)_{:,j}^T \right) \otimes (\mathbf{c}_r)_k \right), \quad (5)$$

avec  $d_\beta(x \parallel y)$  la  $\beta$ -divergence scalaire. Cette métrique correspond à la distance euclidienne au carré pour  $\beta = 2$ . Pour  $\beta = 1$  et  $\beta = 0$ , elle équivaut respectivement à la divergence de Kullback-Leibler (KL) et d'Itakura-Saito (IS). Le choix de  $\beta$  dépend du modèle génératif des données ainsi que de la statistique de bruit considérée [4].

### 3 Famille d'algorithmes semi-aveugles

Dans cette section, nous introduisons une famille d'algorithmes semi-aveugles afin de résoudre les problèmes (3)–(4). Nous adoptons une stratégie de descente alternée par blocs de variables. De plus, nous proposons d'utiliser une stratégie de majorisation-minimisation (MM) [22] pour la mise à jour multiplicative (MU pour *update*) [12, Lemme 2].

Par exemple, le sous-problème en  $\mathbf{A}$  s'exprime

$$\min_{\mathbf{A} \geq \mathbf{0}} D_\beta(\mathbf{Y}_1^{(1)} \parallel \mathbf{P}_1 \mathbf{A} (\mathbf{C} \odot_p \mathbf{P}_2 \mathbf{B})^T) + \lambda D_\beta(\mathbf{Y}_2^{(1)} \parallel \mathbf{A} (\mathbf{P}_3 \mathbf{C} \odot_p \mathbf{B})^T), \quad (6)$$

avec les autres paramètres supposés fixés. À l'itéré courant  $\tilde{\mathbf{A}}$ , en posant  $\mathbf{H}_1 = (\mathbf{C} \odot_p \mathbf{P}_2 \mathbf{B})^T$  et  $\mathbf{H}_2 = (\mathbf{P}_3 \mathbf{C} \odot_p \mathbf{B})^T$ , la mise à jour de  $\mathbf{A}$  s'obtient sous la forme analytique suivante :

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} \square \left( \frac{\left[ \frac{\mathbf{P}_1^T \left( (\mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{H}_1)^{(\beta-2)} \square \mathbf{Y}_1^{(1)} \right) \mathbf{H}_1^T + \lambda \left( (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{H}_2)^{(\beta-2)} \square \mathbf{Y}_2^{(1)} \right) \mathbf{H}_2^T}{\left[ \mathbf{P}_1^T (\mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{H}_1)^{(\beta-1)} \mathbf{H}_1^T + \lambda (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{H}_2)^{(\beta-1)} \mathbf{H}_2^T \right]} \right]^{\gamma(\beta)}}{\left[ \mathbf{P}_1^T (\mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{H}_1)^{(\beta-1)} \mathbf{H}_1^T + \lambda (\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{H}_2)^{(\beta-1)} \mathbf{H}_2^T \right]} \right) \quad (7)$$

où  $A \square B$  et  $\frac{A}{B}$  sont le produit et la division terme-à-terme,  $A^{(\cdot\alpha)}$  est la puissance  $\alpha$  de  $A$  terme-à-terme, et la fonction  $\gamma(\beta)$  est égale à  $\frac{1}{2-\beta}$  pour  $\beta < 1$ , à 1 pour  $\beta \in [1, 2]$  et à  $\frac{1}{\beta-1}$  pour  $\beta > 2$  [6]. Contrairement à la majorité des méthodes de l'état de l'art, la famille d'algorithmes que nous proposons estime également les matrices de dégradation  $\mathbf{P}_i$  pour  $i \in \{1, \dots, 3\}$ . Pour ce faire, nous utilisons les MU classiques associées au modèle matriciel  $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T$  [6]. Par exemple, le sous-problème pour  $\mathbf{P}_1$  s'écrit  $D_\beta(\mathbf{Y}_1^{(1)} \parallel \mathbf{P}_1 \mathbf{A} (\mathbf{C} \odot_p \mathbf{P}_2 \mathbf{B})^T)$ . En posant  $\mathbf{V}^T = \mathbf{A} (\mathbf{C} \odot_p \mathbf{P}_2 \mathbf{B})^T$ , on obtient la solution analytique à l'itéré courant  $\tilde{\mathbf{P}}_1$  :

$$\mathbf{P}_1 \leftarrow \tilde{\mathbf{P}}_1 \square \left( \frac{\left[ \left( \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{V}^T \right)^{(\beta-2)} \square \mathbf{Y}_1^{(1)} \right] \mathbf{V}}{\left[ \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{V}^T \right]^{(\beta-1)} \mathbf{V}} \right)^{\gamma(\beta)}. \quad (8)$$

L'Algorithme 1 récapitule l'approche proposée. Il est constitué de deux boucles :

**Boucle 1 :** Seuls  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont mis à jour avec  $\mathbf{P}_i$  ( $i \in \{1, \dots, 3\}$ ) fixées, pendant un maximum de  $i_1$  itérations.

**Boucle 2 :** Tous les facteurs et toutes les matrices  $\mathbf{P}_i$  sont mises à jour pendant un maximum de  $i_2$  itérations.

Dans le cas *semi-aveugle*, on considère que la matrice de dégradation spectrale  $\mathbf{P}_3$  est connue tandis que  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  sont à estimer. L'algorithme s'arrête soit en atteignant le critère

**Algorithme 1** : Approche proposée

**entrée** :  $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{P}_i$  for  $i \in \{1, \dots, 3\}; R,$   
 $\{L_r\}_{r=1}^R, i1, i2, 0 < \kappa \ll 1, \lambda > 0$

**sortie** : Une solution approchée  $\hat{\mathcal{Y}}$  au problème (4)–(3)

(% Boucle 1)  $i \leftarrow 0, \Phi^0 = 1, \Phi^1 = 0$

**tant que** :  $i < i1$  and  $\left| \frac{\Phi^i - \Phi^{i+1}}{\Phi^i} \right| > \kappa$

Mettre à jour  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  alternativement avec, e.g., (7)

Mettre à jour la fonction de coût  $\Phi^{i+1}$

(% Boucle 2)  $i \leftarrow 0$

**tant que** :  $i < i2$  and  $\left| \frac{\Phi^i - \Phi^{i+1}}{\Phi^i} \right| > \kappa$

Mettre à jour  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{P}_i$  alternativement avec, e.g., (7),(8)

Mettre à jour la fonction de coût  $\Phi^{i+1}$

**renvoyer** :  $\hat{\mathcal{Y}} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T) \otimes \mathbf{c}_r$

d'arrêt donné par le seuil  $\kappa$  de décroissance de la fonction  $\Phi$ , soit en atteignant le nombre maximal d'itérations.

**Complexité** : L'Algorithme 1 coûte  $\mathcal{O}(IJK \times \sum_r^R L_r)$  opérations par itération, ce qui équivaut asymptotiquement au coût d'un algorithme multiplicatif classique utilisé pour une factorisation matricielle. Le coût principal de (7) réside dans le calcul des produits matriciels impliquant  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{H}_1$ .

**Convergence** : En pratique, pour mettre à jour  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  et  $\mathbf{P}_i$ , on calcule le maximum terme-à-terme entre les mises à jour et un scalaire positif  $\epsilon$  arbitrairement petit (ici, la précision machine). Ces mises à jour "modifiées" permettent d'assurer la convergence de notre approche vers un point stationnaire, en vertu des résultats de convergence des approches de minimisation successive par blocs [19].

**Initialisation** : Le facteur  $\mathbf{C}$  est initialisé à l'aide de l'algorithme VCA [14] pour l'IHS  $\mathcal{Y}_1$ . Puis, la matrice  $\mathbf{S}$  d'abondances est calculée telle que  $\mathbf{S}^T = (\mathbf{P}_3 \mathbf{C})^\dagger \mathbf{Y}_2^{(3)}$ . Les facteurs  $\mathbf{A}_r$  et  $\mathbf{B}_r$  ( $r \in \{1, \dots, R\}$ ) sont obtenus par MU classiques  $\mathbf{S}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T$  [6] avec un maximum de  $j1$  itérations.

## 4 Simulations

**Méthodes** : Plusieurs algorithmes tensoriels ont été comparés à notre approche : STEREO et Blind-STEREO [8, 9], SCOTT et BSCOTT [17], CB-STAR [1], SCLL1 [3] et CNN-BTD-Var [15]. Ces deux dernières utilisent la  $L_r L_r 1$ -BTD, et sont donc aptes à effectuer le démixage spectral<sup>1</sup>. Deux approches matricielles ont également été considérées : CNMF (apte à effectuer fusion et démixage) et HySure [21]. Nous avons utilisé plusieurs mesures de performance [26], notamment la *Peak Signal-to-Noise ratio* (PSNR) pour la reconstruction, et le *Spectral Angle Distance* (SAD) et le *Root Mean-Squared Error* (RMSE) pour le démixage. Les temps de calculs sont retournés par les fonctions `tic` et `toc` de Matlab.

**Données** : le jeu de données semi-réel "Jasper Ridge", pour lequel l'ISR de référence  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{100 \times 100 \times 173}$  est connue. Cette image comporte  $R = 4$  matériaux. Les observations hyper- et multi-spectrales ont été construites à partir du modèle (2). Nous avons calculé  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  à partir du protocole de Wald [23] avec un noyau Gaussien de taille  $q = 9$  et un facteur de sous-échantillonnage  $d = 4$ . Pour  $\mathbf{P}_3$ , nous avons utilisé la caractérisation spectrale de Sentinel-2, donnant  $K_M = 10$ .

<sup>1</sup>Dans sa publication d'origine, SCLL1 n'a pas été utilisé pour le démixage.

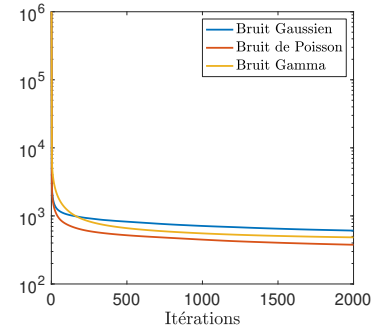


FIGURE 1 : Fonction de coût  $\Phi$  pour plusieurs statistiques de bruit.

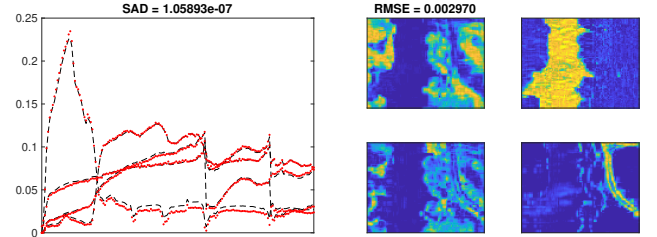


FIGURE 2 : Résultats du démixage dans le cas totalement couplé.

Des bruits gaussien, Poisson et Gamma (multiplicatif) ont été ajoutés aux observations. Les bruits gaussien et de Poisson menaient à un SNR de 30dB. Le bruit Gamma, quant à lui, a été généré à partir d'une distribution de moyenne unitaire et de variance 0.05. Les rangs suivants ont été considérés :  $R = 4, L_1 = 15, L_2 = 8, L_3 = 20$  et  $L_4 = 13$ . L'initialisation comporte  $j1 = 500$  itérations, tandis que l'algorithme utilise  $i1 = i2 = 2000$  itérations.

**Résultats** : Nous montrons tout d'abord la convergence de l'Algorithme 1. Sur la Figure 1, nous remarquons que la fonction de coût  $\Phi$  atteint un plateau pour les trois statistiques de bruit considérées. C'est particulièrement visible pour la courbe associée à un bruit gaussien.

Puis, nous illustrons les performances de notre méthode dans le cas totalement couplé, *i.e.*, toutes les matrices de dégradations sont connues. Les résultats moyennés sur 5 tirages sont présentés dans le Tableau 1 pour un bruit Poisson, et les deux meilleurs résultats sont en gras.

TABLE 1 : Reconstruction dans le cas totalement couplé.

Méthode	CC	SAD	RMSE	ERGAS	PSNR (dB)	Temps (s)
Meilleur	1	0	0	0	$\infty$	0
STEREO	0.989	3.01	1.378e-2	2.617	<b>31.10</b>	1.597
BSTEREO	0.989	3.05	1.435e-2	2.479	30.69	1.673
SCOTT	0.991	3.30	1.584e-2	2.361	30.20	<b>0.180</b>
BSCOTT	0.981	3.55	2.282e-2	3.191	28.11	0.213
SCLL1	0.979	5.23	2.983e-2	3.656	25.46	11.387
CB-STAR	0.992	2.89	1.371e-2	2.269	31.09	7.592
CNN-BTD-Var	0.920	8.63	4.152e-2	6.078	21.45	1.130
CNMF	<b>0.999</b>	<b>0.90</b>	<b>6.000e-3</b>	<b>1.493</b>	27.96	1.302
HySure	<b>0.998</b>	<b>2.05</b>	<b>1.196e-2</b>	<b>1.778</b>	<b>33.55</b>	13.734
Alg. 1 ( $\beta = 1$ )	0.990	3.16	1.712e-2	2.657	29.58	42.241

Même si notre algorithme est plutôt lent, il obtient des résultats similaires à ceux des autres méthodes tensorielles. C'est le plus efficace des méthodes basées sur la  $L_r L_r 1$ -BTD. Les résultats du démixage sont affichés sur la Figure 2.

À présent, nous comparons notre algorithme dans le cas semi-aveugle, à d'autres algorithmes tensoriels semi-aveugles :

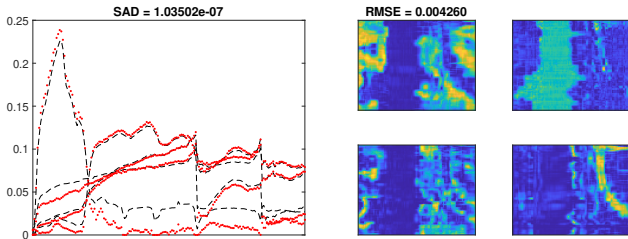


FIGURE 3 : Résultats du démélange dans le cas totalement semi-aveugle.

BSTEREO (Blind-STEREO) et BSCOTT (Blind-SCOTT), qui sépare les observations en sous-blocs. Nous ajoutons un bruit gaussien aux observations. Les résultats sont visibles dans le Tableau 2 et la Figure 3. Mis à part pour le RMSE et le

TABLE 2 : Reconstruction dans le cas semi-aveugle.

Méthode Meilleur	CC 1	SAD 0	RMSE 0	ERGAS 0	PSNR (dB) $\infty$	Temps (s) 0
Alg. 1 ( $\beta = 2$ )	<b>0.978</b>	<b>3.75</b>	2.487e-2	<b>3.422</b>	<b>26.53</b>	66.254
BSTEREO	0.972	4.52	<b>2.352e-2</b>	3.768	25.66	0.562
BSCOTT [1,1] blocs	0.960	5.89	3.054e-2	4.211	24.07	<b>0.025</b>
BSCOTT [4,4] blocs	0.960	5.89	3.054e-2	4.211	24.07	<b>0.018</b>

temps, notre approche fournit les meilleurs résultats dans le cas semi-aveugle. Parmi les algorithmes considérés, le nôtre est le seul à pouvoir estimer les matrices de couplage. Pour le démélange, ses performances sont satisfaisantes, même si légèrement inférieures à celles du cas totalement couplé.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons montré l'intérêt d'une approche tensorielle couplée de rang faible sous contraintes de positivité pour résoudre les problèmes de SRH et de démélange. L'intérêt d'utiliser des  $\beta$ -divergences est également particulièrement intéressante pour la fusion ISH-SAR, ou infrarouge-Raman ; deux applications que nous considérerons dans le futur. Nous étudierons également des versions pénalisées de  $\Phi$  afin d'identifier, potentiellement automatiquement, le nombre de matériaux et proposer des modèles robustes dans le cas où l'un des facteurs est déficient en rang. Finalement, nous souhaitons paralléliser notre algorithme pour réduire son temps de calcul.

## Références

[1] R. A. BORSOI, C. PRÉVOST, K. USEVICH, D. BRIE, J. M. BERMUDEZ et C. RICHARD : Coupled tensor decomposition for hyperspectral and multispectral image fusion with inter-image variability. *IEEE J. Sel. Topics Sig. Process.*, 15(3):702–717, 2021.

[2] P. COMON : Tensors : A brief introduction. *IEEE Signal Process. Mag.*, 31(3):44–53, 2014.

[3] M. DING, X. FU, T.-Z. HUANG, J. WANG et X.-L. ZHAO : Hyperspectral super-resolution via interpretable block-term tensor modeling. page arXiv :2006.10248, juin 2020.

[4] C. FÉVOTTE, N. BERTIN et J.-L. DURRIEU : Nonnegative matrix factorization with the Itakura-Saito divergence : With application to music analysis. *Neural computation*, 21(3):793–830, 2009.

[5] C. FÉVOTTE et N. DOBIGEON : Nonlinear hyperspectral unmixing with robust nonnegative matrix factorization. *IEEE Trans. Image Process.*, 24(12):4810–4819, 2015.

[6] C. FÉVOTTE et J. IDIER : Algorithms for nonnegative matrix factorization with the  $\beta$ -divergence. *Neural computation*, 23(9):2421–2456, 2011.

[7] H. GUO, W. BAO, K. QU, X. MA et M. CAO : Multispectral and hyperspectral image fusion based on regularized coupled non-negative block-term tensor decomposition. *Remote Sensing*, 14(21):5306, 2022.

[8] C. I. KANATSOULIS, X. FU, N. D. SIDIROPOULOS et W.-K. MA : Hyperspectral super-resolution : A coupled tensor factorization approach. *IEEE Trans. Signal Process.*, 66(24):6503–6517, 2018.

[9] C. I. KANATSOULIS, X. FU, N. D. SIDIROPOULOS et W.-K. MA : Hyperspectral super-resolution via coupled tensor factorization : Identifiability and algorithms. In *2018 IEEE ICASSP*, pages 3191–3195, 2018.

[10] B. KING, C. FÉVOTTE et P. SMARAGDIS : Optimal cost function and magnitude power for nmf-based speech separation and music interpolation. In *2012 IEEE MLSP*, pages 1–6, 2012.

[11] T. G. KOLDA et B. W. BADER : Tensor Decompositions and Applications. *SIAM Review*, 51(3):455–500, 2009.

[12] V. LEPLAT, N. GILLIS et C. FÉVOTTE : Multi-resolution beta-divergence nmf for blind spectral unmixing. *Signal Processing*, 2021.

[13] Q. LI, W.-K. MA et Q. WU : Hyperspectral super-resolution : Exact recovery in polynomial time. In *2018 IEEE SSP*, pages 378–382. IEEE, 2018.

[14] J.M.P. NASCIMENTO et J.M.B. DIAS : Vertex component analysis : A fast algorithm to unmix hyperspectral data. *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, 43(4):898–910, 2005.

[15] C. PRÉVOST, R. A. BORSOI, K. USEVICH, D. BRIE, J. M. BERMUDEZ et C. RICHARD : Hyperspectral super-resolution accounting for spectral variability : Coupled tensor l11-based recovery and blind unmixing of the unknown super-resolution image. *SIAM J. Imag. Sciences*, 15(1):110–138, 2022.

[16] C. PRÉVOST et V. LEPLAT : Nonnegative block-term decomposition with the  $\beta$ -divergence : joint data fusion and blind spectral unmixing of the unknown super-resolution image. working paper or preprint, octobre 2022.

[17] C. PRÉVOST, K. USEVICH, P. COMON et D. BRIE : Coupled tensor low-rank multilinear approximation for hyperspectral super-resolution. In *2019 - 2019 IEEE ICASSP*, pages 5536–5540, 2019.

[18] Y. QIAN, F. XIONG, S. ZENG, J. ZHOU et Y.Y. TANG : Matrix-vector nonnegative tensor factorization for blind unmixing of hyperspectral imagery. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 55(3):1776–1792, 2016.

[19] M. RAZAVIYAYN, M. HONG et Z.-Q. LUO : A unified convergence analysis of block successive minimization methods for nonsmooth optimization. *SIAM J. Optim.*, 23(2):1126–1153, 2013.

[20] G. A. SHAW et H. K. BURKE : Spectral imaging for remote sensing. *Lincoln laboratory journal*, 14(1):3–28, 2003.

[21] M. SIMOES, J. M. BIOCAS-DIAS, L. B. ALMEIDA et J. CHANUSSOT : A convex formulation for hyperspectral image superresolution via subspace-based regularization. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 53(6):3373–3388, 2015.

[22] Y. SUN, P. BABU et D.P. PALOMAR : Majorization-minimization algorithms in signal processing, communications, and machine learning. *IEEE Trans. Signal Process.*, 65(3):794–816, 2017.

[23] L. WALD, T. RANCHIN et M. MANGOLINI : Fusion of satellite images of different spatial resolutions : Assessing the quality of resulting images. *Photogrammetric Eng. and Remote Sens.*, 63(6):691–699, 1997.

[24] M. WANG, D. HONG, Z. HAN, J. LI, J. YAO, L. G., B. ZHANG et J. CHANUSSOT : Tensor decompositions for hyperspectral data processing in remote sensing : A comprehensive review. *arXiv preprint arXiv :2205.06407*, 2022.

[25] Q. WEI, J. M. BIOCAS-DIAS, N. DOBIGEON et J.-Y. TOURNERET : Multiband image fusion based on spectral unmixing. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 54(12):7236–7249, 2016.

[26] N. YOKOYA, C. GROHNFELDT et J. CHANUSSOT : Hyperspectral and multispectral data fusion : A comparative review of the recent literature. *IEEE Geosci. and Remote Sens. Magazine*, 5(2):29–56, 2017.

[27] N. YOKOYA, T. YAIRI et A. IWASAKI : Coupled Nonnegative Matrix Factorization Unmixing for Hyperspectral and Multispectral Data Fusion. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, 50(2):528–537, 2012.

[28] G. ZHANG, X. FU, K. HUANG et J. WANG : Hyperspectral super-resolution : A coupled nonnegative block-term tensor decomposition approach. In *2019 IEEE CAMSAP*, 2019. Guadeloupe, West Indies.