



HAL
open science

Démonstration en mathématiques : principes et pratiques

Catriona Maclean

► **To cite this version:**

| Catriona Maclean. Démonstration en mathématiques : principes et pratiques. 2023. hal-04136424

HAL Id: hal-04136424

<https://hal.science/hal-04136424>

Preprint submitted on 21 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Démonstration en mathématiques : principes et pratiques

Catriona Maclean

Ce qui vous commencez à lire est une réflexion libre sur la démonstration écrite par une mathématicienne qui n'est pas une méta-mathématicienne. Je vais passer en revue un certain nombre de questions sociologiques, philosophiques et didactiques que je me pose sur la démonstration, mais je n'ai pas de compétences particulières en philosophie ni en didactique (autres que celles qu'a tout enseignant expérimenté) et je vous invite à voir dans ce texte les interrogations des nuits d'insomnie d'un prof, pas l'analyse d'un expert.

Comme ce texte est tiré de mes réflexions sur ma propre activité, et mon domaine de recherche est la géométrie algébrique complexe, je n'aborderai pas l'aspect - par ailleurs très intéressant - du rôle juste de la démonstration dans les mathématiques appliquées, faute de compétence.

La démonstration au vingt et unième siècle.

*"J'ai regardé ses articles, c'est bien des maths, il y a des démonstrations"*¹

Dans mon institut de recherche, nous sommes une petite centaine de chercheurs : je pourrais lire en détail les articles de recherche d'une dizaine d'entre eux. Pour une autre vingtaine, je pourrais survoler l'article sans tout comprendre, et pour le reste - une majorité nette de collègues - leur travail m'est hermétique. Nous travaillons avec des méthodes différentes sur des notions différentes avec des objectifs différents : nos communautés de travail sont des archipélages éclatés qui ne s'intersectent pas et parfois nous n'avons même pas de langage commun pour partager nos recherches.

C'est à se demander si on a autre chose en commun à part le fait de *démontrer*.

1. Leitmotif récurrent de toutes les discussions C.N.U. (Conseil National des Universités) ou il faut décider si l'activité de tel ou tel chercheur est de faire des "mathématiques fondamentales".

La démonstration est presque devenu la seule chose qui unit la "section 25"² : nous nous baignons dedans au point de perdre que ce n'est pas le seul modèle de pensée possible, et ne semble pas être le mode d'apprentissage inné de l'homme³. Pourtant, quand j'examine l'idée la plus souvent admise de ce qui est une démonstration, je ne reconnais qu'une partie modeste de mon quotidien.

Dans le modèle de démonstration proposée par Euclide[12] et raffiné par les logiciens du fin du dix neuvième et début du vingtième siècle les mathématiques seraient un sorte de Minecraft intellectuel dans laquelle nous disposons d'un nombre limité de briques de base (axiomes/blocs) que nous exploitons selon des règles de combinaisons limités (axiomes Zermelo-Frenkel/établi de construction) à partir de données de base limitées : si assez de personnes passent assez d'heures à cet exercice il n'y a pas de limite à la sophistication des constructions qui peuvent en sortir.⁴ C'est une vision centrée sur la production finale des mathématiques - l'article terminé - dont l'analogie et les expérimentations mathématiques ont été effacées alors que nos brouillons en regorgent.⁵ Souvent il nous arrive de construire une démonstration à présenter en publique - ou pire, un cours - dont elles ont disparues, avec comme corollaire un grand nombre d'étudiants en difficulté pour commencer un problème de maths parce que la phase par laquelle nous commençons - l'expérimentation - est peu présente dans ce qu'on leur a montré, comparé à la place qu'elle occupe dans nos recherches.⁶ Toute comme l'expérimentation, l'intuition géométrique n'aurait pas plus place de cité dans une "vraie" démonstration : ne resterait qu'un suite d'énoncés précis liés par des implications logiques imparables : les mathéma-

2. Les universitaires français relèvent de divisions administratives nommées "sections" ([9]) : la section 25 est celle des mathématiques fondamentales et les mathématiques appliquées relèvent de la section 26. Policer cette frontière instable est une partie du travail du CNU.

3. Par exemple, le mécanismes neurologiques d'apprentissage proposés par Donald Heeb dans [22] - souvent cité dans la forme "neurons that fire together wire together" - sont essentiellement *inductifs*.

4. Du côté des mathématiciens, ça peut donner le Stack Project[36] : du côté Minecraft, la construction dans le jeu d'un ordinateur fonctionnel capable de jouer à des jeux vidéos simples [29].

5. En pratique, c'est par l'analogie et l'expérimentation qu'on trouve le chemin à prendre. Certaines des lettres de Gauss à d'autres savants racontent des calculs titanèsque, comme, par exemple, une lettre à Encke en 1849, ou il explique avoir vérifié et calculé tous les nombre premiers jusqu'à 1,000,000 dans sa jeunesse[17].

6. Signalons un journal - Experimental Mathematics - qui a la particularité de ne publier des articles qui *contiennent* une grande partie d'expérimentation préalable, justement pour lutter contre cette tendance à l'invisibilisation à un pan essentiel de notre travail, voir leur manifeste [14]

tiques sont la science de la certitude.

Deux questions... D'abord, est ce qu'on est sur que ce projet fait autre chose que déplacer et concentrer le doute? Comme le cygne noir⁷ invoqué par les théoriciens des crises économiques,[37] une incompatibilité dans les axiomes de Zermelo Frenkel n'est que rarement envisagé par des mathématiciens, car estimé très peu probable, mais elle n'est pas exclue, et cette possibilité devrait suffire à relativiser nos certitudes. Un problème qui me paraît encore plus inextricable : comment mettre en pratique un projet d'infalibilité via des agents qui ne le sont pas? Comment maintenir même un degré raisonnable de confiance dans nos résultats dans un contexte où les avancées majeures n'ont souvent plus la forme d'un unique article, pas excessivement long, qui peut être lu et compris dans son ensemble par un spécialiste, mais émergent de projets impliquant plusieurs équipes et engendrant de nombreux articles longs et techniques, de sorte que leur totalité, mise bout à bout, dépasse les capacités cognitives de l'être humaine.⁸ Est ce qu'on peut se satisfaire d'une vérification "locale" de nos résultats? Il y aura des erreurs, est ce que nos procédures pour les détecter sont assez robustes?

En tout cas, en quelques minutes on se convainc que ce modèle ne décrit pas notre quotidien, ni d'enseignant, ni de chercheur. Je ne crois pas, par exemple, qu'il soit possible d'enseigner l'analyse complexe ou faire des recherches dans ce domaine où tout calcul se fait par la déformation d'un chemin d'intégration sur des contours appropriés, sans faire appel à une intuition géométrique : le moindre calcul nécessiterait des heures, et à la fin personne n'y aurait rien compris. Nous parlons de \mathbb{N} sans évoquer l'arithmétique de Peano et de \mathbb{R} sans les coupures de Dedekind : ces constructions, sans lesquelles \mathbb{N} et \mathbb{R} ne rentrent pas dans un programme de axiomatisation ne sont pas toujours enseignées, et quand elles le sont c'est en tant que curiosité exotique. Je suis parfois interpellée par mes étudiants sur la limite précise entre ce qui, dans tel ou tel contexte, peut être admis et ce dont une démonstration est attendue, et le niveau de précision exigé : il m'est souvent difficile de répondre à ces questions dont la réponse dépend de tout façon du correcteur, ce qui suggère que la bonne réponse n'est pas "il faut tout refaire en commençant par les axiomes de Zermelo-Fraenkel". Un cours réussi repose souvent sur un choix judicieux de

7. Un "cygne noir" étant un événement disruptif majeur, négligé par des théoriciens car de probabilité très faible et donc non prévu par des modèles, mais dont la probabilité faible est contrée par l'impact majeur quand il arrive.

8. Entendre : un individu humaine, quel qu'il soit. Typiquement dans ces projets, chaque partie de l'ensemble est compris en détail par quelqu'un, mais il n'y a plus personne qui domine tout le projet dans tous les détails.

cette limite entre les notions élémentaires laissées dans l'ombre et à l'intuition et celles qui recevront une définition et traitement rigoureux, le "bon choix" dépendant bien sûr du niveau, de type de cours, et du tempérament des étudiants et du professeur.

Dans la recherche aussi nos pratiques ne suivent pas le modèle formel : les processus par lesquelles les idées émergent et se polissent ressemblent plus au grouillement d'une formillière⁹ qu'à l'exécution d'un programme linéaire. Une idée émergera souvent d'une discussion ou sur un brouillon dans la forme d'une analogie ou une observation expérimentale : elle est intrigante mais on se rend rapidement compte qu'elle est fautive. Elle sera échangée à la recherche d'un palliatif avec d'autres collègues qui trouveront des faiblesses et proposeront des rustines plus ou moins élégantes, dont la plupart étayeront une partie branlante en provoquant des effondrements ailleurs. Beaucoup d'idées végèteront pendant des années avec des pansements, puis des pansements sur des pansements, jusqu'à ce que leur abandon par lassitude : quelques unes finiront enfin à tenir debout tant bien que mal et seront écrites. Lors de l'écriture, on découvre le plus souvent qu'il y a des passages douteux dont on a surestimé la facilité et qui doivent être retravaillés : ensuite, on fait circuler une version bêta dans un cercle restreint d'experts (qui remonteront des soucis) avant de partager avec la communauté sur ArXiv (idem) puis soumission dans une revue et évaluation par un pair (qui ne trouvera rien parce qu'il est surchargé et à la bourre)¹⁰

Même dans nos représentations de notre métier, nous écartons du modèle formel, valorisant plus le chaos dont les idées émergent que leur écriture précise : le chercheur intuitif qui "voit" ses résultats est réputé un génie alors que celui qui transforme les intuitions en démonstration passe pour un scribe. Nous retenons Ramanujan et ses rêves mathématiques – Hardy est célèbre pour son propre travail, mais pas pour avoir séparé les vérités des erreurs dans la production de Ramanujan et de l'avoir mise en forme. Poincaré, qui n'était pas, selon son mentor Hermite, quelqu'un de très à cheval sur la démonstration¹¹

9. Dans le sens très précis d'un ACO - Ant Colony Optimisation, [10] des classes d'algorithmes collectifs inspirées par des formillères. Dans celles-ci, des agents multiples explorent des espaces de paramètres, et laissent derrière eux des marqueurs basés sur leur taux de réussite qui influent sur le comportement de leurs successeurs.

10. On discutera plus tard de l'importance prise par ces méthodes communautaires de validation des connaissances, et les problèmes induits par leur statut officieux.

11. Hermite sur Poincaré : "Souvent Picard lui a demandé, sur des points d'une grande importance dans ses articles des Comptes Rendus, des éclaircissements et des explications, sans pouvoir jamais rien obtenir qu'une affirmation : c'est ainsi, c'est comme cela, de sorte qu'il semble comme un voyant auquel apparaissent les vérités dans une vive lumière, mais en

est réputé un des plus grands mathématiciens de l'ère moderne, et même Cantor, un des fondateurs de la logique mathématique moderne était de l'avis que "en mathématiques il est plus important de savoir poser des questions que de donner des solutions."¹².

Accommodations aux principes à travers les âges, les pays et les années universitaires

Dans la pratique, les formalismes tels que le langage des prédicats¹³ ou l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel¹⁴ se heurtent à une barrière dès qu'on cherche à dépasser les fondements de la logique¹⁵ : le RAM du cerveau humaine. Des neurologues ont estimé (voir par exemple [28]) le nombre de "blocs" qui peuvent être actifs simultanément dans le cerveau humaine aux alentours de 7, avec une variabilité relativement limitée entre individus : anecdotiquement, j'ai bien l'impression en cours que la différence entre un étudiant de premier cycle et un expert reconnu n'est pas le nombre de blocs de connaissances qu'ils peuvent manipuler en même temps, mais leur complexité. Le débutant verra dans un argument de niveau licence une imbrication de plusieurs arguments de base, ce qui épuise son RAM personnel, là où le spécialiste percevra un unique raisonnement élémentaire.

On notera que cette théorie du cerveau - un nombre limité de blocs actifs et une complexité potentiellement grande de ces blocs - ne cadre pas très bien avec le projet des langages des prédicats, ou les énoncés mathématiques contiennent un très grand nombre de symboles de base dont l'interprétation reste simple.

Au quotidien, je n'utilise pas de la logique pure : comme tous mes collègues j'approche la logique pure par le langage naturel, et le degré d'approximation admise varie en fonction de la période historique, le groupe social¹⁶ et le contexte académique.¹⁷ Dans mes cours au fer et mesure du niveau acadé-

grande partie pour lui seulement."

12. "In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi." [6]

13. Le langage formel inventé par Russell et Whitehead lors de leur tentative, dans les Principia Mathematica, de mettre toutes les mathématiques sur des fondations sûres, [44]

14. Le système d'axiomes de la théorie des ensembles utilisé implicitement par la très grande majorité des mathématiciens.

15. Le "Principia Mathematica", constitué trois gros volumes difficilement lisible - la démonstration que $1 + 1 = 2$ fait une demi page - ne dépasse pas la construction des nombres réels.

16. Domaine d'expertise, mais aussi nationalité.

17. J'ai eu en deuxième année de licence un cours de "méthodes mathématiques en sciences de l'ingénieur" dans lequel la dérivée d'une fonction de Dirac était une fonction qui était zéro

mique qui monte, j'observe un double mouvement dans le degré de rigueur demandé. D'un part, la nature des objets étudiés devient de plus en plus précise, ainsi, un nombre réel sera d'abord un point sur un droit, puis une expansion décimale : ensuite, on travaillera avec des propriétés axiomatiques des nombre réels, en admettant qu'il existe un ensemble que les satisfait, et ce n'est que vers la fin de la licence qu'on abordera la définition précise d'un nombre réel (qui sera introduite le temps de s'assurer que les propriétés clés sont valables, et oubliée aussitôt). Mais en même temps, le nombre de choses qui doivent être détaillés recule. Petit à petit, des arguments que les débutants déchiffrent ligne à ligne coalescent pour devenir dans les représentations mentales d'étudiants plus avancés des "briques élémentaires" que l'on appréhende dans leur totalité et qu'on peut utiliser tels quels sans plus de justification. Ainsi, on attendra qu'un étudiant de première année qu'il démontre qu'une suite bornée converge, là ou un étudiant de fin de licence sera autorisé à utiliser ce fait sans justification. A la fin de ce processus, les articles de recherche sont riches de phrases comme "by the usual compactness arguments"[39] "we obtain for $n \geq n_0$ by using some elementary estimations the following inequality 14"[11] "there is an incompressible surface whose fundamental group is some subgroup of the amalgamating group, by a standard 3-manifold argument" ([38]). (Notons que tous ces remarques sont tirés du coeur des articles auxquels ils appartiennent, et que dans le deuxième exemple, tiré d'un article cité plus que 600 fois et qui a fondé un nouvel domaine des maths, l'inégalité 14 est fausse.¹⁸)

Par ailleurs, les mathématiques ont existé pendant des millénaires sans preuves et la démonstration telle que pratiquée dans un cours d'analyse aujourd'hui est vieille d'au plus deux cents ans. Les mathématiciens babyloniens connaissaient le théorème de Pythagore ([1], [34], [16] et références)¹⁹ sans disposer d'un langage permettant de exprimer des démonstrations formelles²⁰ Certes, dès le troisième siècle avant Christ, Euclide propose dans les Elements

partout, sauf à l'origine ou il valait d'abord $+\infty$, puis $-\infty$, puis retournait à zéro. Ce fñt un excellent cours et l'objectif pédagogique - communiquer une intuition qui permettrait à des étudiants de L2 de calculer correctement avec des objets dont les fondements leur étaient inaccessibles - étaient rempli : les mêmes définitions auraient été hors de propos dans un cours dont l'objectif était d'apprendre aux étudiants comment démontrer.

18. Sans que cela ne mette en cause le résultat : une version un peu modifiée de l'inégalité reste vraie, et est largement suffisante pour l'utilisation qui en est faite dans le reste du papier.

19. La tablette babylonienne cunéiforme Plimpton 322, datée aux alentours de -1800, en donne une liste fournie, dont certains très complexes, sans que son utilisation précise soit connue (voir références). L'archéologue iraquien Taha Baqir a découverte à Tell Dhiba'i des textes pour écoliers présentant des calculs géométriques avec le théorème de Pythagore.

20. Leur connaissances étaient exposées sous la forme de "worked example" ou de tableaux de valeurs possibles.

J'espère que ces deux exemples vous ont convaincus que notre système de validation des résultats n'est pas suffisant. Le processus de détection et rectification des erreurs - l'évaluation par les paires, en théorie - est capital car la sincérité de la littérature en dépende, or actuellement il ne fonctionne pas, parce que le temps et énergie qu'on y consacre n'est pas suffisant, et parce que pour certains résultats complexes il n'est plus adapté.²¹ De base, devant la complexité baroque d'une partie des mathématiques d'aujourd'hui, il semble peu réaliste d'imaginer qu'une unique personne, même de très bonne volonté, puisse garantir de dénicher la moindre erreur dans un texte hautement technique, parfois de plus que cent pages et contenant souvent d'ellipses que seuls quelques experts sauraient remplir.²² Pour ne rien arranger, pour une certitude suffisante de la vérité des résultats soumis il faudrait non seulement vérifier le texte lui-même mais aussi une partie des références : quand un passage repose sur une citation il faudrait à minima vérifier qu'elle a été correctement citée et qu'elle s'applique dans le contexte de l'article à rapporter.²³ Certaines revues - mais pas tous - demandent à deux ou trois rapporteurs, ce qui dilue le problème sans l'éliminer - trois rapporteurs qui n'ont pas le temps de se pencher sur tous les détails techniques ne trouveront toujours pas les erreurs - et pose de grandes difficultés de main d'oeuvre²⁴.

â€

Les problèmes deviennent encore plus inextricables lorsqu'on se rappelle qu'un certain nombre de résultats majeurs aujourd'hui n'ont pas de "démonstration" au sens d'un article, fÃ»t il long, mais sont l'issus de projets ayant duré des années, voire des décennies, avec des dizaines de papiers contenant chacun un morceau du puzzle. Dans certains cas le nombre total de pages dans la démon-

21. Ce n'est pas uniquement une observation personnelle : l'étude [18] trouve un nombre anormalement bas de corrections dans la littérature mathématique, et en conclut que les processus de rectification sont peut être défailtantes. L'auteur fait l'hypothèse que le stigme associé à l'erreur dans la communauté de mathématiciens pourrait être contre-productif, incitant les mathématiciens à ne pas faire connaître assez largement leurs erreurs.

22. Cette inflation dans la taille des articles répond à une inflation analogue dans la taille des mathématiques : le taux de publication de preprints sur arxiv dépasse aujourd'hui les 500 articles *par jour*. Il en suit nécessairement une dislocation : l'individu ne peut avoir une connaissance autre que superficielle de ce qui se passe en dehors d'un domaine pointu, et "la mathématique" de Bourbaki n'existe plus pour le mathématicien, seulement pour le groupe social.

23. Il m'est arrivé parfois de vérifier les citations d'articles que j'avais à rapporter : assez souvent, il n'était pas immédiatement évident que la citation s'appliquait dans le contexte du nouvel article, sans que cette question soit abordée dans l'article citant : au mieux, il y avait une incantation comme "en adaptant la démonstration de tel résultat en tel papier", impossible à vérifier pour le rapporteur, faute de temps.

24. Il devient compliqué de trouver des rapporteurs.

tration peut dépasser les dix mille²⁵ et il semble probable qu'il n'y a aucune personne qui l'ait lu et compris dans sa totalité. Que veut dire dans pareil cas le fait de "vérifier" la démonstration? Cette situation semble appelée à devenir plus courant, le modèle de travail sur un "projet communautaire" devenant de plus en plus dominant, encouragé par la complexité grandissante des découverts et la structure des appels d'offre des institutions finançante.

Et encore, on discute ici du meilleur des cas, celui où le rapporteur a une forte conscience professionnelle et n'est pas trop débordé. Écrire des rapports est chronophage si on le fait bien et ce travail anonyme n'apporte aucune reconnaissance professionnelle - de fait, un collègue qui travaille sérieusement ses rapports en retire un malus professionnel, puisqu'il y consacre du temps qu'il n'a pas pu donner à des activités plus valorisées, un exemple d'incentivisation contre productive dans le milieu académique, où des tâches collectives essentielles se font souvent au détriment de la carrière.²⁶ Ajoutons une augmentation générale du nombre d'étudiants, accompagné d'une stagnation du pourcentage de PIB consacré à l'enseignement supérieur dans la plupart des pays ([31], [7]), et tout est réuni pour que cette tâche essentielle soit souvent bâclée.

En réalité, la plupart des mathématiciens professionnels ne se fient plus tout à fait à l'évaluation par les pairs et on voit émerger des systèmes de vérifications complémentaires officieuses. Les résultats majeurs, ceux qui font courir un risque d'invalidation d'un pan de la littérature s'ils étaient acceptés à tort, sont de fait soumis à une vérification communautaire parallèle à la vérification officielle par les pairs. Concrètement, après l'annonce d'un tel résultat, issu souvent d'un projet multi-équipes, de nombreuses équipes travaillant dans le domaine vont lancer des "groupes de travail" pour décortiquer la démonstration : leur format le plus courant sera celui de séminaires hebdomadaires lors desquels les membres du groupe se présentent mutuellement les différentes étapes du travail. La raison d'être principale de ces groupes sera la diffusion des savoirs plutôt que leur validation - les membres espèrent en tirer une connaissance de nouvelles techniques - mais de fait tout point faible ou obscur de la démonstration détectée lors de ces séances sera signalé aux auteurs, voire à la communauté de chercheurs dans le cas où il n'y a pas de réponse satisfaisante.

Pour ces résultats majeurs, ce système de validation collective semble de fait, bien plus fiable que l'évaluation par les pairs habituelle, d'abord par le plus

25. C'est le cas notamment de la classification des groupes finis simples.

26. Pour une discussion de ce problème du point de vue de la parité, voir [30] qui y voit la principale motivation du "plafond d'ivoire" qui empêche les femmes de progresser aux niveaux les plus prestigieux de la carrière académique.

grande nombre de personnes et d'heures de travail associées, et ensuite par le positionnement plus actifs des participants : lors d'une évaluation classique, le rapporteur lit l'article, alors que le participant à un groupe de travail doit retravailler le matériel dans l'optique d'une présentation orale à but didactique²⁷ : or c'est bien établi que la lecture passive d'un texte amène à une compréhension de celui-ci bien plus superficielle qu'un retravail actif du matériau. Leur force est également leur faiblesse : une forme de vérification aussi gourmande en temps de cerveau sera toujours réservée à un nombre restreint d'oeuvres qui changent les règles du jeu. Pour les oeuvres moins importants, il reste un espèce de vérification communautaire de moindre importance fournie par le dépôt en ligne sur ArXiv : une base de données qui depuis bientôt une vingtaine d'années contient la très grande majorité des nouveaux articles publiés dans les mathématiques.²⁸ Cette mise à disposition des oeuvres à la communauté permet en principe leur vérification par le plus grand nombre, mais dans la pratique, s'il semble probable que tout article qui y est soumis ait été survolé par les experts, ils n'ont probablement jamais reçu une lecture détaillée, et elle crée aussi des problèmes de sincérité de la littérature d'une autre type : la tentation est vive de considérer des dépôts arxiv faits par des experts reconnus font foi - y compris quand ils n'ont pas encore réussi une quelconque évaluation formelle.²⁹ Or il n'y a pas actuellement de système par lequel les articles erronés sur arxiv sont identifiés et retirés, et j'ai connaissance de certains cas où des articles erronés restent sur arxiv, à disposition de tout le monde, et l'information sur l'erreur ne circule que parmi un petit nombre d'insiders.

Une autre renforcement possible de nos procédures de vérification de nos résultats qui suscite de l'intérêt : la vérification formelle par ordinateur. Ce sont des logiciels qui (principalement) vérifient formellement des démonstrations "à l'ancienne" de mathématiciens qui sont préalablement re écrits dans un format compatible avec le syntaxe du logiciel. Plusieurs systèmes de ce type ont été développés récemment, dont Hol Light (utilisé par l'équipe de Thomas Hales dans la vérification formelle de sa démonstration de la conjecture de Kepler) et Lean, utilisé récemment pour valider la démonstration d'un théorème majeur de Scholze et Clausen [4]. Ces tentatives sont intéressantes, la difficulté actuelle semblant être le degré de traduction nécessaire entre un texte mathématique classique et le format lisible par la machine : pour que ces logiciels soient déployés à grand échelle, l'énergie et temps nécessaire pour convertir

27. Ce que ne sont pas, le plus souvent, les articles de recherche

28. Dans mon propre domaine, un demi douzaine d'articles apparaît sur Arxiv chaque jour, dépassant de loin ce qu'un individu peut lire en détail.

29. Par exemple, je n'ai pas trouvé de trace d'une publication de l'article de Simpson mentionné ci-dessus, qui est d'une importance majeure et a été cité de nombreuses fois.

un texte en un format compréhensible pour l'ordinateur doit être raisonnable, faute de quoi ils resteront cantonnés, comme la vérification communautaire, à un petit nombre de résultats majeurs. On regardera avec attention l'évolution future de ce domaine.

Conclusion

Si une thèse se dégage de ces réflexions, c'est la nécessité du doute. La démonstration en recherche mathématique, ainsi la certitude, n'est pas une réalité, c'est un but vers lequel on tend et dont on s'approche plus ou moins selon les contextes et les périodes : la probabilité d'erreur pourra être moindre ou plus grande, mais ne pourra jamais disparaître tout à fait. Il faudrait vivre avec, et pour vivre avec il faut que notre travail soit pensé non pas pour l'éviter en toute circonstance, ce qui est illusoire, mais pour le détecter et le corriger.

Références

- [1] Baqir, T. *Tell Dhiba'i : New mathematical texts*. Sumer **18**, 11-14, pl. 1-3.
- [2] Bloch, S. Algebraic cycles and higher K-theory, *Advances in Mathematics* **61**, Issue 3, September 1986.
- [3] Bolzano, Bernard (1817), *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewöhnlich, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Ewald 1996, pp. 225-48.
- [4] Buzzard, K., blog sur la démonstration formelle en mathématiques. Disponible à <https://xenaproject.wordpress.com/>.
- [5] Calvino, I. *La notte dei numeri*, dans *I racconti*, Mondadori, Milano, 1990.
- [6] Cantor, G., thèse de doctorat *De aequationibus secundi gradus indeterminatis* Göttingen. (1867)
- [7] Cardon-Quint, C. *L'éducation dans « Capital et Idéologie »* 6 novembre 2020, La vie des idées. Disponible à : <https://laviedesidees.fr/L-education-dans-Capital-et-Ideologie.html>
- [8] Cauchy, A-L., *Cours d'analyse*, 1821, disponible à <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f15.item>
- [9] Détails sur les "sections CNU" ici : <https://conseil-national-des-universites.fr/cnu/>.
- [10] Dorigo, M. *Optimization, Learning and Natural Algorithms*, PhD thesis, Politecnico di Milano, Italy, 1992.

-
- [11] Erdős, P Rényi, A. *On Random Graphs*. I. Publicationes Mathematicae. **6**, 1959.
- [12] Les oeuvres d'Euclide, traduction de F. Peyrard, Paris (1819), éditions Albert Blanchard (1993). Le livre est également disponible en ligne sur le site Gallica du BNF, dans les traductions de D. Henrion (1632) et F. Peyrard (1804).
- [13] Euler, L. *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, 1751.
- [14] Experimental mathematics : <https://www.tandfonline.com/action/journalInformation?show=aimsScopejournalCode=uexm20>
- [15] Project Flyspeck, disponible sur Github à <https://github.com/flyspeck/flyspeck>.
- [16] Friberg, J. *Methods and traditions of Babylonian mathematics : Plimpton 322, Pythagorean Triples, and the Babylonian Triangle Parameter Equations* Historia Mathematica **8** Issue 3, August 1981, Pages 277-318
- [17] Citée dans Goldstein, L.J., *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973).
- [18] Grcar, J. *Errors and Corrections in Mathematics Literature* April 2013 Notices of the American Mathematical Society **60**.
- [19] Grothendieck, A. *Esquisse d'un Programme* (1984) disponible en [http://matematicas.unex.es/ navarro/res/esquisefr.pdf](http://matematicas.unex.es/navarro/res/esquisefr.pdf).
- [20] Hales, T. *A proof of the Kepler conjecture*. Ann. of Math. **162** (2005), no. 3, 1065-1185.
- [21] Hales et al. *A formal proof of the Kepler conjecture* Forum Math. Pi **5**, Paper No. e2, 2017).
- [22] Hebb, D.O. *The Organization of Behavior*. New York : Wiley Sons, 1949.
- [23] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig.
- [24] Hitt, F. (2005). *L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques : des entités conflictuelles ? une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien Wolf (1713)* GDM 2005 : Raisonement mathématique et formation citoyenne.
- [25] Kahane, J-P *La caricature de Fourier et Legendre par Boilly* <https://images.math.cnrs.fr/La-caricature-de-Fourier-et.html>
- [26] Kepler, J. *L'harmonie du monde*, octobre 1979, éditions Albert Blanchard.
- [27] Leibniz, G.W., Acta Eruditorum, 1684, p. 467 et sq. et Mathematische Schriften, éd. Gerhardt, **5**, p. 220-226, Georg Olms Verlag, 1971.

-
- [28] Miller, GA. *The magical number seven plus or minus two : some limits on our capacity for processing information*. Psychological Review. **63** (2) : 81â97.
- [29] <https://knowtechie.com/this-computer-built-inside-of-minecraft-can-run-tetris-and-snake/>
- [30] Misra J., Hickes Lundquist, J. Holmes, E. et Agiomavritis, S., *The ivory ceiling of service work*. Report de l'A.A.U.P, janvier-février 2011, disponible à : <https://www.aaup.org/article/ivory-ceiling-service-work.Y4nJfn2ZPIU>
- [31] Piketty, T. *Capital et Idéologie*, Le Seuil, Paris, 2019.
- [32] Ramis, J-P. *Les séries divergentes*, Pour la science **350**, à 30 novembre 1999.
- [33] Rågstedt, M. *From order to chaos : the prize competition in honour of King Oscar II* Institut Mittag-Leffler, disponible à <http://www.mittag-leffler.se/library/henri-poincare>.
- [34] Robson, E. *Words and Pictures : New Light on Plimpton 322*. American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, **109**.
- [35] Simpson, C. *Homotopy types of strict 3-groupoids*. Preprint arxiv <https://arxiv.org/abs/math/9810059>
- [36] Actuellement, ce projet contient 7523 pages et 755981 lines of code disponibles ici : <https://stacks.math.columbia.edu/>
- [37] Taleb, N.N. *The Black Swan : The Impact of the Highly Improbable*, London : Penguin, 2010.
- [38] Thurston, W. *Hyperbolic structures on 3-manifolds*, Annals of Math, **124** (1986).
- [39] Valentine F.A. *Minimal sets of visibility*, Proc Amer Math Soc **4**, p 918.
- [40] Voevodsky, V. *Cohomological Theory of Presheaves With Transfers*. November 1999, Annals of Mathematics.
- [41] Voevodsky, V. *The Origins and Motivations of Univalent Foundations A Personal Mission to Develop Computer Proof Verification to Avoid Mathematical Mistakes*. <https://www.ias.edu/ideas/2014/voevodsky-origins>
- [42] Voevodsky, V. et Kapranov, M. *∞ -Groupoids as a model for a homotopy category*. Russian Mathematical Surveys, **45**, Number 5
- [43] Weierstrass, K. *Mathematische werke* Editeurs : Knoblauch, J. Hettner, G., Rothe R.E. et Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1894-1927).
- [44] Whitehead, A.N. et Russell, B. *Principia Mathematica*. Cambridge : Cambridge University Press, 1963.