



HAL
open science

The Potential Contribution of Graph Theory to Organization Theory

Dorwin Carthwright, Laurent Beauguitte

► **To cite this version:**

Dorwin Carthwright, Laurent Beauguitte. The Potential Contribution of Graph Theory to Organization Theory. 2023. hal-04134318

HAL Id: hal-04134318

<https://hal.science/hal-04134318v1>

Submitted on 20 Jun 2023


HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Dorwin Cartwright, 1959, The Potential
Contribution of Graph Theory to
Organization Theory
Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.
A diagram consisting of three colored dots: a blue dot on the left, a red dot in the center, and a yellow dot on the right. Two curved arrows point from the blue and yellow dots towards the central red dot.

Été 2023

Version traduite et commentée par Laurent Beauguitte (UMR Géographicités).

Présentation

Dans l'article de William Garrison paru en 1960, premier article de géographie mobilisant la théorie des graphes, la première référence bibliographique relative à cette théorie est ce chapitre d'ouvrage, d'où son entrée dans la collection textes du groupe fmr.

Dorwin « Doc » Cartwright (1915-2008) est un psychologue américain qui a notamment travaillé au *Research Center for Group Dynamics* fondé par Kurt Lewin au MIT en 1945. Suite au décès de Lewin en 1947, le centre migre à l'université du Michigan et Cartwright le dirige de 1948 à 1958. Il fait toute sa carrière dans cette université.

La rencontre avec le mathématicien Frank Harary (1921-2005), recruté en 1953 à l'université du Michigan, lui permet de découvrir la théorie des graphes. Ensemble ou séparément, ils écrivent à la fin des années 1950 plusieurs textes montrant les potentialités de la théorie des graphes en sciences sociales. Ils publient en 1965 avec Robert Z. Norman, premier thésard d'Harary, le manuel *Structural Models. An introduction to the Theory of Directed Graphs* paru chez Wiley.

L'ouvrage dont est tiré ce chapitre est issu d'un symposium qui s'est tenu en février 1959. Comme le psychologue Mason Haire l'indique dans la préface, si Dorwin Cartwright a participé à ce symposium, il n'a pas présenté ce texte écrit spécialement pour l'ouvrage. Le chapitre, très pédagogique et richement illustré, cherche à transposer point par point différents axiomes de la théorie des graphes à la théorie des organisations.

Références

Dorwin Cartwright, 1959, The Potential Contribution of Graph Theory to Organization Theory, in Mason Haire (ed.), *Modern Organization Theory*, John Wiley & Sons, p. 254-271.

Kurt Lewin, 1945, The Research Center for Group Dynamics at Massachusetts Institute of Technology, *Sociometry*, 8(2) : 126-136.

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination du chapitre paru en 1959. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont du traducteur.

The Potential Contribution of Graph Theory to Organization Theory

Introduction

Purposes of this paper are : (1) to suggest that the mathematical theory of linear graphs can be of considerable help to the organization theorist ; (2) to illustrate some of the ways in which such help might be achieved ; and (3) to refer to publications of special relevance for those who wish to explore this possibility further. ¹

Theorists concerned with the structural properties of organizations often make use of two basic ideas, which serve formally as primitive [255] (undefined) terms in that the more complex conceptions of the theory are built up from these terms. Although given various labels in different theories, these two terms refer essentially to (1) units or parts of an organization, and (2) relationships or connections between pairs of units.

Organization theorists differ in what they take to be the basic unit. For some, the organizational building block is the individual person. For others, it is the office, position, or role. And sometimes it is a particular collection of people, such as a work group, section, or department. Whatever the parts of an organization are said to be, in analyzing structural properties the basic unit is treated as an undifferentiated entity.

The units of an organization are said, depending upon the particular theory, to be related by bonds, linkages, channels, connections, or lines - to mention but a few of the labels employed. These different labels reflect, to some degree, the *type* of relationship selected for emphasis, although most theorists allow for several different types to exist between any given pair of units. Those of most common interest appear to be : authority or power ; responsibility ; communication ; task or work interdependence ; goal or motivational interdependence ; attraction or loyalty ; and interaction or association.

Statements about the *structure* of an organization (e.g., that it is hierarchical, that it has many levels, or that it is decentralized) refer essentially to the arrangement of its units and relations. The typical organization chart, by identifying certain units and indicating the authority relations intended to obtain between them, depicts one aspect of the organization's structure.

1. The theoretical possibilities described in this paper have gradually become evident as a result of an extended collaboration between social scientists and mathematicians in the Research Center for Group Dynamics. I am especially indebted to Frank Harary for many of the ideas proposed here, and refer the reader to a paper of his on a similar topic (Harary, 1959b).

Other aspects could be shown by indicating communication networks, patterns of friendship or association (commonly referred to as the “sociometric structure”), and the flow of work. In all these treatments of structure the organization is conceived as consisting of some configuration of interrelated units.

The branch of mathematics known as the theory of linear graphs, or more simply as graph theory, is concerned with the “patterns” or “configurations” of collections of abstract elements called “points” and “lines.” The potential usefulness of graph theory for the organization theorist lies in the possibility of coordinating units of an organization to points of a graph, and relationships between units to the lines of a graph. If such a coordination could be properly carried out, then the formal properties of graphs could be said to apply to the structure of organizations.

The gains to the organization theorist from such a coordination [256] would be considerable. A simple, but by no means unimportant advantage derives from the fact that graph theory provides a means for depicting structural properties, thus making it possible to “draw a picture” of an organization. The heuristic value of being able to “see” the structure of an organization should not be underestimated. Of much greater importance, however, is the fact that graph theory constitutes a *mathematical system* consisting of undefined terms, axioms, and theorems derived from these. If certain conditions are met, graph theory can serve as a mathematical model of the structure of organizations. Then organization theory would be able to employ the conceptual rigor of the mathematical system, and the results of years of mathematical work.

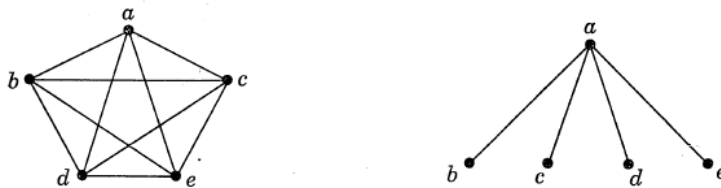
The mathematical work on graph theory has produced three major kinds of results of potential value to organization theorists. First, graph theory contains certain “higher-order” concepts which are rigorously defined in terms of the mathematical system. Since these terms refer to more complex properties of graphs, the coordination of graphs to organizations would provide a set of precisely defined concepts for describing various properties of organizations. Graph theory would thus contribute to the “language” of organization theory. Second, graph theory supplies valuable techniques of computation, and formulas for calculating certain quantitative features of organization structure. Third, the theorems of graph theory specify features of graphs, and thus of organizational structure, which follow necessarily from the undefined terms and axioms of graph theory. It is important, in this connection, to note one limitation on these theorems. Since the axioms of graph theory state nothing about empirical tendencies (e.g., tendencies toward “preferred” states, or tendencies to maximize or to minimize certain properties), the theorems of graph theory, *per se*, cannot generate theorems about the dynamics of organizations. Graph theory, therefore, may be incorporated as a

part of organization theory, but it cannot constitute all of it. A complete theory of organizations will contain empirical axioms in addition to those formal axioms provided by graph theory.

Ordinary Graphs

The potential usefulness of graph theory may be illustrated more specifically by means of a brief discussion of some of the basic concepts of graph theory. First, however, we must note that several different kinds of graphs have been distinguished. For simplicity, [257] the discussion will be confined initially to what are known as “ordinary” graphs. Later, we shall indicate how other kinds of graphs might be more appropriate in dealing with certain kinds of organizational properties. For a more extended discussion of graph theory, the reader is referred to Berge (1958), Koenig (1936), Harary and Norman (1953 ; to be published), and Harary, Norman, and Cartwright (to be published).

Figures 1 - 2



A *graph of n points* consists of these n points together with a subset of the set of all lines joining pairs of these points. A graph is said to be *complete* if every pair of its points is joined by a line. Figure 1 shows a complete graph of five points. Figure 2 shows a graph of five points which is not complete.

The following list of properties, which may be stated more formally as axioms, serve to characterize ordinary graphs.

1. A graph has a finite number of points.
2. Each line is a set consisting of two points.
3. Each line must join two different points. Thus a graph may not contain any loops, i.e., any lines from a point to itself.
4. A graph may have at most one line joining the same pair of points.
5. No distinction is made between the “initial” and the “terminal” point of a line. If a line goes from point a to point b , then the same line is said to go from point b to point a .

If we are to coordinate an ordinary graph to the structure of an organization, we must be able to identify each unit of the organization with a point

of the graph, we must identify each relationship with a line, and the five statements above about the properties of ordinary graphs must remain true statements when “organization” is substituted for “graph,” “unit” for “point,” and “relationship” for “line.”

The experimental work initiated by Bavelas (1948 ; 1953) illustrates how graph theory may be related to empirical phenomena. In these studies, communication networks were created so as to have various [258] structural properties. Here, individual people were made to correspond to points of a graph, and “permissible” communication links to lines. The axioms of ordinary graphs were satisfied in most of these studies, although interesting modifications were introduced in some (e.g., Heise and Miller, 1951).

Some higher-order concepts

A *path* is a collection of lines of the form ab, bc, \dots, de where all the points a, b, c, \dots, d, e are different from each other.

A graph is *connected* if there exists a path between every pair of its points.

The *length of a path* is the number of lines in it.

The *distance between two points* of a connected graph is the length of any shortest path joining them.

The *associated number* of a point of a connected graph is the maximum of the distances from this point to each of the other points.

A *central point* of a connected graph is a point whose associated number is a minimum.

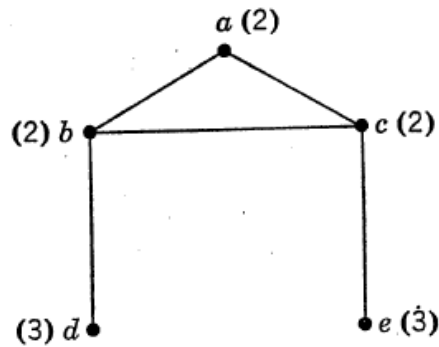
The *diameter* of a connected graph is the maximum of the distances between any two of its points; in other words, it is the maximum associated number.

We may now illustrate these concepts and show how they might apply to properties of an organization. Consider an extremely small organization consisting of five units, $a, b, c, d,$ and $e,$ and the officially approved communication channels among these units. Such a network of approved communication may be represented by an ordinary graph, if each unit is identified with a point and each approved communication channel with a line, and if the axioms of ordinary graphs produce true statements about the organization. The first two statements - that the organization has a finite number of units, and that each channel connects two units - present no difficulty. The remaining three statements raise interesting questions, and there are undoubtedly communication networks which do not satisfy them. It may be assumed, however, that in our hypothetical organization all are true; no unit

has an approved communication channel from itself to itself ; no more than one channel exists between any pair of units ; and each channel is two-way.

Figure 3 represents one of the many possible networks which might exist in this hypothetical organization. Units b and d might belong to one department ; units c and e might belong to a different department ; and units a , b , and c might form a coordinating group.

Figure 3



This communication network is obviously not complete since not every pair of units is connected directly by a channel ; for example, [259] d and e cannot communicate directly. Brief inspection will reveal, however, that there does exist a path between each pair of units, indicating that the organization is connected ; a message can go from any unit to any other via approved channels. If we look specifically at units d and e , we find two paths between them : (db, bc, ce) and (db, ba, ac, ce) . The first path is of length 3, the second of length 4. The distance between d and e is therefore 3. It can be readily seen that the distance between d and any other unit is less than 3, making the associated number of unit d equal to 3. The associated number of each unit is shown in parentheses in Figure 3. Inspection of these numbers reveals that the communication network has three central points : a , b , and c . A message can reach every unit of the network from any one of these central units in no more than two steps. Finally, we note that the diameter of this network is 3 ; the greatest number of steps required for a message to go from any unit to any other is 3.

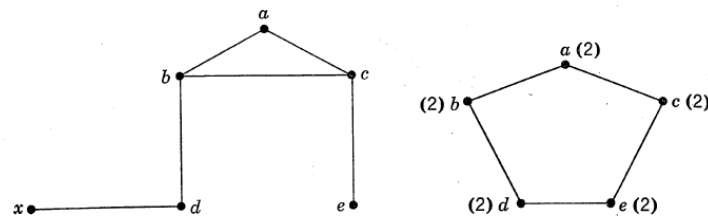
If the units of an organization are connected by a complete network, as in Figure 1, the values enumerated in the above paragraph will be quite different. Since each pair of units is now connected by a channel, the distance between every pair of units is 1, the associated number of each unit is 1, every unit is a central unit, and the diameter of the network is 1. The reader can readily calculate the corresponding values for the network shown in Figure 2, and for any other network which he may wish to construct.

Let us consider now a few more higher-order concepts of graph theory which may have significance for organization theory.

An *inner point* of a graph H , which is a subgraph of a graph G , is a point whose distance from a point of G not in H is maximal. An *outer point* of a graph H , which is a subgraph of a graph G , is a point whose distance from a point of G not in H is minimal.

Figure 4 may illustrate inner and outer points. We denote graph G as the set of points a, b, c, d, e , and x . We let graph H (the points [260] which were called “the organization” above) consist of points a, b, c, d , and e . It can be seen readily that the distance between x and e is 4, and that point e has the greatest distance from x of any points. The unit represented by point e is therefore the inner unit of the organization. Obviously, unit d is the outer unit since it is the only one having a distance of 1 from x . Unit x might be a supplier and unit d might be a purchasing section of the organization. It should be noted that an inner unit need not be a central unit, although it is possible for a unit to be both central and inner. An interesting empirical question to ask is, what difference it makes to an organization when units with various associated numbers have various distances from the “outside.”

Figures 4 - 5



A *cycle* of a graph is a collection of lines of the form pa, ab, \dots, cp where all the points p, a, b, \dots, c are different from each other.

A *tree* is a connected graph which has no cycles.

In Figures 3 and 4 units a, b , and c lie on the cycle (ac, cb, ba) . A network in which all units lie on a single cycle is shown in Figure 5.

The network depicted in Figure 6 differs from that of Figure 5 in that no channel directly connects units d and e . The absence of this channel “breaks” the cycle, converting the structure into a tree. It can be seen readily that the graph in Figure 2, which resembles the traditional organization chart, is also a tree.

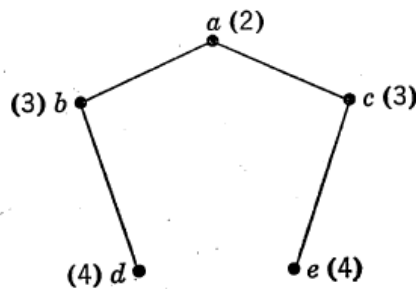
[261] A comparison of the associated numbers shown in Figures 5 and 6 reveals that the existence of a cycle can greatly affect the centrality of units. In Figure 5 all units are central; in Figure 6 only unit a is central. This

unit would seem to be in a quite different situation in the two structures. A theorem of graph theory states that any tree has either one or two central points.

An *articulation point* (sometimes called a *cut point*) of a connected graph is a point whose removal separates the graph into two or more subgraphs which are not connected to one another.

The possibility that people who serve as “liaison persons” may be treated as articulation points of a graph has been suggested by Weiss (1952), Jacobson and Seashore (1951), and Ross and Harary (1955). In Figure 3, units b and c are articulation points, and it was suggested above that these units might function as representatives of their departments in the coordinating group made up of units a , b , and c .

Figure 6



Articulation points have several properties of interest to the organization theorist. Since the removal of an articulation point separates the graph into two or more unconnected subgraphs, units which correspond to articulation points are particularly important in preserving the unity of the organization. It follows that an organization is most vulnerable at these points; the absence or malfunctioning of an articulation unit will have widespread repercussions for the organization. With this conclusion in mind, it is interesting to note that every point of a tree which is not an end-point is an articulation point, and that the traditional organization chart is a tree. The high vulnerability of these structures may account for the frequently reported existence of “informal” or “unapproved” communication channels in such organizations.

Units which correspond to articulation points of a communication network are likely to carry a heavy load of communication, because certain pairs of units of the organization cannot communicate to each other except through this unit. If such a unit becomes a “bottleneck” or if it systematically screens out certain types of information, parts of the organization will become poorly informed about matters that may be of importance to the organization as a whole.

There remains one higher-order concept to be discussed. The *degree of a point* of a graph is the number of lines of the graph on which it lies. In the type of coordination under consideration, the degree of a unit of an organization is the number of its approved communication channels. The higher the degree of a unit, the larger the number of units from which it may receive and to which it may send approved communication directly.

[262] One might think that a unit with a large number of communication channels would have a heavy load or be especially important in some way. In certain respects this is true. If a unit is unrestricted in how to use its communication channels, it then has more discretion the higher its degree, and it can thus exert more influence on the direction of the flow of messages in the organization. Also, if circumstances arise so that a unit receives messages simultaneously over all its channels, it will obviously be busier the higher its degree. However, any correct general statement would be very complex, for the degree of a point of a graph is not related in any simple way to other structural properties of graphs which themselves clearly influence the importance or load of a unit. For example, the degree of an articulation point can assume many different values : unit *a* is an articulation point with degree 4 in Figure 2, an articulation point with degree 2 in Figure 6, and not an articulation point in Figure 5 even though it has exactly the same communication channels as in Figure 6. Similarly, the degree and the associated number of a point may vary independently over a considerable range of values. Thus, a central point may have a relatively high or a relatively low degree : in both Figures 2 and 3 unit *a* is central, but it has degree 4 in one and degree 2 in the other.

We may conclude, then, that the degree of each unit of an organization has some important consequences but that these consequences can be greatly modified by other structural properties of the organization.

Number of points and number of lines of a graph

In theorizing about the structure of organizations, many interesting questions can be raised concerning relations between the number of units and the number of connections in an organization. As the number of units increases, how many connections must be added to keep the organization a complete network? For any given number of units, what is the minimal number of connections required to produce a connected network? What is the optimal number of connections for an organization of a given size? Graph theory can help answer questions like these by providing information concerning necessary relations between the number of points and lines of a graph. We next consider a few formulas which express these relations.

First, it may be noted that the number of lines in a graph is obviously

related to the degree of the points of the graph. Since every line contains exactly two points and thus contributes to the degree of two points, the *number of lines in a graph* is equal to one-half of the [263] sum of the degrees of all points in the graph. Thus, whenever the degree of each point is known, the total number of lines in the graph can be calculated readily. The number shown beside each point in Figure 7 indicates the degree of the point. In graphs as simple as these it is easier to count the number of lines than to calculate this number from the degrees of the points. Under some conditions, however, the number of lines can more easily be calculated than counted.

Complete graphs. Knowing this simple relation between the sum of the degrees of the points and the number of lines of a graph makes it easy to see a necessary relation between the number of points and lines of any complete graph. In Figure 7 all the graphs are complete. It is evident that all points in each complete graph have the same degree. Specifically, the degree of each point of a complete graph is equal to the number of points in the graph minus one. From this fact, we can construct a formula for the *number of lines in a complete graph* : $L = \frac{1}{2}P(P - 1)$, where L is the number of lines and P is the number of points.

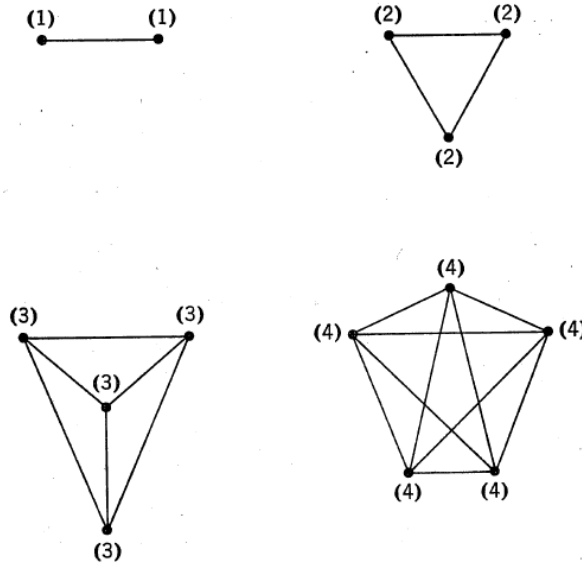
Planar graphs. Organization theorists will find that they are often dealing with a class of graphs known as planar graphs. It will be helpful, therefore, to know that certain formulas are available which state the relation between the number of points and lines of such graphs.

[264] A *planar graph* is one which can be drawn on a plane in such a way that none of its lines cross. The graphs in Figure 7 which contain 2, 3, or 4 points are planar ; the graph with 5 points is not planar. When a connected planar graph is drawn on a plane so that none of its lines do cross, we have a planar map whose vertices are the points of the graph, whose edges are the lines of the graph, and whose faces are areas completely closed by lines of the graph. It is known that for planar maps the number of edges equals the number of vertices plus the number of faces minus one. From this property of planar maps one can state the following formula for the *number of lines in a connected planar graph* : $L = P + F - 1$, where L is the number of lines, P is the number of points, and F is the number of faces.

It will be recalled that a tree is a connected graph which has no cycles. Thus, every tree is a connected planar graph whose corresponding planar map contains no faces. It follows that the formula for the *number of lines in a tree* is : $L = P - 1$. Figure 8 shows several planar graphs with their corresponding formulas. The last two graphs of Figure 8 are trees.

Maximal and minimal number of lines. It is immediately apparent that a complete graph has the greatest number of lines possible for any graph. Thus, the *maximal number of lines of a graph* is given by the formula

Figure 7



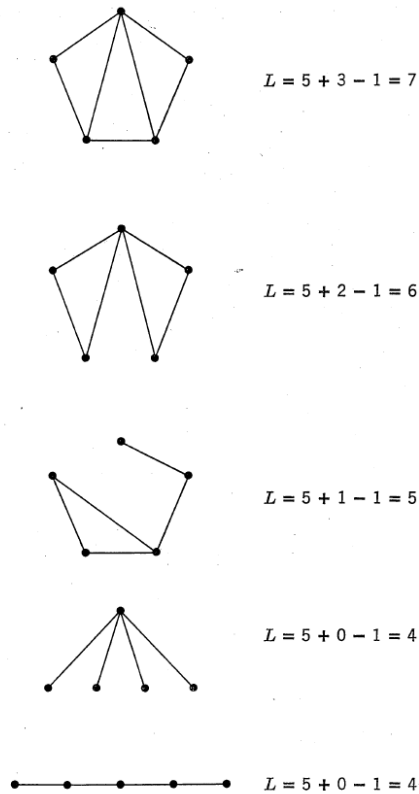
$L = \frac{1}{2}P(P - 1)$. The minimal number of lines is obviously zero. A more interesting problem, however, is to determine the minimal number of lines of a connected graph. A little thought will reveal that such a graph will be planar, since any non-planar graph can be made planar by removing some of its lines. From the formulas given above it is clear that a tree will have fewer lines than any other connected planar graph with the same number of points. Thus, the *minimal number of lines of a connected graph* is given by the formula : $L = P - 1$.

Optimal number of lines. What is the optimal number of lines for a graph with a given number of points ? Obviously, the answer to this question requires selection of one or more criteria of evaluation. There would appear to be a very large number of possible criteria and a much larger number of possible combinations of criteria. For this reason, one cannot hope to find a single, universal value for the optimal number of lines. We shall, therefore, merely illustrate here a few ways in which questions of optimization might be approached.

In dealing with communication networks, it might be assumed that each channel is costly and that an organization should provide as few channels as possible. It might be assumed in addition that the communication network should make it possible for a message originating anywhere in the organization to reach every other unit ; in other words, the network should contain all units of the organization and correspond to a connected graph. We saw above that a tree meets these two conditions and that the optimal

number of lines for these conditions is given by the formula : $L = P - 1$.

Figure 8



One might, however, be dissatisfied with this result, since a tree has certain properties which make it less than the ideal communication network in several respects. For example, as noted earlier, [266] all points of a tree which are not end-points are articulation points. Since articulation points make a structure vulnerable and since they are likely to be subjected to heavy loads, one might wish to add another criterion, that the organization should not contain any articulation units. A graph whose points all lie on a single cycle satisfies this new criterion in addition to the previous ones. Such a graph is connected and has no articulation points. The formula for this kind of graph is $L = P$. But a graph of this sort will tend to have a large diameter. One might, therefore, want to add another criterion, that the diameter should not exceed some specific value. Again, an optimal value could be found, but it will be readily seen that the addition of criteria makes the solution increasingly difficult, and we shall not attempt here to pursue the problem further.

We conclude this discussion of the optimal number of lines with a ge-

neral observation. The criteria which one will want to choose for evaluating a graph will undoubtedly depend upon the type of empirical relationship being considered. Throughout this paper we have employed communication networks among units of an organization to illustrate the usefulness of graph theory. Had we employed affective bonds between individuals, for instance, the suggested criteria of evaluation might have been quite different. With such a coordination in mind, it might seem that the optimal condition would be one which maximizes the number of lines in some way. Whatever the appropriate criteria may be in any particular situation, graph theory can be a useful tool in solving problems of optimization.

Some Limitations of Ordinary Graphs

At the beginning of this paper it was pointed out that graph theory can serve as a mathematical model of organizational structure provided certain conditions are met. Specifically, it is necessary to have an unambiguous rule for coordinating the points and lines of a graph to particular features (entities and relationships) of an organization. Furthermore, under such a coordination the axioms of graph theory must produce true statements when empirical terms are substituted for their coordinate graph theoretic terms.

In order to illustrate the potential usefulness of graph theory as simply as possible the discussion has been limited to the theory of ordinary graphs, although other kinds of graphs could have been chosen. Theories of different kinds of graphs differ from one another with respect to the set of axioms assumed. Each axiom system generates a particular kind of graph with an appropriate set of higher-order concepts and theorems. It is not possible here to present the theory of other than ordinary graphs, but we must discuss at least briefly some alternative axioms which may prove to be of great importance to organization theory.

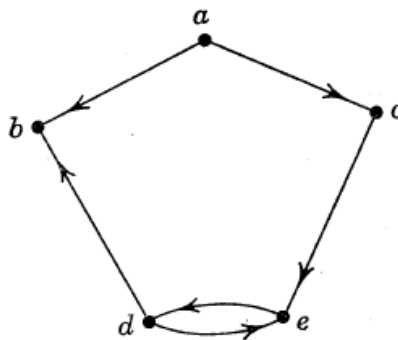
Symmetry of lines

One axiom of ordinary graphs asserts that no distinction is to be made between the “initial” and the “terminal” point of a line. In other words, if a line goes from point a to point b , then the same line goes from point b to point a . The organization theorist will undoubtedly find this axiom unsatisfactory for many purposes. Even in dealing with communication networks there are sometimes difficulties. For example, the approved communication channels for transmitting “commands” or “orders” are rarely two-way. If unit a can transmit commands to unit b , we should not want to be required to assume that unit b must also be able to transmit commands to unit a . Similar considerations apply when dealing with other relationships, such as authority, responsibility, task or goal interdependence, and interpersonal attraction.

Organization theorists, therefore, should be especially interested in a theory of graphs which permits directed lines. Such a theory exists and is known as the theory of directed graphs, or more simply as digraph theory. A *digraph* is a collection of points and a collection of directed lines between some pairs of distinct points. The distinctive axiom of digraph theory asserts : if \vec{ab} is a line of a digraph, nothing is implied concerning whether \vec{ba} is a line of the digraph.

The higher-order concepts of digraph theory display a certain similarity to those of ordinary graph theory. These deal, for example, with directed paths, the distance from one point to another, directed cycles, and the effects of removing a point from the digraph. Some which hold the most promise for organization theory do not, however, have a clear analog in the theory of ordinary graphs. The directed graph shown in Figure 9 will show a common method of depicting such graphs.

Figure 9



Although digraph theory has not yet been used extensively in work on organizations, some interesting beginnings have been made. Heise and Miller (1951) have studied directed communication networks. French (1956) and Harary (1959a) have developed a model for dealing with directed influence processes in groups. And Harary (1959c) has shown how digraph theory may be used in treating status [268] in an organization. The relative richness of digraph theory should make it especially useful to the organization theorist.

Number of lines between a pair of points

The axioms governing ordinary graphs permit at most one line between a given pair of points. Those governing digraphs allow at most one line in each direction between a given pair of points. This feature of ordinary and directed graphs imposes limitations on the usefulness of such graphs for the organization theorist, who may want to represent several different kinds of relationships between a given pair of units of an organization. One way of

avoiding this difficulty is to construct several graphs for the same organization, one for each type of relationship. Thus, one graph might represent the formal authority-structure, another the informal influence-structure, and yet another the friendship-structure. Although this procedure is clearly of value, it provides no effective way to consolidate these various graphs into one representation of the organization.

A start has been made in graph theory to deal with this problem, though little theory has yet been developed. Such theorizing would employ the following definition : *a graph of type t* is one in which there are lines of t different kinds available to characterize, by superposition, t different relations. A pair of points of such a graph may be joined by no lines or up to t lines consisting of one of each type. Each type of line might be depicted by a particular color.

Graphs of a higher type should be especially useful in studying how relations of one kind influence those of another kind. For example, if the hypothesis advanced by Homans (1950) that interaction generates liking is correct, a graph of type 2 should tend to have a “liking” line wherever there is an interaction line. One should also expect to find definite relations between power lines and communication lines or “formal” and “informal” lines of various sorts. [269]

Sign of a line

Sometimes it is desirable to be able to distinguish the “sign” of a line. This need arises when dealing with empirical relationships which have opposite states, such as like-dislike or facilitate-inhibit. Thus, a sociometric structure reflecting the likes and dislikes among people might be represented by a digraph in which a positive line from a to b indicates that a likes b , a negative line indicates dislike, and the absence of a line indicates indifference. Cartwright and Harary (1956) have employed signed graphs and digraphs in their formal characterization of the *balance* of a structure.

Strength of a line

Perhaps the most serious limitation of the graphs discussed thus far derives from the fact that only the presence or absence of an empirical relationship between two units can be represented. There is no way to distinguish amounts of authority, intensities of liking, probabilities of communication, and the like. What is needed is a mathematical system capable of treating structural properties of sets of relations each of which may vary quantitatively. Although the possibilities have not yet been explored exhaustively, it appears likely that graph theory and probability theory can fruitfully be combined so as to meet this need. Harary (1959a) has shown the direction in which this work may proceed in his treatment of power structures by means

of Markov chains.

Summary

The central thesis of this paper asserts that the mathematical theory of linear graphs can be of considerable help to the organization theorist in dealing with structural properties of organizations. The belief that such help is possible rests on the conviction that a formal coordination can be made, linking the primitive terms of graph theory to those of organization theory. Specifically, it is proposed to coordinate “points” and “lines” of graph theory to “units” and “relationships” in organizations, respectively. Any such coordination, however, will have to conform to the axioms of graph theory, if graph theory is to serve as a mathematical model.

Four principal advantages would result from this use of graph theory. (1) A method for depicting the structure of organizations would be provided. (2) Rigorously defined higher-order concepts [270] could be adopted into the language of organization theory. (3) Certain formulas and methods of calculation would be available for theoretical and empirical research. (4) The theorems of graph theory would indicate formally necessary features of organizational structure.

The theory of ordinary graphs was sketched out in order to illustrate these advantages. It was then shown that some of the axioms of the theory of ordinary graphs are not always appropriate. The assumptions that lines are necessarily symmetrical, that there can be no more than one line between a pair of points, and that all lines are of equal “strength” sometimes impose undesirable limitations. It was then noted that graph theory can meet these difficulties by modifying the axioms. The first of these difficulties has been essentially overcome by the theory of directed graphs (digraphs). A beginning has been made to remove the second restriction by defining graphs of multiple type. And, it appears that the third problem may soon be solved by combining graph theory with probability theory.

Even though use of presently available graph theory may force the organization theorist to employ some simplifying assumptions, the immediate gains should be considerable. The few attempts made to date have produced gratifying results. And, most important, as further experience is acquired it should not be at all difficult for mathematicians to advance the theory of graphs in those directions of greatest promise for organization theory.

REFERENCES

Bavelas, A. 1948. A mathematical model for group structures. *Appl. Anthropol.* 7, No. 3, 16-30.

- Bavelas, A. 1953. Communication patterns in task-oriented groups. In D. Cartwright and A. Zander (eds.). *Group dynamics : research and theory*. Row, Peterson, Evanston, Ill.
- Berge, C. 1958. *Theorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris.
- Cartwright, D., and F. Harary. 1956. Structural balance : a generalization of Heider's theory. *Psychol. Rev.* **63**, 277-293.
- French, J. R. P., Jr. 1956. A formal theory of social power. *Psychol. Rev.* **63**, 181-194.
- Harary, F., and R. Z. Norman, 1953. *Graph theory as a mathematical model in social science*. Institute for Social Research, Ann Arbor.
- Harary, F. 1959a. A criterion for unanimity in French's theory of social power. In D. Cartwright (ed.). *Studies in social power*. Institute for Social Research, Ann Arbor.
- Harary, F. To be published. 1959b. Graph theoretic methods in the management sciences. *Management Sci.*
- [271]
- Harary, F. 1959c. Status and contrastatus. *Sociometry.* **22**, 23-43.
- Harary, F., and R. Z. Norman. To be published. 1960. *The theory of graphs*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Harary, F., R. Z. Norman, and D. Cartwright. To be published. 1960. *Introduction to digraph theory for social scientists*. Institute for Social Research, Ann Arbor.
- Heise, G. A., and G. A. Miller. 1951. Problem solving by small groups using various communication nets. *J. of abnormal and soc. Psychol.* **46**, 327-335.
- Homans, G. C. 1950. *The human group*. Harcourt, Brace, New York.
- Jacobson, E., and S. Seashore. 1951. Communication practices in complex organizations. *J. of soc. Issues.* **7**, 28-40.
- Koenig, D. 1936. *Theorie der endlichen und unendlichen graphen*. Leipzig (reprinted 1950, Chelsea, New York).
- Ross, I. C., and F. Harary. 1955. Identification of the liaison persons of an organization using the structure matrix. *Management Sci.* **1**, 251-258.
- Weiss, R. S. 1952. *An investigation into organizational structure using a sociometric technique*. Master's dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.

La contribution potentielle de la théorie des graphes à la théorie des organisations

Introduction

Les objectifs de ce texte sont les suivants : (1) suggérer que la théorie mathématique des graphes linéaires peut être d'une aide considérable pour le théoricien de l'organisation ; (2) illustrer certains des moyens permettant d'obtenir cette aide et (3) renvoyer à des publications particulièrement pertinentes pour ceux qui souhaitent explorer cette possibilité plus avant ¹.

Les théoriciens qui s'intéressent aux propriétés structurales des organisations utilisent souvent deux idées de base, qui servent formellement de termes primitifs (non définis) dans la mesure où les conceptions théoriques plus complexes sont construites à partir de ces termes. Bien qu'ils soient désignés différemment selon les théories, ces deux termes se réfèrent essentiellement (1) aux unités ou parties d'une organisation et (2) aux relations ou connexions entre les paires d'unités.

Les théoriciens de l'organisation diffèrent quant à ce qu'ils considèrent comme l'unité de base. Pour certains, l'élément constitutif de l'organisation est la personne. Pour d'autres, il s'agit de la fonction, du poste ou du rôle. Parfois, il s'agit d'un ensemble particulier de personnes, comme un groupe de travail, une section ou un département. Quelles que soient les parties d'une organisation, l'unité de base est traitée comme une entité indifférenciée dans l'analyse des propriétés structurales.

Les unités d'une organisation sont considérées, selon la théorie utilisée, comme étant reliées par des liens, des liaisons, des canaux, des connexions ou des lignes, pour ne citer que quelques-uns des termes utilisés. Ces différents termes reflètent, dans une certaine mesure, le *type* de relation privilégiée, bien que la plupart des théoriciens admettent l'existence de différents types de relations entre n'importe quelle paire d'unités. Ceux qui présentent le plus d'intérêt sont l'autorité ou le pouvoir, la responsabilité, la communication, l'interdépendance des tâches ou du travail, l'interdépendance des objectifs ou des motivations, l'attraction ou la loyauté, et l'interaction ou l'association.

Les affirmations relatives à la structure d'une organisation (par exemple,

1. Les possibilités théoriques décrites dans cet article sont devenues progressivement évidentes grâce à une collaboration prolongée entre les chercheurs en sciences sociales et les mathématiciens du *Research Center for Group Dynamics*. Je suis particulièrement redevable à Frank Harary pour de nombreuses idées proposées ici et je renvoie le lecteur à un de ses articles sur un sujet similaire (Harary, 1959b). [Frank Harary \(1921-2005\)](#) est l'un des mathématiciens étatsuniens fondateur de la théorie des graphes. Il a alterné les publications strictement mathématiques et les collaborations avec des chercheurs en sciences sociales (psychologie et anthropologie notamment).

le fait qu'elle soit hiérarchique, qu'elle comporte de nombreux niveaux ou qu'elle soit décentralisée) se réfèrent essentiellement à l'agencement de ses unités et de ses relations. L'organigramme type, en identifiant certaines unités et en indiquant les relations d'autorité censées exister entre elles, représente un aspect de la structure de l'organisation. D'autres aspects pourraient être illustrés en indiquant les réseaux de communication, les schémas d'amitié ou d'association (communément appelés « structure sociométrique ») et le flux de travail. Dans toutes ces approches de la structure, l'organisation est conçue comme consistant en une certaine configuration d'unités interdépendantes.

La branche des mathématiques connue sous le nom de théorie des graphes linéaires, ou plus simplement de théorie des graphes, s'intéresse aux « schémas » ou aux « configurations » de collections d'éléments abstraits appelés « points » et « lignes ». L'intérêt potentiel de la théorie des graphes pour le théoricien de l'organisation réside dans la possibilité de considérer les unités d'une organisation comme les points d'un graphe et les relations entre les unités comme les lignes d'un graphe. Si une telle opération est pertinente, on pourrait appliquer les propriétés formelles des graphes à la structure des organisations.

Les gains pour le théoricien de l'organisation d'une telle opération seraient considérables. Un avantage évident, mais non négligeable, découle du fait que la théorie des graphes fournit un moyen pour décrire les propriétés structurales, ce qui permet de « dessiner une image » d'une organisation. La valeur heuristique de la possibilité de « voir » la structure d'une organisation ne doit pas être sous-estimée. Le fait que la théorie des graphes constitue un *système mathématique* composé de termes non définis, d'axiomes et de théorèmes dérivés de ces derniers est toutefois beaucoup plus intéressant. Si certaines conditions sont remplies, la théorie des graphes peut servir de modèle mathématique de la structure des organisations. La théorie des organisations pourrait alors utiliser la rigueur conceptuelle du système mathématique et les résultats d'années de travail.

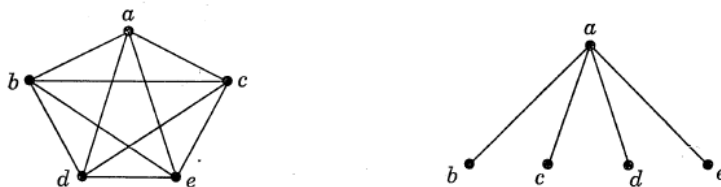
Les travaux mathématiques en théorie des graphes ont produit trois grands types de résultats susceptibles d'intéresser les théoriciens de l'organisation. Premièrement, la théorie des graphes comprend des concepts « d'ordre supérieur » rigoureusement définis d'un point de vue mathématique. Étudier les organisations comme des graphes fournirait un ensemble de concepts définis avec précision pour les décrire. La théorie des graphes contribuerait ainsi au « langage » de la théorie des organisations. Deuxièmement, la théorie des graphes fournit des techniques de calcul rigoureuses et des formules pour calculer certaines caractéristiques quantitatives de la structure des organisations. Troisièmement, les théorèmes de la théorie des graphes permettent de caractériser les graphes et donc la structure des organisations qui découle né-

cessairement des termes non définis et des axiomes de la théorie des graphes. Il est important à cet égard de noter une limite de ces théorèmes. Puisque les axiomes de la théorie des graphes ne disent rien sur les tendances empiriques (par exemple, les tendances vers des états « souhaitables » ou les tendances à maximiser ou à minimiser certaines propriétés), les théorèmes de la théorie des graphes ne peuvent à eux-seuls produire des théorèmes sur la dynamique des organisations. La théorie des graphes peut donc être incorporée dans la théorie des organisations mais elle ne peut pas en constituer la totalité. Une théorie complète des organisations contiendra des axiomes empiriques en plus des axiomes formels fournis par la théorie des graphes.

Graphes ordinaires ²

L'intérêt potentiel de la théorie des graphes peut être illustré au moyen d'une brève discussion de certains des concepts de base de la théorie des graphes. Tout d'abord, il convient de noter que l'on distingue plusieurs types de graphes. Pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons dans un premier temps à ce que l'on appelle les graphes « ordinaires ». Nous indiquerons ensuite comment d'autres types de graphes peuvent être plus appropriés pour traiter certains types de propriétés organisationnelles. Pour une discussion plus approfondie de la théorie des graphes, nous renvoyons le lecteur à Berge (1958), Koenig (1936), Harary et Norman (1953 ; à paraître) et Harary, Norman et Cartwright (à paraître).

Figures 1 - 2



Un *graphe de n points* est constitué de ces n points ainsi que d'un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les lignes reliant les paires de ces points. Un graphe est dit *complet* si chaque paire de points est reliée par une ligne. La figure 1 montre un graphe complet de cinq points. La figure 2 montre un graphe de cinq points qui n'est pas complet.

La liste suivante de propriétés, qui peuvent être énoncées plus formellement sous forme d'axiomes, sert à caractériser les graphes ordinaires.

2. L'adjectif « ordinaire » (*ordinary*) est peu utilisé, y compris à l'époque, en théorie des graphes, excepté par Harary ; les autres auteurs utilisent généralement l'adjectif « simple » qui s'est imposé depuis.

1. Un graphe a un nombre fini de points.
2. Chaque ligne est un ensemble composé de deux points.
3. Chaque ligne doit relier deux points différents. Ainsi, un graphe ne peut contenir aucune boucle, c'est-à-dire aucune ligne reliant un point à lui-même.
4. Un graphe peut avoir au plus une ligne joignant la même paire de points.
5. Aucune distinction n'est faite entre le point « initial » et le point « terminal » d'une ligne³. Si une ligne va du point a au point b , on dit que la même ligne va du point b au point a .

Si nous voulons considérer un graphe ordinaire comme la structure d'une organisation, nous devons pouvoir représenter chaque unité de l'organisation par un point du graphe et chaque relation par une ligne et les cinq affirmations ci-dessus sur les propriétés des graphes ordinaires doivent rester vraies lorsque le mot « organisation » remplace le mot « graphe », le mot « unité » le mot « point » et le mot « relation » le mot « ligne ».

Le travail expérimental initié par Bavelas (1948 ; 1953) illustre comment la théorie des graphes peut être reliée à des phénomènes empiriques⁴. Dans ces études, des réseaux de communication ont été créés de manière à présenter diverses propriétés structurales. Les individus correspondent aux points du graphe et les liens de communication « autorisés » aux lignes. Les axiomes des graphes ordinaires ont été respectés dans la plupart de ces études bien que des modifications intéressantes aient été introduites dans certaines d'entre elles (par exemple, Heise et Miller, 1951⁵).

Quelques concepts d'ordre supérieur

Un *chemin* est un ensemble de lignes de la forme ab, bc, \dots, de où tous les points a, b, c, \dots, d, e sont différents les uns des autres.

Un graphe est *connecté* s'il existe un chemin entre chaque paire de ses points.

La *longueur d'un chemin* est le nombre de lignes qu'il contient.

3. Dans la théorie des graphes de Berge, par défaut, un graphe est orienté ; à l'inverse, dans la théorie des graphes nord-américaine contemporaine de celle de Berge, le graphe est par défaut considéré comme non orienté.

4. Ceci n'est qu'en partie vrai : Bavelas, dont la thèse (1948) est dirigée par Cartwright, n'utilisant jamais le terme de *graph* ou de *graph theory* dans ces deux articles ; il ne cite pas non plus de travaux liés à la théorie des graphes. Bavelas et Cartwright à l'époque s'inspirent des seuls travaux de Lewin et de *topologie*.

5. Contrairement à Bavelas dont les réseaux de communication étaient non orientés, Heiss et Miller étudient la circulation de l'information dans des réseaux orientés.

La *distance entre deux points* d'un graphe connecté est la longueur de tout chemin le plus court les reliant.

Le *nombre associé* d'un point d'un graphe connecté est la distance maximale entre ce point et tout autre point.

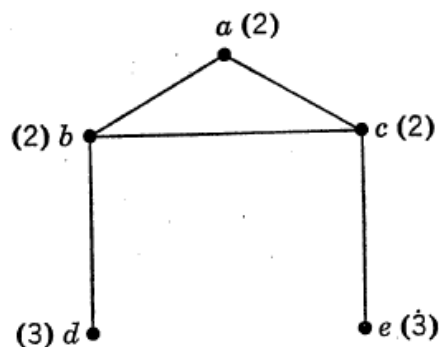
Un *point central* d'un graphe connecté est un point dont le nombre associé est minimum.

Le *diamètre* d'un graphe connexe est la distance maximale entre deux de ses points ; en d'autres termes, c'est le nombre associé maximal.

Nous pouvons maintenant illustrer ces concepts et montrer comment ils peuvent s'appliquer aux propriétés d'une organisation. Considérons une organisation extrêmement petite composée de cinq unités (a , b , c , d et e) et les canaux de communication officiellement approuvés entre ces unités. Un tel réseau de communication peut être représenté par un graphe ordinaire si chaque unité est représentée par un point et chaque canal de communication approuvé par une ligne et si les axiomes des graphes ordinaires produisent des énoncés vrais à propos de l'organisation. Les deux premières affirmations - que l'organisation a un nombre fini d'unités et que chaque canal relie deux unités - ne posent aucune difficulté. Les trois autres énoncés soulèvent des questions intéressantes et il existe sans aucun doute des réseaux de communication qui ne les satisfont pas. On peut toutefois supposer que, dans notre organisation hypothétique, toutes les affirmations sont vraies : aucune unité ne dispose d'un canal de communication approuvé vers elle-même ; il n'existe pas plus d'un canal entre deux unités et chaque canal fonctionne dans les deux sens.

La figure 3 représente l'un des nombreux réseaux possibles de cette organisation hypothétique. Les unités b et d peuvent appartenir à un département, les unités c et e à un autre département et les unités a , b et c à un groupe de coordination.

Figure 3



Ce réseau de communication n'est évidemment pas complet puisque toutes les paires d'unités ne sont pas connectées directement par un canal ; par exemple, d et e ne peuvent pas communiquer directement. Une brève inspection révèle toutefois qu'il existe un chemin entre chaque paire d'unités, ce qui indique que l'organisation est connectée ; un message peut aller de n'importe quelle unité à n'importe quelle autre *via* des canaux approuvés. Si nous examinons spécifiquement les unités d et e , nous trouvons deux chemins entre elles : (db, bc, ce) et (db, ba, ac, ce) . Le premier chemin est de longueur 3, le second de longueur 4. La distance entre d et e est donc de 3. La distance entre d et toute autre unité est inférieure à 3 donc le nombre associé à l'unité d est égal à 3. Le nombre associé de chaque unité est indiqué entre parenthèses dans la figure 3. L'examen de ces nombres révèle que le réseau de communication a trois points centraux : a , b et c . Un message peut atteindre chaque unité du réseau à partir de n'importe laquelle de ces unités centrales en deux étapes au maximum. Enfin, nous remarquons que le diamètre de ce réseau est de 3 : le plus grand nombre d'étapes nécessaires pour qu'un message aille d'une unité à l'autre est de 3.

Si les unités d'une organisation sont représentées par un réseau complet, comme dans la figure 1, les valeurs énumérées dans le paragraphe ci-dessus seront très différentes. Puisque chaque paire d'unités est maintenant reliée par un canal, la distance entre chaque paire d'unités est de 1, le numéro associé à chaque unité est de 1, chaque unité est une unité centrale et le diamètre du réseau est de 1. Le lecteur peut facilement calculer les valeurs correspondantes pour le réseau de la figure 2 et pour tout autre réseau qu'il souhaiterait construire.

Examinons maintenant quelques autres concepts d'ordre supérieur de la théorie des graphes qui peuvent avoir un intérêt pour la théorie des organisations.

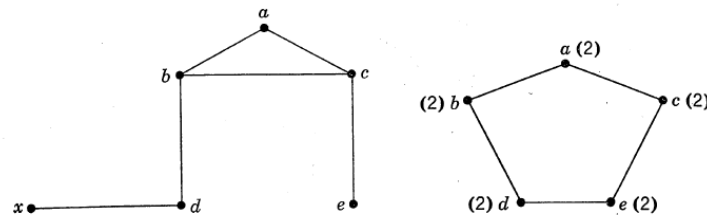
Un *point intérieur* d'un graphe H , sous-graphe du graphe G , est un point dont la distance à un point de G n'appartenant pas à H est maximale. Un *point extérieur* d'un graphe H , sous-graphe du graphe G , est un point dont la distance à un point de G non dans H est minimale⁶.

La figure 4 peut illustrer les points intérieurs et extérieurs. Nous désignons le graphe G comme l'ensemble des points a , b , c , d , e et x . Le graphe H (les points qui ont été appelés « l'organisation » ci-dessus) est constitué des points a , b , c , d et e . Il est facile de voir que la distance entre x et e est 4 et que le point e est le plus éloigné de x de tous les points. L'unité représentée par le point e est donc l'unité interne de l'organisation. Il est évident que l'unité d est l'unité extérieure puisqu'elle est la seule à avoir une

6. À ma connaissance, ces deux catégories de sommets ont peu percolées en sciences sociales.

distance de 1 par rapport à x . L'unité x peut être un fournisseur et l'unité d peut être une centrale d'achat de l'organisation. Il convient de noter qu'une unité intérieure ne doit pas nécessairement être une unité centrale, bien qu'il soit possible qu'une unité soit à la fois centrale et intérieure. Une question empirique intéressante à se poser est de savoir quelle différence cela fait pour une organisation lorsque des unités ayant des nombres associés différents ont des distances différentes par rapport à l'« extérieur ».

Figures 4 - 5



Un *cycle* d'un graphe est un ensemble de lignes de la forme pa, ab, \dots, cp où tous les points p, a, b, \dots, c sont différents les uns des autres.

Un *arbre* est un graphe connecté qui n'a pas de cycles.

Dans les figures 3 et 4, les unités a, b et c se trouvent sur le cycle (ac, cb, ba) . La figure 5 montre un réseau dans lequel toutes les unités se trouvent sur un seul cycle.

Le réseau représenté sur la figure 6 diffère de celui de la figure 5 en ce sens qu'aucun canal ne relie directement les unités d et e . L'absence de ce canal « brise » le cycle, transformant la structure en arbre. Il est facile de constater que le graphique de la figure 2, qui ressemble à un organigramme traditionnel, est également un arbre.

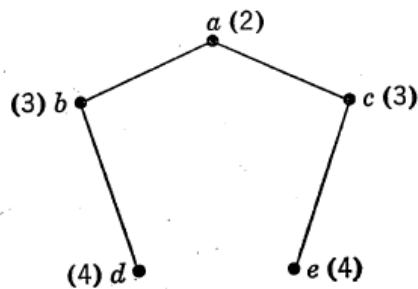
Une comparaison des nombres associés dans les figures 5 et 6 révèle que l'existence d'un cycle peut affecter considérablement la centralité des unités. Dans la figure 5, toutes les unités sont centrales ; dans la figure 6, seule l'unité a est centrale. Cette unité semble se trouver dans une situation très différente dans les deux structures. Un théorème de la théorie des graphes stipule que tout arbre possède un ou deux points centraux.

Un *point d'articulation* d'un graphe connecté est un point dont la suppression crée deux sous-graphes ou plus qui ne sont pas connectés les uns aux autres.

Weiss (1952), Jacobson et Seashore (1951) et Ross et Harary (1955) ont suggéré que les personnes qui servent de « personnes de liaison » puissent être traitées comme des points d'articulation d'un graphe. Dans la figure 3, les unités b et c sont des points d'articulation et il a été suggéré plus haut que

ces unités pourraient agir en tant que représentants de leurs départements dans le groupe de coordination composé des unités a , b et c .

Figure 6



Les points d'articulation présentent plusieurs propriétés intéressantes pour le théoricien de l'organisation. Étant donné que la suppression d'un point d'articulation sépare le graphe en deux sous-graphes non connectés ou plus, les unités qui correspondent aux points d'articulation sont particulièrement importantes pour préserver l'unité de l'organisation⁷. Il s'ensuit qu'une organisation est plus vulnérable en ces points : l'absence ou le dysfonctionnement d'une unité d'articulation aura de fortes répercussions sur l'organisation. En gardant cette conclusion à l'esprit, il est intéressant de noter que chaque point d'un arbre qui n'est pas un point terminal est un point d'articulation et que l'organigramme traditionnel est un arbre. La grande vulnérabilité de ces structures peut expliquer l'existence fréquemment signalée de canaux de communication « informels » ou « non approuvés » dans ces organisations.

Les unités qui correspondent aux points d'articulation d'un réseau de communication sont susceptibles de supporter une lourde charge car certaines paires d'unités de l'organisation ne peuvent communiquer entre elles que par l'intermédiaire de cette unité. Si une telle unité devient un « goulot d'étranglement » ou si elle écarte systématiquement certains types d'informations, certaines parties de l'organisation seront mal informées sur des questions qui peuvent être importantes pour l'organisation dans son ensemble.

Il reste un concept d'ordre supérieur à examiner. Le degré d'un point d'un graphe est le nombre de lignes du graphe sur lesquelles il se trouve. Dans le graphe considéré ici, le degré d'une unité d'une organisation est le nombre de ses canaux de communication approuvés. Plus le degré d'une unité est élevé, plus le nombre d'unités dont elle peut recevoir et auxquelles elle peut envoyer directement des communications approuvées est important.

7. Cette remarque pourrait s'appliquer aux réseaux de transport ; à ma connaissance, la notion de point d'articulation n'a pourtant pas été reprise par les géographes nord-américains des années 1960.

On pourrait penser qu'une unité disposant d'un grand nombre de canaux de communication a une charge importante ou est particulièrement importante. C'est en partie vrai. Si une unité n'est pas limitée dans l'utilisation de ses canaux de communication, elle dispose d'une plus grande marge de manœuvre et plus son degré est élevé, plus elle peut exercer une grande influence sur le flux de messages dans l'organisation. Si les circonstances font qu'une unité reçoit des messages simultanément sur tous ses canaux, il est évident qu'elle sera d'autant plus occupée que son degré est élevé. Cependant, toute généralisation serait très complexe car le degré d'un point n'est pas lié de manière simple à d'autres propriétés structurales des graphes qui, elles, influencent clairement l'importance ou la charge d'une unité. Par exemple, le degré d'un point d'articulation peut prendre de nombreuses valeurs différentes : l'unité *a* est un point d'articulation de degré 4 dans la figure 2, un point d'articulation de degré 2 dans la figure 6 et n'est pas un point d'articulation dans la figure 5 bien qu'elle ait exactement les mêmes canaux de communication que dans la figure 6. De même, le degré et le nombre associé d'un point peuvent varier indépendamment sur une plage de valeurs considérable. Ainsi, un point central peut avoir un degré relativement élevé ou relativement faible : dans les deux figures 2 et 3, l'unité *a* est centrale mais elle a un degré 4 dans l'une et un degré 2 dans l'autre.

Nous pouvons donc conclure que le degré de chaque unité d'une organisation a des conséquences importantes mais que ces conséquences peuvent être grandement modifiées par d'autres propriétés structurales de l'organisation.

Nombre de points et nombre de liens d'un graphe

Dans la théorisation de la structure des organisations, de nombreuses questions intéressantes peuvent être soulevées concernant les relations entre le nombre d'unités et le nombre de connexions dans une organisation. À mesure que le nombre d'unités augmente, combien de connexions doivent être ajoutées pour que l'organisation reste un réseau complet ? Pour un nombre donné d'unités, quel est le nombre minimal de connexions nécessaires pour produire un réseau connecté ? Quel est le nombre optimal de connexions pour une organisation d'une taille donnée ? La théorie des graphes peut aider à répondre à de telles questions en fournissant des informations sur les relations nécessaires entre le nombre de points et de lignes d'un graphe. Nous allons maintenant examiner quelques formules qui expriment ces relations.

Le nombre de lignes d'un graphe est évidemment lié au degré des points du graphe. Puisque chaque ligne contient exactement deux points et contribue donc au degré de deux points, le *nombre de lignes dans un graphe* est égal à la moitié de la somme des degrés de tous les points du graphe. Ainsi, lorsque le degré de chaque point est connu, le nombre total de lignes dans le graphe peut être calculé facilement. Le nombre figurant à côté de chaque

point dans la figure 7 indique le degré du point. Dans des graphes aussi simples que celui-ci, il est plus facile de compter le nombre de lignes que de calculer ce nombre à partir des degrés des points. Cependant, il est parfois plus simple de calculer le nombre de lignes.

Graphes complets. En connaissant cette relation simple entre la somme des degrés des points et le nombre de lignes d'un graphe, il est facile de voir une relation nécessaire entre le nombre de points et de lignes de tout graphe complet. Dans la figure 7, tous les graphes sont complets. Il est évident que tous les points de chaque graphe complet ont le même degré. Plus précisément, le degré de chaque point d'un graphe complet est égal au nombre de points du graphe moins un. À partir de ce fait, nous pouvons construire une formule pour le *nombre de lignes dans un graphe complet* : $L = \frac{1}{2}P(P - 1)$, où L est le nombre de lignes et P le nombre de points.

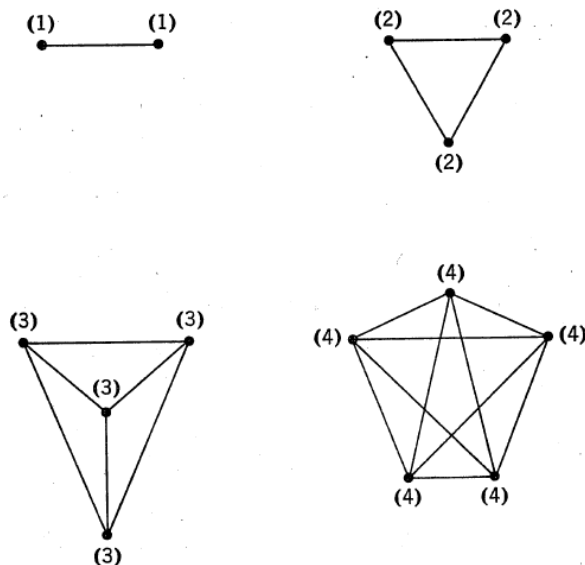
Graphes planaires. Les théoriciens de l'organisation constateront qu'ils ont souvent affaire à une classe de graphes connus sous le nom de graphes planaires. Il sera donc utile de savoir qu'il existe certaines formules qui établissent la relation entre le nombre de points et de lignes de ces graphes.

Un *graphe planaire* est un graphe qui peut être dessiné sur un plan de telle sorte qu'aucune de ses lignes ne se croise. Les graphes de la figure 7 qui contiennent 2, 3 ou 4 points sont planaires ; le graphe avec 5 points n'est pas planaire. Lorsqu'un graphe planaire connecté est dessiné sur un plan de telle sorte qu'aucune de ses lignes ne se croise, on obtient une carte planaire dont les sommets sont les points du graphe, les arêtes sont les lignes et les faces sont des zones complètement fermées par des lignes du graphe. Dans les cartes planaires, le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets plus le nombre de faces moins un. À partir de cette propriété, on peut énoncer la formule suivante pour le *nombre de lignes dans un graphe planaire connecté* : $L = P + F - 1$, où L est le nombre de lignes, P le nombre de points et F le nombre de faces.

On rappellera qu'un arbre est un graphe connecté qui ne possède pas de cycles. Ainsi, tout arbre est un graphe planaire connecté dont le plan correspondant ne contient pas de faces. Il s'ensuit que la formule pour le *nombre de lignes dans un arbre* est : $L = P - 1$. La figure 8 montre plusieurs graphes planaires avec leurs formules correspondantes. Les deux derniers graphes de la figure 8 sont des arbres.

Nombre maximal et minimal de lignes. Un graphe complet possède le plus grand nombre de lignes possible pour un graphe. Le *nombre maximal de lignes d'un graphe* est donné par la formule $L = \frac{1}{2}P(P - 1)$. Le nombre minimal de lignes est égal à zéro. Un problème plus intéressant est de déterminer le nombre minimal de lignes d'un graphe connecté. Un peu de réflexion révèle qu'un tel graphe sera planaire puisque tout graphe

Figure 7



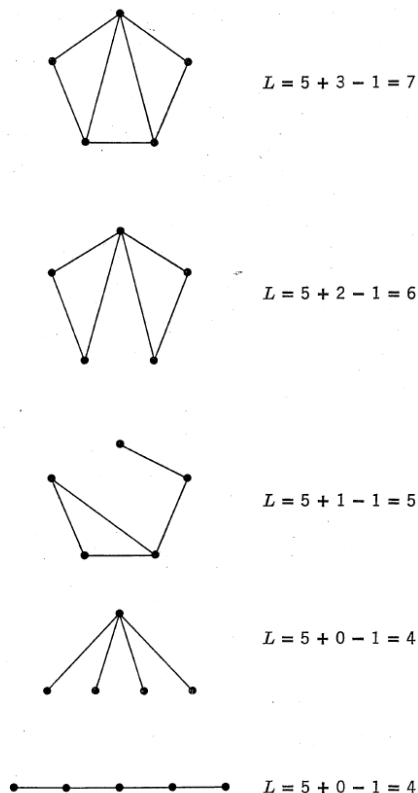
non planaire peut être rendu planaire en supprimant certaines de ses lignes. D'après les formules données ci-dessus, il est clair qu'un arbre aura moins de lignes que n'importe quel autre graphe planaire connecté ayant le même nombre de points. Ainsi, le *nombre minimal de lignes d'un graphe connecté* est donné par la formule : $L = P - 1$.

Nombre optimal de lignes. Quel est le nombre optimal de lignes pour un graphe ayant un nombre donné de points? La réponse à cette question nécessite la sélection d'un ou plusieurs critères d'évaluation. Il semble qu'il y ait un très grand nombre de critères possibles et un nombre encore plus grand de combinaisons possibles de critères. C'est pourquoi on ne peut espérer trouver une valeur unique et universelle pour le nombre optimal de lignes. Nous nous contenterons donc d'illustrer ici quelques manières d'aborder les questions d'optimisation.

En ce qui concerne les réseaux de communication, on peut supposer que chaque canal est coûteux et qu'une organisation doit en fournir le moins possible. On peut également supposer que le réseau de communication doit permettre à un message provenant de n'importe quel endroit de l'organisation d'atteindre toutes les autres unités ; en d'autres termes, le réseau doit contenir toutes les unités de l'organisation et correspondre à un graphe connecté. Nous avons vu plus haut qu'un arbre répond à ces deux conditions et que le nombre optimal de lignes pour ces conditions est donné par la formule : $L = P - 1$.

On pourrait cependant ne pas être satisfait de ce résultat car un arbre

Figure 8



possède certaines propriétés qui font qu'il n'est pas le réseau de communication idéal à plusieurs égards. Par exemple, comme indiqué précédemment, tous les points d'un arbre qui ne sont pas des points terminaux sont des points d'articulation. Comme les points d'articulation rendent une structure vulnérable et qu'ils sont susceptibles d'être soumis à de lourdes charges, on pourrait souhaiter ajouter un autre critère, à savoir que l'organisation ne doit pas contenir de points d'articulation. Un graphe dont tous les points sont situés sur un même cycle satisfait à ce nouveau critère en plus des précédents. Un tel graphe est connecté et n'a pas de points d'articulation. La formule de ce type de graphe est $L = P$. Mais un tel graphe aura tendance à avoir un grand diamètre. On pourrait donc ajouter un autre critère, à savoir que le diamètre ne doit pas dépasser une certaine valeur. Là encore, une valeur optimale pourrait être trouvée mais on voit aisément que l'ajout de critères rend la solution de plus en plus difficile et nous n'essaierons pas ici de poursuivre le problème plus avant.

Nous concluons cette discussion sur le nombre optimal de lignes par une observation générale. Les critères choisis pour évaluer un graphe dépendront

sans aucun doute du type de relation empirique considéré. Tout au long de ce document, nous avons utilisé des réseaux de communication entre les unités d'une organisation pour illustrer l'utilité de la théorie des graphes. Si nous avons utilisé des liens affectifs entre individus, par exemple, les critères d'évaluation proposés auraient pu être très différents. Avec une telle comparaison à l'esprit, il pourrait sembler que la condition optimale serait celle qui maximise le nombre de lignes. Quels que soient les critères appropriés dans une situation donnée, la théorie des graphes peut être un outil utile pour résoudre les problèmes d'optimisation.

Quelques limites des graphes ordinaires

Au début de ce texte, il a été souligné que la théorie des graphes peut servir de modèle mathématique de la structure organisationnelle si certaines conditions sont remplies. Plus précisément, il est nécessaire de disposer d'une règle non ambiguë pour considérer les points et les lignes d'un graphe comme des caractéristiques particulières (entités et relations) d'une organisation. En outre, les axiomes de la théorie des graphes doivent produire des déclarations vraies lorsque les termes empiriques sont substitués aux termes de la théorie des graphes.

Afin d'illustrer le plus simplement possible l'utilité potentielle de la théorie des graphes, la discussion s'est limitée à la théorie des graphes ordinaires, même si d'autres types de graphes auraient pu être choisis. Les théories des différents types de graphes diffèrent les unes des autres en ce qui concerne l'ensemble des axiomes supposés. Chaque système d'axiomes génère un type particulier de graphe avec un ensemble approprié de concepts et de théorèmes d'ordre supérieur. Il n'est pas possible de présenter ici la théorie des graphes autres que les graphes ordinaires mais nous devons discuter au moins brièvement de certains axiomes alternatifs qui peuvent s'avérer d'une grande importance pour la théorie des organisations.

Symétrie des lignes

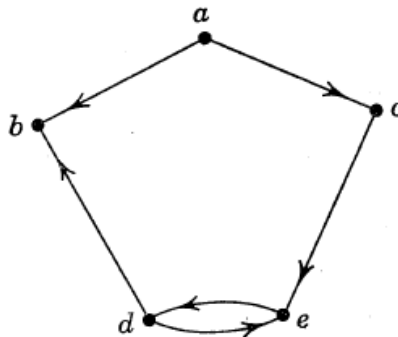
Un axiome des graphes ordinaires affirme qu'aucune distinction ne doit être faite entre le point « initial » et le point « terminal » d'une ligne. En d'autres termes, si une ligne va du point a au point b alors la même ligne va du point b au point a . Le théoricien de l'organisation trouvera sans aucun doute que cet axiome n'est pas satisfaisant à bien des égards. Même lorsqu'il s'agit de réseaux de communication, il y a parfois des difficultés. Par exemple, les canaux de communication approuvés pour transmettre des « commandes » ou des « ordres » sont rarement bidirectionnels. Si l'unité a peut transmettre des ordres à l'unité b , nous ne voulons pas être obligés de supposer que l'unité b doit également être en mesure de transmettre des ordres à l'unité

a. Des considérations similaires s'appliquent à d'autres relations telles que l'autorité, la responsabilité, l'interdépendance des tâches ou des objectifs, ou l'attraction interpersonnelle.

Les théoriciens de l'organisation devraient donc être particulièrement intéressés par une théorie des graphes qui autorise les lignes dirigées. Une telle théorie existe et est connue sous le nom de théorie des graphes dirigés ou plus simplement de théorie des digraphes. Un *digraphe* est une collection de points et une collection de lignes dirigées entre certaines paires de points distincts. L'axiome distinctif de la théorie des digraphes affirme que si \vec{ab} est une ligne d'un digraphe, rien n'implique que \vec{ba} soit une ligne du digraphe.

Les concepts d'ordre supérieur de la théorie des digraphes présentent une certaine similitude avec ceux de la théorie des graphes ordinaires. Ils traitent, par exemple, des chemins dirigés, de la distance d'un point à un autre, des cycles dirigés et des effets de la suppression d'un point du digraphe. Certains des aspects les plus prometteurs pour la théorie de l'organisation n'ont cependant pas d'analogue clair dans la théorie des graphes ordinaires. Le graphe orienté de la figure 9 illustre une méthode courante de représentation de ces graphes.

Figure 9



Bien que la théorie des digraphes n'ait pas encore été largement utilisée dans les travaux sur les organisations, quelques débuts intéressants ont été faits. Heise et Miller (1951) ont étudié les réseaux de communication dirigés. French⁸ (1956) et Harary (1959a) ont développé un modèle pour étudier les processus d'influence dirigée dans les groupes. Et Harary (1959c) a montré comment la théorie des digraphes peut être utilisée pour étudier le statut dans une organisation. La richesse de la théorie des digraphes devrait la rendre particulièrement utile aux théoriciens de l'organisation.

8. John R. P. French (1913-1995), psychologue, est membre du *Research Center for Group Dynamics* depuis 1947.

Nombre de liens entre paires de points

Les axiomes régissant les graphes ordinaires autorisent au plus une ligne entre une paire de points donnée. Ceux qui régissent les digraphes autorisent au maximum une ligne dans chaque direction entre une paire de points donnée. Cette caractéristique des graphes ordinaires et dirigés limite l'utilité de ces graphes pour le théoricien de l'organisation qui peut vouloir représenter plusieurs types de relations différentes entre une paire donnée d'unités d'une organisation. Un moyen de contourner cette difficulté est de construire plusieurs graphes pour la même organisation, un pour chaque type de relation. Ainsi, un graphe pourrait représenter la structure d'autorité formelle, un autre la structure d'influence informelle et un autre encore la structure d'amitié. Bien que cette procédure présente un intérêt certain, elle n'offre aucun moyen efficace de consolider ces différents graphes en une seule représentation de l'organisation.

La théorie des graphes a commencé à s'intéresser à ce problème, bien que peu de théorie ait été développée jusqu'à présent. Une telle théorie utiliserait la définition suivante : *un graphe de type t* est un graphe dans lequel il existe des lignes de t types différents permettant de caractériser, par superposition, t relations différentes. Une paire de points d'un tel graphe peut être reliée par un nombre de lignes variant de zéro à t . Chaque type de ligne peut être représenté par une couleur particulière.

Les graphes d'un type supérieur devraient être particulièrement utiles pour étudier comment les relations d'un type influencent celles d'un autre type. Par exemple, si l'hypothèse avancée par Homans (1950) selon laquelle l'interaction génère de la sympathie est correcte, un graphe de type 2 devrait avoir tendance à avoir une ligne « sympathique » partout où il y a une ligne d'interaction. On devrait également s'attendre à trouver des relations définies entre les lignes de pouvoir et les lignes de communication ou les lignes « formelles » et « informelles » de diverses sortes.

Signe d'une ligne

Il est parfois souhaitable de pouvoir distinguer le « signe » d'une ligne. Ce besoin se fait sentir lorsqu'il s'agit de relations empiriques qui ont des états opposés, comme les relations de type « aimer-ne pas aimer » ou « favoriser-inhiber ». Ainsi, une structure sociométrique reflétant les goûts et les aversions des individus peut être représentée par un diagramme dans lequel une ligne positive allant de a à b indique que a aime b , une ligne négative indique une aversion et l'absence de ligne indique l'indifférence. Cartwright et Harary (1956) ont utilisé des graphes et des digraphes signés dans leur caractérisation formelle de l'équilibre d'une structure.

Intensité d'un lien

La limite la plus sérieuse des graphes examinés jusqu'à présent découle peut-être du fait que seule la présence ou l'absence d'une relation empirique entre deux unités peut être représentée. Il n'y a aucun moyen de distinguer les montants d'autorité, les intensités de sympathie, les probabilités de communication, etc. Ce qu'il faut, c'est un système mathématique capable de traiter les propriétés structurales d'ensembles de relations dont chacune peut varier quantitativement. Bien que les possibilités n'aient pas encore été explorées de manière exhaustive, il semble probable que la théorie des graphes et la théorie des probabilités puissent être combinées de manière fructueuse afin de répondre à ce besoin. Harary (1959a) a montré la direction dans laquelle ce travail peut avancer dans son traitement des structures de pouvoir au moyen de chaînes de Markov.

Synthèse

La thèse centrale de ce document affirme que la théorie mathématique des graphes linéaires peut être d'une aide considérable pour le théoricien de l'organisation lorsqu'il traite des propriétés structurales des organisations. L'idée qu'une telle aide est possible repose sur la conviction qu'une coordination formelle peut être réalisée, reliant les termes primitifs de la théorie des graphes à ceux de la théorie des organisations. Plus précisément, il est proposé d'assimiler les « points » et les « lignes » de la théorie des graphes aux « unités » et aux « relations » des organisations. Cette assimilation devra toutefois se conformer aux axiomes de la théorie des graphes si celle-ci doit servir de modèle mathématique.

Quatre avantages principaux résulteraient de l'utilisation de la théorie des graphes. (1) Une méthode de représentation de la structure des organisations serait fournie. (2) Des concepts d'ordre supérieur rigoureusement définis pourraient être adoptés dans le langage de la théorie des organisations. (3) Certaines formules et méthodes de calcul seraient disponibles pour la recherche théorique et empirique. (4) Les théorèmes de la théorie des graphes indiqueraient de manière formelle les caractéristiques de la structure organisationnelle.

La théorie des graphes ordinaires a été esquissée afin d'illustrer ces avantages. Il a ensuite été montré que certains axiomes de la théorie des graphes ordinaires ne sont pas toujours appropriés. Les hypothèses selon lesquelles les lignes sont nécessairement symétriques, qu'il ne peut y avoir plus d'une ligne entre deux points et que toutes les lignes ont la même « force » imposent parfois des limitations indésirables. Il a alors été noté que la théorie des graphes peut répondre à ces difficultés en modifiant les axiomes. La première de ces difficultés a été essentiellement surmontée par la théorie des graphes dirigés

(digraphes). On a commencé à supprimer la deuxième restriction en définissant des graphes de type multiple. Et il semble que le troisième problème sera bientôt résolu en combinant la théorie des graphes avec la théorie des probabilités.

Même si l'utilisation de la théorie des graphes actuellement disponible peut obliger le théoricien de l'organisation à utiliser certaines hypothèses simplificatrices, les gains immédiats devraient être considérables. Les quelques tentatives faites jusqu'à présent ont donné des résultats concluants. Et surtout, au fur et à mesure que l'on acquiert de l'expérience, il ne devrait pas être difficile pour les mathématiciens de faire progresser la théorie des graphes dans les directions les plus prometteuses pour la théorie de l'organisation.

RÉFÉRENCES

Bavelas, A. 1948. A mathematical model for group structures. *Appl. Anthropol.* **7**, No. 3, 16-30.

Bavelas, A. 1953. Communication patterns in task-oriented groups. In D. Cartwright and A. Zander (eds.). *Group dynamics : research and theory*. Row, Peterson, Evanston, Ill ⁹.

Berge, C. 1958. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris.

Cartwright, D., et F. Harary. 1956. Structural balance : a generalization of Heider's theory. *Psychol. Rev.* **63**, 277-293 ¹⁰.

French, J. R. P., Jr. 1956. A formal theory of social power. *Psychol. Rev.*, **63**, 181-194.

Harary, F., et R. Z. Norman, 1953. *Graph theory as a mathematical model in social science*. Institute for Social Research, Ann Arbor ¹¹.

Harary, F. 1959a. A criterion for unanimity in French's theory of social power. In D. Cartwright (ed.). *Studies in social power*. Institute for Social Research, Ann Arbor.

Harary, F. To be published. 1959b. Graph theoretic methods in the management sciences. *Management Sci.* ¹²

Harary, F. 1959c. Status and contrastatus. *Sociometry.* **22**, 23-43 ¹³.

Harary, F., et R. Z. Norman. To be published. 1960. *The theory of graphs*.

9. Ces deux textes précurseurs, qui n'utilisent jamais le terme de théorie des graphes, sont disponibles en version bilingue et commentée dans cette collection.

10. Article accessible en ligne [lien]

11. Texte librement accessible en ligne [lien].

12. Même remarque [lien].

13. Même remarque [lien].

Addison-Wesley, Reading, Mass ¹⁴.

Harary, F., R. Z. Norman, et D. Cartwright. To be published. 1960. *Introduction to digraph theory for social scientists*. Institute for Social Research, J Ann Arbor ¹⁵.

Heise, G. A., et G. A. Miller. 1951. Problem solving by small groups using various communication nets. *J. of abnormal and soc. Psychol.* **46**, 327-335.

Homans, G. C. 1950. *The human group*. Harcourt, Brace, New York ¹⁶.

Jacobson, E., et S. Seashore. 1951. Communication practices in complex organizations. *J. of soc. Issues.* **7**, 28-40 ¹⁷.

Koenig, D. 1936. *Theorie der endlichen und unendlichen graphen*. Leipzig (reprinted 1950, Chelsea, New York).

Ross, I. C., et F. Harary. 1955. Identification of the liaison persons of an organization using the structure matrix. *Management Sci.* **1**, 251-258 ¹⁸.

Weiss, R. S. 1952. *An investigation into organizational structure using a sociometric technique*. Master's dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.

14. Harary publie seul en 1969 un ouvrage intitulé *Graph Theory* mais il n'existe pas d'ouvrage co-signé avec son premier doctorant Robert Z. Norman (thèse soutenue en 1954).

15. Ce texte est introuvable et n'a peut-être pas été finalisé. Par contre, les trois auteurs publient en 1965 *Structural Models : An Introduction to the Theory of Directed Graph* chez Wiley.

16. Ouvrage influent de sociologie consacré à l'étude de la dynamique des petits groupes, régulièrement réédité. On y trouve notamment la mise en matrice rectangulaire des données collectées par Davis et ses collègues (oui, le fameux *Davis dataset*).

17. Article accessible en ligne [lien]. Les auteurs indiquent page 35 « Much helpful guidance in the preparation of the contact report form was given to the author by Dr. J.R.P. French, Jr., and Dr. Alvin Zander of the Research Center for Group Dynamics, and Dr. Joan Giswell of the Office of Naval Research. »

18. Article accessible en ligne [lien].

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Disponibles en ligne

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures](#) ».
- L. Beauguitte et J. Fen-Chong, 2021, « [Alex Bavelas, 1950, Communication Patterns in Task-Oriented Groups](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Forrest R. Pitts, 1965, A Graph Theoric Approach to Historical Geography](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [M. L. Northway, 1940, A method for depicting social relationships obtained by sociometric testing](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2021, « [John D. Nystuen and Michael F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [Edward L. Ullman, 1949, Mapping the world's ocean trade: A research proposal](#) ».
- L. et P. Beauguitte, 2022, « [F. L. Hitchcock, 1941, The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities](#) ».
- F. Bahoken, 2022, « [W. R. Tobler, 1969, Review of Sémiologie graphique: Les Diagrammes – Les réseaux – Les Cartes](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [P. R. Gould, 1967, On the Geographical Interpretation of Eigenvalues](#) ».
- L. Beauguitte, F. Bahoken et J. Fen-Chong, 2022, « [E. Forsyth et L. Katz, 1946, A Matrix Approach to the Analysis of Sociometric Data](#) ».
- L. Beauguitte et F. Bahoken, 2023, « [J.L. Moreno et H.H. Jennings, 1938, Statistics of social configurations](#) ».

- L. Beauguitte, 2023, « [G. D. Dantzig, 1960, On the Shortest Route Through a Network](#) ».
- L. Beauguitte, 2023, « [K. J. Kansky, 1963, Structure of Transportation Networks](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2023, « [L. Festinger, 1949, The Analysis of Sociograms Using Matrix Algebra](#) ».
- L. Beauguitte, 2023, « [D. Cartwright, 1959, The Potential Contribution of Graph Theory to Organization Theory](#) ».