

Une entrée dans l'algèbre par les programmes de calcul

Sylvie Coppé

Claire Piolti Lamorthe

Sophie Roubin

Origine du travail

- Recherche collaborative entre des chercheurs et des professeurs de mathématiques du secondaire
- SESAMES
Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation
 - Production de ressources
 - Site PEGAME <http://pegame.ens-lyon.fr/>

SESAMES Algèbre

Sylvie Coppé

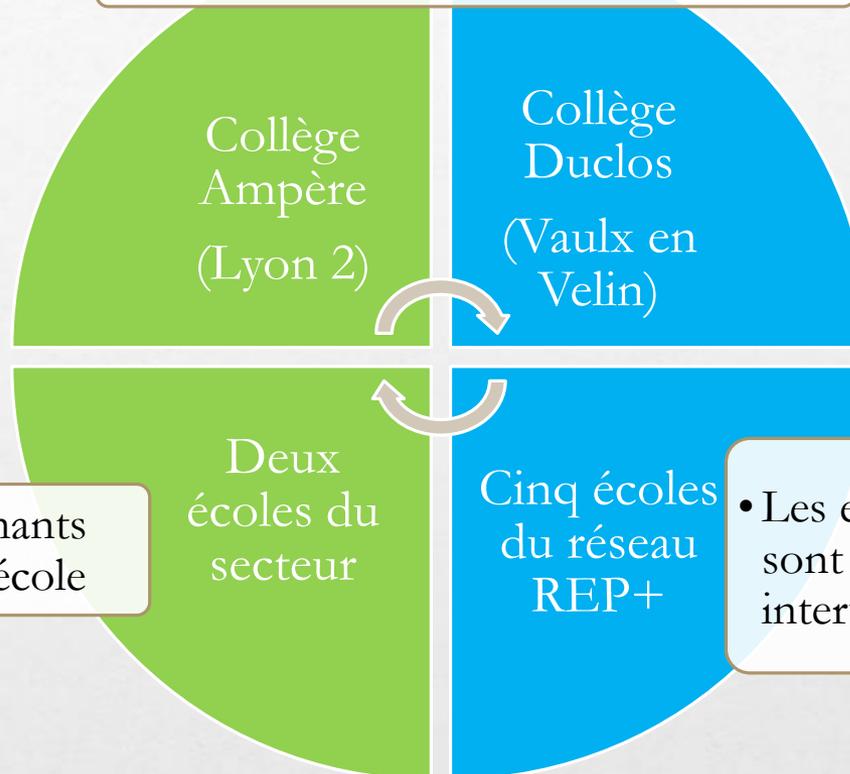
UMR ICAR
(Université Lyon, CNRS)
IFÉ - ENS LYON

- Véronique Berger
- Anne Sophie Cherpin
- Alexandra Goislard
- Claire Piolti-Lamorthé
- Sophie Roubin

Le projet PREMaTT

Institut Carnot de l'Éducation

- Deux enseignants de 6^{ème} par collège



- Deux enseignants de CM2 par école

- Les enseignants sont surnuméraires et interviennent en cycle 3

Réunion de travail avec le groupe SESAMES
Expérimentation dans les classes de CM2 et 6ème

Remarques préliminaires

Quelle finalité pour les exercices d'algèbre ?

24 Carine achète des éclairs à la vanille qui coûtent 1,35 € pièce et des éclairs au chocolat à 1,45 € pièce.

1. On appelle x le nombre d'éclairs à la vanille et y le nombre d'éclairs au chocolat.

Exprimer, en fonction de x et y , le montant de ses achats.

2. À l'aide de la formule trouvée à la question 1., calculer le prix total de 7 éclairs à la vanille et de 5 éclairs au chocolat.

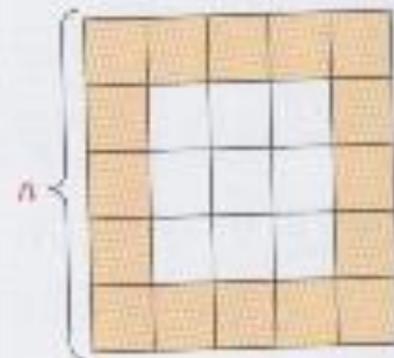


Pour les exercices 90 et 91, on veut carreler une pièce carrée.

On dispose de carreaux carrés de deux couleurs : orange pour le pourtour et blancs pour la partie centrale.

On appelle n le nombre de carreaux sur un côté du carré et N le nombre total de carreaux orange.

Pour cette figure, $n = 5$ et $N = 16$.



90 1) Faire un dessin correspondant à $n = 4$.

Déterminer N pour cette valeur de n .

2) Mêmes questions pour $n = 6$.

3) Conjecturer la valeur de N pour $n = 10$; pour $n = 50$.

Quelle prise en charge de la modélisation ?

Chercher Dans la cour du collège, $\frac{3}{5}$ des élèves sont des filles.

$\frac{3}{5}$ des garçons ont un téléphone portable.

40 garçons n'ont pas de téléphone portable.

On note y le nombre d'élèves dans la cour.

1. Exprimer en fonction de y :

- le nombre de filles.
 - le nombre de garçons.
 - le nombre de garçons ayant un téléphone portable.
 - le nombre de garçons n'ayant pas de téléphone portable.
2. Écrire une égalité que doit vérifier y .
3. Combien d'élèves y a-t-il dans la cour ?

91 1) Établir une formule permettant de calculer le nombre N de carreaux orange en fonction du nombre n de carreaux sur le côté du carré.

2) Voici quelques propositions d'élèves.

Roger : $N = 4n - 4$;

Isabelle : $N = 2n + 2(n - 2)$;

Christine : $N = 4(n - 1)$;

Christophe : $N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$;

Dominique : $N = n^2 - (n - 2)(n - 2)$.

a) Développer et réduire chaque formule, si c'est possible.

Que remarque-t-on ?

b) Expliquer le raisonnement qu'a fait chaque élève pour aboutir à sa formule.

Un exercice classique, des erreurs...

ions suivantes :

$$B = 5(x-4) - (x+7)$$

$$B = \cancel{5x-4} - x+7$$

$$B = 10x - x + 7$$

$$B = \cancel{8x^2} \quad 5x \cdot x + 5x$$

ions suivantes :

$$B = 5(x-4) - (x+7)$$

$$B = \cancel{5x-4} - x+7$$

$$B = \cancel{10x} - x + 7$$

$$B = \cancel{8x^2} \quad 5x \cdot x + 5x$$

Une erreur classique

$$5x - 4 = 1x$$

- Sur le signe =
- Sur la forme du résultat (concaténation)
- Application de règles erronées
- Induite par l'énoncé et le vocabulaire

Dans les manuels

a Développer une expression

On transforme un produit en somme ou en différence.

$$\bullet k \times (b + c) = k \times b + k \times c \quad \text{autrement dit} \quad k(b + c) = kb + kc$$

$$\bullet k \times (b - c) = k \times b - k \times c \quad \text{autrement dit} \quad k(b - c) = kb - kc$$

On dit que l'on distribue k .

Exemples

$$\rightarrow 11(x + 3) = 11 \times (x + 3) = 11 \times x + 11 \times 3 = 11x + 33$$

$$\rightarrow 4(x - 7) = 4 \times (x - 7) = 4 \times x - 4 \times 7 = 4x - 28$$

b Réduire une expression littérale

Réduire une expression littérale revient à l'écrire avec le moins de termes possibles.

EXEMPLES :

$$\bullet 3x + 4x = (3 + 4)x = 7x.$$

$$\bullet 4x^2 - 7x^2 + x^2 = (4 - 7 + 1)x^2 = -2x^2.$$

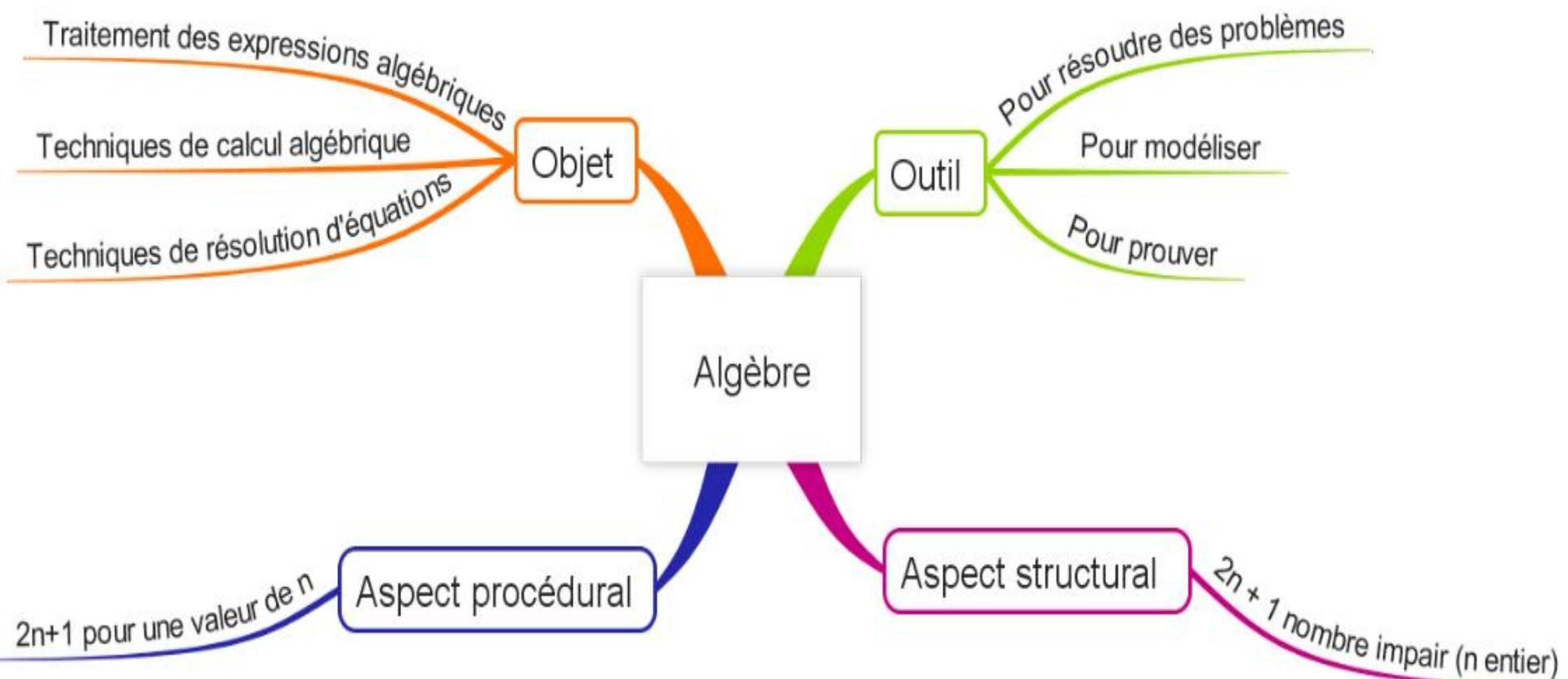
$$\bullet 5a^2 - 4a - 1 + 2a^2 + a + 3 = 7a^2 - 3a + 2.$$

Remarque : On ne peut pas réduire l'expression $7a^2 - 3a + 2$ car tous ses termes ont des parties littérales différentes.

Conclusions

- Les élèves peinent à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas, ne voient pas l'utilité.
- Manque de raisons d'être. L'algèbre est enseignée comme un objet plutôt qu'un outil. Quels problèmes ?
- Beaucoup d'erreurs dans les calculs car les justifications des calculs ne sont pas suffisamment explicites (Assude et al., 2012)

L'algèbre au collège c'est :



3 entrées qui donnent des finalités au calcul littéral

- Les équations (résolution experte en 3^{ème})
- Les activités de preuve, de généralisation
- La modélisation (en 5^{ème} avec des productions de formules, en 4^e avec équation ou inéquation, en 3^e avec les fonctions)

Dans les ressources des programmes de 2016 :

Les programmes de calcul constituent à la fois un moyen pertinent pour introduire la notion d'expression littérale puis d'équation, et un intermédiaire entre le volet procédural et le volet structural du calcul littéral.

Les programmes de calcul

Chevallard, 2007

La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de faire un calcul c'est-à-dire le fait d'opérer sur les nombres d'une manière déterminée, **selon un certain programme.**

Deux programmes de calcul

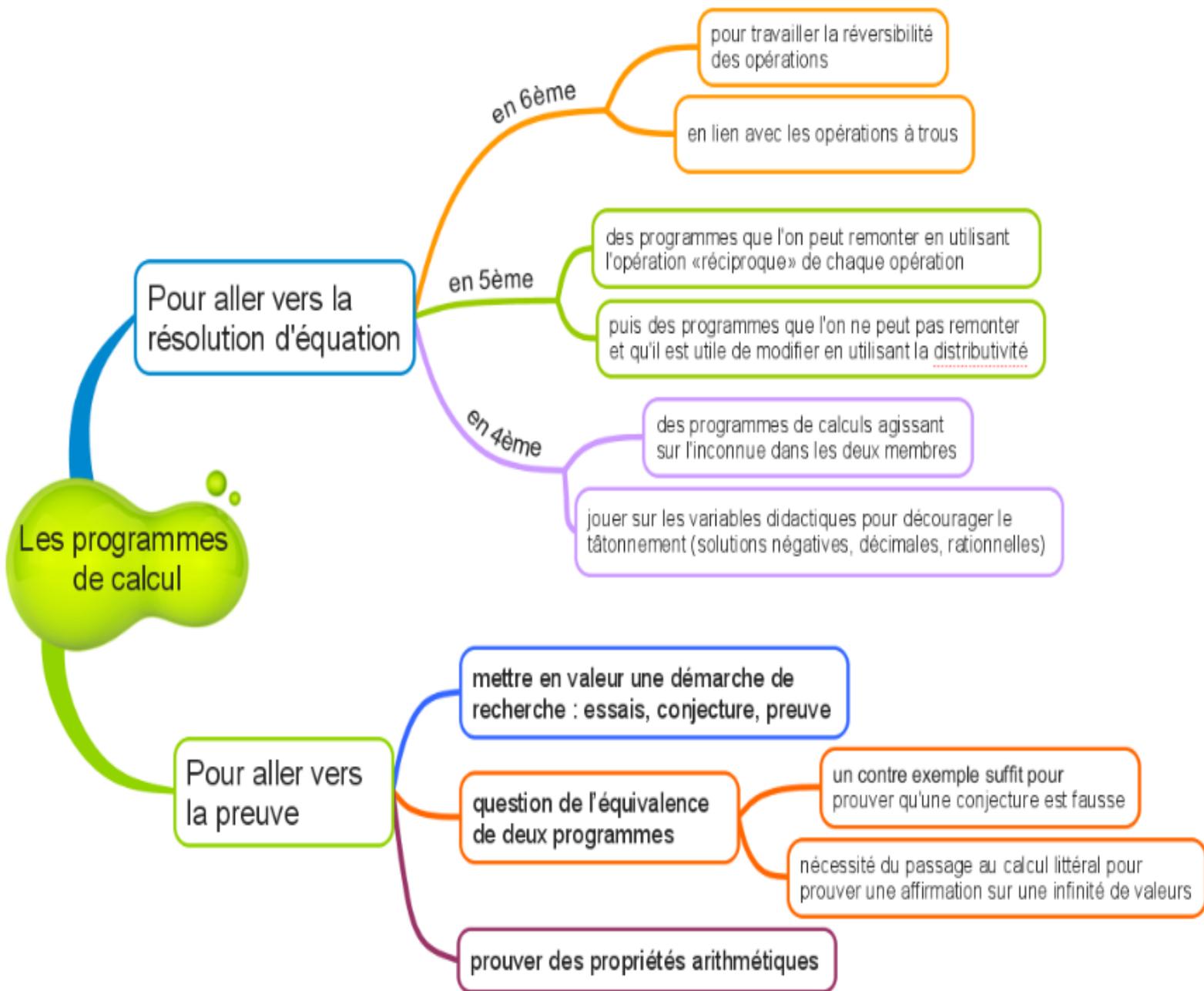
Une rupture

Je choisis un nombre
Je le multiplie par 3
J'ajoute 7 au résultat

- Quel nombre ai je choisi si je trouve 22,
si je trouve 14,5
et si je trouve 9 ?

Je choisis un nombre
Je lui ajoute 3
Je multiplie le résultat par 5
Je soustrais le nombre

- Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 35,
si j'obtiens 25,
si j'obtiens 28 ?



Un exemple de progression avec PC sur équations

Je pense à un nombre

Je le multiplie par 4

Je soustrais 5 au résultat

Quel nombre
faut il choisir pour
obtenir 11 ?

$$\dots \xrightarrow{\times 4} \dots \xrightarrow{-5} 11$$



Je choisis un nombre

Je lui ajoute 3

Je multiplie le résultat par 5

J'enlève au résultat le nombre du départ

Quel nombre
ai-je choisi
si j'obtiens 25 ?



$$(x + 3) \times 5 - x = 5x + 15 - x = 4x + 15$$

Je choisis un nombre

Je lui ajoute 3

Je multiplie le résultat par 5

J'enlève au résultat le nombre du départ

Quel nombre
ai-je choisi
si j'obtiens 25 ?



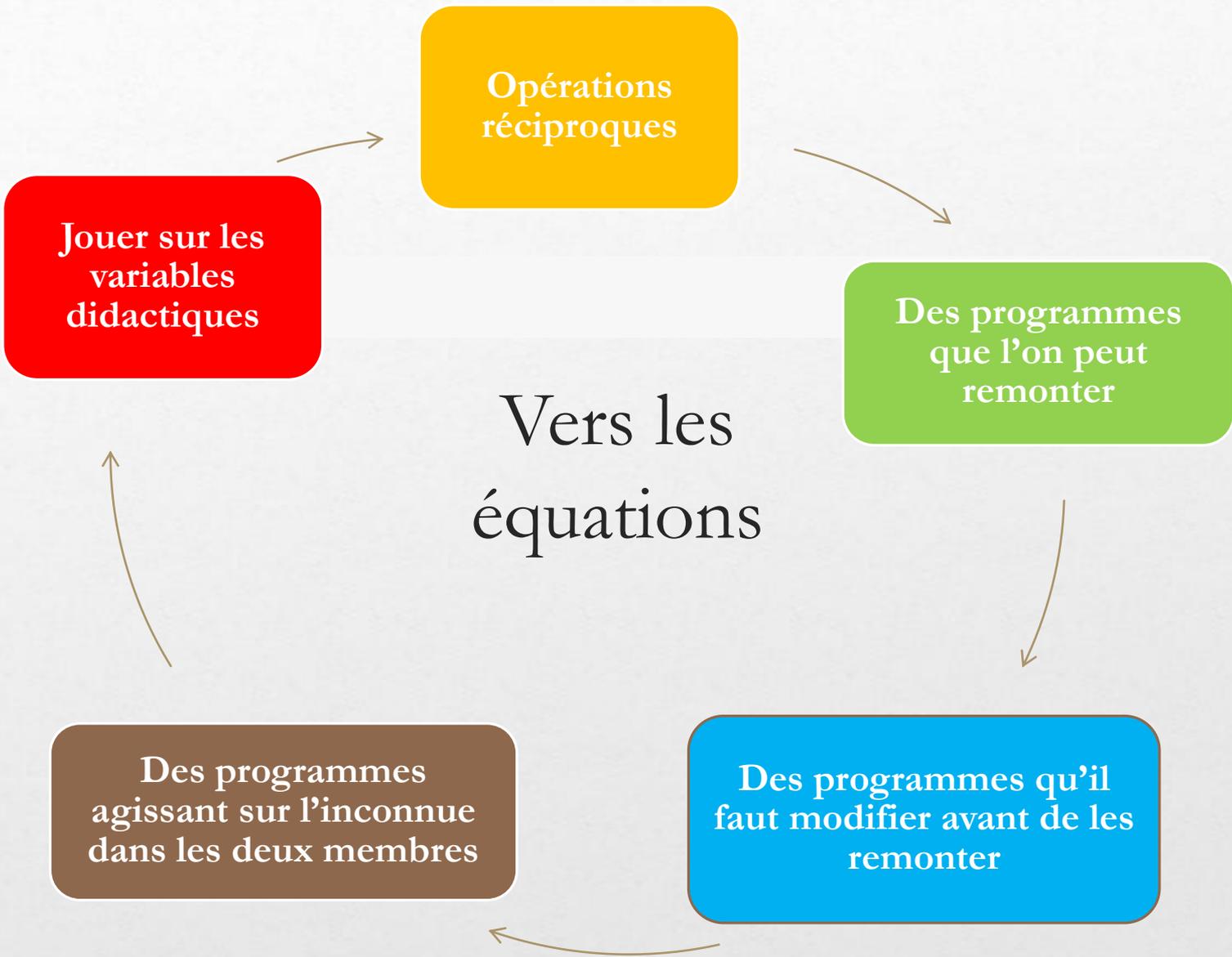
$$(x + 3) \times 5 - x = 5x + 15 - x = 4x + 15$$

Je choisis un nombre

Je le multiplie par 4

J'ajoute 15 au résultat





Un exemple de progression avec PC sur preuve

Programme 1

Je choisis un nombre
je lui ajoute 8
Je multiplie le résultat par 3
Je soustrais 24
Je soustrais 2 fois le nombre choisi

Programme 2

Je choisis un nombre entier
Je lui ajoute 1
Je calcule le carré du résultat
je retranche le carré du nombre choisi

ou

Je choisis un nombre entier
je le multiplie par 3
je lui ajoute 2
je multiplie le résultat par 2
j'ajoute 1
Je soustrais le nombre choisi

Programme 3

Je choisis un même nombre pour les deux programmes

A :
Je lui ajoute 7
Je multiplie le résultat par 8

B
Je le multiplie par 8
j'ajoute 56

Programme 4

Je choisis un même nombre pour les deux programmes

A :

Je le multiplie par 2

J'ajoute 1

Je calcule le carré du résultat

B :

Je le multiplie par 4

J'ajoute 3

Je multiplie le résultat par le nombre choisi

J'ajoute 1

J'ajoute le nombre choisi

Programme 5

Je choisis deux nombres

Je calcule la somme de leurs carrés

J'ajoute au résultat le double de leur produit



Finalité

Procédural et
structural

Essais
Conjecture
Preuve

Vers la
preuve

Contre
exemple

La lettre
pour une infinité
de valeurs

Propriétés
algébriques

Intérêts des PC

- Outil facile à utiliser car texte simple
- Utilisables avec différents objectifs
- Progression dans les objectifs et la difficulté en jouant sur les variables (nombres en jeu, formes des programmes)
- travail dans différents registres de représentation
- Travail sur les aspects structural et procédural
- Dialectique sens / technique

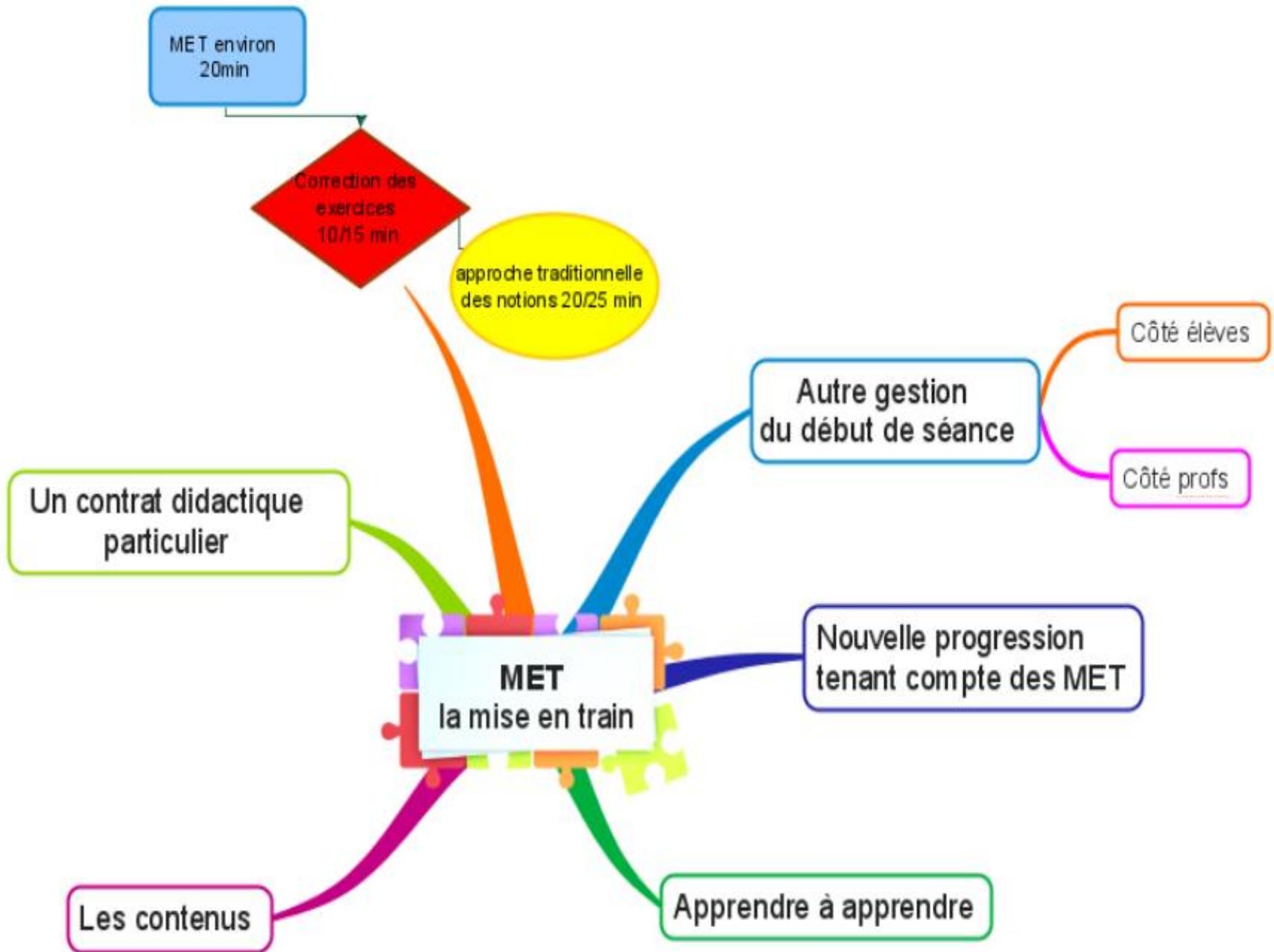
Pour les apprentissages

- Gestion de classe privilégiant les apprentissages sur la durée
- Procédures personnelles vers procédures expertes par le jeu sur les variables
- Nécessite des institutionnalisations fréquentes
- Évaluation formative (à suivre)

Une gestion de classe associée : la MET

Une aide à la mise en œuvre pour changer la temporalité,
le temps de mise en TRAIN

TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement
avec prise d'INitiative



Préparer l'entrée dans l'algèbre

Prolonger le travail

En cycle 3 – les patterns

Vos réponses :

x1. On a trouvé colonne par colonne: $1+2+3+4+3+2+1=16$

x2. On a trouvé ligne par ligne: $1+3+5+7=16$

x3. On a compté un par un: $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=16$

x4. On a fait en diagonale: $4+3+3+2+2+1+1=16$

x5. On a déplacé certains carrés pour le mettre à d'autres endroits pour que la pyramide devienne un carré de 4×4 .
la pyramide en déplaçant calcul: 4×4

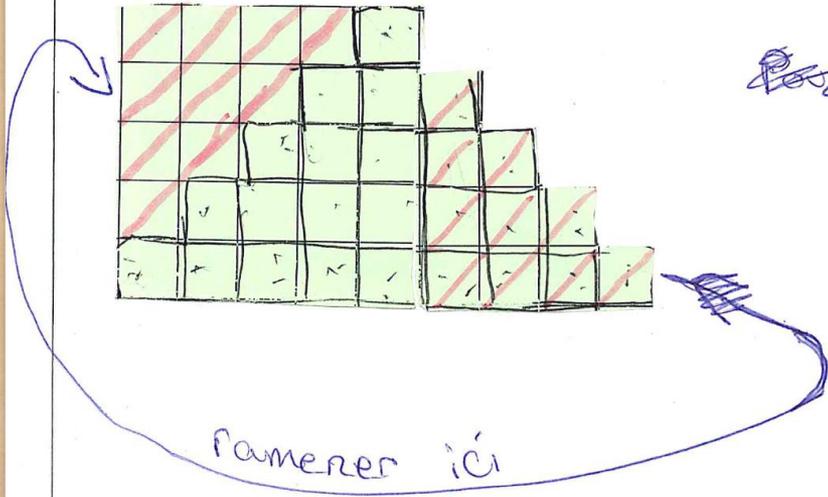
x6. On a divisé ~~le triangle~~ en 4 pour former 4 pyramide de 4 cubes dans la grande pyramide



Calcul $4+4+4+4=16$
($4 \times 4 = 16$)

7

3) A 100 étages ça sera 10000 carrés (100×100)
= 10 000



~~Pour~~ le raisonnements des
2 et 3

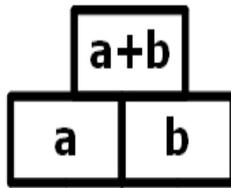
Il faut enlever
une partie et la
mettre autre par

pour former un
carré ensuite compter
combien de carré dans

ligne une verticale ensuite
combien il y en a dans une
ligne horizontale ensuite multiplie
les deux nombres

ramener ici

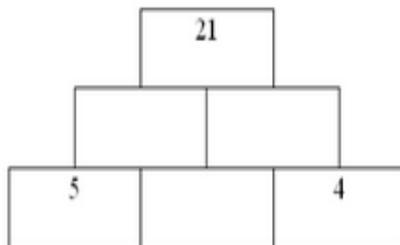
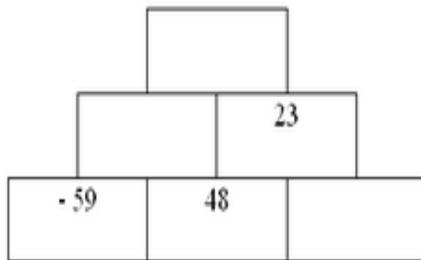
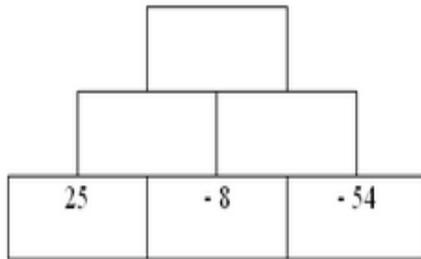
MET



Trouve la valeur du billet étranger dans chacun des cas suivants

1) Paul possède cinq billets étrangers et quatre euros
Alizée possède quatre de ces billets et vingt cinq euros ___
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

2) Paul possède cinq billets étrangers et quatre euros
Alizée possède deux de ces billets et vingt cinq euros _
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.



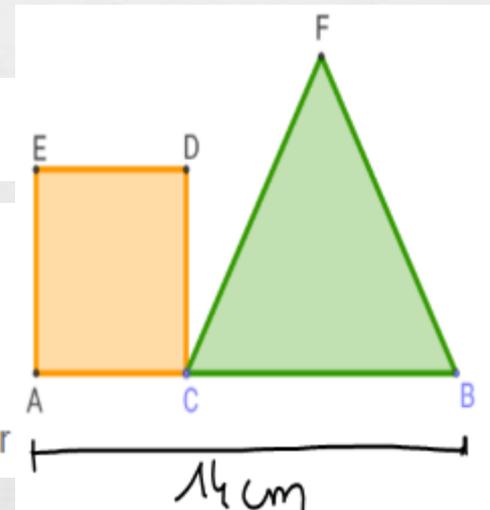
Point qui bouge

C est un point de $[AB]$

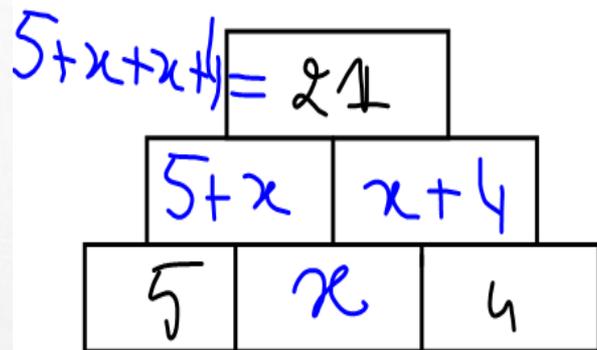
ACDE est un carré

CFB est un triangle équilatéral

Où doit-on placer le point C pour



MET : Les pyramides

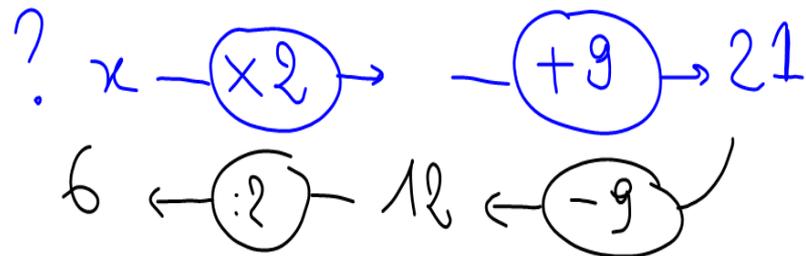


Je cherche le nombre central
en bas je l'appelle x

Je cherche x par que
 $5+x+x+4=21$

$$9+2x=21$$

c'est un programme
de calcul



MET : Les billets étrangers

3) Paul possède 5 billets étrangers et 2 €
Alizée possède 2 de ces billets et 15 €
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

$$\begin{array}{l} -2x \\ -2 \end{array} \parallel \begin{array}{l} 5x + 2 = 2x + 15 \\ 3x = 13 \\ 3x = 13 \\ x = \frac{13}{3} \end{array}$$

J'appelle x la valeur d'un billet, je cherche x tel que :

$$x - (x \cdot 3) \rightarrow 13$$
$$\leftarrow (: 3$$

un billet a une valeur de $\frac{13}{3}$ €

4) Paul possède 65 billets étrangers et 211 €
Alizée possède 52 de ces billets et 1523 €
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

Bilan : Je reconnais un problème "trouve x " → équation

1) on cherche un nombre (la valeur du billet → x)

2) on a des informations qui nous donnent 2 programmes de calcul qui doivent être épars ou un programme de calcul et son résultat

rais
lire

5) Paul possède 74 billets étrangers et 1523 €
Alizée possède 68 de ces billets et 476 €
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

Conclusions

Les programmes de calcul

« Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait. »

Chevallard, 2007

(cours aux professeurs stagiaires)

articles

- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92 (numéro spécial Algèbre), 9-30.
- Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative, Bulletin de l'APMEP, n°502.
- Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. Bulletin de l'APMEP, n°488.
-

Merci de votre attention
