

Une entrée dans l'algèbre par les programmes de calcul

Sylvie Coppé
Claire Piolti Lamorthe
Sophie Roubin

Origine du travail

- Recherche collaborative entre des chercheurs et des professeurs de mathématiques du secondaire
- SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation)
- Production de ressources
- Site PEGAME <http://pegame.ens-lyon.fr/>

SESAMES Algèbre

UMR ICAR
(Université Lyon,
CNRS)

IFÉ - ENS LYON

- Christophe Alves
- Olivier Arrouch
- Maud Chanudet
- Anne Sophie Cherpin
- Vincent Duval
- Alexandra Goislard
- Claire Piolti-Lamorthé
- Sophie Roubin
- Etienne Spaak

Remarques préliminaires

des erreurs.....

$$B = 5(x-4) - (x+7)$$

$$B = \cancel{5x-4} - x+7$$

$$B = 10x - x + 7$$

$$B = \cancel{8x^2} \quad 5x \times x + 5x$$

3 Utiliser la distributivité

a Développer une expression

On transforme un produit en somme ou en différence.

$$\begin{aligned} \bullet k \times (b + c) &= k \times b + k \times c && \text{autrement dit} && k(b + c) = kb + kc \\ \bullet k \times (b - c) &= k \times b - k \times c && \text{autrement dit} && k(b - c) = kb - kc \end{aligned}$$

On dit que l'on distribue k .

Exemples

$$\Rightarrow 11(x + 3) = 11 \times (x + 3) = 11 \times x + 11 \times 3 = 11x + 33$$

$$\Rightarrow 4(x - 7) = 4 \times (x - 7) = 4 \times x - 4 \times 7 = 4x - 28$$

b Factoriser une expression

On transforme une somme ou une différence en produit.

$$\begin{aligned} \bullet k \times b + k \times c &= k \times (b + c) && \text{autrement dit} && kb + kc = k(b + c) \\ &&& \text{ou encore} && bk + ck = (b + c)k \\ \bullet k \times b - k \times c &= k \times (b - c) && \text{autrement dit} && kb - kc = k(b - c) \\ &&& \text{ou encore} && bk - ck = (b - c)k \end{aligned}$$

On dit que l'on met k en facteur.

Exemples

$$\Rightarrow 15x - 35 = 5 \times 3x - 5 \times 7 = 5(3x - 7)$$

$$\Rightarrow 2a + 5a = (2 + 5)a = 7a$$

$$\Rightarrow 8a - 3a = (8 - 3)a = 5a$$

Ici, on dit que l'on réduit les expressions.

Une erreur classique $5x - 4 = 1x$

- Sur le signe =

$$3 \times 2 = 6 + 7 = 13$$

Dans un problème, l'élève écrit ce qu'il fait sous forme d'opérations reliées par le signe = . La procédure est correcte mais l'écriture ne l'est pas. Le signe = est vu comme « le résultat de ... »

- Sur la forme du résultat

erreur de concaténation

L'élève ne peut pas arrêter son calcul à $5x - 4$
il ne reconnaît pas un résultat sous cette forme

- Application de règles erronées

l'élève a calculé dans l'ordre des opérations, soit il a implicitement mis les parenthèses $(5 - 4)x$.

- Induite par l'énoncé

Des énoncés comme « réduire », « supprimer les parenthèses » peuvent favoriser les erreurs précédentes

Techniques de calcul : réduire

3 Factoriser une expression littérale

a Règle de factorisation

k , a et b désignent des nombres relatifs.

$$\underbrace{ka + kb}_{\text{somme}} = \underbrace{k(a+b)}_{\text{produit}}$$

$$\underbrace{ka - kb}_{\text{différence}} = \underbrace{k(a-b)}_{\text{produit}}$$

Quand on transforme une somme ou une différence en un produit, on dit que l'on **factorise**.
 k est un **facteur commun** aux termes de la somme ou de la différence.

EXEMPLES :

- Factoriser $D = -2y - 14$.

$$D = -2y - 14$$

$$D = (-2) \times y + (-2) \times 7$$

$$D = (-2)(y + 7).$$

- Factoriser $E = 3x - 3y$.

$$E = 3x - 3y$$

$$E = 3 \times x - 3 \times y$$

$$E = 3(x - y).$$

b Réduire une expression littérale

Réduire une expression littérale revient à l'écrire avec le moins de termes possibles.

EXEMPLES :

- $3x + 4x = (3 + 4)x = 7x.$

- $4x^2 - 7x^2 + x^2 = (4 - 7 + 1)x^2 = -2x^2.$

- $5a^2 - 4a - 1 + 2a^2 + a + 3 = 7a^2 - 3a + 2.$

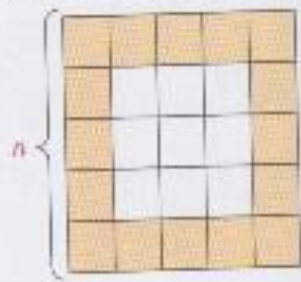
■ **Remarque** : On ne peut pas réduire l'expression $7a^2 - 3a + 2$ car tous ses termes ont des parties littérales différentes.

Pour les exercices 90 et 91, on veut carrelé une pièce carrée.

On dispose de carreaux carrés de deux couleurs : orange pour le pourtour et blancs pour la partie centrale.

On appelle n le nombre de carreaux sur un côté du carré et N le nombre total de carreaux orange.

Pour cette figure, $n = 5$ et $N = 16$.



- 90** 1) Faire un dessin correspondant à $n = 4$.
Déterminer N pour cette valeur de n .
2) Mêmes questions pour $n = 6$.
3) Conjecturer la valeur de N pour $n = 10$; pour $n = 50$.

91 1) Établir une formule permettant de calculer le nombre N de carreaux orange en fonction du nombre n de carreaux sur le côté du carré.

2) Voici quelques propositions d'élèves.

Roger : $N = 4n - 4$;

Isabelle : $N = 2n + 2(n - 2)$;

Christine : $N = 4(n - 1)$;

Christophe : $N = n + 2(n - 1) + (n - 2)$;

Dominique : $N = n^2 - (n - 2)(n - 2)$.

- a) Développer et réduire chaque formule, si c'est possible.
Que remarque-t-on ?
b) Expliquer le raisonnement qu'a fait chaque élève pour aboutir à sa formule.

Un exercice qui perd sa finalité

On donne le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre de départ
- lui ajouter 5
- multiplier la somme par 3
- soustraire au résultat le nombre choisi au départ
- soustraire 15

1°) Applique ce programme en choisissant 3 comme nombre initial, puis -7 .

2°) Si l'on note x le nombre choisi au départ, écris une expression A qui traduit le programme.

Développer et réduire cette expression. $(1, 0) \dots$

Bon
calcul
en

Je choisis un nombre

Je le multiplie par 4

J'ajoute 3

Je multiplie le résultat par le nombre choisi

J'ajoute 1

j'ajoute le nombre choisi

$$B = x \times 4 + 3 = x \times x + 1 = x + x$$
$$9 \quad B = x \times 4 = 12 + 3 = 15 \times x = 45 + 1 = 46$$

$$46 + x = 49$$

Conclusions

- Les élèves peinent à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas, ne voient pas l'utilité.
- Manque de raisons d'être. L'algèbre est enseignée comme un objet plutôt qu'un outil. Quels problèmes ?
- Beaucoup d'erreurs dans les calculs car les justifications des calculs ne sont pas suffisamment explicites (Assude et al., 2012)

Des évolutions dans les programmes

Dans les programmes du collège

- 1923, 1945, 1958 : deux domaines arithmétique / algèbre ; algèbre vue comme arithmétique généralisée
- de 1970 à 1995 : **Rapport formel au calcul algébrique**
 - Le calcul algébrique intervient de façon non motivé dans des exercices non finalisés
 - Peu d'usage de l'algèbre comme outil de résolution d'exercices (modélisation, démonstration)
- A partir de 1985, entrée progressive dans l'algèbre en classe de 5e mais pas de partie explicitement intitulée « Algèbre »

Programme 1985 puis 1995, accent mis sur équations

- 1. Travaux géométriques
- 2. Travaux numériques

Énoncer sous leur **formulation littérale** et utiliser uniquement sur des **exemples numériques**, les égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$.

2.3 Équations numériques
résoudre une équation à coefficients numériques du type $a+x = b$ où a et b sont deux nombres décimaux relatifs ou $ax=b$ avec a non nul. Mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficients numériques de l'un des types précédents.

- 3. Gestion de données, fonctions.

Programme 2005 en 5e

Intro : Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer

- 1. Organisation et gestion de données. Fonctions
 - « utiliser/**produire** des expressions littérales
 - De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules). »
- 2. Nombres et calculs
 - « initier les élèves au calcul littéral : priorité opératoires, développement, mise en équation et résolution »
 - Distributivité
 - Initiation à la résolution d'équation (tester....)
- 3. Géométrie
- 4. Grandeurs et mesures
 - Formules
- **Socle commun de connaissances et de compétences et Démarche d'investigation**

Programme 2016

Utiliser le calcul littéral



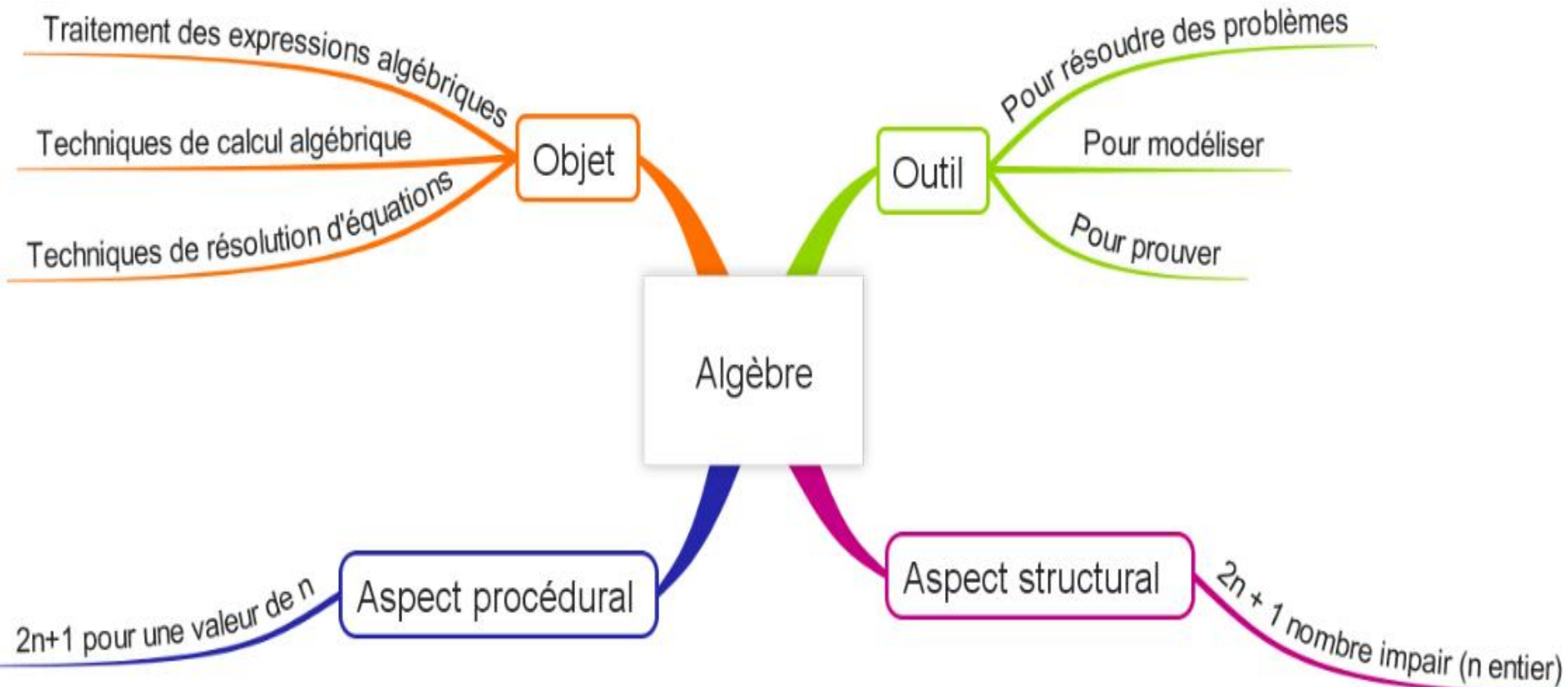
Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants:

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- introduire les concepts de variable et de fonction.

3 entrées qui donnent des finalités au calcul littéral

- Les équations : entrée progressive en 5e avec procédures non expertes (lettre comme inconnue)
- Les activités de preuve, de généralisation (lettre comme variable)
- La modélisation (en 3e avec les fonctions)

L'algèbre au collège c'est :



Les programmes de calcul

Chevallard, 2007

La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de faire un calcul c'est -à-dire le fait d'opérer sur les nombres d'une manière déterminée, **selon un certain programme.**

Quels problèmes ? Raisons d'être

- A quelles conditions 2 programmes de calcul donnent ils toujours le même résultat ?

Les programmes de calcul

Pour aller vers la résolution d'équation

en 6ème

pour travailler la réversibilité des opérations

en lien avec les opérations à trous

en 5ème

des programmes que l'on peut remonter en utilisant l'opération «réciproque» de chaque opération

puis des programmes que l'on ne peut pas remonter et qu'il est utile de modifier en utilisant la distributivité

en 4ème

des programmes de calculs agissant sur l'inconnue dans les deux membres

jouer sur les variables didactiques pour décourager le tâtonnement (solutions négatives, décimales, rationnelles)

Pour aller vers la preuve

mettre en valeur une démarche de recherche : essais, conjecture, preuve

question de l'équivalence de deux programmes

un contre exemple suffit pour prouver qu'une conjecture est fausse

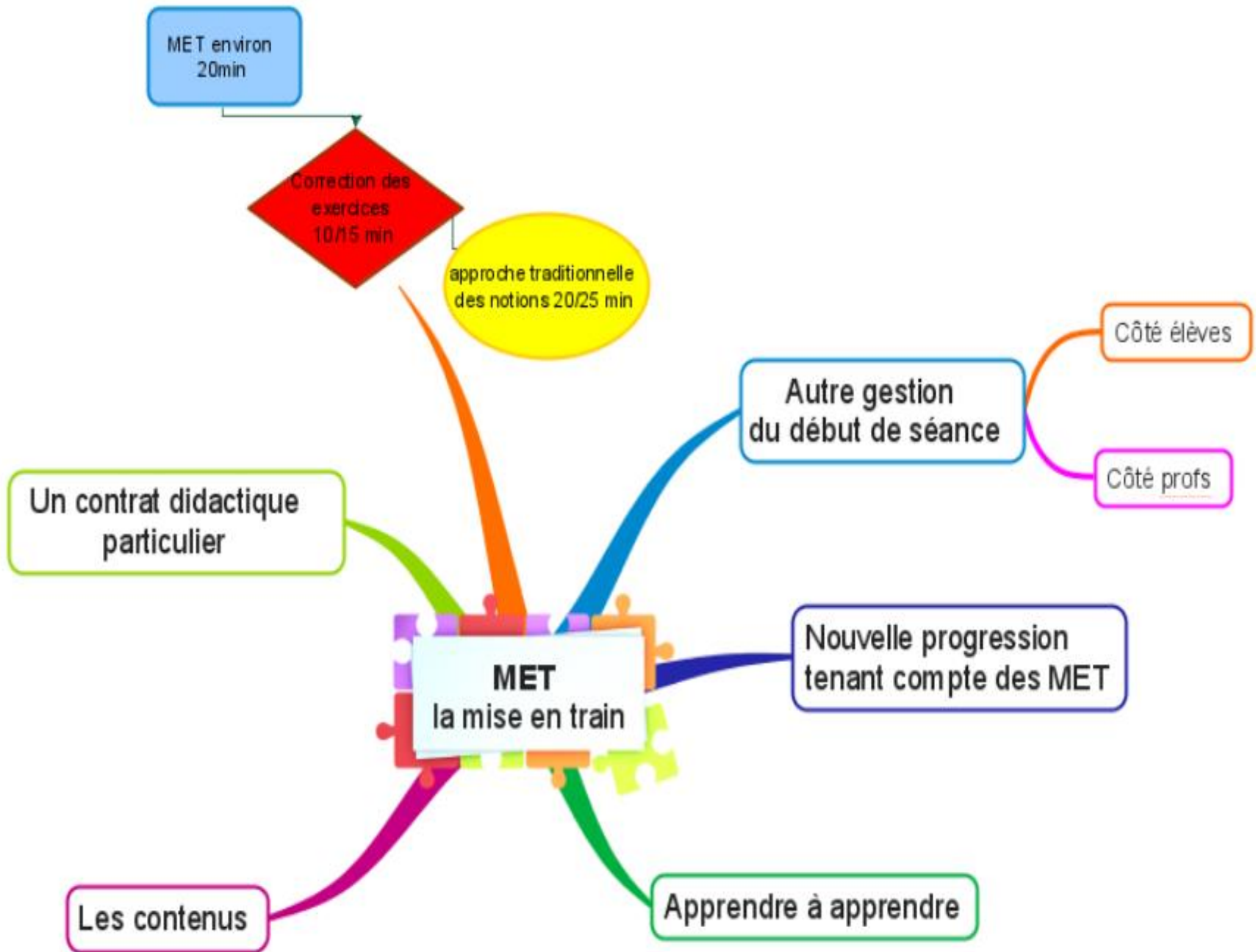
nécessité du passage au calcul littéral pour prouver une affirmation sur une infinité de valeurs

prouver des propriétés arithmétiques

Une gestion de classe associée : la MET

Une aide à la mise en œuvre pour changer la
temporalité,
le temps de mise en TRAIN

TRAIN : Travail de Recherche ou
d'Approfondissement avec prise d'INitiative



MET environ 20min

Correction des exercices 10/15 min

approche traditionnelle des notions 20/25 min

Autre gestion du début de séance

Côté élèves

Côté profs

Nouvelle progression tenant compte des MET

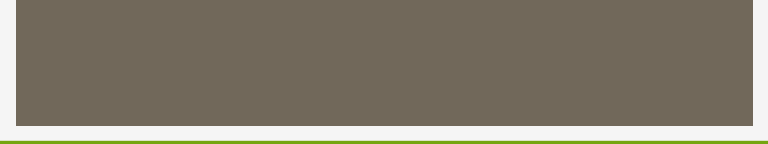
Apprendre à apprendre

Les contenus

Un contrat didactique particulier

MET
la mise en train

Un exemple de progression avec PC sur équations



Je pense à un nombre



Je le multiplie par 4



Je soustrais 5 au résultat

Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 11 ?





Je choisis un nombre

Je lui ajoute 3

Je multiplie le résultat par 5

J'enlève au résultat le nombre du départ

Quel nombre
ai-je choisi
si j'obtiens 25 ?



$$(x + 3) \times 5 - x = 5x + 15 - x = 4x + 15$$



Je choisis un nombre

Je lui ajoute 3

Je multiplie le résultat par 5

J'enlève au résultat le nombre du départ

Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 25 ?



$$(x + 3) \times 5 - x = 5x + 15 - x = 4x + 15$$

Je choisis un nombre

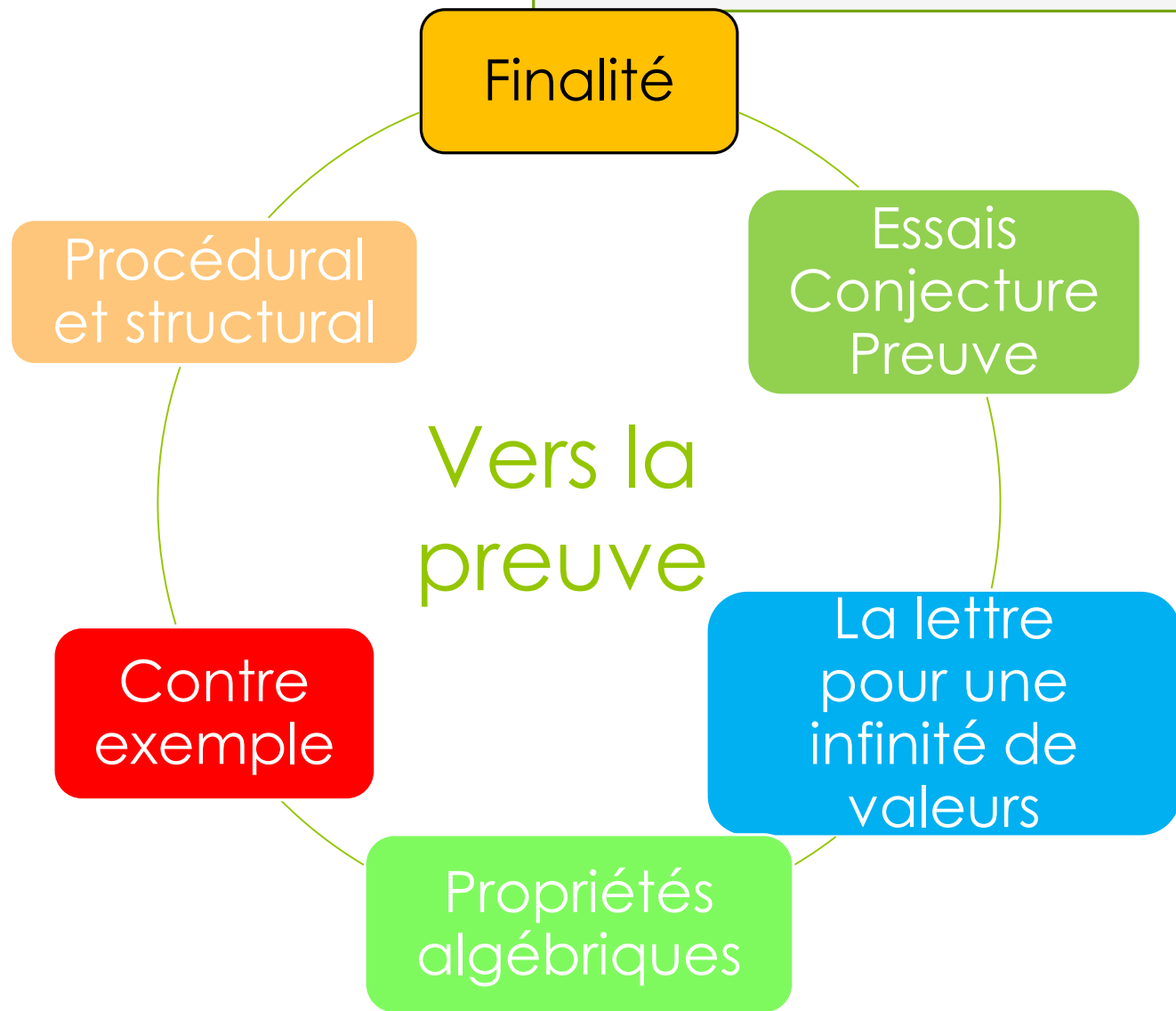
Je le multiplie par 4

J'ajoute 15 au résultat



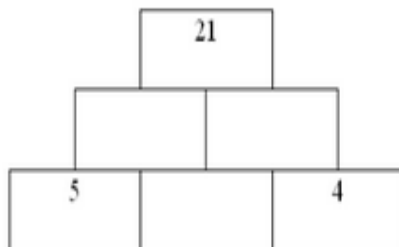
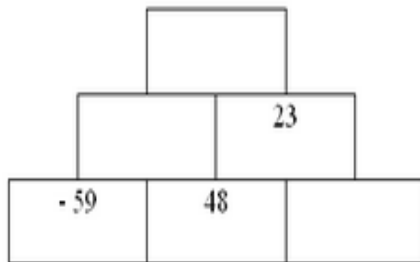
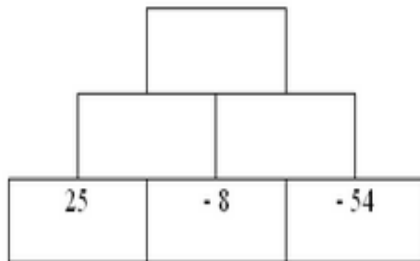
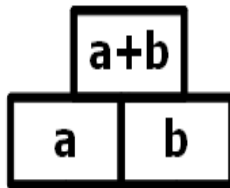


Un exemple de progression avec PC sur preuve



Dans d'autres exercices

MET



Trouve la valeur du billet étranger dans chacun des cas suivants

- 1) Paul possède cinq billets étrangers et quatre euros
Alizée possède quatre de ces billets et vingt cinq euros ___
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.
- 2) Paul possède cinq billets étrangers et quatre euros
Alizée possède deux de ces billets et vingt cinq euros _
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

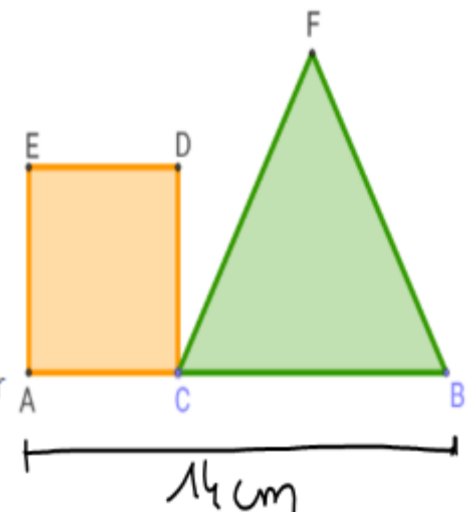
Point qui bouge

C est un point de [AB]

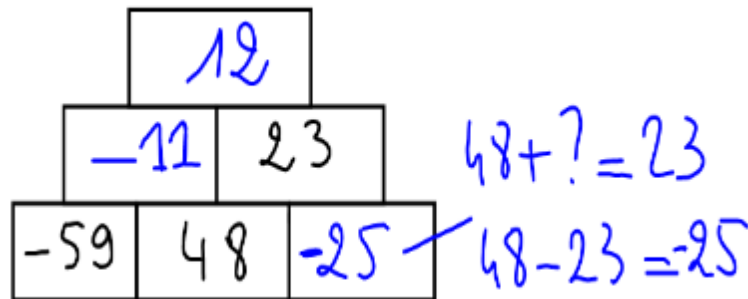
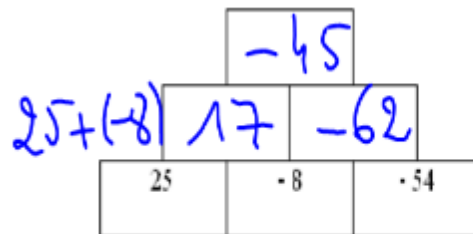
ACDE est un carré

CFB est un triangle équilatéral

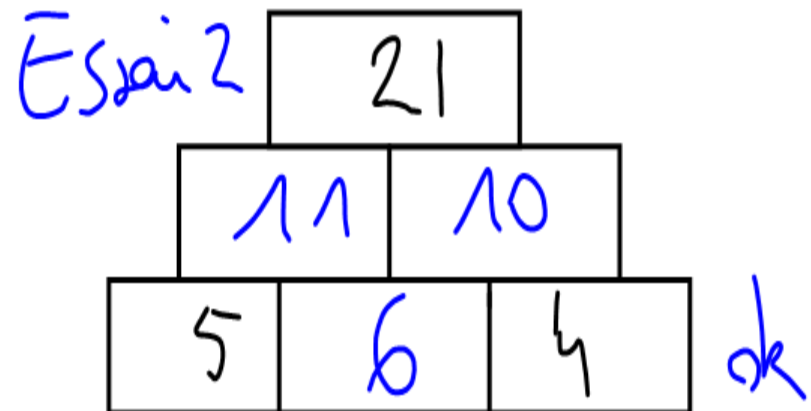
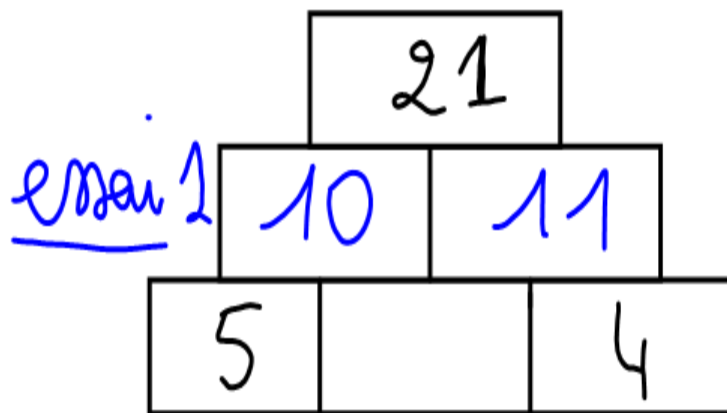
Où doit-on placer le point C pour



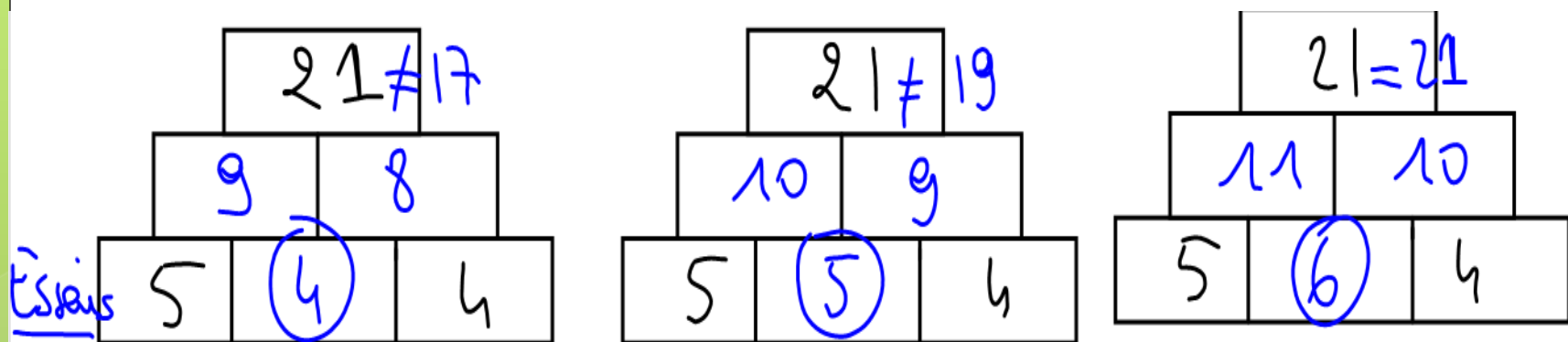
MET : Les pyramides



MET : Les pyramides

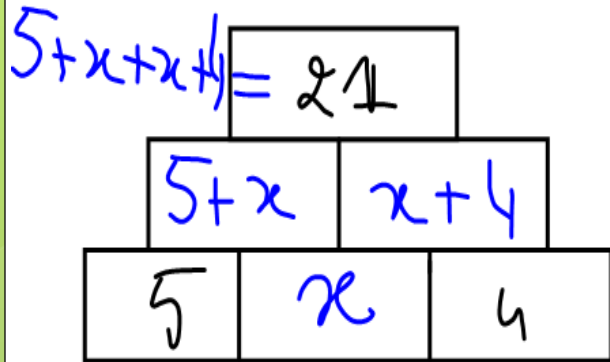


MET : Les pyramides



Remarque : quand on augmente le nombre central de la base de 1, on augmente le nombre au sommet de 2.

MET : Les pyramides

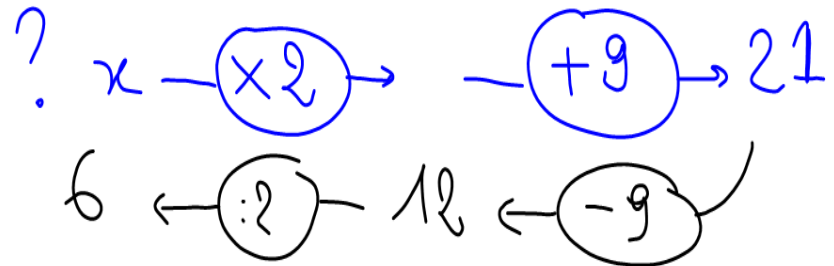


Je cherche le nombre central en bas Je l'appelle x

Je cherche x pour que $5+x+x+4=21$

$$9+2x=21$$

c'est un programme de calcul



MET : Les billets étrangers

Trouve la valeur du billet étranger dans chacun des cas suivants

- 1) Paul possède cinq billets étrangers et quatre euros
Alizée possède quatre de ces billets et vingt cinq euros__
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

Margot : essais 5€

$$\begin{array}{l} P : 5 \times 5 + 4 = 25 + 4 = 29 \text{€} \\ A : 4 \times 5 + 25 = 20 + 25 = 45 \text{€} \end{array}$$

Le billet vaut 21€

$$\begin{array}{l} P : 5 \times 10 + 4 = 54 \text{€} \\ A : 4 \times 10 + 25 = 65 \text{€} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} P = 5 \times 21 + 4 = 109 \text{€} \\ A = 4 \times 21 + 25 = 109 \text{€} \end{array}$$

Leis écarts : 1 billet en plus par Paul et 21€ en plus par Alizée donc 1 billet 21€.

Emma trouve x : x est la valeur du billet :

$$\begin{array}{l} -4x \\ -4 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5x + 4 = 4x + 25 \\ 1x + 4 = 25 \\ 1x = 21 \\ x = 21 \text{€} \end{array} \right.$$

MET : Les billets étrangers

2) Paul possède cinq billets étrangers et quatre euros
Alizée possède deux de ces billets et vingt cinq euros__
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

x est la valeur d'un billet:

$$\begin{array}{r} -2x \parallel \\ \hline 5x + 4 = 2x + 25 \\ \hline 3x + 4 = 25 \\ \hline 3x = 21 : 3 \\ \hline 1x = 7 \end{array}$$

1 Billet vaut 7€

écart: par Paul 3 billets
de plus
par Alizée 2€
de plus
Donc 3 billets \rightarrow 21€
1 billet \rightarrow 7€

au cours

Bilan: Pour résoudre ces problèmes on a fait des essais
on a réfléchi aux écarts ou on a pensé à utiliser
les "travaux".

MET : Les billets étrangers

3) Paul possède 5 billets étrangers et 2 €
Alizée possède 2 de ces billets et 15 €
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

J'appelle x la valeur d'un billet, je cherche x tel que :

$$\begin{array}{l} -2x \parallel 5x + 2 = 2x + 15 \\ -2 \parallel 3x = 15 \\ \parallel 3x = 13 \\ \parallel x = \frac{13}{3} \end{array}$$

$$x - (x \cdot 3) \rightarrow 13$$
$$\leftarrow (: 3$$

un billet a une valeur de $\frac{13}{3}$ €

4) Paul possède 65 billets étrangers et 211 €
Alizée possède 52 de ces billets et 1523 €
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

Bilan : Je reconnais un problème "trouve x " → équation

1) on cherche un nombre (la valeur du billet → x)

2) on a des informations qui nous donnent 2 programmes de calcul

5) Paul possède 74 billets étrangers et 1523 €
Alizée possède 68 de ces billets et 476 €
Paul et Alizée ont la même somme d'argent.

qui doivent être égaux ou un programme de calcul et son résultat

Conclusions

Intérêts des PC

- Outil facile à utiliser car texte simple
- Utilisables avec différents objectifs
- Progression dans les objectifs et la difficulté en jouant sur les variables (nombres en jeu, formes des programmes)
- travail dans différents registres de représentation
- Travail sur les aspects structural et procédural
- Dialectique sens /technique

Pour les apprentissages

- Gestion de classe privilégiant les apprentissages sur la durée
- Procédures personnelles vers procédures expertes par le jeu sur les variables
- Nécessite des institutionnalisations fréquentes
- Évaluation formative (à suivre)

Les programmes de calcul

« Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait. »

Chevallard, 2007
(cours aux professeurs stagiaires)

articles

- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92 (numéro spécial Algèbre), 9-30.
- Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative, *Bulletin de l'APMEP*, n°502.
- Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. *Bulletin de l'APMEP*, n°488.
-

Merci de votre attention

Un problème

- Choisir 4 nombres entiers consécutifs, faire le produit du premier et du quatrième puis le produit du deuxième et du troisième. Fais la différence de ces deux produits.
- Combien obtiens tu ?
- Recommence plusieurs fois
- Prouve le

Pour tout entier n

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

- Je choisis un nombre que j élève au carré, j ajoute 1 à ce nombre et j élève au carré, je calcule la différence entre ces deux carrés. J obtiens toujours deux fois le nombre plus 1.
- La différence des carrés de deux nombres consécutifs est toujours un nombre entier
- Mais aussi tout entier impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux nombres consécutifs.