



HAL
open science

Propagation dans les guides d'ondes

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Éric Lunéville

► **To cite this version:**

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Éric Lunéville. Propagation dans les guides d'ondes. Doctorat. EN-STA Paris, France. 2021. hal-04117183

HAL Id: hal-04117183

<https://hal.science/hal-04117183v1>

Submitted on 5 Jun 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propagation dans les guides d'ondes

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Eric Lunéville

12 janvier 2021

Table des matières

1	Guides d'ondes fermés et solutions modales	9
1.1	L'exemple du guide acoustique	9
1.1.1	Le guide acoustique bidimensionnel	9
1.1.2	Le guide acoustique tridimensionnel	13
1.2	L'exemple du guide électromagnétique	15
1.2.1	Les équations	16
1.2.2	Les modes	17
1.3	Bilan énergétique	21
2	Diffraction par un défaut à basse fréquence	23
2.1	Position du problème	23
2.1.1	Le régime monomode	23
2.1.2	Mise en équations	24
2.2	Décomposition sur les modes	25
2.2.1	Dans une portion de guide droit	25
2.2.2	Dans les guides d'entrée et de sortie	26
2.2.3	Bilan énergétique	27
2.3	Formulation variationnelle et analyse mathématique	28
2.3.1	Choix de l'inconnue	28
2.3.2	Restriction à un domaine borné	28
2.3.3	Théorèmes	30
2.3.4	Existence et unicité	30
2.4	Méthodes d'approximation par ondes planes	32
2.4.1	Expansion brusque	32
2.4.2	Chambre d'expansion	33
3	Les opérateurs DtN et le principe d'absorption limite	35
3.1	La nécessité d'une condition de rayonnement	35
3.2	Le problème dissipatif	37
3.2.1	Prise en compte de la dissipation	38
3.2.2	Caractère bien posé du problème dissipatif	39
3.2.3	L'idée du principe d'absorption limite	39
3.3	Opérateur DtN pour le problème dissipatif	40

3.3.1	Modes du guide dissipatif	40
3.3.2	Représentation modale de la solution du problème dissipatif	41
3.3.3	Réduction à un domaine borné	42
3.4	Limite des constantes de propagation	44
3.5	Le problème limite	45
3.6	Preuve du théorème d'absorption limite	47
4	Résultats d'unicité	51
4.1	Lien entre la question d'unicité et l'existence de modes piégés	51
4.2	Un résultat d'unicité	52
4.3	Le résultat général	54
4.4	Résultats d'existence de modes piégés	57
4.4.1	Le cas de la condition de Dirichlet	57
4.4.2	Le cas de la condition de Neumann	58
5	Estimation de l'erreur de troncature pour la méthode DtN	61
5.1	Position du problème	61
5.2	Une nouvelle formulation du problème avec DtN tronqué	64
5.3	Etude de l'erreur	66
5.4	L'approximation par éléments finis	68
5.5	Une alternative : la condition de Dirichlet-to-Robin	69
6	Une alternative à la méthode DtN : les PML	71
6.1	Introduction	71
6.2	Position et analyse du problème avec PML	72
6.3	Calcul des modes du milieu PML	73
6.4	Estimation d'erreur	75
6.5	Quelques commentaires	76
6.5.1	Les modes rétrogrades	76
6.5.2	PML et discrétisation	77
7	Formulations avec recouvrement et résolution itérative	79
7.1	Formulation DtN avec recouvrement	80
7.1.1	Définition de l'opérateur DtN avec recouvrement	80
7.1.2	Equivalence avec le problème initial	81
7.1.3	Compacité de l'opérateur DtN avec recouvrement	82
7.1.4	Estimation de l'erreur de troncature de la série	83
7.2	Autres formulations avec recouvrement	84
7.2.1	Condition de Neumann to Neumann avec recouvrement	84
7.2.2	Condition de Dirichlet to Robin avec recouvrement	86
7.3	Méthodes itératives de résolution	87
7.3.1	Algorithme de Schwarz pour la méthode DtN avec recouvrement	88
7.3.2	Etude de la convergence de l'algorithme de Schwarz dans un cas particulier	88

8 Extensions et applications	93
8.1 Méthode multimodale	93
8.1.1 Guide à section variable	93
8.1.2 Principe de la méthode multimodale	94
8.1.3 Approximation multimodale	95
8.1.4 Méthode hybride EF/Modal	97
8.2 Quelques applications des méthodes multimodales	98
8.2.1 Acoustique en écoulement	98
8.2.2 Optimisation de forme d'un guide d'onde	99
8.2.3 Imagerie dans un guide d'onde	100

Introduction

On va s'intéresser dans ce cours à la résolution des équations de l'acoustique, de l'électromagnétisme ou de l'élastodynamique dans un *guide fermé*, c'est à dire un milieu cylindrique de section transverse bornée. Autrement dit, le milieu de propagation est de la forme $\Omega = S \times \mathbb{R}$ où S est un domaine borné de \mathbb{R}^2 (ou de \mathbb{R}). S représente la section transverse du guide.

Si z désigne la coordonnée axiale, on suppose de plus que les propriétés du milieu sont invariantes dans la direction z . Par exemple, en électromagnétisme, on supposera que la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ sont telles que :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0.$$

De même, pour un guide élastique (isotrope), on supposera que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

où ρ est la densité, et λ et μ les coefficients de Lamé.

On considérera dans tout le cours le problème fréquentiel, qui correspond au régime périodique établi. Autrement dit, on cherchera des solutions sous la forme

$$\Re e \left(f(x, y, z) e^{-i\omega t} \right)$$

où $\omega > 0$ désigne la pulsation et où le champ inconnu f qui dépend des variables d'espace prend des valeurs complexes.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à un guide parfait (sans défaut) : nous montrons alors que la propagation peut être décrite à l'aide de solutions particulières, à variables séparées, appelés *modes*. Dans les chapitres suivants, nous montrons comment étudier ou simuler l'effet d'un défaut ou d'une perturbation du guide sur un tel mode. On présentera en particulier des méthodes permettant de calculer par éléments finis le champ diffracté par le défaut : la difficulté concerne l'écriture de conditions aux limites non réfléchissantes sur les frontières artificielles du domaine de calcul.

L'intérêt de la thématique de ce cours est double :

- ▷ D'une part, les guides d'ondes sont présents dans de nombreux domaines d'applications. Ils peuvent être *naturels* (la mer est un guide acoustique) ou fabriqués par l'homme (ligne co-axiale, plaque élastique etc...). La présence du défaut

peut à son tour être accidentelle (fissure dans une plaque élastique) ou voulue (chambre d'expansion jouant le rôle de filtre dans un silencieux d'automobile). Pour un défaut non souhaité, il est intéressant de pouvoir le localiser en mesurant sa réponse à une onde incidente, c'est l'objectif du CND (Contrôle Non Destructif) par ultrasons. Pour une perturbation voulue, l'intérêt de la simulation est d'accéder à une évaluation précise de son effet.

- ▷ D'autre part, nous verrons que les guides d'ondes offrent un cadre assez simple (on utilisera beaucoup la séparation de variables en coordonnées cartésiennes) pour présenter et étudier des méthodes plus générales : en particulier, les techniques de conditions transparentes que nous présenterons (opérateurs DtN et couches PML) sont également utilisées pour des simulations dans des domaines de propagation qui ne sont pas des guides, et peuvent être infinis dans 2 ou 3 directions.

Chapitre 1

Guides d'ondes fermés et solutions modales

1.1 L'exemple du guide acoustique

1.1.1 Le guide acoustique bidimensionnel

On considère un fluide parfait compressible et homogène situé entre deux plaques planes rigides parallèles situées en $y = 0$ et $y = h$. On s'intéresse alors aux ondes se propageant dans le plan xy : autrement dit, on recherche des solutions indépendantes de la coordonnée z . Le domaine bidimensionnel de propagation est donc de la forme

$$\Omega = \mathbb{R} \times S \text{ avec } S =]0, h[.$$



FIGURE 1.1 – Le guide acoustique 2D

Les équations

La perturbation de pression acoustique \mathbf{p} est solution de l'équation des ondes dans le fluide et la rigidité des parois se traduit par l'annulation de sa dérivée normale : en effet, d'après la conservation de la quantité de mouvement, l'accélération des particules

est proportionnelle au gradient de la pression ($\rho \frac{dv}{dt} + \nabla p = 0$). Ainsi, en l'absence de source acoustique, \mathbf{p} est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{p} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$. En régime périodique établi, $\mathbf{p}(x, y, t) = \Re e(p(x, y)e^{-i\omega t})$, l'équation des ondes devient une équation de Helmholtz et p vérifie :

$$\begin{cases} \Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

On introduit généralement la notation

$$k = \frac{\omega}{c}$$

qui désigne le nombre d'onde.

Les modes

Un mode est une solution de (1.2) à variables séparées :

$$p(x, y) = f(x)g(y).$$

En injectant cette forme dans l'équation de Helmholtz, on trouve :

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x)g(y) + f(x)\frac{d^2 g}{dy^2}(y) + k^2 f(x)g(y) = 0.$$

Si p ne s'annule pas, ceci s'écrit aussi :

$$\frac{\frac{d^2 f}{dx^2}(x)}{f(x)} + \frac{\frac{d^2 g}{dy^2}(y)}{g(y)} + k^2 = 0$$

d'où l'on déduit que nécessairement, il existe deux constantes ζ et λ telles que :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= \zeta f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ -\frac{d^2 g}{dy^2}(y) &= \lambda g(y) \quad \forall y \in]0, h[, \\ \zeta + \lambda - k^2 &= 0, \end{aligned}$$

et ceci reste vrai si p s'annule. On est alors conduit à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 g}{dy^2}(y) &= \lambda g(y) \quad \forall y \in]0, h[, \\ g'(0) &= g'(h) = 0 \end{aligned}$$

On vérifie qu'il existe une suite de valeurs propres

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{h^2}, \quad n \geq 0$$

associées aux fonctions propres suivantes

$$g_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right).$$

Il en résulte que la fonction f_n associée doit vérifier l'équation

$$-\frac{d^2 f_n}{dx^2}(x) = \beta_n^2 f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec

$$\beta_n^2 + \frac{n^2 \pi^2}{h^2} = k^2. \quad (1.3)$$

La fonction f_n est donc une combinaison linéaire de $e^{i\beta_n x}$ et de $e^{-i\beta_n x}$. Ceci nous conduit finalement à poser

$$\begin{cases} p_n^+(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right) e^{i\beta_n x} \\ p_n^-(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right) e^{-i\beta_n x} \end{cases} \quad \text{avec } \beta_n^2 + \frac{n^2 \pi^2}{h^2} = k^2, \quad n \geq 0. \quad (1.4)$$

En fait, ceci ne définit pas complètement β_n et l'on doit distinguer trois cas :

1. Si $\frac{n^2 \pi^2}{h^2} < k^2$, on pose $\beta_n = \sqrt{k^2 - \frac{n^2 \pi^2}{h^2}}$.

Dans ce cas β_n est réel et le mode est dit *propagatif*. En effet, rappelons nous que la solution de l'équation des ondes correspondant à un mode d'amplitude A_n s'écrit :

$$\mathbf{p}_n^\pm(x, y, t) = \Re e (A_n p_n^\pm(x, y) e^{-i\omega t})$$

soit encore

$$\mathbf{p}_n^\pm(x, y, t) = \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \Re e (A_n e^{i(\pm\beta_n x - \omega t)}).$$

Il s'agit donc d'une onde qui se propage vers les x positifs (pour \mathbf{p}_n^+) ou négatifs (pour \mathbf{p}_n^-) avec la vitesse de phase

$$V_P^n = \frac{\omega}{\beta_n} = c \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{h\omega}\right)^2}}.$$

Pour $n = 0$, c'est une onde plane qui se propage à la vitesse c : on parle de *mode plan*. Pour $n \neq 0$, c'est une onde dispersive (la vitesse de phase dépend de la fréquence) et il est intéressant de calculer sa vitesse de groupe

$$V_G = \frac{d\omega}{d\beta}.$$

En dérivant (1.3) par rapport à ω , on montre que que

$$2\beta_n \frac{d\beta_n}{d\omega} = 2 \frac{\omega}{c^2}$$

qui s'écrit aussi

$$V_P^n V_G^n = c^2.$$

On en déduit :

$$V_G^n = \frac{c^2}{V_P^n} = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{h\omega}\right)^2}.$$

Soulignons enfin qu'il n'existe à fréquence fixée qu'un *nombre fini de modes propagatifs*!

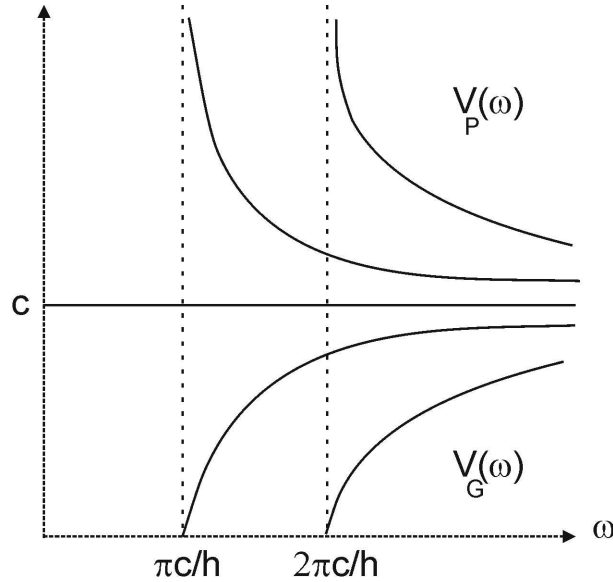


FIGURE 1.2 – Vitesses de phase et vitesses de groupe des modes acoustiques

2. Si $\frac{n^2\pi^2}{h^2} > k^2$, on pose $\beta_n = i\gamma_n$ avec $\gamma_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{h^2} - k^2}$. Dans ce cas β_n est imaginaire pur et le mode est dit *évanescent*. La solution correspondante de l'équation des ondes s'écrit cette fois :

$$\mathbf{p}_n^\pm(x, y, t) = \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right) e^{-\gamma_n x} \Re(A_n e^{-i\omega t}).$$

Il s'agit donc d'une onde qui décroît exponentiellement vers les x positifs (pour \mathbf{p}_n^+) ou négatifs (pour \mathbf{p}_n^-). Il existe à fréquence fixée *une infinité de modes évanescents*.

3. Si $\frac{n^2 \pi^2}{h^2} = k^2$, on a $\beta_n = 0$. On dit dans ce cas que la pulsation ω correspond à la *fréquence de coupure* du n -ième mode. En dessous de cette fréquence, le mode est évanescent et au dessus, il est propagatif. Des phénomènes délicats surviennent aux fréquences de coupure. On exclura donc ce cas dans la suite.

1.1.2 Le guide acoustique tridimensionnel

On considère maintenant un fluide parfait compressible et homogène situé dans un tuyau rigide. Le domaine tridimensionnel de propagation est donc de la forme

$$\Omega = S \times \mathbb{R}$$

où S est un domaine borné de \mathbb{R}^2 . En régime périodique établi et en l'absence de source,

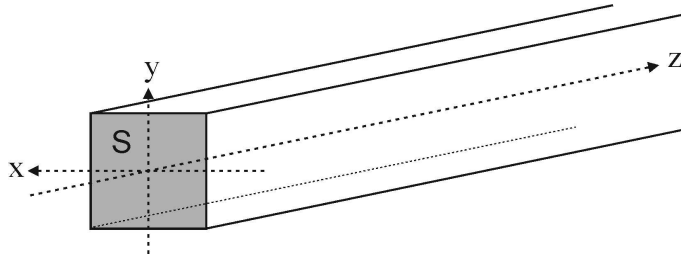


FIGURE 1.3 – Le guide acoustique 3D

la pression est à nouveau solution de (1.2).

Les modes d'un guide de section quelconque

La séparation de variables permet à nouveau de montrer que les modes du guide sont les solutions de la forme :

$$p(x, y, z) = \varphi(x, y)e^{i\beta z}$$

avec $\beta \in \mathbb{C}$. Le champ transverse φ doit donc vérifier

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) \varphi = 0 & \text{dans } S, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (1.5)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ désigne la normale unitaire extérieure à ∂S . Autrement dit, pour que $p(x, y, z) = \varphi(x, y)e^{i\beta z}$ soit un mode du guide, il faut et il suffit que $\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$ soit une valeur

propre de l'opérateur (- Laplacien) dans S avec condition de Neumann et φ une fonction propre associée, soit encore :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{dans } S, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce problème est bien connu mathématiquement et la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Il existe une suite de réels positifs ou nuls λ_n (que l'on supposera rangée dans l'ordre croissant) tendant vers $+\infty$ et une famille de fonctions $\varphi_n \in H^1(S)$, formant une base Hilbertienne de $L^2(S)$, telles que :*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n & \text{dans } S, \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases} \quad (1.7)$$

Clairement dans ce cas, la plus petite valeur propre est égale à 0. Elle est associée à la fonction propre constante. Il pourra alors être commode de numéroter les valeurs propres à partir de $n = 0$, d'où

$$\lambda_0 = 0.$$

On peut facilement vérifier que cette valeur propre est simple et que donc $\lambda_1 > 0$.

Remarque 1.2 *Si l'on remplace la condition de Neumann par une condition de Dirichlet homogène, le théorème reste valable. La seule différence est que la plus petite valeur propre est cette fois strictement positive.*

On trouve donc ainsi deux familles de modes

$$\begin{cases} p_n^+(x, y, z) = \varphi_n(x, y)e^{i\beta_n z} \\ p_n^-(x, y, z) = \varphi_n(x, y)e^{-i\beta_n z} \end{cases} \quad (1.8)$$

où

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \lambda_n} & \text{si } \lambda_n < k, \\ i\sqrt{\lambda_n - k^2} & \text{si } \lambda_n > k, \\ 0 & \text{si } \lambda_n = k. \end{cases}$$

On retrouve alors exactement les mêmes propriétés que dans le cas bidimensionnel. Il existe à fréquence fixée un nombre fini de modes propagatifs (dont un mode plan pour $n = 0$) et une infinité de modes évanescents. Les fréquences de coupure sont données par la relation :

$$\omega = \sqrt{\lambda_n}c.$$

Les allures des vitesses de groupe et de phase sont identiques au cas 2D et l'on a encore :

$$V_P^n V_G^n = c^2.$$

Exemple du guide rectangulaire

Supposons que $S = \{(x, y)/0 < x < a \text{ et } 0 < y < b\}$. On résout le problème de valeurs propres (1.6) par séparation des variables x et y . On est alors naturellement amenés à utiliser un double indigage pour les éléments propres et on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \\ \varphi_{m,n}(x, y) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (1.9)$$

Exemple du guide circulaire

Supposons maintenant que $S = \{(x, y)/x^2 + y^2 < R^2\}$. En coordonnées polaires, le problème (1.6) s'écrit :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = \lambda \varphi & \text{pour } 0 < \theta < 2\pi \text{ et } 0 < r < R, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 & \text{en } r = R, \end{cases} \quad (1.10)$$

qu'il faut compléter par des conditions de périodicité en θ . La séparation des variables r et θ conduit à chercher des fonctions propres de la forme :

$$\varphi(r, \theta) = f(r)e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

En injectant cette forme dans le problème (1.10), on montre que f doit alors vérifier une équation de Bessel :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) f = 0$$

sur $]0, R[$, et la condition aux limites

$$\frac{df}{dr}(R) = 0.$$

Ceci montre que f est la solution non singulière en 0 de l'équation de Bessel, soit :

$$f(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r).$$

Toutes les valeurs de λ sont enfin obtenues comme solutions de :

$$J'_n(\sqrt{\lambda}R) = 0,$$

ce qui nous fournit à nouveau une suite doublement indicée

$$\lambda_{m,n} = \frac{\mu_{n,m}^2}{R^2}$$

où $\mu_{n,m}$ désigne le m -ième zéro de J'_n (voir figure 1.4).

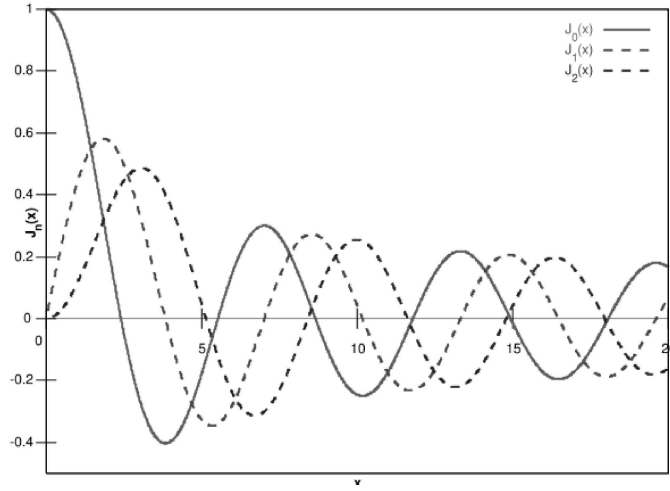


FIGURE 1.4 – Fonctions de Bessel

1.2 L'exemple du guide électromagnétique

On considère à nouveau un guide tridimensionnel

$$\Omega = S \times \mathbb{R}$$

où S est un domaine borné de \mathbb{R}^2 , mais on s'intéresse maintenant à la propagation des ondes électromagnétiques. On suppose que le milieu occupant Ω est homogène et isotrope (il s'agit par exemple du vide) ; il est caractérisé par sa permittivité diélectrique ε et sa perméabilité magnétique μ , qui sont deux constantes strictement positives. Enfin, on suppose que la paroi du guide est parfaitement conductrice.

1.2.1 Les équations

En l'absence de sources et en régime périodique établi de pulsation $\omega > 0$, le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est solution des équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E} \wedge \boldsymbol{\nu} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.11)$$

En prenant la divergence de chaque équation, on vérifie que de plus :

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \mathbf{div} \mathbf{H} = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1.12)$$

Classiquement, on déduit de (1.11) que

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E} &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{H} - \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H} &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Enfin, en utilisant l'identité vectorielle $-\Delta = \mathbf{rot rot} - \nabla(\text{div})$, on vérifie que \mathbf{E} et \mathbf{H} sont solutions d'équations de Helmholtz vectorielles :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \Delta \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (1.14)$$

où l'on a posé $c^2 = 1/(\mu\varepsilon)$.

En ce qui concerne la condition aux limites, on remarque que la normale $\boldsymbol{\nu}$ est orthogonale à l'axe $0z$, de sorte que :

$$\mathbf{E} \wedge \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_z \nu_y \\ E_z \nu_x \\ E_x \nu_y - E_y \nu_x \end{pmatrix}.$$

La condition de conducteur parfait pour la géométrie que nous considérons s'écrit donc finalement :

$$E_z = 0 \quad \text{et} \quad E_x \nu_y - E_y \nu_x = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.15)$$

En utilisant les deux premières équations de (1.11), on vérifie aussi que :

$$H_x \nu_x + H_y \nu_y = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial}{\partial z} (E_x \nu_y - E_y \nu_x) - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \nu_y - \frac{\partial E_z}{\partial y} \nu_x \right) \right) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

En prenant la 3ème composante du produit vectoriel de $\mathbf{rot H}$ par $\boldsymbol{\nu}$ et en utilisant (1.11), on obtient alors :

$$\frac{\partial H_z}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial}{\partial z} (H_x \nu_x + H_y \nu_y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

En résumé, le champ magnétique vérifie finalement les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial H_z}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{et} \quad H_x \nu_x + H_y \nu_y = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.16)$$

1.2.2 Les modes

On cherche maintenant à calculer les modes de ce guide électromagnétique, c'est-à-dire les solutions de (1.11) de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{e}(x, y) e^{i\beta z}, \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{h}(x, y) e^{i\beta z}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec $\beta \in \mathbb{C}$. D'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, on sait déjà que e_z et h_z doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta e_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) e_z = 0 & \text{dans } S, \\ e_z = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (1.18)$$

et

$$\begin{cases} \Delta h_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) h_z = 0 & \text{dans } S, \\ \frac{\partial h_z}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial S. \end{cases} \quad (1.19)$$

Si on note $(\lambda_n^N, \varphi_n^N)$, $n \geq 0$ les éléments propres du Laplacien dans Ω pour la condition de Neumann (vus plus haut) et $(\lambda_n^D, \varphi_n^D)$, $n > 0$ les éléments propres du Laplacien dans Ω pour la condition de Dirichlet (que l'on indexe à partir de $n = 1$ par commodité, en lien avec la remarque 1.2), on peut affirmer que les solutions de (1.18) et (1.19) sont telles que :

$$e_z \neq 0 \Rightarrow \exists n > 0 \text{ tel que } \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \lambda_n^D \text{ et } e_z = \varphi_n^D.$$

De même :

$$h_z \neq 0 \Rightarrow \exists n \geq 0 \text{ tel que } \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \lambda_n^N \text{ et } h_z = \varphi_n^N.$$

La question qui se pose alors est la suivante : connaissant e_z et h_z , peut-on retrouver e_x , e_y , h_x et h_y tels que toutes les équations soient vérifiées.

Pour répondre à cette question, il faut injecter la forme (1.17) dans (1.11). On obtient ainsi les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_z}{\partial y} - i\beta e_y &= i\omega\mu h_x, & \frac{\partial h_z}{\partial y} - i\beta h_y &= -i\omega\varepsilon e_x, \\ i\beta e_x - \frac{\partial e_z}{\partial x} &= i\omega\mu h_y, & i\beta h_x - \frac{\partial h_z}{\partial x} &= -i\omega\varepsilon e_y, \\ \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} &= i\omega\mu h_z, & \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon e_z. \end{aligned} \quad (1.20)$$

La première équation du premier système et la seconde du second peuvent être vues comme un système linéaire d'inconnues e_y et h_x , e_z et h_z étant supposés donnés. De même, la première équation du second système et la seconde du premier peuvent être vues comme un système linéaire d'inconnues e_x et h_y , e_z et h_z étant supposés donnés. Ces 4 équations peuvent alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = -i\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial e_z}{\partial y} \\ \frac{\partial e_z}{\partial x} \end{pmatrix} - i\beta \begin{pmatrix} \frac{\partial h_z}{\partial x} \\ \frac{\partial h_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

et

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = i\omega\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial h_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial h_z}{\partial x} \end{pmatrix} - i\beta \begin{pmatrix} \frac{\partial e_z}{\partial x} \\ \frac{\partial e_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

On voit donc que la connaissance de e_z et h_z permet de retrouver e_x , e_y , h_x et h_y si et seulement si

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \neq 0.$$

On est maintenant en mesure de présenter les trois familles de modes que l'on peut trouver dans un guide électromagnétique.

Les modes Transverses Magnétiques (ou TM) Ces modes sont tels que $H_z = 0$ et $E_z \neq 0$. D'après (1.18), on a vu que nécessairement :

$$\exists n > 0 \text{ tel que } \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \lambda_n^D \text{ et } e_z = \varphi_n^D.$$

Comme toutes les valeurs propres λ_n^D sont strictement positives, $\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \neq 0$ et on peut donc déterminer e_x , e_y , h_x et h_y par les formules (1.21) et (1.22). Tout comme dans le cas acoustique, on peut affirmer qu'il n'existe qu'un nombre fini de modes TM propagatifs (éventuellement aucun) et une infinité de modes TM évanescents.

On pourra noter β_n^{TM} les constantes de propagation de ces modes qui sont solution de la relation de dispersion suivante :

$$(\beta_n^{TM})^2 + \lambda_n^D = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad n \geq 1. \quad (1.23)$$

Les modes Transverses Electriques (ou TE) Ces modes sont tels que $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$. D'après (1.19), on a vu que nécessairement :

$$\exists n \geq 0 \text{ tel que } \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \lambda_n^N \text{ et } h_z = \varphi_n^N.$$

Cette fois, il existe une valeur propre nulle, c'est λ_0^N qui est associée à une fonction propre φ_0^N constante sur S . Nous allons montrer que cette situation est en réalité interdite. En effet, on déduit de (1.20) que

$$i\omega\mu \int_S h_z = \int_S \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) = - \int_{\partial S} (e_x \nu_y - e_y \nu_x) = 0.$$

Donc si h_z est constant, il est nul.

Pour toutes les autres valeurs propres λ_n^D avec $n > 1$, $\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 > 0$ et on peut là encore déterminer e_x , e_y , h_x et h_y par les formules (1.22) et (1.21). A nouveau, il n'existe qu'un nombre fini de modes TE propagatifs (éventuellement aucun) et une infinité de modes TE évanescents.

On pourra noter β_n^{TE} les constantes de propagation de ces modes qui sont solution de la relation de dispersion suivante :

$$(\beta_n^{TE})^2 + \lambda_n^N = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad n \geq 1. \quad (1.24)$$

Remarque 1.3 *On remarque que pour*

$$\omega < \sqrt{\min(\lambda_1^D, \lambda_1^N)},$$

aucun des modes TE ou TM n'est propagatif.

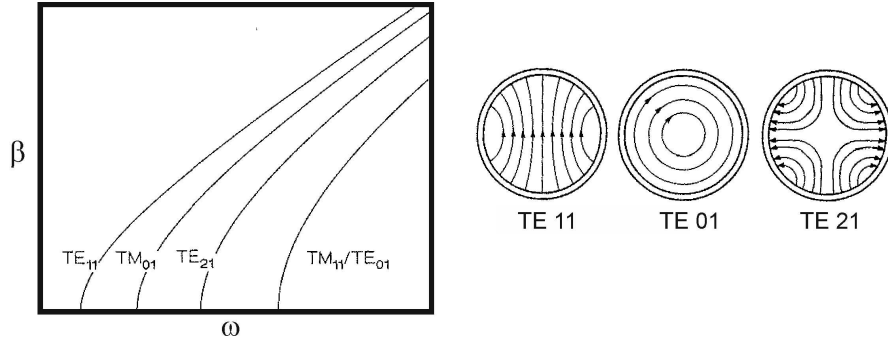


FIGURE 1.5 – Modes TE et TM d'un guide circulaire : à gauche, courbes de dispersion, à droite, lignes de champ électrique

Les modes Transverses Electromagnétiques (ou TEM) Ces modes sont tels que $E_z = 0$ et $H_z = 0$. D'après (1.22) et (1.21), on a nécessairement dans ce cas

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = 0$$

sinon tout le champ électromagnétique serait nul. Par ailleurs, en utilisant la dernière équation du premier système de (1.20), l'équation (1.12) ainsi que la condition aux limites de conducteur parfait

$$e_x \nu_y - e_y \nu_x = 0,$$

on déduit qu'il existe un potentiel φ tel que :

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \nabla \varphi$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 & \text{dans } S, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\tau}} &= 0 & \text{sur } \partial S, \end{aligned} \quad (1.25)$$

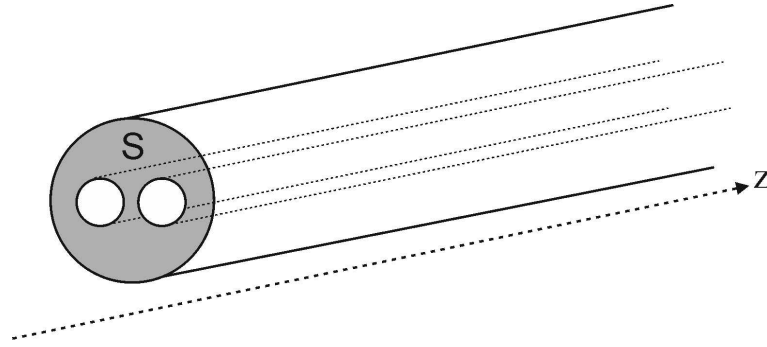
où $\partial/\partial \boldsymbol{\tau}$ désigne la dérivée tangentielle.

Si ∂S n'a qu'une composante connexe, $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\tau}} = 0$ implique que φ est constant sur ∂S , et donc sur S . On en déduit que le champ électromagnétique associé est identiquement nul et il n'y a donc pas dans ce cas de modes TEM. En revanche, si ∂S a deux composantes connexes ∂S^1 et ∂S^2 , comme dans le cas d'un guide coaxial, on peut imposer une différence de potentiel en posant par exemple :

$$\varphi = j - 1 \text{ sur } \partial S^j, \quad j = 1, 2,$$

qui conduit à un potentiel φ non nul, et à un mode TEM associé non trivial.

Plus généralement, si ∂S a $N_c > 1$ composantes connexes, il existe $N_c - 1$ modes TEM linéairement indépendants.

FIGURE 1.6 – Cas où la frontière de S a 3 composantes connexes

Contrairement aux modes TE et TM, les modes TEM existent à toute fréquence $\omega > 0$ et ne sont pas dispersifs puisqu'ils vérifient tous :

$$\frac{\omega}{\beta} = c.$$

1.3 Bilan énergétique

On revient pour simplifier au cas du guide acoustique tridimensionnel étudié dans le paragraphe 1.1.2. On considère un champ correspondant à une superposition de modes (en nombre fini pour s'affranchir des questions délicates relatives à la convergence des séries) :

$$p = \sum_{0 \leq n \leq N_{max}} (A_n^+ e^{i\beta_n z} + A_n^- e^{-i\beta_n z}) \varphi_n \quad (1.26)$$

où l'on a repris les notations (1.8). Les coefficients A_n^\pm sont des nombres complexes qui représentent les amplitudes modales. On veut calculer le flux d'énergie moyen (sur une période) transporté par ce champ à travers une section droite du guide.

On peut montrer, en revenant aux expressions temporelles, que le flux d'énergie moyen transporté par le champ p à travers une surface Σ est donné par :

$$J_\Sigma = \frac{\omega \rho}{2} \Im m \left(\int_\Sigma \bar{p} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\sigma \right)$$

où ρ désigne la densité du fluide (la constante $\frac{\omega \rho}{2}$ est nécessaire pour que J_Σ ait la bonne dimension mais n'a aucune importance dans l'analyse qui va suivre).

Remarquons tout d'abord que si $\mathcal{O} \subset \Omega$, on a la formule de Green :

$$\int_{\partial \mathcal{O}} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Sigma = \int_{\mathcal{O}} \left(|\nabla u|^2 - \frac{\omega^2}{c^2} |u|^2 \right),$$

d'où

$$\Im m \left(\int_{\partial \mathcal{O}} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\sigma \right) = 0.$$

Autrement dit le flux d'énergie moyen transporté par tout champ p , solution de l'équation de Helmholtz, à travers une surface fermée est nul.

Considérons le cas particulier où \mathcal{O} est une portion droite du guide Ω :

$$\mathcal{O} = S \times]z_a, z_b[.$$

Alors on vérifie, en utilisant la condition de Neumann homogène sur la paroi du guide, que :

$$\Im m \left(\int_{z=z_a} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial z} dx dy \right) = \Im m \left(\int_{z=z_b} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial z} dx dy \right).$$

Ici on a aussi utilisé le fait que la dérivée normale à une section transverse est la dérivée en z (au signe près). Autrement dit, le flux moyen d'énergie moyen (sur une période) transporté par le champ p à travers une section transverse du guide est indépendant de la position de cette section (il est indépendant de z). Finalement, en exploitant la décomposition modale de p , on obtient la

Proposition 1.4 *Soit p de la forme (1.26), alors la quantité*

$$J = \Im m \left(\int_{z=z_0} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial z} dx dy \right)$$

est indépendante de z_0 et on a

$$J = \sum_{\beta_n \in \mathbb{R}} \beta_n (|A_n^+|^2 - |A_n^-|^2) + 2 \sum_{\beta_n \in i\mathbb{R}} \Im m(\beta_n) \Im m(A_n^- \overline{A_n^+})$$

DÉMONSTRATION. En injectant la forme (1.26) dans l'expression de J prise en $z = 0$, on trouve :

$$J = \Im m \left(\sum_{0 \leq n \leq N_{max}} \overline{(A_n^+ + A_n^-)} i \beta_n (A_n^+ - A_n^-) \right),$$

soit encore

$$J = \Im m \left(\sum_{0 \leq n \leq N_{max}} i \beta_n (|A_n^+|^2 - |A_n^-|^2) + 2 \beta_n \Im m(A_n^- \overline{A_n^+}) \right).$$

Le résultat en découle. □

D'après ce calcul, on trouve que les modes propagatifs transportent de l'énergie, vers les $z > 0$ pour les modes $+$ et vers les $z < 0$ pour les modes $-$. En revanche, les modes évanescents ne transportent de l'énergie que s'il y a croisement du mode $n +$ et du mode $n -$ (c'est ce qui produit par exemple l'effet tunnel). En particulier, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.5 *Soit*

$$p = \sum_{0 \leq n \leq N_{max}} A_n^+ e^{i\beta_n z} \varphi_n.$$

Alors pour tout z_0 :

$$\Im m \left(\int_{z=z_0} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial z} dx dy \right) = \sum_{\beta_n \in \mathbb{R}} \beta_n |A_n^+|^2.$$

Chapitre 2

Diffraction par un défaut à basse fréquence

Ce chapitre a été rédigé à partir des notes prises et tapées par deux élèves de l'ENSTA qui ont suivi ce cours en 2011-2012, Jonathan Viquerat et Emmanuel Cieren, que nous remercions pour cela.

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré un guide parfait, uniforme et infini dans la direction axiale. Nous nous intéressons maintenant à l'effet produit par la présence dans le guide d'un défaut. Il peut s'agir d'un obstacle ou d'une hétérogénéité contenue dans le guide ou d'une déformation de la paroi du guide. Pour fixer les idées, nous traitons le cas d'un guide acoustique tridimensionnel, tel que celui du paragraphe 1.1.2.

Dans ce chapitre, nous allons établir une formulation approchée du problème valable à basse fréquence. L'idée est de tirer parti du fait qu'à basse fréquence, seul le mode plan peut se propager dans le guide.

2.1 Position du problème

2.1.1 Le régime monomode

On note $\Omega_0 = S \times \mathbb{R}$ le guide non perturbé, et Ω un guide perturbé. Plus précisément, Ω est un domaine connexe qui coïncide avec Ω_0 hors d'un compact de \mathbb{R}^3 . La différence entre Ω et Ω_0 est appelée le défaut dans la suite.

Lorsque k est petit, ou plus précisément lorsque $k^2 < \lambda_1^{-1}$, il existe un unique mode propagatif, correspondant à $\lambda_0 = 0$, $\beta_0 = k$, et $p_0(x, y, z) = \varphi_0 e^{\pm ikz}$ avec $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{|S|}}$ constante et normalisée. Tous les autres modes sont évanescents et correspondent aux valeurs de $n \geq 1$. On souhaiterait savoir ce qu'il advient du mode plan lorsqu'il "rencontre" le défaut du guide. On s'attend en particulier à ce que l'interaction du mode

1. Première valeur propre non nulle du laplacien avec condition de Neumann dans S

plan avec le défaut produise une réflexion et une modification de la transmission. On dit que le mode plan $\varphi_0 e^{ikz}$ ou $\varphi_0 e^{-ikz}$ est le mode incident, ou plus généralement l'onde incidente.

2.1.2 Mise en équations

Pour fixer les idées, on suppose que l'onde incidente vient de la gauche, et on pose donc :

$$p_{inc}(x, y, z) = \varphi_0 e^{ikz}.$$

Les équations du problème sont identiques à celles vues par exemple en (1.2), auxquelles vont venir s'ajouter des conditions à l'infini :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{Conditions à l'infini } z \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad (2.1)$$

On remarque que les deux premières équations sont homogènes. La donnée va intervenir dans la condition vérifiée par la pression à l'infini.

Supposons que les défauts sont compris entre deux position $z = z^-$ et $z = z^+$ avec $z^- < z^+$. Alors les guides semi-infinis $z > z^+$ et $z < z^-$ sont non perturbés (ils ne contiennent aucun défaut). Les conditions à l'infini doivent assurer que :

- Pour $z > z^+$, p décrit une onde qui se propage vers les z positifs ;
- Pour $z < z^-$, p est la superposition de l'onde incidente $p_{inc} = \varphi_0 e^{ikz}$ et d'une onde se propageant vers les z négatifs. On notera $p_{dif} = p - p_{inc}$ l'onde diffractée.

La situation est résumée sur la figure 2.1.

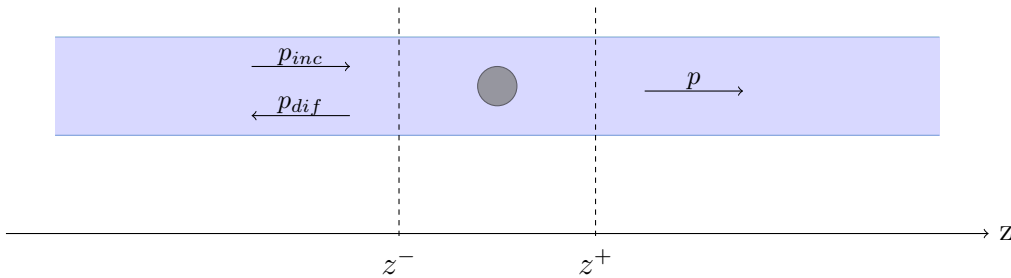


FIGURE 2.1 – Ondes incidente et réfléchié par le défaut

2.2 Décomposition sur les modes

2.2.1 Dans une portion de guide droit

On suppose que p vérifie, dans une portion de guide droit $S \times [a, b]$ les équations homogènes :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } S \times [a, b] \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial S \times [a, b] \end{cases} \quad (2.2)$$

Supposons pour simplifier que ∂S est C^∞ . Alors, si $p \in L^2(S \times [a, b])$, on peut montrer que p est C^∞ dans $S \times]a, b[$.

A z fixé, on note $p(z)$ la fonction $(x, y) \rightarrow p(x, y, z)$. Par ailleurs, par abus de notation, on notera toujours S une section transverse du guide, quelle que soit sa position. Comme p est très régulière, on peut affirmer en particulier que $p(z) \in L^2(S)$. Les (φ_n) formant une base Hilbertienne de $L^2(S)$, $p(z)$ admet donc la représentation suivante (la série convergeant dans $L^2(S)$) :

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \varphi_n(x, y) \quad (2.3)$$

avec

$$a_n(z) = (p(z), \varphi_n)_{L^2(S)} = \int_S p(x, y, z) \overline{\varphi_n(x, y)} dx dy.$$

En dérivant cette identité sous le signe intégral, on obtient alors :

$$\frac{d^2 a_n}{dz^2}(z) = \int_S \overline{\varphi_n(x, y)} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(x, y, z) dx dy \quad (2.4)$$

Or $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\Delta_{x,y} p - k^2 p$. La formule de Green permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_S (-\Delta_{x,y} p) \overline{\varphi_n} &= \int_S p \underbrace{(-\Delta_{x,y} \overline{\varphi_n})}_{=\lambda_n \overline{\varphi_n}} - \underbrace{\int_{\partial S} \left(\overline{\varphi_n} \frac{\partial p}{\partial \nu} - p \frac{\partial \overline{\varphi_n}}{\partial \nu} \right)}_{=0 \text{ grâce aux conditions aux limites}} = \lambda_n a_n(z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donc, a_n vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 a_n}{dz^2}(z) = \underbrace{(\lambda_n - k^2)}_{-\beta_n^2} a_n(z),$$

dont la solution est une somme d'exponentielles complexes.

Finalement, on a montré que dans toute portion de guide droit, une solution de (2.2) s'écrit sous la forme :

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{i\beta_n z} + A_n^- e^{-i\beta_n z}) \varphi_n(x, y) \quad (2.6)$$

Remarque 2.1 *On peut être tenté de retrouver ce résultat plus simplement en appliquant l'opérateur $\Delta + k^2$ à la série (2.3). Mais cela n'est pas rigoureux car on n'a pas le droit de dériver deux fois sous le signe somme. D'ailleurs, on remarque que cette méthode ne ferait jamais intervenir les conditions aux limites vérifiées par p et par les φ_n , alors qu'elles sont très importantes.*

2.2.2 Dans les guides d'entrée et de sortie

Nous avons montré que dans toute portion de guide droit, le champ p s'écrit comme une superposition de modes allant vers la droite et vers la gauche. On peut appliquer ce résultat aux guides d'entrée et de sortie, en tenant compte des comportements à l'infini souhaités.

Par exemple, dans le guide de sortie, pour $z > z^+$, la solution du problème de diffraction doit se propager vers les $z > 0$, d'où $A_n^- = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. On a donc, en se rappelant que $k^2 < \lambda_1$:

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^+ e^{i\beta_n z} \varphi_n(x, y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (p(z^+), \varphi_n)_{L^2(S)} e^{i\beta_n(z-z^+)} \varphi_n(x, y) \end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire, en notant $\gamma_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$ pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= (p(z^+), \varphi_0)_{L^2(S)} e^{ik(z-z^+)} \varphi_0(x, y) \\ &\quad + \sum_{n>0} (p(z^+), \varphi_n)_{L^2(S)} e^{-\gamma_n(z-z^+)} \varphi_n(x, y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

On remarque que pour $z - z^+$ suffisamment grand, les termes évanescents deviennent négligeables, de sorte que la pression devient proportionnelle à une onde plane.

Dans le guide d'entrée, on peut procéder de la même façon à condition de considérer le champ diffracté $p_{dif} = p - p_{inc}$. Pour $z < z^-$, on a :

$$\begin{aligned} p_{dif}(x, y, z) &= (p_{dif}(z^-), \varphi_0)_{L^2(S)} e^{-ik(z-z^-)} \varphi_0(x, y) \\ &\quad + \sum_{n>0} (p_{dif}(z^-), \varphi_n)_{L^2(S)} e^{\gamma_n(z-z^-)} \varphi_n(x, y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Là encore, si $z - z^-$ est suffisamment grand, les modes évanescents deviennent négligeables et la pression est la superposition des deux ondes planes se propageant dans des sens opposés.

On notera dans la suite :

$$I = (p_{inc}(z^-), \varphi_0)_{L^2(S)}, \quad R = (p_{dif}(z^-), \varphi_0)_{L^2(S)} \quad \text{et} \quad T = (p(z^+), \varphi_0)_{L^2(S)} \quad (2.9)$$

Le nombre $I = e^{ikz^-}$ de module 1 détermine la phase de l'onde incidente, et R et T sont les coefficients de réflexion et de transmission. En résumé, on a donc :

$$p(x, y, z) = \begin{cases} \left(Ie^{ik(z-z^-)} + Re^{-ik(z-z^-)} \right) \varphi_0 + \text{des termes évanescents, si } z < z^- \\ Te^{ik(z-z^+)} \varphi_0 + \text{des termes évanescents, si } z > z^+ \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2.3 Bilan énergétique

Supposons qu'il existe p vérifiant les équations (2.1) et de la forme (2.7) et (2.8) dans les demi-guides d'entrée et de sortie.

On note $\Omega_b = S \times [z^-, z^+]$ et on suppose que $p|_{\Omega_b} \in H^1(\Omega_b)$. En remarquant que :

$$- \int_{\Omega_b} (\Delta p + k^2 p) \bar{p} = \int_{\Omega_b} (|\nabla p|^2 - k^2 |p|^2) - \int_{\partial\Omega_b} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0, \quad (2.11)$$

on obtient :

$$\text{Im} \left(\int_{\partial\Omega_b} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial \nu} \right) = 0$$

ce qui revient à dire que le flux d'énergie qui traverse $\partial\Omega_b$ pendant une période est nulle. Or, sur le bord du cylindre, $\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$, d'où :

$$\text{Im} \left(\int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} \bar{p} \frac{\partial p}{\partial \nu} \right) = 0, \text{ avec } \Sigma^\pm = \{(x, y, z) \in \Omega, z = z^\pm\} \quad (2.12)$$

En procédant comme dans le paragraphe 1.3, on vérifie alors la relation fondamentale suivante :

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (2.13)$$

Notons que cette relation est exacte, si $k^2 < \lambda_1$, contrairement à ce que nous allons faire dans la suite qui reposera sur une approximation.

Remarque 2.2 *Tout ce que nous venons de dire reste vrai en l'adaptant si la section du guide de sortie est différente de celle du guide d'entrée. Plus précisément, notons S_1 la section du guide d'entrée et S_2 celle du guide de sortie. On note alors φ_0^i la constante normalisée, première fonction propre du Laplacien avec condition de Neumann, dans S^i de sorte que :*

$$\varphi_0^i = \frac{1}{\sqrt{|S_i|}}$$

La solution p du problème de diffraction est alors de la forme :

$$p(x, y, z) = \begin{cases} \left(I_1 e^{ik(z-z^-)} + R_1 e^{-ik(z-z^-)} \right) \varphi_0^1 + \text{des termes évanescents, si } z < z^- \\ T_2 e^{ik(z-z^+)} \varphi_0^2 + \text{des termes évanescents, si } z > z^+ \end{cases} \quad (2.14)$$

Cette fois, les coefficients de réflexion et de transmission, définis comme le rapport de l'amplitude de l'onde plane réfléchie ou transmise sur l'amplitude de l'onde plane incidente, sont donnés par :

$$R = \frac{R_1 \varphi_0^1}{I_1 \varphi_0^1} \text{ et } T = \frac{T_2 \varphi_0^2}{I_1 \varphi_0^1}$$

de sorte que (en notant $|S_i|$ la surface de la section S_i) :

$$|R| = |R_1| \text{ et } |T| = |T_2| \frac{|S_1|}{|S_2|}.$$

Finalement, la conservation de l'énergie prend alors la forme suivante :

$$|R_1|^2 + |T_2|^2 = 1$$

soit

$$|R|^2 + m |T|^2 = 1 \text{ où } m = \frac{|S_2|}{|S_1|}. \quad (2.15)$$

2.3 Formulation variationnelle et analyse mathématique

2.3.1 Choix de l'inconnue

Il est possible de choisir comme inconnue du problème soit le champ total p , soit le champ diffracté p_{dif} . Voyons quel problème chacune de ces deux inconnues vérifie : dans le cas du champ total p , la condition de Neumann satisfaite sur le bord du domaine perturbé Ω est homogène :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Au premier abord, on ne voit pas comment tenir compte de la donnée, c'est à dire de l'onde incidente qui intervient dans l'expression de p dans le guide d'entrée.

Il est donc tentant de considérer comme inconnue le champ diffracté. On vérifie facilement qu'il satisfait aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_{dif} + k^2 p_{dif} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p_{dif}}{\partial \nu} = -\frac{\partial p_{inc}}{\partial \nu} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Cette fois l'onde incidente apparait au second membre de la condition de Neumann, comme une donnée classique. On peut remarquer que ce second membre est nul partout sauf sur le défaut, puisque la dérivée normale de l'onde incidente est nulle sur la frontière du guide non perturbé.

Pourtant, nous allons voir qu'il est possible, et même préférable, de travailler en champ total.

2.3.2 Restriction à un domaine borné

Supposons que l'on connaisse p sur le domaine borné Ω_b . Alors a fortiori, on connaît p sur les frontières $\Sigma^\pm = \{(x, y, z) \in \Omega, z = z^\pm\}$. On peut donc à l'aide des formules (2.8) et (2.7) reconstruire p partout. Il est donc légitime de chercher à écrire une formulation du problème de diffraction restreinte à ce domaine borné Ω_b . Ceci nous sera utile, à la fois pour la théorie et pour la méthode numérique. Essayons donc d'écrire une formulation variationnelle dans Ω_b . On a $\forall q \in H^1(\Omega_b)$:

$$\int_{\Omega_b} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} \bar{q} \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0.$$

La difficulté est que l'on ne connaît ni p , ni sa dérivée normale sur les frontières artificielles Σ^+ et Σ^- . On ne peut donc pas imposer de condition de Dirichlet ou de Neumann. Que faire ?

L'idée est que justement, comme Σ^+ et Σ^- sont des frontières artificielles, on peut les placer suffisamment loin du défaut, afin qu'il ne reste plus en z^- et z^+ que les ondes planes progressives. Or e^{ikz} vérifie la relation suivante :

$$\frac{d}{dz} e^{ikz} = ik e^{ikz}.$$

Ceci nous conduit naturellement à considérer les conditions aux limites approchées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma^+} &\simeq ikp \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma^-} &\simeq ikp + \left(\frac{\partial p_{inc}}{\partial \nu} - ikp_{inc} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ces conditions sont approchées puisque nous avons négligé les modes évanescents.

Remarque 2.3 Une condition aux limites du type

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = \alpha p$$

est appelée une condition de Robin.

On considère donc le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_b \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_b \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = ikp & \text{sur } \Sigma^+ \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = ikp + g & \text{sur } \Sigma^- \end{array} \right. \quad (2.18)$$

où l'on a noté g la donnée qui s'exprime en fonction de l'onde incidente :

$$g = \frac{\partial p_{inc}}{\partial \nu} - ikp_{inc} = -2ikp_{inc}.$$

Cette formulation du problème n'est valable qu'en régime monomode. Dès que plusieurs modes peuvent se propager dans le guide, il faut procéder d'une façon plus subtile comme on le verra au chapitre suivant.

2.3.3 Théorèmes

Commençons par rappeler quelques théorèmes et définitions, qui nous permettront de montrer l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (2.18).

Théorème 2.4 (Alternative de Fredholm) *Soit H un espace de Hilbert et soit K un opérateur compact² sur H . Alors, $I + K$ surjectif $\iff I + K$ injectif.*

En substance, le théorème 2.4 indique que lorsque l'on cherche à résoudre $u + Ku = f$ avec K compact, on a l'alternative suivante :

- **Soit** $\forall f$ on a une solution unique ;
- **Soit** l'équation homogène admet n solutions indépendantes, et l'on ne peut résoudre l'équation complète qu'avec n conditions d'orthogonalité sur f .

Pour écrire le problème sous la forme abstraite $(I + K)u = f$, nous aurons recours au théorème de représentation de Riesz :

Théorème 2.5 *Soit f une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H . Alors, $\exists ! y \in H$ tel que $\forall x \in H$, $f(x) = (x, y)_H$.*

On remarque tout de suite la ressemblance avec le théorème de Lax-Milgram, qui englobe en fait le théorème de représentation de Riesz.

Pour établir la compacité de l'opérateur K , nous aurons besoin du théorème suivant :

Théorème 2.6 (Rellich) *Soit Ω_b un domaine borné. De toute suite bornée (u_n) de $H^1(\Omega_b)$, on peut extraire une sous-suite, à nouveau notée (u_n) , telle que (u_n) converge vers u dans $L^2(\Omega_b)$ et $u_n|_{\partial\Omega_b}$ converge vers $u|_{\partial\Omega_b}$ dans $L^2(\partial\Omega_b)$.*

La première partie de ce théorème exprime en fait l'injection compacte de $H^1(\Omega_b)$ dans $L^2(\Omega_b)$. C'est un résultat dû à Rellich.³

2. Si (U_n) est une suite bornée de H , alors (KU_n) admet une sous-suite convergente dans H .

3. Remarquons que ce résultat n'est plus vrai sur un domaine non borné.

2.3.4 Existence et unicité

La formulation variationnelle associée au problème (2.18) est la suivante :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } p \in H^1(\Omega_b), \text{ tel que } \forall q \in H^1(\Omega_b), \\ & \int_{\Omega_b} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - ik \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} p \bar{q} = \int_{\Sigma^-} g \bar{q}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La formulation faible (2.19) est équivalente à l'expression suivante

$$(p, q)_{H^1(\Omega_b)} - (k^2 + 1) \int_{\Omega_b} p \bar{q} - ik \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} p \bar{q} = \int_{\Sigma^-} g \bar{q}. \quad (2.20)$$

Par le théorème de Riesz, on définit l'opérateur K , continu de $H^1(\Omega_b)$ dans lui-même, par :

$$(Kp, q)_{H^1(\Omega_b)} = (k^2 + 1) \int_{\Omega_b} p \bar{q} - ik \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} p \bar{q}$$

ainsi que l'élément $f \in H^1(\Omega_b)$ tel que :

$$(f, q)_{H^1(\Omega_b)} = \int_{\Sigma^-} g \bar{q}.$$

L'égalité précédente se ramène alors à $(p + Kp, q)_{H^1(\Omega_b)} = (f, q)_{H^1(\Omega_b)}$, vraie pour tout q , soit encore $(I + K)p = f$. Reste à montrer la compacité de K .

Compacité de K Soit $p \in H^1(\Omega_b)$:

$$\|Kp\|_{H^1(\Omega_b)}^2 = (Kp, Kp)_{H^1(\Omega_b)} = - (k^2 + 1) \int_{\Omega_b} p (\overline{Kp}) - ik \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} p (\overline{Kp}).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Kp\|_{H^1(\Omega_b)}^2 \leq (k^2 + 1) \|p\|_{L^2(\Omega_b)} \|Kp\|_{L^2(\Omega_b)} + k \|p\|_{L^2(\Sigma^+ \cup \Sigma^-)} \|Kp\|_{L^2(\Sigma^+ \cup \Sigma^-)}. \quad (2.21)$$

Étant donnée la continuité de la trace et le fait que $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$, il vient :

$$\|Kp\|_{H^1(\Omega_b)} \leq C \left(\|p\|_{L^2(\Omega_b)} + \|p\|_{L^2(\Sigma^+ \cup \Sigma^-)} \right). \quad (2.22)$$

Supposons alors (p_n) bornée dans $H^1(\Omega_b)$. D'après le théorème 2.6, il existe une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega_b)$ et telle que sa trace converge dans $L^2(\Sigma^+ \cup \Sigma^-)$. Or, d'après l'inégalité précédente, on voit que, $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|Kp_n - Kp_m\|_{H^1(\Omega_b)} \leq C \left(\|p_n - p_m\|_{L^2(\Omega_b)} + \|p_n - p_m\|_{L^2(\Sigma^+ \cup \Sigma^-)} \right) \quad (2.23)$$

d'où (Kp_n) est une suite de Cauchy et converge. Il vient alors que K est compact par définition.

Unicité Avoir $I + K$ injectif équivaut à avoir l'unicité, qui équivaut aussi à avoir l'assertion : p solution pour $g = 0 \implies p = 0$. Prenons alors $g = 0$ et $q = p$ dans (2.19) : il vient

$$\Im \left(\int_{\Omega_b} (|\nabla p|^2 - k^2 |p|^2) - ik \int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} |p|^2 \right) = 0 \quad (2.24)$$

qui implique

$$\Im \left(\int_{\Sigma^+ \cup \Sigma^-} |p|^2 \right) = 0. \quad (2.25)$$

On en déduit alors que p est nul sur $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$, et donc $\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$ d'après les conditions aux limites du problème (2.18). Il reste alors à invoquer le théorème de Holmgren :

Théorème 2.7 (Holmgren) *Soit u telle que $\Delta u + k^2 u = 0$ sur un ouvert Θ et $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur une partie $\Gamma \subset \partial\Theta$ telle que $|\Gamma| \neq 0$. Alors, $u \equiv 0$ sur Θ .*

L'unicité résulte directement de ce théorème.

2.4 Méthodes d'approximation par ondes planes

Considérons un guide perturbé constitué d'une succession de tronçons de guides droits. A basse fréquence, la solution loin des discontinuités ressemble à une superposition d'ondes planes. Peut-on trouver un modèle simplifié qui se réduise à la recherche des amplitudes complexes de ces ondes planes? C'est une idée qui a été largement développée par les acousticiens et qui fonctionne étonnamment bien à basse fréquence.

2.4.1 Expansion brusque

On s'intéresse à une géométrie du type de celle présentée en figure 2.2. On cherche la solution p comme superposition d'une onde plane incidente et d'une onde plane réfléchie à gauche ($z < 0$) et comme une onde plane transmise à droite ($z > 0$). Il reste alors à imposer des conditions raisonnables en $z = 0$ pour déterminer les amplitudes R et T des ondes réfléchies et transmises en fonction de l'amplitude I de l'onde incidente, que l'on prend égale à 1.

On se propose d'imposer la continuité de la pression et la continuité du flux. La continuité de p en $z = 0$ s'écrit simplement $1 + R = T$.

Pour écrire la continuité du flux, on se rappelle qu'en vertu des équations d'Euler, la vitesse est proportionnelle au gradient de la pression. Par conséquent, la continuité du flux entre l'entrée et la sortie s'écrit

$$|S_1| \frac{\partial p}{\partial z}(z = 0^-) = |S_2| \frac{\partial p}{\partial z}(z = 0^+)$$

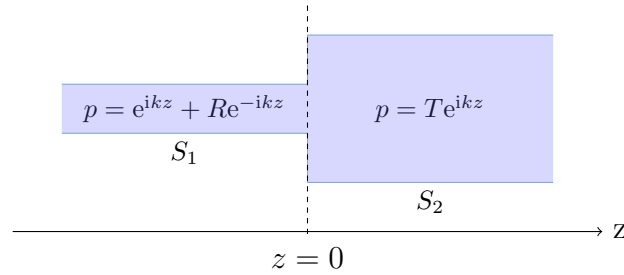


FIGURE 2.2 – Expansion brusque du guide d’ondes

soit

$$(1 - R)|S_1| = T|S_2|.$$

En notant à nouveau m le rapport des sections :

$$m = \frac{|S_2|}{|S_1|},$$

il vient alors :

$$T = \frac{2}{1 + m} \text{ et } R = \frac{1 - m}{1 + m} \quad (2.26)$$

On peut remarquer que ces coefficients satisfont la relation de conservation de l’énergie (2.15) que vérifie la solution exacte. En particulier, mT^2 est toujours inférieur à 1. Ceci conduit à considérer comme mesure de l’atténuation la quantité classiquement utilisée en acoustique suivante :

$$A(k) = \log \left(\frac{1}{m|T|^2} \right) \quad (2.27)$$

qui est toujours positive, et qui est d’autant plus grande que la transmission est faible. On trouve ici :

$$A(k) = \log \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{m} + m + 2 \right) \right) \quad (2.28)$$

Remarque 2.8 — *L’atténuation est minimale pour $m = 1$ (pas de perturbation).*

- *L’expression (2.28) est indépendante de k car le milieu est infini dans la direction z ;*
- *L’expression de A est symétrique en m et $1/m$, l’atténuation dans ce modèle est donc identique pour un cas petite section vers grosse section, et pour un cas grosse section vers petite section. Ceci n’est pas très intuitif !*

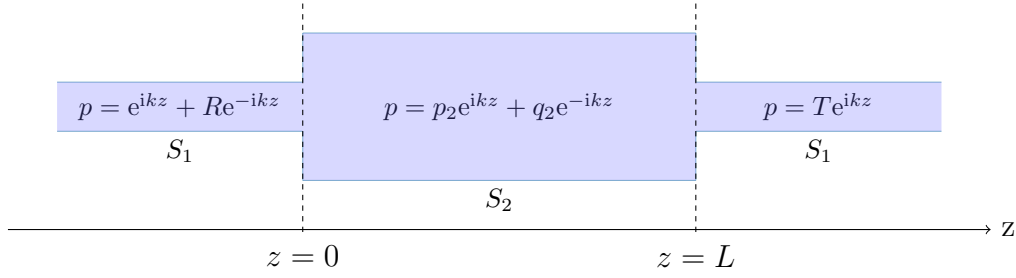


FIGURE 2.3 – Chambre d’expansion agissant comme un filtre en fréquence

2.4.2 Chambre d’expansion

Considérons maintenant un cas un peu plus complexe et très important dans les applications. Il s’agit de la chambre d’expansion représentée sur la figure 2.3.

C’est sur ce dispositif que repose en partie le fonctionnement d’un pot d’échappement.

De même que dans la section 2.4.1, écrivons la continuité de p et du flux aux interfaces :

$$\begin{cases} 1 + R = p_2 + q_2 \\ p_2 e^{ikL} + q_2 e^{-ikL} = T e^{ikL} \\ ikS_1(1 - R) = ikS_2(p_2 - q_2) \\ ikS_2(p_2 e^{ikL} - q_2 e^{-ikL}) = ikS_1 T e^{ikL} \end{cases} \quad (2.29)$$

Le calcul fournit alors l’expression suivante de l’atténuation :

$$A(k) = \log \left(1 + \frac{1}{4} \left(m - \frac{1}{m} \right)^2 \sin^2(kL) \right) \quad (2.30)$$

L’expression (2.30) est à nouveau symétrique en m et $1/m$, mais présente une dépendance périodique en k : la chambre d’expansion agit comme un filtre en fréquence.

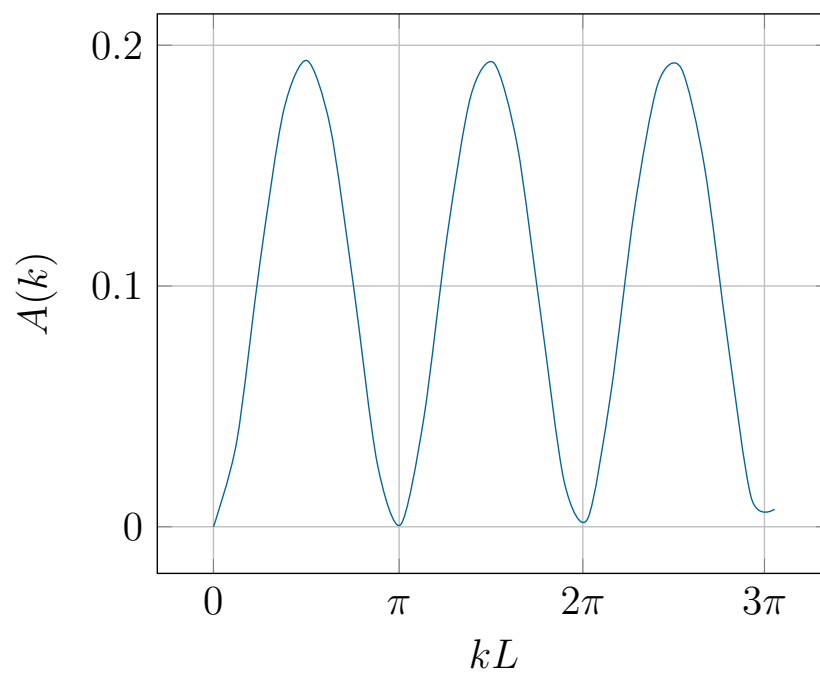


FIGURE 2.4 – Fonction d'atténuation associée à la chambre d'expansion de la figure 2.3, pour $m = 0.5$.

Chapitre 3

Les opérateurs DtN et le principe d'absorption limite

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu et étudié une formulation approchée pour modéliser la diffraction d'un mode propagatif par un défaut dans un guide d'onde. Cette méthode n'était valable qu'en régime monomode, et donc à basse fréquence. Nous nous intéressons maintenant au cas général, lorsque plusieurs modes peuvent se propager dans le guide. Tout comme dans le chapitre précédent, le problème de diffraction est posé dans un domaine non-borné, et nous allons en écrire une formulation posée dans un domaine borné. L'objectif est alors de définir et de justifier une condition transparente exacte, dite de Dirichlet-to-Neumann (ou DtN), sur les frontières artificielles de ce domaine. L'un des outils que nous introduirons pour cela est le principe d'absorption limite, qui consiste à définir la solution du problème comme la limite des solutions de problèmes dissipatifs bien posés, lorsque la dissipation tend vers 0. Nous verrons au chapitre suivant que la formulation avec DtN permet de résoudre le problème de diffraction par une méthode d'éléments finis.

3.1 La nécessité d'une condition de rayonnement

Pour fixer les idées, on considère un problème posé dans un guide acoustique semi-infini tridimensionnel de section transverse S , qui est localement perturbé. On suppose que la perturbation est localisée dans le demi-espace $z < 0$ comme sur la figure ci-dessous. De plus, au lieu de considérer la diffraction produite par une onde incidente, nous considérons le rayonnement produit par une source agissant sur la frontière gauche du domaine. Mais comme on l'a vu dans le paragraphe 2.3.1, on peut aisément transformer un problème de diffraction en un problème de rayonnement et ce n'est donc aucunement

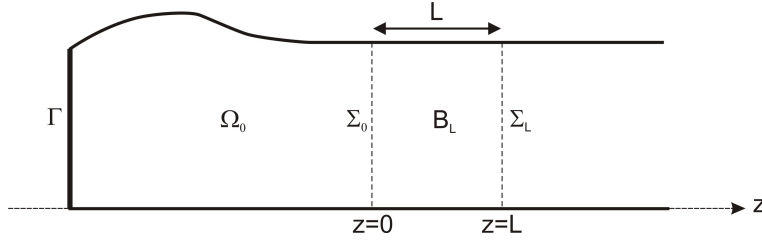


FIGURE 3.1 – La géométrie

une restriction. Nous nous intéressons donc à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.1)$$

où g est une fonction donnée de $L^2(\Gamma)$.

La difficulté est que tel quel, ce problème est mal posé. On s'en convainc aisément en considérant le cas particulier d'un demi-guide droit de la forme $\Omega = S \times \mathbb{R}^+$ avec $\Gamma = S \times 0$. En effet, dans ce cas, comme on l'a vu dans le paragraphe 2.2.1, une solution p est nécessairement de la forme :

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^+ e^{i\beta_n z} + A_n^- e^{-i\beta_n z}) \varphi_n(x, y)$$

où l'on rappelle que $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ est une base Hilbertienne de $L^2(S)$ formée des fonctions propres de l'opérateur Laplacien avec condition de Neumann homogène au bord, les valeurs propres associées λ_n étant rangées par ordre croissant :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \text{dans } S, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \lambda_n} & \text{si } \lambda_n < k, \\ i\sqrt{\lambda_n - k^2} & \text{si } \lambda_n > k, \\ 0 & \text{si } \lambda_n = k. \end{cases} \quad (3.3)$$

En admettant que l'on peut dériver la série, on en déduit que :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu}(x, y, 0) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, y, 0) = -\sum_{n=0}^{\infty} i\beta_n (A_n^+ - A_n^-) \varphi_n(x, y)$$

car ν désigne la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω .

Il reste à imposer la condition aux limites. Comme les (φ_n) forment une base Hilbertienne de $L^2(S)$, on a :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = g \text{ sur } \Gamma \iff (g, \varphi_n)_{L^2(\Gamma)} = -i\beta_n (A_n^+ - A_n^-), \forall n \in \mathbb{N}.$$

A ce stade, on se trouve confronté au fait que le problème (3.1) est clairement mal posé :

1. Si l'un des β_n est nul, on voit que le problème ne peut avoir de solution que si $(g, \varphi_n)_{L^2(\Gamma)} = 0$. Autrement dit, si ω est une fréquence de coupure, il n'existe pas de solution pour toute donnée g . C'est pourquoi dans la suite nous supposons que ω n'est pas une fréquence de coupure.
2. Par ailleurs, il est clair que pour chaque entier n , nous n'avons qu'une équation pour deux inconnues A_n^+ et A_n^- . Il existe donc une infinité de solutions. Ceci vient du fait que nous n'avons rien imposé à la solution à l'infini.

On pourrait espérer rétablir l'unicité de la solution en imposant à la solution p d'appartenir à un espace fonctionnel bien choisi, par exemple $H^1(\Omega)$. Malheureusement, cela n'est pas la bonne démarche pour notre problème. En effet, une telle condition imposerait $A_n^+ = A_n^- = 0$ pour tout les modes propagatifs ($\lambda_n < k$), ce qui n'est possible que si pour ces indices n , $(g, \varphi_n)_{L^2(\Gamma)} = 0$. A nouveau, on perdrait l'existence de la solution pour certaines données.

En fait, la solution du problème qui est pertinente du point de vue physique est celle pour laquelle $A_n^- = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, et qui s'écrit donc :

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^+ e^{i\beta_n z} \varphi_n(x, y) \quad (3.4)$$

avec

$$A_n^+ = -\frac{1}{i\beta_n} (g, \varphi_n)_{L^2(\Gamma)}.$$

En effet, on a vu à la fin du chapitre 1 que les modes + transportent de l'énergie vers les $z > 0$ contrairement aux modes -. Pour le problème que nous considérons, l'énergie est produite par le terme source g et ne peut que se propager vers l'infini, c'est à dire vers la droite.

Le fait d'imposer à la solution d'être de la forme (3.4) dans la zone non perturbée du guide est ce qu'on appelle *une condition de rayonnement*. Une solution de cette forme est dite *sortante*. On espère donc pour voir montrer le caractère bien posé du problème (3.1) à condition

- que ω ne soit pas une fréquence de coupure,
- que l'on impose à la solution d'être sortante.

On va partiellement attendre cet objectif dans la suite de ce chapitre.

3.2 Le problème dissipatif

En fait, la difficulté que nous avons décrite dans la section précédente résulte du fait que l'on considère un modèle *non dissipatif*. En effet, lorsque l'on parle de *régime périodique établi*, cela signifie que la source (représentée par la fonction g dans le problème (3.1)) émet des ondes en permanence. Comme ces ondes se propagent indéfiniment dans le guide et qu'elles ne sont pas dissipées, on comprend que la solution du régime périodique établi soit d'énergie infinie (c'est-à-dire qu'elle ne soit pas dans $H^1(\Omega)$). Si l'on prenait en compte les mécanismes de dissipation d'énergie (frottement, dissipation thermique, etc...) qui sont toujours présents dans la réalité physique, les ondes produites par la source seraient dissipées au cours de leur propagation, et l'on pourrait s'attendre à trouver une solution d'énergie finie pour le régime établi. C'est ce que nous allons vérifier maintenant.

3.2.1 Prise en compte de la dissipation

Un modèle simple comportant un mécanisme de dissipation est obtenu en remplaçant (1.1) par le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - c^2 \Delta \mathbf{p} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

où η est un paramètre positif. En multipliant l'équation par $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$ et en intégrant sur le domaine Ω , on obtient l'égalité

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \eta \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right)^2 - c^2 \Delta \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = 0$$

qui conduit, après intégration par parties et utilisation de la condition aux limites, au résultat suivant :

Lemme 3.1 *Soit \mathbf{p} une solution de (3.5). Alors on a l'identité d'énergie suivante :*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\eta \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right)^2$$

où l'énergie $E(t)$ à l'instant t est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right|^2 + c^2 |\nabla \mathbf{p}|^2 \right).$$

On voit donc que si $\eta > 0$, l'énergie va décroître au cours du temps. Il s'agit donc bien d'un phénomène de dissipation. Si l'on s'intéresse au régime périodique établi,

$\mathbf{p}(x, y, t) = \Re e (p(x, y)e^{-i\omega t})$, on vérifie que p doit être solution de l'équation suivante :

$$\Delta p + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\eta \right) p = 0$$

Autrement dit, on retrouve une équation de Helmholtz, comme dans le cas non dissipatif, à ceci près que le nombre d'onde k n'est plus un nombre réel, mais admet une partie imaginaire positive. Comme nous nous intéressons à des phénomènes faiblement dissipatifs (η petit), nous écrirons dans la suite le problème dissipatif sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta p + k_\varepsilon^2 p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.6)$$

où

$$k_\varepsilon = k + i\varepsilon$$

avec ε un nombre réel positif destiné à tendre vers 0.

3.2.2 Caractère bien posé du problème dissipatif

Nous allons vérifier que, comme on l'avait prévu, le problème dissipatif a une solution d'énergie finie. En effet, il admet la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} p \in H^1(\Omega), \forall q \in H^1(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k_\varepsilon^2 \int_\Omega p \bar{q} = \int_\Gamma g \bar{q} d\gamma, \end{cases} \quad (3.7)$$

et on a le résultat de coercivité suivant :

Proposition 3.2 $\forall v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\left| \int_\Omega |\nabla v|^2 - k_\varepsilon^2 \int_\Omega |v|^2 \right| \geq C\varepsilon |k_\varepsilon| \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que :

$$\Im m \left(\frac{1}{k_\varepsilon} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 - k_\varepsilon^2 \int_\Omega |v|^2 \right) \right) = -\varepsilon \left(\frac{1}{|k_\varepsilon|^2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |v|^2 \right)$$

et comme $|z| \geq |\Im m(z)|$, on obtient :

$$\left| \frac{1}{k_\varepsilon} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 - k_\varepsilon^2 \int_\Omega |v|^2 \right) \right| \geq \varepsilon \left(\frac{1}{|k_\varepsilon|^2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |v|^2 \right) \geq C\varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

où

$$C = \min \left(\frac{1}{|k_\varepsilon|^2}, 1 \right)$$

qui conduit au résultat. □

Ce résultat montre, en vertu du théorème de Lax-Milgram, que le problème (3.7) est bien posé.

Théorème 3.3 *Si $\varepsilon > 0$, alors le problème (3.6) admet une unique solution $p_\varepsilon \in H^1(\Omega)$.*

3.2.3 L'idée du principe d'absorption limite

Résumons ce que nous avons vu jusqu'à maintenant.

Le problème (3.1) non dissipatif (c'est à dire avec une nombre d'onde k réel) n'est pas bien posé dans $H^1(\Omega)$. En revanche, dès que l'on ajoute à k une petite partie imaginaire ε (qui peut rendre compte des phénomènes de dissipation présents dans la réalité), le problème devient bien posé dans $H^1(\Omega)$. L'idée du principe d'absorption limite est de montrer que la solution p_ε du problème dissipatif admet une limite p lorsque ε tend vers 0. C'est cette limite p que l'on considère comme étant la solution physique pertinente du problème non dissipatif. On peut ensuite vérifier que cette solution est bien caractérisée par une condition d'ondes sortante appropriée.

Comme p n'est pas dans $L^2(\Omega)$, on ne peut pas travailler avec des égalités variationnelles écrites sur tout Ω . L'idée est donc d'écrire une formulation du problème dissipatif en domaine borné, pour pouvoir ensuite passer à la limite en ε . C'est l'objet de la section suivante.

3.3 Opérateur DtN pour le problème dissipatif

Pour écrire une formulation du problème dissipatif en domaine borné, nous allons exploiter la connaissance des modes associés à ce problème. C'est pourquoi nous consacrons le paragraphe suivant à leur calcul.

3.3.1 Modes du guide dissipatif

On considère donc un guide parfaitement cylindrique de section S dans lequel la propagation est modélisée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta p + k_\varepsilon^2 p = 0 & \text{dans } S \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial S \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Comme on l'a vu dans le premier chapitre, les modes sont les solutions de la forme :

$$p(x, y, z) = \varphi(x, y)e^{\pm i\beta z}$$

avec $\beta \in \mathbb{C}$. Le champ transverse φ doit donc vérifier

$$\begin{cases} \Delta\varphi + (k_\varepsilon^2 - \beta^2)\varphi = 0 & \text{dans } S, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases}$$

En utilisant le spectre du Laplacien dans S avec condition de Neumann (cf. 5.2), on trouve donc deux familles de modes définies comme suit :

$$\begin{cases} p_{n,\varepsilon}^+(x, y, z) = \varphi_n(x, y)e^{i\beta_{n,\varepsilon}z} \\ p_{n,\varepsilon}^-(x, y, z) = \varphi_n(x, y)e^{-i\beta_{n,\varepsilon}z} \end{cases} \quad (3.9)$$

où

$$\beta_{n,\varepsilon} = i\sqrt{\lambda_n - k_\varepsilon^2}$$

avec comme détermination de la racine celle qui assure $\Re(\sqrt{z}) \geq 0$ pour tout z . Cette racine admet une *coupure* sur \mathbb{R}^- (c'est-à-dire une discontinuité) qui jouera un rôle important dans la suite. Avec ce choix, comme $\Im(\lambda_n - k_\varepsilon^2) = -2ik\varepsilon$, on a $\Im(\sqrt{\lambda_n - k_\varepsilon^2}) < 0$ et $\Re(\sqrt{\lambda_n - k_\varepsilon^2}) > 0$ de sorte que tous les modes ont un comportement exponentiel et oscillant en $\pm\infty$.

Plus précisément, $\Im(\beta_{n,\varepsilon}) > 0$ de sorte que $p_{n,\varepsilon}^+$ est exponentiellement décroissant en $+\infty$ alors que $p_{n,\varepsilon}^-$ est exponentiellement croissant en $+\infty$.

On retient en particulier que contrairement au cas non dissipatif, il n'existe pas de mode purement propagatif dans une guide dissipatif. Tous les modes sont évanescents. Ceci est cohérent avec le fait que la solution du problème dissipatif est d'énergie finie. Elle va donc pouvoir être représentée comme une superposition de modes évanescents.

3.3.2 Représentation modale de la solution du problème dissipatif

On introduit le domaine extérieur $\tilde{\Omega}_L = S \times]L, +\infty[$ de bord $\Sigma_L = S \times \{L\}$. On a la représentation en série suivante de la solution du problème dissipatif dans le domaine $\tilde{\Omega}_L$:

Lemme 3.4 *Si $\varepsilon > 0$, alors la solution p_ε du problème (3.6) est donnée pour $z \geq L$ par :*

$$p_\varepsilon(x, y, z) = \sum_{n \geq 0} (p_\varepsilon, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} e^{i\beta_{n,\varepsilon}(z-L)} \varphi_n(x, y)$$

où la série est convergente dans $H^1(\tilde{\Omega}_L)$.

DÉMONSTRATION. On pose $\alpha_n = (p_\varepsilon, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}$ et

$$p_\varepsilon^N(x, y) = \sum_{n=0}^{n=N} \alpha_n e^{i\beta_{n,\varepsilon}(z-L)} \varphi_n(x, y).$$

On a en vertu de l'orthonormalité de la base $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ dans $L^2(S)$ et de l'expression des $\beta_{n,\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon^M - p_\varepsilon^N\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{m=M}^{m=N} \sum_{n=M}^{n=N} \alpha_n \overline{\alpha_m} \int_{\tilde{\Omega}_L} e^{i\beta_{n,\varepsilon}(z-L)} e^{-i\overline{\beta_{m,\varepsilon}}(z-L)} \varphi_m(y) \varphi_n(y) d\Omega \\ &= \sum_{m=M}^{m=N} \sum_{n=M}^{n=N} g_n \overline{g_m} \int_0^h \varphi_m(y) \varphi_n(y) dy \int_L^{+\infty} e^{i(\beta_{n,\varepsilon} - \overline{\beta_{m,\varepsilon}})(z-L)} dx \\ &= \sum_{n=M}^{n=N} |\alpha_n|^2 \int_L^{+\infty} e^{i(\beta_{n,\varepsilon} - \overline{\beta_{n,\varepsilon}})(z-L)} dx = \sum_{n=M}^{n=N} |\alpha_n|^2 \int_L^{+\infty} e^{-2\Im m(\beta_{n,\varepsilon})(z-L)} dx \\ &= \sum_{n=M}^{n=N} \frac{|\alpha_n|^2}{2\Im m(\beta_{n,\varepsilon})} \end{aligned}$$

En outre, comme $\Im m(\beta_{n,\varepsilon}) \geq C$ avec C indépendant de n et que $\sum_{n=0}^{n=N} |\alpha_n|^2$ converge vers $\|p_\varepsilon\|_{L^2(\Sigma_L)}^2$ car $p_\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_L)$, on en déduit que la suite p_ε^N est de Cauchy dans $L^2(\tilde{\Omega}_L)$, donc convergente.

On procède de la même façon pour montrer que ∇p_ε^N converge dans $L^2(\tilde{\Omega}_L)$. On a :

$$\begin{aligned} \|\nabla p_\varepsilon^M - \nabla p_\varepsilon^N\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=M}^{n=N} \frac{|\alpha_n|^2}{2\Im m(\beta_{n,\varepsilon})} [|\beta_{n,\varepsilon}|^2 + \lambda_n] \\ &\leq C \sum_{n=M}^{n=N} \sqrt{\lambda_n} |\alpha_n|^2 \quad (\text{car } \Im m(\beta_{n,\varepsilon}) \sim \sqrt{\lambda_n}). \end{aligned}$$

La dernière série est convergente car $p_\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_0)$.

Enfin, il est clair que $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{i\beta_{n,\varepsilon}(z-L)} \varphi_n(y)$, comme combinaison de modes, est solution des équations sur $\tilde{\Omega}_L$. □

La question de l'existence d'une limite à la suite (p_ε) , solution éventuelle du problème non dissipatif, n'est pas si facile. En effet, d'une part, il faut, trouver l'espace dans lequel on veut faire le passage à la limite et, d'autre part, on ne dispose pas de formulation variationnelle lorsque $\varepsilon = 0$. Comme la limite n'appartient pas $H^1(\Omega)$ à cause du comportement non décroissant de la limite à l'infini, nous allons démontrer une convergence locale en espace, c'est-à-dire dans $H_{loc}^1(\Omega)$. Pour atteindre cet objectif, nous allons tout d'abord établir que le problème (P_ε) est équivalent à un problème posé en domaine *borné* faisant intervenir un opérateur de couplage spectral prenant en compte le comportement à l'infini des solutions. Ensuite, nous ferons tendre ε vers 0 afin d'obtenir un problème limite dont la solution sera la limite des solutions p_ε .

3.3.3 Réduction à un domaine borné

Soit $\varepsilon > 0$, et soit p_ε la solution du problème (3.6). D'après le lemme 3.4, p_ε vérifie la condition aux limites suivantes sur Σ_L :

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial z} = \sum_{n \geq 0} i\beta_{n,\varepsilon} (p_\varepsilon, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n.$$

On voit que cette condition relie les données de Dirichlet p_ε et de Neumann $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial z}$ de la solution sur la frontière Σ_L . C'est pourquoi on parle de *condition Dirichlet-to-Neumann*, ou *DtN*.

Remarque 3.5 *C'est une condition inhabituelle puisqu'elle n'est pas locale : en effet, elle ne relie pas ces données en un même point de la frontière. Elle relie la donnée de Neumann en un point aux valeurs de la donnée de Dirichlet en tous les points de la frontière. Nous verrons que ce caractère non-local aura un coût sur le plan numérique.*

Ceci nous conduit à introduire un opérateur T_ε , dit de *Dirichlet-to-Neumann*, qui transforme une fonction définie sur Σ_L (ou de manière équivalente sur la section S) en une autre fonction (ou distribution) définie elle aussi sur Σ_L :

$$\forall f \in H^{\frac{1}{2}}(S) \quad T_\varepsilon f = \sum_{n \geq 0} i\beta_{n,\varepsilon} (f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n. \quad (3.10)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.6 *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, l'opérateur T_ε est un opérateur linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(S)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(S)$.*

DÉMONSTRATION. La linéarité est triviale. La continuité découle d'un résultat théorique général de régularité et de continuité de la trace, mais on peut en fournir une démonstration simple ici. En effet, compte-tenu de l'expression de $T_\varepsilon f$ on a :

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(S)}^2 &= \sum_{n \geq 0} (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \left| (T_\varepsilon f, \varphi_n)_{L^2(S)} \right|^2 \\ &= \sum_{n \geq 0} (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |\beta_{n,\varepsilon}^+|^2 \left| (f, \varphi_n)_{L^2(S)} \right|^2 \\ &= \sum_{n \geq 0} (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |k^2 - \lambda_n - \varepsilon^2 + 2ik\varepsilon| \left| (f, \varphi_n)_{L^2(S)} \right|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \frac{|k^2 - \lambda_n - \varepsilon^2 + 2ik\varepsilon|}{1 + \lambda_n} (1 + \lambda_n)^{\frac{1}{2}} \left| (f, \varphi_n)_{L^2(S)} \right|^2 \\ &\leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(S)}^2, \end{aligned}$$

où

$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|k^2 - \lambda_n - \varepsilon^2 + 2ik\varepsilon|}{1 + \lambda_n}.$$

□

Comme p_ε vérifie sur Σ_L la relation $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}} = T_\varepsilon p_\varepsilon$, il paraît naturel d'introduire le problème suivant posé sur le domaine borné Ω_L :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k_\varepsilon^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus (\Gamma \cup \Sigma_L), \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = T_\varepsilon p & \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Il reste à démontrer que ce problème admet une unique solution qui est bien la restriction à Ω_L de la solution p_ε du problème dissipatif. On énonce le

Théorème 3.7 *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (3.11) admet une unique solution qui est égale à $p_\varepsilon|_{\Omega_L}$, où p_ε l'unique solution du problème (3.6). Par ailleurs, si p_ε^L est solution de (3.11), alors la fonction*

$$p_\varepsilon = \begin{cases} p_\varepsilon^L & \text{sur } \Omega_L \\ \sum_{n \geq 0} (p_\varepsilon^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} e^{i\beta_{n,\varepsilon}(z-L)} \varphi_n(x, y) & \text{sur } \tilde{\Omega}_L \end{cases} \quad (3.12)$$

est la solution de (3.6).

DÉMONSTRATION. Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.11), il suffit de montrer que la forme bilinéaire

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_L} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k_\varepsilon^2 \int_{\Omega_L} u \bar{v} - \langle T_\varepsilon u, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L}$$

est coercive sur $H^1(\Omega_L)$. Or on a :

$$a_\varepsilon(v, v) = \int_{\Omega_L} |\nabla v|^2 d\Omega - k_\varepsilon^2 \int_{\Omega_L} |v|^2 - \sum_{n \geq 0} i\beta_{n,\varepsilon} \left| (v, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \right|^2$$

qui conduit à :

$$\Im m \left(\frac{1}{k_\varepsilon} a_\varepsilon(v, v) \right) = -\frac{\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} \int_{\Omega_L} |\nabla v|^2 d\Omega - \varepsilon \int_{\Omega_L} |v|^2 - \sum_{n \geq 0} \Im m \left(\frac{i\beta_{n,\varepsilon}}{k_\varepsilon} \right) \left| (v, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \right|^2.$$

Comme

$$\Im m \left(\frac{i\beta_{n,\varepsilon}}{k_\varepsilon} \right) = \Im m \left(\frac{i\beta_{n,\varepsilon}\bar{k}_\varepsilon}{|k_\varepsilon|^2} \right) = \frac{k\Re(\beta_{n,\varepsilon}) + \varepsilon\Im m(\beta_{n,\varepsilon})}{|k_\varepsilon|^2}$$

on en déduit la coercivité de $a(.,.)$ car $\Re(\beta_{n,\varepsilon}) > 0$ et $\Im m(\beta_{n,\varepsilon}) > 0$.

Maintenant, si p_ε^L est bien solution de (3.11), alors p_ε définie par (3.12) est solution de (3.6). En particulier, p_ε se raccorde en valeur et en dérivée normale sur Σ_L . \square

On a établi une formulation en domaine borné équivalente à celle en domaine non borné pour le problème dissipatif. Nous allons maintenant passer à la limite dans cette formulation lorsque ε tend vers 0.

3.4 Limite des constantes de propagation

Notre objectif est de passer à la limite quand ε tend vers 0 dans le problème (3.11). Comme ε n'apparaît que dans l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann T_ε , c'est à ce dernier que nous allons nous intéresser. Enfin, dans la définition (3.10) de T_ε , on voit que ε n'apparaît que dans les constantes de propagation $\beta_{n,\varepsilon}$. Nous commençons donc par étudier les limites de ces dernières.

Il faut distinguer deux cas :

- Le cas où $k^2 < \lambda_n$ (modes évanescents).

C'est le cas le plus simple. En effet, on a :

$$\lambda_n - k_\varepsilon^2 = (\lambda_n - k^2 + \varepsilon^2) - 2i\varepsilon k,$$

qui tend quand ε tend vers 0 vers $\lambda_n - k^2$. Comme $\lambda_n - k^2 \in \mathbb{R}^+$, c'est un nombre qui n'est pas situé sur la coupure de la racine carrée telle que nous l'avons définie dans le paragraphe 3.3.1. Il n'y a donc aucune ambiguïté sur la définition de sa racine carrée et l'on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_{n,\varepsilon} = i\sqrt{\lambda_n - k^2}$$

- Le cas où $k^2 > \lambda_n$ (modes propagatifs).

C'est le cas délicat. En effet, on a : $\lambda_n - k_\varepsilon^2$ qui tend quand ε tend vers 0 vers $\lambda_n - k^2$, nombre réel négatif qui est situé sur la coupure de la racine carrée. Pour déterminer la limite, il faut regarder plus précisément de quel côté de la coupure on arrive. Comme $\Im m(\lambda_n - k_\varepsilon^2) < 0$, on peut affirmer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\lambda_n - k_\varepsilon^2} = -i\sqrt{k^2 - \lambda_n}$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_{n,\varepsilon} = \sqrt{k^2 - \lambda_n}.$$

En conclusion, on trouve que dans les deux cas :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_{n,\varepsilon} = \beta_n$$

où les β_n sont les modes du guide non dissipatif (cf. 3.3). Par conséquent, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{n,\varepsilon}^{\pm} = p_n^{\pm}.$$

Autrement dit, les modes qui se propagent vers la droite (resp. gauche) dans le guide non dissipatif sont la limite quand ε tend vers 0 des modes qui décroissent en $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans le guide dissipatif. L'intérêt de ce résultat est qu'il est plus facile de manipuler des modes évanescents que des modes propagatifs, dont le sens de propagation n'est pas toujours facile à déterminer.

3.5 Le problème limite

D'après ce que nous venons de voir, l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann du problème dissipatif :

$$T_{\varepsilon} f = \sum_{n \geq 0} i \beta_{n,\varepsilon} (f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n$$

a pour limite formelle l'opérateur :

$$T f = \sum_{n \geq 0} i \beta_n (f, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n$$

qui définit toujours un opérateur linéaire continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_L)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_L)$ (voir la proposition 2.2). Ceci conduit à définir le problème limite suivant :

$$\begin{cases} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 \int_{\Omega_L} u \bar{v} - \langle T u, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma, \end{cases} \quad (3.13)$$

qui est la formulation variationnelle du problème

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus (\Gamma \cup \Sigma_L), \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = T p & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (3.14)$$

La dernière condition apparaissant dans le système d'équation (3.14) est une condition de rayonnement à l'infini. Elle exprime le fait que la décomposition modale de la solution à l'infini est constituée des modes exponentiellement décroissants à l'infini et des modes propagatifs *sortants*.

Remarque 3.8 Dans le cas basse fréquence où $0 < k < \lambda_1$, la condition de rayonnement prend la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = ik (p, \varphi_0)_{L^2(\Sigma_L)} + \sum_{n \geq 1} i\beta_n (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n$$

où φ_0 est une fonction constante sur la section. On peut noter qu'elle diffère de la condition approchée

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = ikp$$

adoptée au chapitre 2. Cependant, on pourra déduire des résultats du chapitre suivant que cette seconde condition est bien une approximation de la condition exacte lorsque L tend vers l'infini. En effet, dans ce cas, la contributions des modes évanescents devient négligeable, d'où la disparition de la série, et p devient constant, d'où le remplacement de (p, φ_0) par p .

La forme bilinéaire associée à ce problème est la suivante :

$$a(u, v) = \int_{\Omega_L} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 \int_{\Omega_L} u \bar{v} - \langle Tu, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L}$$

Contrairement au cas dissipatif, elle n'est plus coercive sur $H^1(\Omega_L)$. Le bon cadre pour étudier le problème (3.14) est celui de l'alternative de Fredholm, que nous avons déjà utilisée au chapitre 2 pour l'étude du problème (2.19).

On s'appuie sur la propriété immédiate suivante :

Lemme 3.9 Pour tout $v \in H^1(\Omega_L)$:

$$\Re \langle Tv, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L} = - \sum_{\lambda_n > k^2} \sqrt{\lambda_n - k^2} \left| (v, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \right|^2.$$

Posons maintenant

$$\tilde{a}(u, v) = \int_{\Omega_L} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + u \bar{v}) - \langle Tu, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L}$$

Il est clair d'après le lemme précédent que $\tilde{a}(u, v)$ est coercive sur $H^1(\Omega_L)$. On définit alors l'opérateur K comme suit :

$$(Kp, q)_{H^1(\Omega_L)} = \int_{\Omega_L} p \bar{q}$$

et on montre, exactement comme dans le paragraphe 2.3.4, que K est un opérateur compact de $H^1(\Omega_L)$. On en déduit finalement le

Théorème 3.10 Le problème (3.14) relève de l'alternative de Fredholm.

Pour conclure que (3.14) est bien posé, il nous faudrait un résultat d'unicité. Or ceci n'est plus aussi simple que pour le modèle approché du chapitre 2, qui était toujours bien posé. Concernant le problème (3.14), le résultat que nous admettons ici est le suivant :

Théorème 3.11 *Mis à part pour un ensemble dénombrable de fréquence k , le problème (3.14) admet une unique solution notée p^L . En posant :*

$$p(x, y, z) = \begin{cases} p^L(x, y, z) & \text{si } z < L, \\ \sum_{n \geq 0} (p^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} e^{i\beta_n(z-L)} \varphi_n(y) & \text{si } z > L, \end{cases}$$

on obtient une fonction p définie sur Ω qui vérifie

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = Tu & \text{sur } \Sigma_z, \forall z \geq L. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.6 Preuve du théorème d'absorption limite

Pour achever la démarche, il reste maintenant à démontrer que la suite (p_ε^L) des solutions du problèmes (3.11) converge vers p^L lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui montre la convergence locale de la solution p_ε du problème (3.6) vers la solution p du problème (3.15).

Théorème 3.12 *On suppose que le problème (3.14) admet une unique solution p^L . Alors on a*

$$p_\varepsilon^L \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} p^L \text{ dans } H^1(\Omega_L).$$

DÉMONSTRATION. On procède en trois étapes.

◆ Supposons que la suite p_ε^L soit bornée dans $H^1(\Omega_L)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega_L)$ vers w^L . On a alors $\forall q \in H^1(\Omega_L)$:

$$\int_{\Omega_L} \nabla p_\varepsilon^L \cdot \nabla \bar{q} - k^2 \int_{\Omega_L} p_\varepsilon^L \bar{q} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_L} \nabla w^L \cdot \nabla \bar{q} - k^2 \int_{\Omega_L} w^L \bar{q}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\langle T_\varepsilon p_\varepsilon^L, \bar{q} \rangle_{\Sigma_L} = \langle T w^L, \bar{q} \rangle_{\Sigma_L} + \langle (T_\varepsilon - T) p_\varepsilon^L, \bar{q} \rangle_{\Sigma_L} + \langle T (p_\varepsilon^L - w^L), \bar{q} \rangle_{\Sigma_L}.$$

Il est clair (continuité de T) que $\langle T(p_\varepsilon^L - w^L), \bar{q} \rangle_{\Sigma_L} \rightarrow 0$. On récrit l'autre terme comme suit :

$$\begin{aligned} \langle (T_\varepsilon - T)p_\varepsilon^L, \bar{q} \rangle_{\Sigma_L} &= \sum_{n=0}^{n=M} i(\beta_{n,\varepsilon} - \beta_n) (p_\varepsilon^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \\ &+ \sum_{n>M} i(\beta_{n,\varepsilon} - \beta_n) (p_\varepsilon^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \end{aligned}$$

Pour M fixé, la première somme tend vers 0 car $\beta_{n,\varepsilon} \rightarrow \beta_n$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour l'autre série, en remarquant que pour $\lambda_n > k^2$, on a l'estimation :

$$|\beta_{n,\varepsilon} - \beta_n| \leq \frac{\varepsilon(2k + \varepsilon)}{\sqrt{\lambda_n - k^2}},$$

on déduit que si $\lambda_M > k^2$:

$$\left| \sum_{n>M} i(\beta_{n,\varepsilon} - \beta_n) (p_\varepsilon^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \right| \leq \frac{\varepsilon(2k + \varepsilon)}{\sqrt{\lambda_M - k^2}} \|p_\varepsilon^L\|_{L^2(\Sigma_L)} \|q\|_{L^2(\Sigma_L)}.$$

Ceci montre que cette série tend également vers 0 avec ε . Par conséquent, on a montré que w^L est une solution du problème limite (3.13).

◆ Nous allons montrer maintenant que p_ε^L converge fortement dans $H^1(\Omega_L)$ vers w^L . On pose $e_\varepsilon = p_\varepsilon^L - w^L \in H^1(\Omega_L)$. Par différence des problèmes dont p_ε^L et w^L sont solutions, on a pour tout $v \in H^1(\Omega_L)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \nabla e_\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} - k^2 \int_{\Omega_L} e_\varepsilon \bar{v} - (k_\varepsilon^2 - k^2) \int_{\Omega_L} u_\varepsilon^L \bar{v} \\ - \langle T_\varepsilon e_\varepsilon, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L} - \langle (T_\varepsilon - T)w^L, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L} = 0 \end{aligned}$$

En choisissant $v = e_\varepsilon$ et comme e_ε tend faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega_L)$ et fortement vers 0 dans $L^2(\Omega_L)$ (injection compacte) on obtient :

$$\int_{\Omega_L} |\nabla e_\varepsilon|^2 - \langle T_\varepsilon e_\varepsilon, \bar{e}_\varepsilon \rangle_{\Sigma_L} \rightarrow 0.$$

Mais comme $\Re \langle T_\varepsilon v, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L} \leq 0$ (lemme 2.1), on en déduit que $\int_{\Omega_L} |\nabla e_\varepsilon|^2 \rightarrow 0$.

◆ Il ne reste plus qu'à montrer que la suite p_ε^L est bien bornée dans $H^1(\Omega_L)$. Si ce n'est pas le cas, on a :

$$\|p_\varepsilon^L\|_{H^1(\Omega_L)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty.$$

La suite définie par :

$$\tilde{p}_\varepsilon^L = \frac{p_\varepsilon^L}{\|p_\varepsilon^L\|_{H^1(\Omega_L)}}$$

est bornée dans $H^1(\Omega_L)$ (de norme 1) et \tilde{p}_ε^L est la solution du problème (3.14) en remplaçant la donnée g par la donnée

$$g_\varepsilon = \frac{g}{\|\tilde{p}_\varepsilon^L\|_{H^1(\Omega_L)}}.$$

En reprenant presque à l'identique ce qui vient d'être fait, on obtient :

$$\tilde{p}_\varepsilon^L \rightarrow \tilde{p}^L \text{ dans } H^1(\Omega_L)$$

avec \tilde{p}^L solution du problème limite (3.14) avec pour donnée $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon = 0$. Par conséquent, si k n'est pas une valeur singulière, $\tilde{p}^L = 0$ ce qui contredit le fait que $\|\tilde{p}_\varepsilon^L\|_{H^1(\Omega_L)} = 1$ \square

Ce résultat achève la démarche de l'absorption limite que l'on résume par ce schéma :

$$\begin{array}{ccccc} \exists! p_\varepsilon \text{ solution de } (P_\varepsilon) & \iff & \exists! p_\varepsilon^L \text{ solution de } & (P_\varepsilon^L) \\ \downarrow \text{cv locale} & & \downarrow & \varepsilon \rightarrow 0 & \downarrow \\ \exists! p \text{ solution de } (P) & \iff & \exists! p^L \text{ solution de } & (P^L) \end{array}$$

Chapitre 4

Résultats d'unicité

Nous avons montré dans le chapitre précédent que le problème de diffraction dans un guide d'ondes relève de l'alternative de Fredholm (cf. théorème 3.10). Pour savoir si le problème est bien posé, il suffit alors d'en étudier l'unicité. C'est l'objet de ce chapitre. Si nous consacrons un chapitre entier à cette question, c'est qu'elle a un intérêt particulier dans le cas des guides d'ondes. En effet, contrairement au cas de la diffraction dans l'espace libre pour lequel il y a toujours unicité, il est facile de trouver des guides d'ondes perturbés pour lesquels il n'y a pas unicité à certaines fréquences.

4.1 Lien entre la question d'unicité et l'existence de modes piégés

Supposons qu'il n'y ait pas unicité de la solution du problème (3.14). Cela signifie par linéarité qu'il existe une solution p non nulle au problème homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = Tp & \text{sur } \Sigma_z, \forall z \geq L. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

On a également vu que la restriction de p au domaine borné Ω_L (que nous noterons encore p) est solution du problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in H^1(\Omega_L), p \neq 0, \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 \int_{\Omega_L} p \bar{q} - \sum_{n \geq 0} i\beta_n(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}(\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = 0, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

On montre alors le résultat suivant :

Lemme 4.1 Soit $p \in H^1(\Omega_L)$ une solution du problème homogène (4.2). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n < k^2$, on a $(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = 0$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre $q = p$ puis de prendre la partie imaginaire de l'identité variationnelle. □

On en déduit le

Corollaire 4.2 Soit $p \in H^1(\Omega_L)$ une solution du problème homogène (4.2). Alors p se prolonge en une fonction \tilde{p} définie par :

$$\tilde{p} = \begin{cases} p & \text{dans } \Omega_L, \\ \sum_{\lambda_n \geq k^2} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} e^{-|\beta_n|z} \varphi_n(x, y) & \text{pour } z > L \end{cases}$$

qui vérifie :

$$\begin{cases} \tilde{p} \in H^1(\Omega) \\ \Delta \tilde{p} + k^2 \tilde{p} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Réciproquement, si \tilde{p} est solution de (4.3), alors sa restriction à Ω_L est solution de (4.2).

Ceci nous conduit à introduire la définition suivante :

Définition 4.3 Une solution \tilde{p} de (4.3) est appelée un mode piégé.

On parle de mode piégé car l'onde associée ne se propage pas dans le guide. Elle est piégée au voisinage de la perturbation et ne produit que des ondes évanescentes à l'infini.

Remarque 4.4 Tout se passe avec les modes piégés comme avec les modes propres d'un système borné. En particulier, si on excite un tel mode, il va continuer à vibrer éternellement (notre modèle ne contenant aucun mécanisme de dissipation). Et si on utilise une source acoustique pulsant à la fréquence du mode propre, on va pouvoir générer un phénomène résonant.

D'après ce que nous venons de voir, étudier l'unicité de la solution du problème (3.14) revient à étudier l'existence de modes piégés à la fréquence k . C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce chapitre.

4.2 Un résultat d'unicité

Il est difficile, étant donné un guide d'ondes perturbé de géométrie donnée, de démontrer l'absence de modes piégés (et donc le caractère bien-posé du problème de diffraction) à toute fréquence. Il existe néanmoins un résultat de ce type qui concerne le problème avec condition de Dirichlet. Il s'énonce comme suit :

Théorème 4.5 *Soit Ω un guide bidimensionnel perturbé de frontière régulière, qui coïncide avec $\mathbb{R} \times]0, h[$ en dehors d'un domaine borné. On suppose que la normale ν extérieure à $\partial\Omega$ vérifie la condition :*

$$x\nu_x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Alors il n'existe aucune solution $p \neq 0$ au problème suivant :

$$p \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta p + k^2 p = 0 \text{ dans } \Omega.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $p \in H_0^1(\Omega)$ soit solution de $\Delta p + k^2 p = 0$ dans Ω . Alors c'est le cas de ses parties réelle et imaginaire. On peut donc se contenter de considérer une fonction p à valeurs réelles (pour simplifier les écritures). Comme Ω est un domaine régulier et comme p décroît exponentiellement à l'infini, il est clair que $x \frac{\partial p}{\partial x} \in H^1(\Omega)$. On peut donc prendre cette fonction comme fonction test et exploiter l'identité

$$- \int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p) x \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Par intégration par parties en x , on obtient :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (|\nabla p|^2) - \int_{\partial\Omega} x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial \nu} = k^2 \int_{\Omega} x p \frac{\partial p}{\partial x}.$$

En intégrant à nouveau par parties en x , on montre que :

$$\int_{\Omega} \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (|\nabla p|^2) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla p|^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{x}{2} |\nabla p|^2 \nu_x$$

et de même, on montre que :

$$\int_{\Omega} x p \frac{\partial p}{\partial x} = - \int_{\Omega} x p \frac{\partial p}{\partial x} - \int_{\Omega} p^2 + \int_{\partial\Omega} x \nu_x p^2$$

d'où

$$\int_{\Omega} x p \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} p^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \nu_x p^2$$

En combinant, ce qui précède, on a donc établi l'identité suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) + I(\partial\Omega) = k^2 \left(-\frac{1}{2} \int_{\Omega} p^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \nu_x p^2 \right) \quad (4.5)$$

où

$$I(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{x}{2} |\nabla p|^2 \nu_x - x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}}.$$

Comme on sait aussi que

$$\int_{\Omega} |\nabla p|^2 = k^2 \int_{\Omega} p^2,$$

(4.5) devient

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + I(\partial\Omega) = \frac{k^2}{2} \int_{\partial\Omega} x \nu_x p^2 \quad (4.6)$$

On remarque que grâce à la condition de Dirichlet, le terme de droite de (4.6) est nul. On va conclure que p est nécessairement nul en montrant, grâce à la condition de Dirichlet et à la condition géométrique, que $I(\partial\Omega) \geq 0$. En effet, comme $p = 0$ sur $\partial\Omega$, il en est de même de $\nabla p \wedge \boldsymbol{\nu}$, d'où

$$\frac{\partial p}{\partial x} \nu_y = \frac{\partial p}{\partial y} \nu_x.$$

Il en résulte que :

$$I(\partial\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x \nu_x |\nabla p|^2$$

qui est bien positif. □

On a représenté sur la figure 4.2 trois exemples de guides d'ondes pour illustrer ce théorème.

4.3 Le résultat général

Pour le guide acoustique avec condition de Neumann, on ne sait pas montrer l'absence de modes piégés sous une condition géométrique sur la perturbation. En revanche, on sait toujours montrer que les fréquences pour lesquelles il existe un mode piégé sont au plus dénombrables, et ne peuvent s'accumuler qu'en l'infini. C'est ce que nous allons montrer maintenant. Nous revenons donc au cas du guide acoustique 3D traité au chapitre précédent et au début de ce chapitre.

D'après le lemme (4.1), on a le

Lemme 4.6 *Soit $p \in H^1(\Omega_L)$ une solution du problème homogène (4.2). Alors p est également solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} \nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 \int_{\Omega_L} p \bar{q} + \sum_{\lambda_n > k^2} \sqrt{\lambda_n - k^2} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

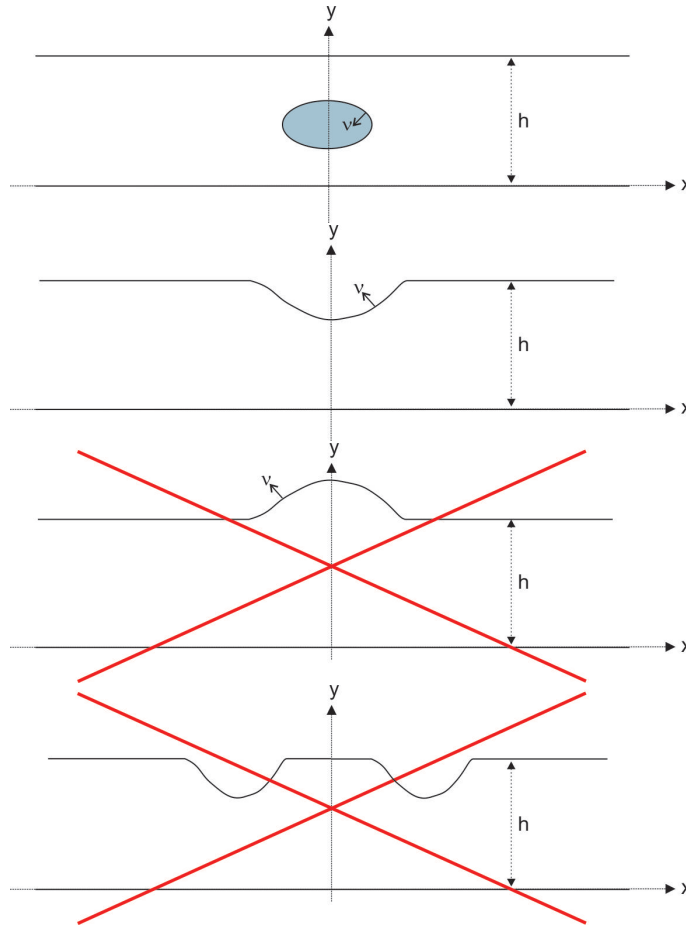


FIGURE 4.1 – La condition géométrique (4.4) est vérifiée pour les deux premiers guides mais pas pour les deux derniers.

Remarque 4.7 *La réciproque est fautive car une solution de (4.7) ne vérifie généralement pas $(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = 0$ pour $\lambda_n < k^2$.*

L'intérêt de la formulation (4.7) est son caractère autoadjoint, qui va nous permettre d'établir le

Théorème 4.8 *Les valeurs de $k > 0$ pour lesquelles il existe une solution p non nulle au problème (4.7) forment une suite qui tend vers $+\infty$.*

DÉMONSTRATION. A k fixé, on considère le problème de valeurs propres suivant : trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $p \neq 0$ solution de :

$$\begin{cases} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} \nabla p \cdot \nabla \bar{q} + \sum_{\lambda_n > k^2} \sqrt{\lambda_n - k^2} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = \mu \int_{\Omega_L} p \bar{q}, \end{cases}$$

La théorie classique (qui s'appuie sur la théorie spectrale pour les opérateurs autoadjoints compacts) nous dit que ce problème admet une suite de valeurs propres réelles positives (que l'on note $\mu_n(k)$, pour $n = 0, 1, 2, \dots$, car elles dépendent de k via le terme de série modale) :

$$\mu_1(k) \leq \mu_2(k) \leq \dots \leq \mu_n(k) \leq \dots$$

et qui tendent vers l'infini avec n . La théorie permet également de montrer facilement, à l'aide des formules de min-max, que les fonctions $k \mapsto \mu_n(k)$ sont continues et décroissantes sur \mathbb{R}^+ . Par exemple :

$$\mu_0(k) = \min_{p \in H^1(\Omega_L), p \neq 0} \frac{\int_{\Omega_L} |\nabla p|^2 + \sum_{\lambda_n > k^2} \sqrt{\lambda_n - k^2} |(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}|^2}{\int_{\Omega_L} |p|^2}$$

Donc la fonction $k \mapsto \mu_0(k)$ est le minimum d'une famille de fonctions décroissantes de k , et donc une fonction décroissante (au sens large) de k . En fait, ce résultat était facile à voir puisque $\mu_0(k) = 0$ pour tout k ! Mais la même idée s'applique à tous les $\mu_n(k)$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que les valeurs de k telles qu'il existe une solution p non nulle au problème (4.7) sont exactement les solutions des équations de point fixe :

$$\mu_n(k) = k^2$$

pour $n = 1, 2, \dots$. Et il est clair que chacune de ces équations a une et une seule solution $k_n > 0$, comme intersection d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante bijective sur \mathbb{R}^+ . Il est également facile de voir que la suite k_n tend vers l'infini. \square

Corollaire 4.9 *Les valeurs de $k > 0$ pour lesquelles il existe un mode piégé, et donc pour lesquelles le problème de diffraction est mal posé, forment au plus une suite dénombrable et ne peuvent s'accumuler qu'en $+\infty$.*

4.4 Résultats d'existence de modes piégés

A ce stade, nous avons montré que les fréquences pour lesquelles il existe un mode piégé sont au plus dénombrable, mais nous n'avons pas encore la preuve que de telles fréquences peuvent exister. C'est l'objet de ce paragraphe de montrer des exemples de guides pour lesquelles on sait prouver l'existence de modes piégés. Nous nous contenterons pour simplifier de considérer des cas bidimensionnels.

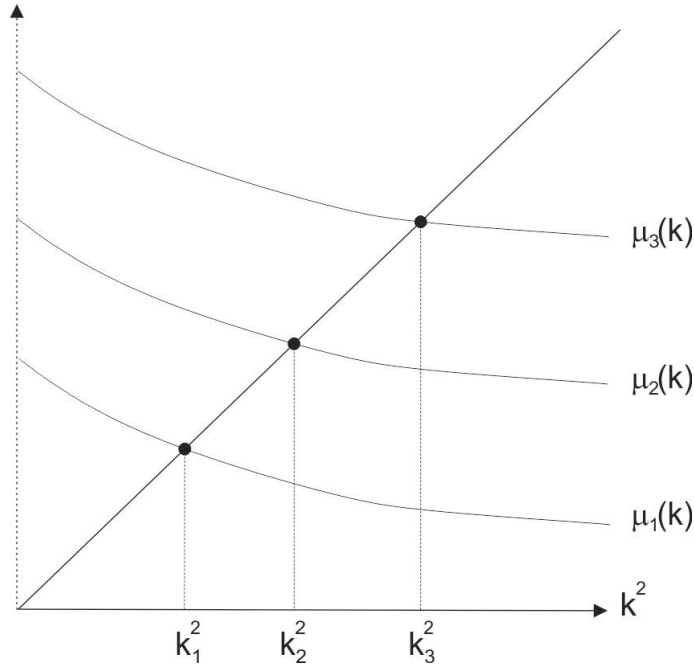


FIGURE 4.2 – Illustration de la preuve du théorème 4.8.

4.4.1 Le cas de la condition de Dirichlet

Nous commençons par ce cas car c'est le plus simple. Si on considère le guide $\mathbb{R} \times]0, h[$ avec condition de Dirichlet, les modes sont de la forme :

$$p_n^\pm(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) e^{i\beta_n x} \text{ avec } \beta_n^2 + \frac{n^2\pi^2}{h^2} = k^2, \quad n > 0. \quad (4.8)$$

On voit que contrairement au cas de la condition de Neumann, il n'existe aucun mode propagatif pour $k < \pi/h$. C'est pourquoi à ces fréquences là, il est assez facile de piéger une onde au voisinage d'une perturbation bien choisie, puisqu'elle ne peut pas s'échapper en se propageant dans le guide. En s'appuyant sur la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints non compacts, on montre alors le résultat suivant, que nous admettrons :

Théorème 4.10 *Soit Ω un guide bidimensionnel perturbé, qui coïncide avec $\mathbb{R} \times]0, h[$ en dehors d'un domaine borné. Si il existe une fonction $p \in H_0^1(\Omega)$ non nulle telle que*

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla p|^2}{\int_{\Omega} |p|^2} < \frac{\pi^2}{h^2} \quad (4.9)$$

alors on peut affirmer qu'il existe un mode piégé pour une fréquence $k < \pi/h$ dans le guide muni de la condition de Dirichlet, c'est-à-dire une fonction $p \in H_0^1(\Omega)$ non nulle telle que $\Delta p + k^2 p = 0$ dans Ω .

Corollaire 4.11 *Soit Ω un guide bidimensionnel perturbé, qui coïncide avec $\mathbb{R} \times]0, h[$ en dehors d'un domaine borné. Supposons que Ω contienne un rectangle de côtés a et b avec*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} < \frac{1}{h^2},$$

alors il existe un mode piégé pour une fréquence $k < \pi/h$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre p nul en dehors du rectangle et égal à $\sin\left(\frac{Y}{a}\right) \sin\left(\frac{X}{a}\right)$ dans le rectangle, où le système de coordonnées (X, Y) est choisi tel que le rectangle soit défini par $0 < X < a$ et $0 < Y < b$. □

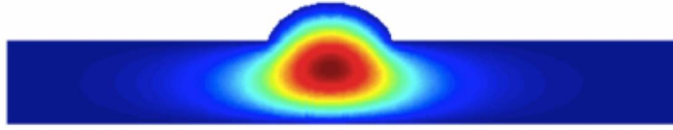


FIGURE 4.3 – Exemple de mode piégé (Figure de Vincent Pagneux).

Remarque 4.12 *On peut raisonner de la même façon si la condition de Dirichlet n'est imposée que sur l'une des parois du guide, disons $y = 0$. Dans ce cas on montre qu'il n'existe aucun mode propagatif pour $k < \pi/(2h)$. Il suffit donc de remplacer partout h par $2h$.*

4.4.2 Le cas de la condition de Neumann

L'idée est de se ramener au cas de la remarque 4.12 ci-dessus. Pour cela, on considère un guide bidimensionnel perturbé, qui coïncide avec $\mathbb{R} \times]-h, h[$ en dehors d'un domaine borné, et qui est symétrique par rapport à l'axe $y = 0$. On cherche alors des modes piégés antisymétriques par rapport à cet axe.

Autrement dit on cherche $p \in H^1(\Omega)$ non nul tel que

$$\begin{cases} p(x, y) = p(x, -y) & \forall (x, y) \in \Omega \\ \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Classiquement, cela revient à chercher p dans le demi-guide supérieur $\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega; y > 0\}$ solution de

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega^+ \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega^+ \\ p = 0 & \text{en } y = 0. \end{cases}$$

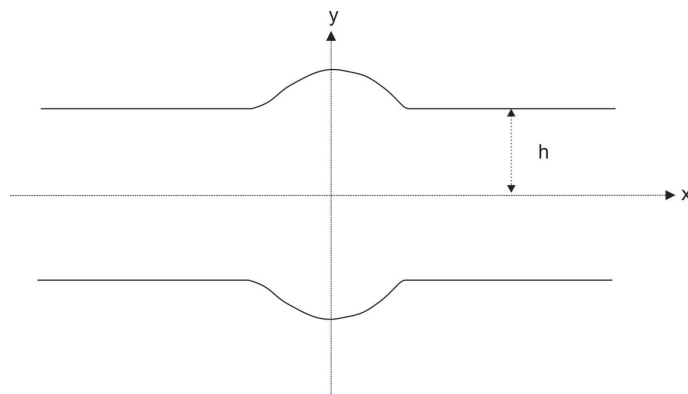


FIGURE 4.4 – Guide symétrique permettant de piéger des modes.

On a ainsi fait apparaître une condition de Dirichlet et on peut appliquer les résultats du paragraphe précédent.

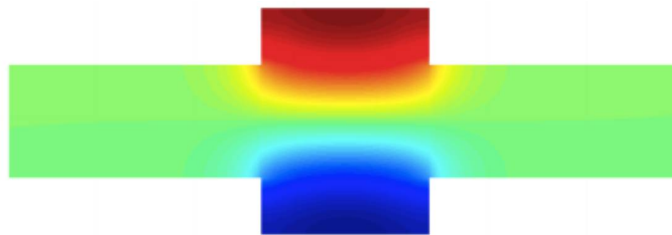


FIGURE 4.5 – Exemple de mode piégé (Figure de Vincent Pagneux).

Chapitre 5

Estimation de l'erreur de troncature pour la méthode DtN

Comme on l'a vu précédemment, un problème de diffraction ou de rayonnement dans un guide d'ondes admet une formulation en domaine borné. Cette formulation fait intervenir sur la (ou les) frontière artificielle du domaine de calcul une condition transparente qui s'exprime à l'aide de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Enfin, ce dernier admet une expression explicite à l'aide d'une série modale. En pratique, lorsque l'on cherche à approcher la solution de ce problème par éléments finis, il faut tronquer la série modale. L'objet de ce chapitre est d'estimer l'erreur due à la troncature.

5.1 Position du problème

Pour fixer les idées, on considère un problème posé dans un guide acoustique semi-infini tridimensionnel de section transverse S , qui est localement perturbé. On suppose que la perturbation est localisée dans le demi-espace $z < 0$ comme sur la figure ci-dessous. Nous nous intéressons au calcul de la solution sortante p du problème suivant :

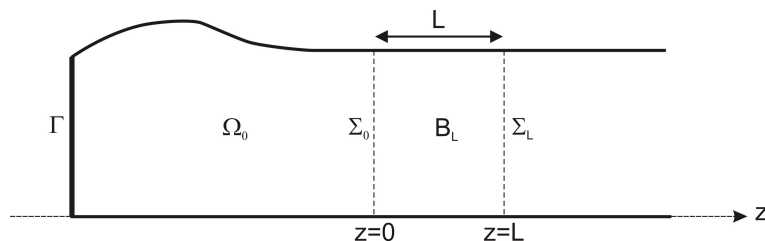


FIGURE 5.1 – La géométrie

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (5.1)$$

où g est une fonction donnée de $L^2(\Gamma)$. On désignera dans la suite par Ω_L le domaine borné défini par

$$\Omega_L = \Omega \cup \{z < L\},$$

et par B_L la portion de guide définie par :

$$B_L = \Omega \cup \{0 < z < L\},$$

de sorte que

$$\overline{\Omega_L} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{B_L}.$$

Nous avons vu qu'il est possible d'écrire une formulation équivalente du problème (5.1) dans le domaine borné Ω_L . On introduit pour cela la base Hilbertienne $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(S)$ constituée des fonctions propres de l'opérateur Laplacien avec condition de Neumann homogène au bord :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \text{dans } S, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (5.2)$$

et on suppose que k ne correspond pas à une fréquence de coupure, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entier n tel que $\lambda_n = k^2$. On pose alors

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \lambda_n} & \text{si } \lambda_n < k^2, \\ i\sqrt{\lambda_n - k^2} & \text{si } \lambda_n > k^2. \end{cases}$$

On notera dans la suite \mathcal{N}_{prop} le nombre de modes propagatifs, c'est à dire le cardinal de $\{n \in \mathbb{N}; \lambda_n < k^2\}$. Attention, comme la numérotation commence à 0, cela signifie que le mode d'indice n est propagatif si et seulement si $n < \mathcal{N}_{prop}$.

On peut alors définir l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann suivant :

$$T : \begin{cases} H^{1/2}(\Sigma_L) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_L) \\ \psi \mapsto T\psi = \sum_{n \geq 0} i\beta_n (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n \end{cases} \quad (5.3)$$

et le problème en domaine borné consiste à chercher $p \in H^1(\Omega_L)$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = Tp & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (5.4)$$

5.2. UNE NOUVELLE FORMULATION DU PROBLÈME AVEC DTN TRONQUÉ 67

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \sum_{n \geq 0} i \beta_n(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

On sait que ce problème relève de l'alternative de Fredholm et qu'il est bien posé, sauf pour au plus une suite de valeurs de k ne pouvant s'accumuler qu'à l'infini. On suppose dans la suite que k est effectivement bien choisi de façon à avoir l'existence et l'unicité de p .

En pratique, on ne peut pas conserver une infinité de termes dans la série qui définit l'opérateur T et l'on va la tronquer au rang N , $N \in \mathbb{N}$, définissant ainsi un nouvel opérateur T_N :

$$T_N : \left\{ \begin{array}{l} H^{1/2}(\Sigma_L) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_L) \\ \psi \mapsto T_N \psi = \sum_{n=0}^N i \beta_n(\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n \end{array} \right. \quad (5.6)$$

On va alors chercher à calculer la solution $p_N \in H^1(\Omega_L)$ (si elle existe) du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_N + k^2 p_N = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p_N}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p_N}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p_N}{\partial \nu} = T_N p_N & \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

La formulation variationnelle de ce problème se déduit directement de (5.5) en remplaçant la série infinie par une série tronquée au rang N , et l'on en déduit à nouveau que ce problème relève de l'alternative de Fredholm.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que ce problème est bien posé, pour N assez grand, et d'établir une estimation de l'erreur $(p - p_N)$.

5.2 Une nouvelle formulation du problème avec DtN tronqué

Nous allons chercher à comparer p et p_N sur un domaine plus petit que Ω_L , à savoir le domaine Ω_0 . Pour cela, il nous faut écrire les problèmes vérifiés par les restrictions de

p et de p_N à Ω_0 . Concernant la solution exacte p , on sait qu'elle vérifie :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = Tp & \text{sur } \Sigma_0, \end{cases} \quad (5.8)$$

où l'on note toujours T (par abus de notation) l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann, qu'il agisse sur Σ_0 ou sur Σ_L , ou sur n'importe quelle copie de la section transverse S . Concernant p_N , c'est plus délicat. On va tout d'abord établir le résultat suivant :

Lemme 5.1 *On suppose que $N + 1 \geq \mathcal{N}_{prop}$ et on considère $p_N \in H^1(\Omega_L)$ une solution de (5.7). Alors p_N admet dans la portion de guide B_L l'expression suivante :*

$$p_N(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n^+ e^{i\beta_n z} + A_n^- e^{-i\beta_n z}) \varphi_n(x, y) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{où pour } n \leq N : & \begin{cases} A_n^+ = (p_N, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)}, \\ A_n^- = 0 \end{cases} \\ \text{et pour } n > N : & \begin{cases} A_n^+ = \frac{1}{1 + e^{2i\beta_n L}} (p_N, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)}, \\ A_n^- = \frac{1}{1 + e^{-2i\beta_n L}} (p_N, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 5.2 *On voit que pour les premiers modes tels que $n \leq N$, la troncature n'a produit aucune réflexion parasite. En revanche, à partir de $n = N + 1$, la condition aux limites sur Σ_L n'étant plus exacte, elle n'est pas transparente et génère une réflexion qui se traduit par un coefficient $A_n^- \neq 0$. Cependant, on peut déjà remarquer que si le mode n est évanescent, $\beta_n = i\sqrt{\lambda_n - k^2}$ de sorte que $e^{2i\beta_n L}$ tend exponentiellement vite vers 0 quand L tend vers l'infini. Les formules ci-dessus montrent qu'alors, $A_n^+ \rightarrow 1$ et $A_n^- \rightarrow 0$ exponentiellement. On comprend en particulier pourquoi il faut conserver tous les modes propagatifs dans la série, et donc choisir $N + 1 \geq \mathcal{N}_{prop}$.*

DÉMONSTRATION.

Comme on l'a vu dans la section 2.2.1, p_N étant solution des équations homogènes dans B_L , on peut affirmer que pour tout $z \in [0, L]$:

$$p_N(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(z) \varphi_n(x, y),$$

où

$$A_n(z) = \int_S p_N(x, y, z) \overline{\varphi_n(x, y)} dx dy = A_n^+ e^{i\beta_n z} + A_n^- e^{-i\beta_n z}.$$

5.2. UNE NOUVELLE FORMULATION DU PROBLÈME AVEC DTN TRONQUÉ 69

En particulier :

$$A_n(0) = (p_N, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} = A_n^+ + A_n^-. \quad (5.10)$$

Nous allons obtenir une seconde équation sur A_n^+ et A_n^- en exploitant la condition aux limites vérifiée par p_N sur Σ_L . De

$$\frac{\partial p_N}{\partial \nu} = T_N p_N,$$

on déduit

$$\int_{\Sigma_L} \frac{\partial p_N}{\partial \nu}(x, y, L) \overline{\varphi_n}(x, y) dx dy = \int_{\Sigma_L} T_N p_N(x, y, L) \overline{\varphi_n}(x, y) dx dy.$$

Par définition de T_N :

$$\int_{\Sigma_L} T_N p_N(x, y, L) \overline{\varphi_n}(x, y) dx dy = i\beta_n A_n(L) = i\beta_n (A_n^+ e^{i\beta_n L} + A_n^- e^{-i\beta_n L}) \text{ si } 0 \leq n \leq N$$

et 0 sinon. D'autre part :

$$\frac{dA_n}{dz}(L) = \int_{\Sigma_L} \frac{\partial p_N}{\partial \nu}(x, y, L) \overline{\varphi_n}(x, y) dx dy = i\beta_n (A_n^+ e^{i\beta_n L} - A_n^- e^{-i\beta_n L}), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par identification, on obtient finalement que

$$\begin{cases} A_n^+ e^{i\beta_n L} - A_n^- e^{-i\beta_n L} = A_n^+ e^{i\beta_n L} + A_n^- e^{-i\beta_n L} & \text{si } 0 \leq n \leq N, \\ A_n^+ e^{i\beta_n L} - A_n^- e^{-i\beta_n L} = 0 & \text{si } n > N, \end{cases}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{cases} A_n^- = 0 & \text{si } 0 \leq n \leq N, \\ A_n^+ e^{i\beta_n L} - A_n^- e^{-i\beta_n L} = 0 & \text{si } n > N. \end{cases} \quad (5.11)$$

On termine la démonstration en résolvant pour chaque n le système de deux équations à deux inconnues A_n^+ et A_n^- composé de (5.10) et (5.11). Le cas $n \leq N$ est trivial. Dans le cas $n > N$, on vérifie que le déterminant du système s'annule si et seulement si $\cos(\beta_n L) = 0$, ce qui ne peut pas se produire pour les modes évanescents. \square

On déduit immédiatement du lemme précédent le corollaire suivant :

Corollaire 5.3 *Soit $p_N \in H^1(\Omega_L)$ une solution de (5.7). Alors p_N vérifie sur Σ_0 la condition aux limites suivante :*

$$\frac{\partial p_N}{\partial z} = T p_N + R_N p_N \quad (5.12)$$

où T est l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann défini par (5.3) et R_N est défini comme suit :

$$R_N : \begin{cases} H^{1/2}(\Sigma_0) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_0) \\ \psi \mapsto R_N \psi = \sum_{n=N+1}^{+\infty} i\beta_n \alpha_n(L) (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n \end{cases} \quad (5.13)$$

avec

$$\alpha_n(L) = \frac{-2}{1 + e^{-2i\beta_n L}}.$$

On a donc atteint l'objectif visé, à savoir écrire un problème satisfait par p_N dans Ω_0 :

$$\begin{cases} \Delta p_N + k^2 p_N = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \frac{\partial p_N}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma \cup \Sigma_0), \\ \frac{\partial p_N}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p_N}{\partial \nu} = T p_N + R_N p_N & \text{sur } \Sigma_0. \end{cases} \quad (5.14)$$

En comparant (5.8) et (5.14), nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'erreur $p - p_N$.

5.3 Etude de l'erreur

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on définit deux opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{A}_N continus sur $H^1(\Omega_0)$ de la façon suivante :

$$\forall p, q \in H^1(\Omega_0), \quad \begin{cases} (\mathcal{A}p, q)_{H^1(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \langle Tp, q \rangle_{\Sigma_0}, \\ (\mathcal{A}_N p, q)_{H^1(\Omega_0)} &= (\mathcal{A}p, q)_{H^1(\Omega_0)} - \langle R_N p, q \rangle_{\Sigma_0}. \end{cases}$$

On définit également, toujours à l'aide du théorème de représentation de Riesz, un élément $f \in H^1(\Omega_0)$ tel que :

$$(f, q)_{H^1(\Omega_0)} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma, \quad \forall q \in H^1(\Omega_0).$$

Ainsi, p et p_N solutions de (5.8) et (5.14) vérifient :

$$\mathcal{A}p = \mathcal{A}_N p_N = f.$$

Par hypothèse, le problème (5.8) est bien posé, ce qui signifie que l'opérateur \mathcal{A} est un isomorphisme de $H^1(\Omega_0)$. Et l'on vérifie aisément que :

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A} + (\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) = \mathcal{A} (\mathcal{I} + \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})). \quad (5.15)$$

Pour poursuivre, nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{A}_N - \mathcal{A}$ tend vers 0 fortement quand N tend vers l'infini. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 5.4 *Il existe une constante C_0 ne dépendant que du domaine Ω_0 telle que :*

$$\|\mathcal{A}_N - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \leq C_0 e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}-k^2}L}$$

Remarque 5.5 *Ceci montre que $\mathcal{A}_N - \mathcal{A}$ tend exponentiellement vite vers 0 avec N et avec L .*

DÉMONSTRATION. Soit $p, q \in H^1(\Omega_0)$. Alors par définition :

$$((\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p, q)_{H^1(\Omega_0)} = -\langle R_N p, q \rangle_{\Sigma_0}.$$

Par conséquent :

$$\|(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p\|_{H^1(\Omega_0)}^2 = -\langle R_N p, (\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p \rangle_{\Sigma_0}$$

d'où

$$\|(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p\|_{H^1(\Omega_0)}^2 \leq \|R_N p\|_{H^{-1/2}(\Sigma_0)} \|(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

Par continuité de l'application trace, il en résulte alors que pour une constante C ne dépendant que de Ω_0 :

$$\|(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C \|R_N p\|_{H^{-1/2}(\Sigma_0)}.$$

Par ailleurs, d'après (5.13) :

$$\begin{aligned} \|R_N p\|_{H^{-1/2}(\Sigma_0)}^2 &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} (1 + \lambda_n)^{-1/2} |\beta_n \alpha_n(L)|^2 |(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)}|^2 \\ &\leq \left(\sup_{n \geq N+1} \frac{\lambda_n - k^2}{1 + \lambda_n} \right) \left(\sup_{n \geq N+1} |\alpha_n(L)|^2 \right) \sum_{n=N+1}^{+\infty} (1 + \lambda_n)^{1/2} |(p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)}|^2 \\ &\leq \left(\sup_{n \geq N+1} |\alpha_n(L)|^2 \right) \|p\|_{H^1(\Omega_0)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la continuité de l'application trace, ainsi que la définition de $\alpha_n(L)$, on obtient finalement l'estimation suivante :

$$\|(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C^2 \frac{2}{1 + e^{2\sqrt{\lambda_{N+1}-k^2}L}} \|p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq 2C^2 e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}-k^2}L} \|p\|_{H^1(\Omega_0)},$$

d'où le résultat. □

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer le résultat final :

Théorème 5.6 *Il existe $N_0 \geq \mathcal{N}_{prop} - 1$ tel que si $N \geq N_0$, alors le problème (5.7) avec DtN tronqué au rang N est bien posé et sa solution tend vers la solution p du problème initial (5.4) dans $H^1(\Omega_0)$. Plus précisément, l'erreur $(p_N - p)$ satisfait l'estimation suivante :*

$$\|p_N - p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_0 \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1}-k^2}L} \|p\|_{H^1(\Omega_0)}$$

pour une constante C_0 qui ne dépend que de Ω_0 .

DÉMONSTRATION. D'après (5.15), \mathcal{A}_N est inversible dès que

$$\|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} < 1.$$

Or :

$$\|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \|(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))}$$

et d'après le lemme 5.4, il existe N_0 tel que si $N \geq N_0$:

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \|\mathcal{A}_N - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} < \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que pour $N \geq N_0$, \mathcal{A}_N est inversible et

$$\|\mathcal{A}_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \leq 2\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))}.$$

On remarque ensuite que :

$$\mathcal{A}_N(p - p_N) = (\mathcal{A}_N - \mathcal{A})p,$$

d'où :

$$\|p_N - p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \|\mathcal{A}_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \|\mathcal{A}_N - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \|p\|_{H^1(\Omega_0)}.$$

L'estimation s'en déduit en utilisant à nouveau le lemme 5.4. □

5.4 L'approximation par éléments finis

On introduit maintenant une approximation par éléments finis du problème (5.7). Plus précisément, soit V_h un sous-espace de dimension finie inclus dans $H^1(\Omega_L)$:

$$V_h = \text{Vect}_{i=1, N_h}(w_j)$$

obtenu, par exemple, à l'aide d'une approximation $P1$ construite en 3D sur un maillage tétraédrique de Ω_L , ou sur un maillage triangulaire en 2D.

On considère alors le problème discrétisé suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } p_h \in V_h \text{ tel que } \forall q_h \in V_h \\ \int_{\Omega_L} \nabla p_h \cdot \nabla \bar{q}_h - k^2 \int_{\Omega_L} p_h \bar{q}_h - \langle T_N p_h, \bar{q}_h \rangle_{\Sigma_L} = \int_{\Gamma} g \bar{q}_h d\gamma \end{array} \right.$$

qui est équivalent à la résolution du système linéaire :

$$(\mathbb{K} - k^2 \mathbb{M} - \mathbb{T}) P = G$$

où $P \in \mathbb{R}^{N_h}$ représente les composantes de p_h dans la base (w_j) et

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{ij} &= \int_{\Omega_L} \nabla w_i \cdot \nabla w_j & \mathbb{M}_{ij} &= \int_{\Omega_L} w_i w_j \\ \mathbb{T}_{ij} &= \sum_{n=0}^{N-1} i\beta_n \int_{\Sigma_L} w_i \varphi_n \int_{\Sigma_L} w_j \varphi_n & G_i &= \int_{\Gamma} g w_i \end{aligned}$$

Seule la matrice \mathbb{T} n'est pas une matrice éléments finis standard. On notera, en particulier, que cette matrice a une structure particulière. Ainsi dans le cadre des éléments finis de Lagrange, si on suppose que les Q noeuds situés sur le bord Σ_L sont numérotés en premier, la matrice \mathbb{T} a la structure suivante :

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où \mathbb{A} est une matrice *pleine* d'ordre Q . En effet, il est clair, compte-tenu de l'expression de φ_n , que le terme \mathbb{A}_{ij} n'a aucune raison d'être nul, contrairement à \mathbb{K}_{ij} et \mathbb{M}_{ij} qui sont nuls dès que les noeuds i et j ne sont pas dans le même élément.

5.5 Une alternative : la condition de Dirichlet-to-Robin

Dans le problème (5.4), on peut écrire la condition transparente sur Σ_L suivante

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = Tp$$

sous la forme équivalente suivante

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} - ikp = T^R p$$

où l'on a posé :

$$T^R \psi = \sum_{n \geq 0} i\beta_n (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n - ik\psi = \sum_{n \geq 0} i(\beta_n - k) (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n.$$

On peut remarquer ici que le premier terme de la série de droite est nul, puisque $\beta_0 = k$. A ce niveau, cette approche rigoureusement équivalente à l'approche DtN, mais cela n'est plus vrai après troncature de la série modale. Autrement dit, la condition approchée :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} - ikp = T_N^R p$$

où

$$T_N^R \psi = \sum_{n=0}^N i(\beta_n - k) (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n,$$

n'est pas équivalente à la condition où l'on a tronqué la série DtN, comme dans (5.7). Cependant, on peut étudier l'erreur produite par la troncature de la condition Dirichlet-to-Robin, de la même façon que l'on a étudié l'erreur produite par la troncature de la condition Dirichlet-to-Neumann. Et le résultat sera de même nature.

L'intérêt du résultat est que cela nous fournit en particulier une estimation de l'erreur produite en régime monomode lorsque qu'on impose la condition

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} - ikp = 0$$

sur Σ_L , comme on l'a proposé au chapitre 2. En effet, cette condition correspond à une troncature au rang $N = 0$ de la condition Dirichlet-to-Robin : on ne garde que le terme $n = 0$ qui se trouve être nul ici !

Chapitre 6

Une alternative à la méthode DtN : les PML

La méthode que nous avons étudiée précédemment fait intervenir dans la condition transparente l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann qui est un opérateur non local en espace. Après discrétisation par éléments finis, ce caractère non local a pour conséquence de générer une matrice moins creuse que les matrices éléments finis usuelles. En effet, la matrice du système à inverser couple tous les degrés de liberté situés sur la frontière transparente, qu'ils appartiennent ou non à un même élément. Ceci peut avoir des conséquences fâcheuses sur le conditionnement de la matrice à inverser. De plus, le stockage d'une telle matrice n'étant pas prévu dans les codes usuels d'éléments finis, la mise en oeuvre de la méthode avec DTN requiert une programmation spécifique.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode alternative qui présente le grand intérêt de préserver le caractère creux de la matrice. Nous donnerons à nouveau une estimation de l'erreur en fonction des paramètres de la méthode.

Cette méthode, dite de couches absorbantes parfaitement adaptées, ou Perfectly Matched Layers en anglais, a été inventée par Bérenger [1994] dans un contexte assez différent, puisqu'il s'agissait de résoudre un problème d'électromagnétisme dans l'espace libre en régime transitoire. Depuis, la méthode a connu un essor spectaculaire, aussi bien pour le régime transitoire que pour le régime périodique établi. La démarche que nous allons présenter s'inspire beaucoup d'une étude réalisée pour un problème d'acoustique en présence d'écoulement, dans un guide d'ondes en régime harmonique [2004].

6.1 Introduction

Reprenons le problème (5.1) introduit au chapitre précédent. Notre objectif est toujours d'écrire un problème posé dans le domaine borné Ω_L qui puisse être résolu par éléments finis et dont la solution soit proche de la solution exacte, au moins sur le domaine Ω_0 . Une idée naturelle et ancienne consiste à modifier les équations dans la couche B_L afin de modéliser un phénomène d'absorption. Si L est assez grand, on espère alors que le

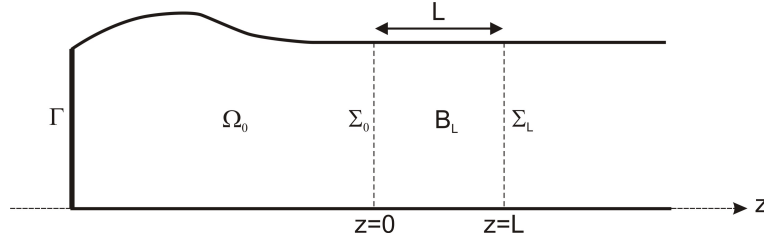


FIGURE 6.1 – La géométrie

champ rayonné aura été suffisamment atténué dans la couche pour qu’il soit licite de le considérer nul, ou à dérivée normale nulle, sur la frontière artificielle Σ_L . Le problème est que cette modification des paramètres du modèle dans B_L va générer des réflexions parasites à la traversée de la frontière Σ_0 . Pour minimiser ces réflexions qui sont source d’erreur, l’ingénieur qui utilise une telle méthode sera conduit à choisir L assez grand et à introduire l’absorption progressivement avec z . Ceci est en général assez pénalisant, surtout en 3 dimensions, car il faut alors mailler un domaine de grande taille.

Nous allons voir maintenant que la méthode des PML permet de s’affranchir de cette difficulté, le modèle d’absorption étant “parfaitement adapté” au sens où la frontière Σ_0 reste parfaitement transparente. En fait, il s’agit d’un modèle d’absorption qui ne vient pas de la physique mais qui est construit par un procédé purement mathématique.

L’idée est assez simple. Supposons que l’on modifie le problème dans la couche B_L en dilatant les équations dans la direction z . Ceci n’aurait évidemment aucune influence sur la solution dans Ω_0 qui se trouverait inchangée (cela n’aurait par ailleurs aucun intérêt). La méthode des PML s’appuie sur une idée en apparence aussi simple (en apparence seulement). Il s’agit de faire une dilatation en z d’un facteur complexe (non réel). On parle de “dilatation analytique” car la méthode s’appuie sur des propriétés d’analyticité de la solution.

6.2 Position et analyse du problème avec PML

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \rightarrow \tilde{\alpha}(z)$ la fonction qui vaut 1 pour $z < 0$ et α pour $z > 0$. On considère le problème suivant. Trouver $p_L \in H^1(\Omega_0)$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_L}{\partial y^2} + \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial p_L}{\partial z} \right) + k^2 p_L = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p_L}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.1)$$

Notre objectif est de montrer que, si α est bien choisi, résoudre ce problème permet de trouver une bonne approximation de la solution de (5.1). Notons que l’on a imposé

ici une condition de Neumann homogène sur Σ_L , mais on peut tout aussi bien imposer une condition de Dirichlet homogène.

Nous allons tout d'abord montrer que le problème (6.1) relève de l'alternative de Fredholm. En divisant l'équation aux dérivées partielles par $\tilde{\alpha}$ et en remarquant que $\tilde{\alpha}$ ne dépend que de z , on vérifie aisément que le problème (6.1) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} p_L \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial p_L}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial p_L}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \tilde{\alpha} \frac{\partial p_L}{\partial z} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} - \frac{k^2}{\tilde{\alpha}} p \bar{q} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{cases} \quad (6.2)$$

On a alors le

Lemme 6.1 *Si $\Re(\alpha) > 0$, le problème (6.2) relève de l'alternative de Fredholm.*

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de remarquer que la forme bilinéaire

$$a_L(p, q) = \int_{\Omega_L} \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial p_L}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial p_L}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \tilde{\alpha} \frac{\partial p_L}{\partial z} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + p \bar{q}$$

est coercive sur $H^1(\Omega_L)$. En effet, pour tout $p \in H^1(\Omega_L)$:

$$|a_L(p, p)| \geq \Re(a_L(p, p)) \geq \min \left(1, \Re \left(\frac{1}{\alpha} \right), \Re(\alpha) \right) \|p\|_{H^1(\Omega_L)}^2.$$

La compacité de l'opérateur associé à la forme

$$\int_{\Omega_L} - \left(1 + \frac{k^2}{\tilde{\alpha}} \right) p \bar{q}$$

permet alors de conclure. □

6.3 Calcul des modes du milieu PML

Pour mettre en évidence le caractère absorbant des PMLs, il est intéressant de calculer les modes associés. Ils nous serviront par ailleurs dans l'étude d'erreur qui suivra. Mais ce calcul de modes n'intervient ici que pour l'analyse. Contrairement à la méthode DtN, la formulation avec PMLs ne fait pas intervenir les modes, c'est là un de ses avantages. On considère donc un guide parfaitement cylindrique de section S dans lequel la propagation est modélisée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 & \text{dans } S \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial S \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Les modes sont les solutions de la forme :

$$p(x, y, z) = \varphi(x, y)e^{\pm i\beta_\alpha z}$$

avec $\beta_\alpha \in \mathbb{C}$. Le champ transverse φ doit donc vérifier

$$\begin{cases} \Delta\varphi + (k^2 - \alpha^2\beta_\alpha^2)\varphi = 0 & \text{dans } S, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases}$$

En utilisant à nouveau le spectre du Laplacien dans S avec condition de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n & \text{dans } S, \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial S, \end{cases} \quad (6.4)$$

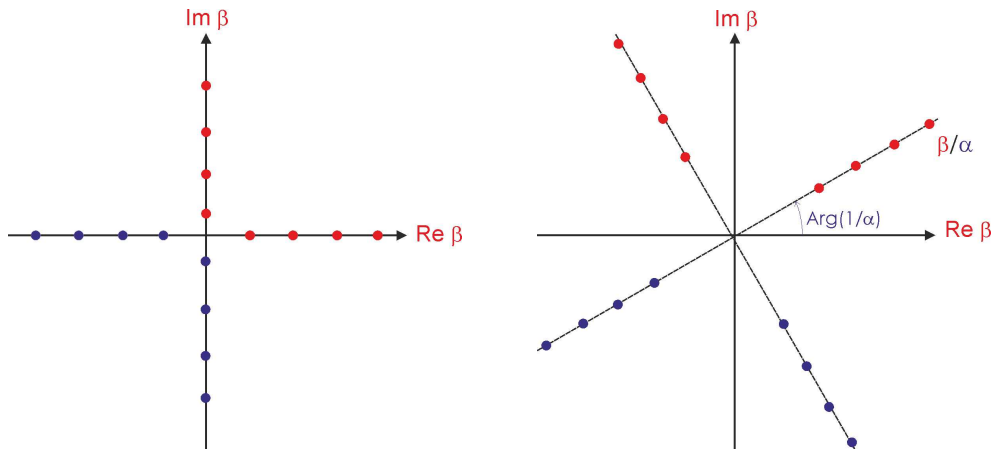
on trouve donc la famille de modes $(\varphi_n, \beta_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ où l'on a posé :

$$\beta_{n,\alpha} = \frac{\beta_n}{\alpha}.$$

On remarque que seule la constante de propagation du mode a été modifiée par la présence du paramètre α , le profil du mode reste lui inchangé. La transformation des β a une interprétation géométrique simple : il s'agit d'une rotation d'angle opposé à l'argument de α suivi d'une dilatation de rapport $1/|\alpha|$. Les β avant et après transformation sont représentés ci-dessous dans le cas où

$$\Re(\alpha) > 0 \text{ et } \Im(\alpha) < 0. \quad (6.5)$$

Les β_n sont en rouge et leurs opposés $-\beta_n$ en bleu.



On remarque que si α vérifie la condition (6.5), on a :

$$\Im(\beta_{n,\alpha}) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, tous les modes qui se propagent vers la droite (β_n réel positif) sont devenus évanescents vers la droite. Les modes qui étaient déjà évanescents le sont restés. Il n'y a donc plus aucun modes propagatifs. Ce caractère évanescents de tous les modes fait penser au problème dissipatif où l'on avait ajouté une partie imaginaire à la fréquence. On voit pourquoi le modèle PML est assimilé à un milieu absorbant.

Remarque 6.2 *Comme on l'a dit en introduction, la méthode des PML a été initialement introduite pour les problèmes transitoires. On peut l'analyser en appliquant une transformation de Fourier en temps, pour se ramener à un problème à fréquence fixée. Le choix des paramètres pour le problème en temps conduit alors à un choix particulier du paramètre α en fonction de la fréquence ω sous la forme suivante :*

$$\alpha = \frac{-i\omega}{-i\omega + \sigma}$$

où σ est un paramètre réel positif qui mesure le caractère absorbant du milieu PML. Pour ce choix particulier, on a :

$$\beta_{n,\alpha} = \frac{\beta_n}{\alpha} = \beta_n + i \frac{\sigma \beta_n}{\omega}.$$

La conséquence importante est que :

- pour le modes propagatifs : $\Re(\beta_n) = \Re(\beta_{n,\alpha})$.
- pour le modes évanescents : $\Im(\beta_n) = \Im(\beta_{n,\alpha})$.

Autrement dit, les modes propagatifs gardent la même longueur d'onde dans la PML, et les modes évanescents gardent le même taux de décroissance.

6.4 Estimation d'erreur

L'estimation de l'erreur $p_L - p$ se fait exactement comme celle de $p_N - p$ au chapitre précédent. On établit tout d'abord le résultat suivant :

Lemme 6.3 *Supposons que α vérifie la condition (6.5). Soit p_L une solution de (6.1). Alors sa restriction à Ω_0 est solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \Delta p_L + k^2 p_L = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \frac{\partial p_L}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma \cup \Sigma_0), \\ \frac{\partial p_L}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p_L}{\partial \nu} = T p_L + S_L p_L & \text{sur } \Sigma_0, \end{cases} \quad (6.6)$$

où l'opérateur S_L est défini par :

$$S_L : \begin{cases} H^{1/2}(\Sigma_0) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_0) \\ \psi \mapsto S_L \psi = \sum_{n=0}^{+\infty} i \beta_n \sigma_n(\alpha, L) (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n \end{cases} \quad (6.7)$$

avec

$$\sigma_n(\alpha, L) = \frac{-2}{1 + e^{-2i\beta_{n,\alpha}L}}.$$

On en déduit alors comme au chapitre précédent le

Théorème 6.4 *Supposons que α vérifie la condition (6.5). Alors pour L assez grand, le problème (6.1) avec une couche PML de longueur L est bien posé et sa solution tend vers la solution p du problème initial (5.4) dans $H^1(\Omega_0)$. Plus précisément, l'erreur $p_L - p$ satisfait l'estimation suivante :*

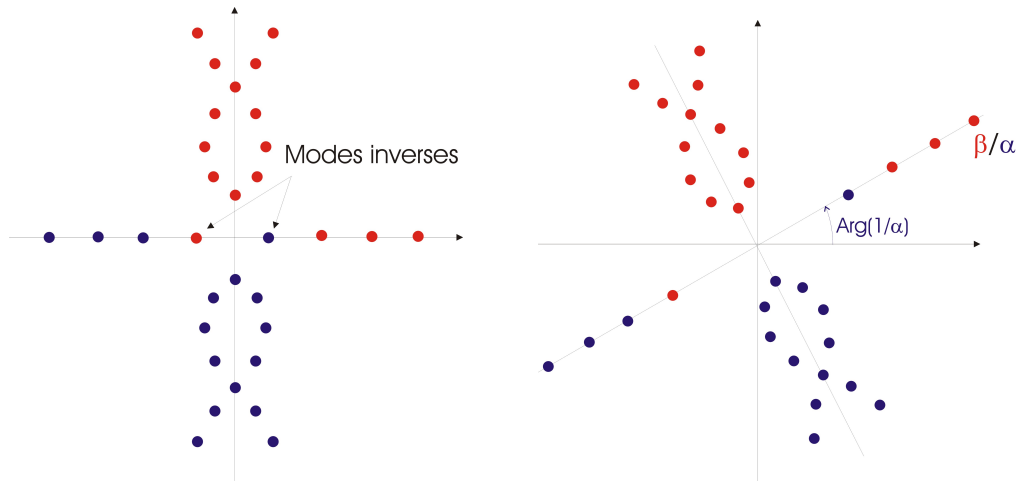
$$\|p_L - p\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C_0 \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0))} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\sigma_n(\alpha, L)| \|p\|_{H^1(\Omega_0)}$$

pour une constante C_0 qui ne dépend que de Ω_0 .

6.5 Quelques commentaires

6.5.1 Les modes rétrogrades

Pour d'autres applications physiques, il arrive que la méthode des PMLs ne fonctionne pas. Cela est dû à la présence de modes dits "rétrogrades" ou "inverses" dont les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés. Autrement dit, avec nos conventions, ce sont des modes propagatifs qui se propagent vers la droite (resp. gauche) bien que leur constante de propagation β soit négative (resp. positive). Ceci se produit par exemple à certaines fréquences pour les modes de Lamb qui se propagent dans une plaque élastique isotrope (en acier par exemple). On obtient alors une répartition des β comme sur la figure suivante :



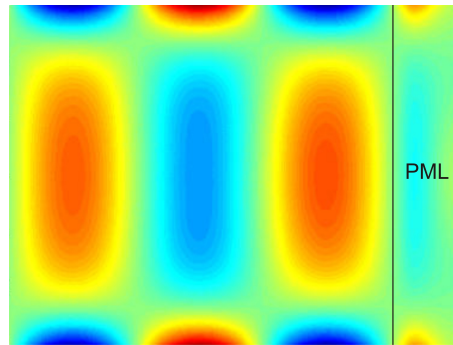
L'analyse précédente montre que les PMLs vont alors se "tromper" : elles ne vont pas sélectionner le mode sortant, car celui-ci est exponentiellement croissant dans le milieu PML. Une méthode permettant de corriger a posteriori les résultats faux fournis par

la méthode PML a été proposée dans [2014]. Mais cela n'est pas pleinement satisfaisant car cette méthode nécessite la connaissance a priori des modes rétrogrades, alors que l'intérêt majeur des PMLs est sa simplicité d'implémentation, et le fait que la formulation ne fait pas intervenir les modes du guide.

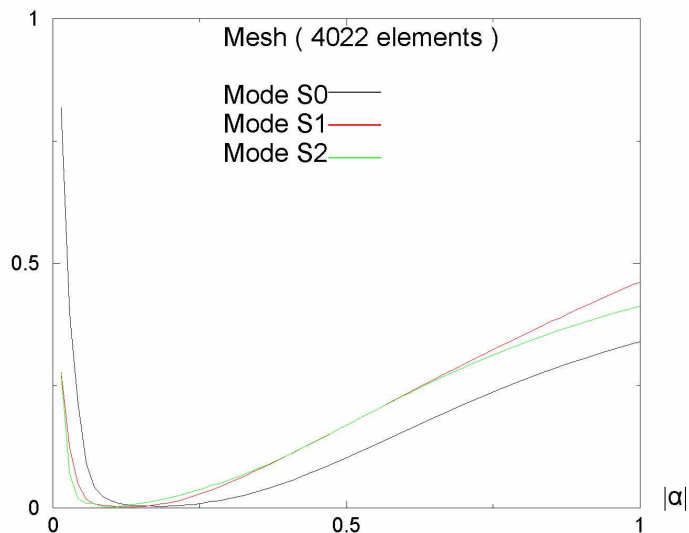
6.5.2 PML et discrétisation

On présente ci-dessous des calculs qui ont été effectués dans une plaque d'acier, à une fréquence telle qu'il n'existe pas de modes rétrogrades. Une condition de Dirichlet est imposée sur la frontière gauche du domaine et une PML est placée sur la frontière droite. On utilise des éléments finis de Lagrange de type P2. La solution exacte est un mode de la plaque de sorte que l'on peut calculer l'erreur.

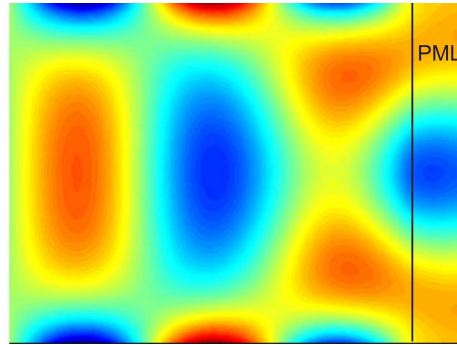
Si le paramètre α dans la PML est choisi de façon adéquate (nous allons expliquer plus loin ce qu'on entend par là), on obtient le résultat suivant (dans le cas du mode dit S0) :



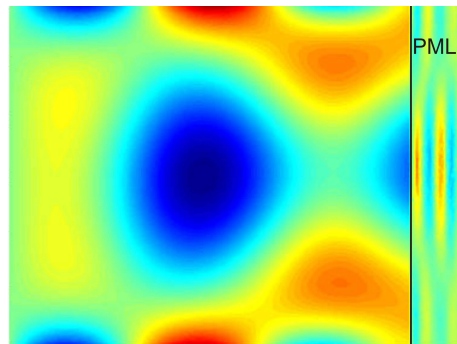
Si on fixe l'argument de α (ici à $-\pi/4$) et si on trace l'erreur en norme H^1 en fonction du module de α pour différents modes, on obtient le résultat suivant :



Sur la plus grande partie des courbes, comme la théorie le prévoit, l'erreur diminue lorsque le module de α diminue. En effet, le milieu PML devient alors plus absorbant et la réflexion en bout de couche est alors négligeable. Si $|\alpha|$ est choisi trop grand comme sur la figure ci-dessous, le milieu PML n'est pas assez absorbant et la réflexion due à la troncature de la couche détériore totalement le résultat.



Mais que se passe-t-il lorsque le module de α est choisi trop petit ? On voit qu'alors l'erreur explose. Ceci est dû au maillage (fixé) qui n'est plus capable de représenter la forte décroissance de la solution dans la couche PML :



Chapitre 7

Formulations avec recouvrement et résolution itérative

Dans les chapitres 3 et 5, nous avons expliqué comment construire une condition transparente pour résoudre un problème de diffraction ou de rayonnement dans un guide d'ondes. En reprenant les notations habituelles (voir figure 7.1), cette condition avait été obtenue en imposant le raccord en valeur et en dérivée normale de la pression sur une section transverse Σ_L , la pression étant exprimée à droite de Σ_L sous la forme d'une série modale et approchée à gauche de Σ_L à l'aide d'éléments finis. L'idée dans

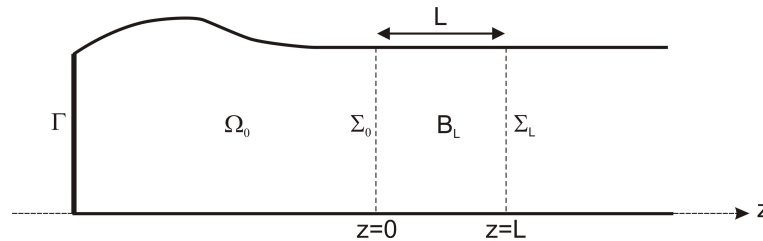


FIGURE 7.1 – La géométrie

ce chapitre est de généraliser cette approche, en autorisant un recouvrement entre la zone éléments finis et la zone modale. On va donc introduire une représentation modale à partir de la frontière Σ_0 tout en utilisant des éléments finis dans tout le domaine Ω_L . La zone de recouvrement correspond au tronçon de guide B_L . L'intérêt de cette généralisation est double :

- Tout d'abord, cela va nous permettre de concevoir facilement diverses conditions transparentes, dont nous pourrons comparer les avantages du point de vue de l'erreur de troncature par exemple. Cette approche est particulièrement utile pour les problèmes vectoriels (guides électromagnétiques ou élastiques) qui ne sont pas abordés ici.
- Par ailleurs, ces formulations avec recouvrement sont bien adaptées à une résolution itérative du système linéaire, permettant d'éviter l'inversion directe d'une matrice partiellement pleine. On verra cela en fin de chapitre.

7.1 Formulation DtN avec recouvrement

Nous allons commencer par introduire un recouvrement dans la condition DtN vue aux chapitres 3 et 5.

7.1.1 Définition de l'opérateur DtN avec recouvrement

Comme toujours, nous considérons pour simplifier le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } p & \text{solution sortante de} \\ \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (7.1)$$

où g est une fonction donnée de $L^2(\Gamma)$. On suppose que k est tel que le problème est bien posé.

On sait que la solution p admet la représentation suivante :

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n z} \quad \text{pour } z > 0. \quad (7.2)$$

L'idée est alors simplement d'imposer sur la frontière Σ_L du domaine de calcul la condition suivante, obtenue en dérivant l'expression précédente :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = \sum_{n=0}^{+\infty} i\beta_n (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n L}.$$

Attention, les coefficients modaux sont donc calculés à partir de la trace de p en $z = 0$ alors que la dérivée normale est calculée en $z = L$, d'où la présence des coefficients $e^{i\beta_n L}$. Ceci nous conduit à définir l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann avec recouvrement suivant :

$$T^L : \left\{ \begin{array}{l} H^{1/2}(\Sigma_L) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_L) \\ \psi \mapsto T^L \psi = \sum_{n \geq 0} i\beta_n (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} e^{i\beta_n L} \varphi_n \end{array} \right. \quad (7.3)$$

et le problème en domaine borné consiste à chercher $p \in H^1(\Omega_L)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus (\Gamma \cup \Sigma_L), \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = T^L p & \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \sum_{n \geq 0} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{cases} \quad (7.5)$$

On peut remarquer que le terme de bord va conduire à un couplage entre les degrés de liberté situés sur Σ_0 et les degrés de liberté situés sur Σ_L .

7.1.2 Equivalence avec le problème initial

Il convient de vérifier qu'une solution du problème (7.4) est bien la restriction d'une solution du problème initial (7.1). Contrairement au cas de la formulation sans recouvrement, on va voir que cela n'est pas toujours vrai ! En effet, soit p^L une solution de (7.4) et p^∞ la fonction définie dans le guide semi-infini $z > 0$ par :

$$p^\infty(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n z}.$$

On a clairement :

$$p^L = p^\infty \text{ sur } \Sigma_0. \quad (7.6)$$

Par ailleurs, la condition aux limites satisfaite par p^L sur Σ_L s'écrit aussi :

$$\frac{\partial p^L}{\partial \nu} = \frac{\partial p^\infty}{\partial \nu} \text{ sur } \Sigma_L. \quad (7.7)$$

La difficulté vient du fait que l'on ne raccorde pas p^L et p^∞ en valeur et en dérivée normale sur la même frontière. On ne peut donc pas directement fabriquer une solution p du problème initial (7.1) en prolongeant p^L par p^∞ . Ou plutôt, on ne peut le faire que si on vérifie au préalable que p^L et p^∞ coïncident dans la zone de recouvrement B_L . Ceci conduit au théorème suivant :

Théorème 7.1 *Les problèmes (7.1) et (7.4) sont équivalents (au sens où toute solution de (7.4) est la restriction à Ω_L d'une solution de (7.1), et réciproquement) si et seulement si le problème homogène suivant n'admet aucune solution non nulle :*

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } B_L, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial B_L \setminus \Sigma_0, \\ v = 0 & \text{sur } \Sigma_0. \end{cases} \quad (7.8)$$

DÉMONSTRATION. Montrons que si le problème (7.8) n'admet aucune solution non nulle, alors les problèmes (7.1) et (7.4) sont équivalents. La réciproque est vraie mais plus délicate et nous l'admettrons.

Il suffit de remarquer que si p^L est solution de (7.4), $p^L - p^\infty$ est solution de (7.8). Donc si (7.8) n'admet aucune solution non nulle, on a $p^L = p^\infty$ dans B_L et l'on peut définir une solution p de (7.1) comme suit :

$$p = p^L \text{ dans } \Omega_L \text{ et } p = p^\infty \text{ dans } \Omega \cap \{z > L\}.$$

□

Il nous faut donc étudier le problème (7.8). On peut le voir comme un problème de valeurs propres, k^2 jouant le rôle de la valeur propre. C'est un problème qui relève de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte, d'où le lemme suivant :

Lemme 7.2 *Les valeurs de k^2 telles que le problème (7.8) admet une solution non nulle forment une suite (k_n^2) tendant vers $+\infty$. Plus précisément, le problème (7.8) admet des solutions non nulles si et seulement si*

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N} \text{ tels que } k^2 = \lambda_n + \frac{1}{L^2} \left(\frac{\pi}{2} + m\pi \right)^2$$

où la suite λ_n est définie par (5.2).

DÉMONSTRATION. Par séparation de variables, on vérifie que les solutions non nulles de (7.8) sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$v(x, y, z) = \varphi_n(x, y) \sin(\beta_n z) \text{ avec } \beta_n L = \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi.$$

Le résultat s'en déduit.

□

On déduit finalement du théorème 7.1 et du lemme 7.2 le

Corollaire 7.3 *Les problèmes (7.1) et (7.4) sont équivalents si et seulement si*

$$k^2 \notin \left\{ \lambda_n + \frac{1}{L^2} \left(\frac{\pi}{2} + m\pi \right)^2 ; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

On peut remarquer que l'on peut toujours, à k fixé, choisir la longueur L telle que l'équivalence soit assurée.

7.1.3 Compacité de l'opérateur DtN avec recouvrement

Pour l'étude théorique de la formulation avec recouvrement (7.5), on ne peut pas procéder comme au chapitre 3 car les termes de la série

$$\sum_{n \geq 0} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}$$

n'ont pas une partie réelle de signe donné lorsque $q = p$ comme c'était le cas pour la formulation sans recouvrement. On a donc perdu une propriété intéressante, mais heureusement, cela est compensé par un autre avantage. C'est cette fois la présence des termes $e^{i\beta_n L}$, qui tendent vers 0 avec n , qui va nous aider. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 7.4 *Soit K l'opérateur linéaire continu sur $H^1(\Omega_L)$ défini par :*

$$(Kp, q)_{H^1(\Omega_L)} = \sum_{n \geq 0} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}.$$

Alors K est un opérateur compact sur $H^1(\Omega_L)$.

DÉMONSTRATION. Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur K_N par :

$$(K_N p, q)_{H^1(\Omega_L)} = \sum_{0 \leq n \leq N} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}.$$

Il est facile de voir que K_N est compact puisqu'il est de rang fini. Il suffit alors de montrer que K tend vers K_N en norme d'opérateurs (en effet, toute limite de suite d'opérateurs de rang fini est compacte). Or on a :

$$\begin{aligned} \|(K - K_N)p\|_{H^1(\Omega_L)}^2 &= ((K - K_N)p, (K - K_N)p)_{H^1(\Omega_L)} \\ &= \sum_{n > N} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \overline{((K - K_N)p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)}} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\|(K - K_N)p\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C \max_{n > N} |e^{i\beta_n L}| \|p\|_{H^1(\Omega_L)} \quad (7.9)$$

d'où le résultat car

$$e^{i\beta_n L} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

□

On déduit du lemme précédent le

Lemme 7.5 *La formulation (7.5) relève de l'alternative de Fredholm.*

7.1.4 Estimation de l'erreur de troncature de la série

En pratique, lorsqu'on cherche à approcher la solution de (7.5) par éléments finis, on procède comme dans le chapitre 5, c'est à dire que l'on tronque la série en ne conservant

que les N premiers termes, où N est choisi de sorte que l'on conserve tous les modes propagatifs. On résout donc le problème tronqué suivant :

$$\begin{cases} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \sum_{0 \leq n \leq N} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{cases} \quad (7.10)$$

Mais cette fois, l'étude de l'erreur produite par la troncature se fait beaucoup plus simplement que dans le cas sans recouvrement. En effet, on n'a pas besoin de se ramener à un problème posé dans le sous-domaine fixe Ω_0 pour faire apparaître les termes exponentiels, puisqu'ils sont déjà présents dans la formulation.

Notons p la solution de (7.5) et p_N la solution de (7.10). En utilisant l'estimation (7.9) et en procédant comme dans le paragraphe 5.3, on établit le

Théorème 7.6 *Il existe $N_0 \geq \mathcal{N}_{prop} - 1$ tel que si $N \geq N_0$, alors le problème (7.10) tronqué au rang N est bien posé et sa solution tend vers la solution p du problème initial (7.4) dans $H^1(\Omega_L)$. Plus précisément, l'erreur $(p_N - p)$ satisfait l'estimation suivante :*

$$\|p_N - p\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C e^{-\sqrt{\lambda_{N+1} - k^2} L}$$

pour une constante C qui ne dépend que de la géométrie et de la source g .

On peut remarquer en comparant au théorème 5.6 deux différences : d'une part l'erreur porte maintenant sur tout le domaine Ω_L et non plus seulement sur le domaine Ω_0 , d'autre part le terme $e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1} - k^2} L}$ a été remplacé par $e^{-\sqrt{\lambda_{N+1} - k^2} L}$. Ces deux points sont liés. En effet, l'erreur qui est en $e^{-\sqrt{\lambda_{N+1} - k^2} L}$ au bord Σ_L est elle même multipliée par $e^{-\sqrt{\lambda_{N+1} - k^2} L}$ lorsqu'elle se "propage" jusqu'à Σ_0 , où elle n'est plus que en $e^{-2\sqrt{\lambda_{N+1} - k^2} L}$.

7.2 Autres formulations avec recouvrement

L'introduction d'une zone de recouvrement permet de définir de nombreuses conditions transparentes autres que Dirichlet to Neumann. Nous en donnons deux exemples dans cette section.

7.2.1 Condition de Neumann to Neumann avec recouvrement

On peut par exemple écrire une condition Neumann to Neumann. L'idée est de calculer la dérivée normale de p sur Σ_L à partir de sa dérivée normale sur Σ_0 . Dans la zone B_L , on sait que p admet une représentation de la forme suivante :

$$p(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n z} \quad (7.11)$$

où on l'a noté a_n l'amplitude complexe du mode n . On en déduit que :

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(i\beta_n)\varphi_n(x, y)$$

d'où, par identification :

$$a_n = \frac{1}{i\beta_n} \left(\frac{\partial p}{\partial z}, \varphi_n \right)_{L^2(\Sigma_0)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La condition aux limites sur Σ_L devient alors :

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial p}{\partial z}, \varphi_n \right)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n L} \quad \text{sur } \Sigma_L. \quad (7.12)$$

La difficulté est qu'il faut donner un sens à $\left(\frac{\partial p}{\partial z}, \varphi_n \right)_{L^2(\Sigma_0)}$ pour une fonction p dans $H^1(\Omega_L)$. Pour cela, on introduit une fonction de troncature χ qui vérifie :

$$\chi \in H^1(B_L), \quad \chi = 1 \text{ sur } \Sigma_0 \text{ et } \chi = 0 \text{ sur } \Sigma_L.$$

En appliquant la formule de Green suivante :

$$\int_{\partial B_L} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\gamma = \int_{B_L} (\Delta u v + \nabla u \cdot \nabla v)$$

à $u = p$ (où p est la solution du problème initial) et $v = \chi\varphi_n$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}, \varphi_n \right)_{L^2(\Sigma_0)} = \int_{B_L} (k^2 p \chi \varphi_n - \nabla p \cdot \nabla(\chi \varphi_n)).$$

Contrairement au terme de gauche, le terme de droite a bien un sens dès que p appartient à $H^1(\Omega_L)$. Finalement, la formulation du problème avec condition NtN sera donc la suivante :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = T^{NtN} p & \text{sur } \Sigma_L, \end{cases} \quad (7.13)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} H^1(\Omega_L) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_L) \\ \psi \mapsto T^{NtN} \psi = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{B_L} (k^2 \psi \chi \varphi_n - \nabla \psi \cdot \nabla(\chi \varphi_n)) \right) \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n L} \end{cases} \quad (7.14)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \\ \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n L} \left(\int_{B_L} (k^2 p \chi \varphi_n - \nabla p \cdot \nabla (\chi \varphi_n)) \right) (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{array} \right. \quad (7.15)$$

Cette fois, le terme de bord va conduire à un couplage entre les degrés de liberté situés dans un voisinage de Σ_0 (éventuellement une seule couche d'éléments finis) et les degrés de liberté situés sur Σ_L .

On pourra en guise d'exercices étudier cette formulation, comme on l'a fait plus haut pour la condition DtN avec recouvrement. On pourra aussi décrire d'autres conditions telles que Dirichlet to Dirichlet, ou Neumann to Dirichlet.

7.2.2 Condition de Dirichlet to Robin avec recouvrement

Nous avons vu que la formulation Dirichlet to Neumann avec recouvrement n'est pas toujours équivalente au problème initial. Elle ne l'est que si k n'est pas une fréquence propre du problème (7.8). La même difficulté se présente pour la formulation Neumann to Neumann avec recouvrement. Un moyen d'assurer l'équivalence à toute fréquence consiste à imposer une condition aux limites de type Robin, avec un coefficient complexe, sur la frontière Σ_L . Plus précisément, on va chercher $p \in H^1(\Omega_L)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} + i\alpha p = T^{DtR} p & \text{sur } \Sigma_L, \end{array} \right. \quad (7.16)$$

où l'opérateur T^{DtR} est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{1/2}(\Sigma_0) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_L) \\ \psi \mapsto T^{DtR} \psi = \sum_{n \geq 0} i(\beta_n + \alpha) (\psi, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} e^{i\beta_n L} \varphi_n. \end{array} \right. \quad (7.17)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in H^1(\Omega_L), \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} (\nabla p \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p \bar{q}) - \sum_{n \geq 0} i(\beta_n + \alpha) e^{i\beta_n L} (p, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} \\ + i\alpha \int_{\Sigma_L} p \bar{q} d\gamma = \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{array} \right. \quad (7.18)$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 7.7 *Si le réel α est non nul, le problème (7.16) est toujours équivalent au problème initial (7.1).*

DÉMONSTRATION. On raisonne comme dans le paragraphe 7.1.2. Soit p^L une solution de (7.16) et p^∞ la fonction définie dans le guide semi-infini $z > 0$ par :

$$p^\infty(x, y, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p^L, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} \varphi_n(x, y) e^{i\beta_n z}.$$

Alors $v = p^L - p^\infty$ est solution dans B_L du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } B_L, \\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur } \partial B_L \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_L), \\ v = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} + i\alpha v = 0 & \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (7.19)$$

En multipliant l'équation par v , intégrant sur B_L et appliquant la formule de Green, on obtient l'identité suivante :

$$\int_{B_L} (|\nabla v|^2 - k^2 |v|^2) + i\alpha \int_{\Sigma_L} |v|^2 d\gamma = 0.$$

On termine alors comme dans la section 2.3.4 : on montre que

$$v = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$$

sur Σ_L d'où v est identiquement nul par application du théorème de Holmgren. □

7.3 Méthodes itératives de résolution

Le principal intérêt des formulations avec recouvrement que nous venons de présenter est qu'elles sont bien adaptées à une résolution itérative, où l'on inverse, à chaque itération, une matrice creuse. Nous nous contenterons de présenter les idées sur le cas de la méthode DtN avec recouvrement.

7.3.1 Algorithme de Schwarz pour la méthode DtN avec recouvrement

Une idée naturelle pour résoudre le problème (7.4) est d'appliquer l'algorithme itératif suivant où l'on a posé $p^{(0)} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p^{(m+1)} + k^2 p^{(m+1)} = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial p^{(m+1)}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus (\Gamma \cup \Sigma_L), \\ \frac{\partial p^{(m+1)}}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p^{(m+1)}}{\partial \nu} = T^L p^{(m)} & \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Il est clair que si cet algorithme converge, la limite sera la solution recherchée. On s'intéressera à la convergence dans le paragraphe suivant. Pour l'instant, nous allons commenter l'intérêt de cette approche.

A chaque itération, le problème variationnel à résoudre est le suivant, $p^{(m)}$ étant donné :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p^{(m+1)} \in H^1(\Omega_L) \text{ tel que } \forall q \in H^1(\Omega_L), \\ \int_{\Omega_L} (\nabla p^{(m+1)} \cdot \nabla \bar{q} - k^2 p^{(m+1)} \bar{q}) = \sum_{n \geq 0} i\beta_n e^{i\beta_n L} (p^{(m)}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_0)} (\bar{q}, \varphi_n)_{L^2(\Sigma_L)} + \int_{\Gamma} g \bar{q} d\gamma. \end{array} \right. \quad (7.21)$$

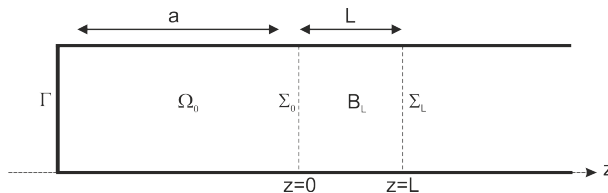
Après discrétisation par éléments finis, en reprenant des notations analogues à celle de la section 5.4, on doit inverser un système de la forme suivante :

$$(\mathbb{K} - k^2 \mathbb{M}) P^{(m+1)} = G + \mathbb{T} P^{(m)}.$$

La matrice à inverser $(\mathbb{K} - k^2 \mathbb{M})$ est creuse et peut être factorisée une fois pour toutes. La matrice \mathbb{T} contenant le bloc plein n'intervient qu'au second membre. Il faut juste être en mesure de calculer le produit matrice-vecteur $\mathbb{T} P^{(m)}$, ce qui peut se faire de façon efficace sans même assembler la matrice \mathbb{T} .

7.3.2 Etude de la convergence de l'algorithme de Schwarz dans un cas particulier

Nous allons considérer dans ce paragraphe une géométrie très simple dans laquelle les modes ne sont pas couplés entre eux.



Plus précisément, on suppose que Ω_L est défini comme suit :

$$\Omega_L = S \times] - a, L[$$

pour un certain $a > 0$. On note p la solution du problème exact (7.4) et $p^{(m)}$ la solution de (7.20) à l'itération m . Enfin, on note $e^{(m)} = p - p^{(m)}$ l'erreur à l'itération m . Par linéarité, $e^{(m)}$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta e^{(m+1)} + k^2 e^{(m+1)} = 0 & \text{dans } \Omega_L, \\ \frac{\partial e^{(m+1)}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_L \setminus (\Gamma \cup \Sigma_L), \\ \frac{\partial e^{(m+1)}}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial e^{(m+1)}}{\partial \nu} = T^L e^{(m)} & \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (7.22)$$

De plus, comme Ω_L est un tronçon de guide non perturbé, on sait que $e^{(m)}$ admet dans tout Ω_L une décomposition sur les modes aller et retour :

$$e^{(m)}(x, y, z) = \sum_{n \geq 0} (A_n^{(m)} e^{i\beta_n z} + B_n^{(m)} e^{-i\beta_n z}) \varphi_n(x, y).$$

On montre alors le résultat suivant :

Lemme 7.8

$$A_n^{(m+1)} = \zeta_n A_n^{(m)} \text{ et } B_n^{(m+1)} = \zeta_n B_n^{(m)}$$

où

$$\zeta_n = \frac{1 + e^{-2i\beta_n a}}{1 - e^{-2i\beta_n(a+L)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION. Les conditions aux limites sur Σ_{-a} et Σ_L se traduisent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant :

$$\begin{aligned} A_n^{(m+1)} e^{-i\beta_n a} - B_n^{(m+1)} e^{i\beta_n a} &= 0, \\ A_n^{(m+1)} e^{i\beta_n L} - B_n^{(m+1)} e^{-i\beta_n L} &= (A_n^{(m)} + B_n^{(m)}) e^{i\beta_n L}. \end{aligned}$$

La première équation nous dit que pour tout $m > 0$:

$$B_n^{(m)} = A_n^{(m)} e^{-2i\beta_n a},$$

et la seconde nous donne alors la relation :

$$A_n^{(m+1)} (e^{i\beta_n L} - e^{-i\beta_n(L+2a)}) = A_n^{(m)} e^{i\beta_n L} (1 + e^{-2i\beta_n a}).$$

Le lemme s'en déduit. □

Corollaire 7.9 *L'algorithme itératif (7.20) converge pour toute donnée g si et seulement si $|\zeta_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION. L'algorithme itératif (7.20) converge si et seulement si $e^{(m)}$ tend vers 0 avec m .

Remarquons tout d'abord que comme $\zeta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de n tels que $|\zeta_n| > 1$.

Si il existe n tel que $|\zeta_n| > 1$, en prenant $g = \varphi_n$, on trouve que $A_n^{(0)} \neq 0$ d'où

$$A_n^{(m)} = (\zeta_n)^m A_n^{(0)}$$

qui tend vers l'infini en module. Donc la méthode diverge.

Réciproquement, supposons que $|\zeta_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, on peut dire plus précisément qu'il existe $t \in [0, 1[$ tel que $|\zeta_n| \leq t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que

$$|A_n^{(m)}| \leq t^m |A_n^{(0)}| \text{ et } |B_n^{(m)}| \leq t^m |B_n^{(0)}|,$$

d'où la convergence de $e^{(m)}$ vers 0.

□

On remarque bien ici l'intérêt du recouvrement. En effet, si $L > 0$, comme on l'a dit, $\zeta_n \rightarrow 0$ avec n . Autrement dit, les modes évanescents d'ordre élevé convergent très vite. En revanche, si $L = 0$, $\zeta_n \rightarrow 1$ avec n , ce qui veut dire que les modes évanescents d'ordre élevé convergent de moins en moins bien lorsque n augmente.

Cependant, même avec un recouvrement, ce n'est pas gagné et il peut y avoir quelques valeurs de n pour lesquelles $|\zeta_n| > 1$. Ceci est résolu par l'utilisation d'un algorithme plus sophistiqué, l'algorithme GMRES développé par Yousef Saad et Martin H. Schultz en 1986. Cette algorithme est assuré de converger dès lors que seul un nombre fini de ζ_n ont un module supérieur à 1, et on observe sur la figure ci-dessous qu'il converge de mieux en mieux lorsque la longueur L du recouvrement augmente.

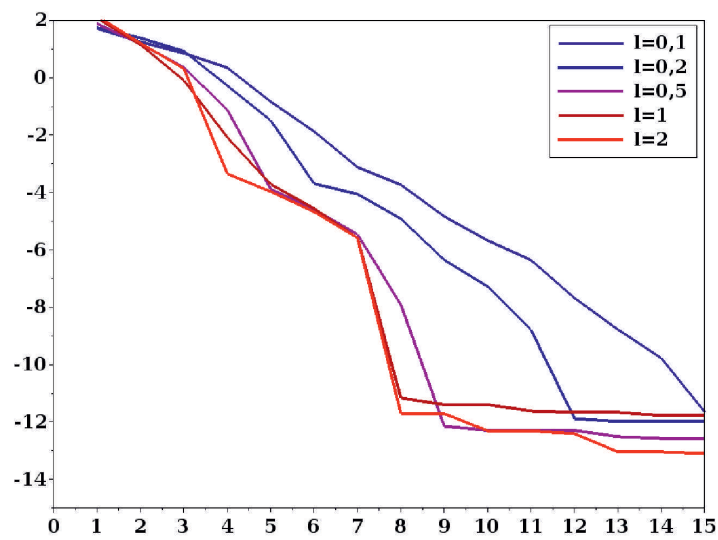


FIGURE 7.2 – Convergence de GMRES

Chapitre 8

Extensions et applications

8.1 Méthode multimodale

Jusqu'à présent, nous avons considéré un problème de guide fermé perturbé par un obstacle. On peut envisager un autre type de perturbation : des variations localisées de la section . On parle de guide à section variable. Dans ce cas, on va voir qu'il est possible de tirer parti de la structure modale de la solution et obtenir une méthode d'approximation hybride éléments finis/modale qui peut se révéler plus efficace dans certaines configurations, par exemple des guides longs à section faiblement variable.

8.1.1 Guide à section variable

Considérons un guide semi-infini de section variable:

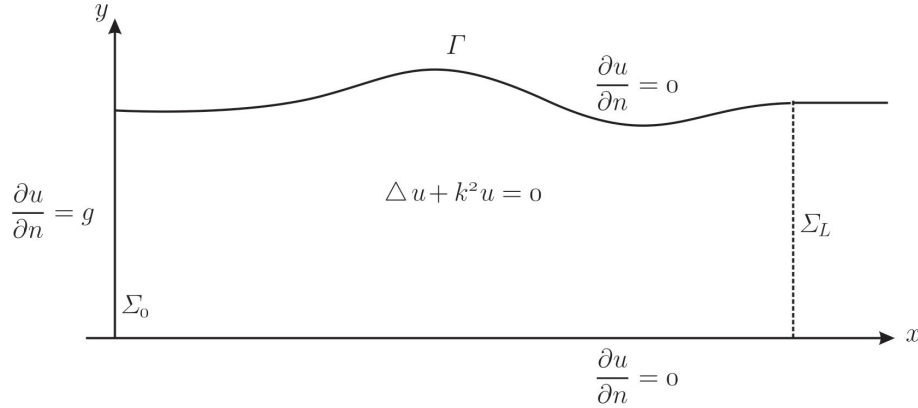
$$h(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ h_\infty & \text{si } x \geq L \end{cases} .$$

On supposera par la suite que $h \in C^1(\mathbb{R}^+)$ et que $h(x) \geq h_{\min} > 0, \forall x \geq 0$.

Nous considérons le domaine borné :

$$\Omega = \{(x, y) / x \in]0, L[, 0 \leq y \leq h(x)\}$$

de frontières $\Gamma = \{(x, y) / x \in]0, L[, y = h(x)\}$, $\Gamma_0 = \{(x, y) / x \in]0, L[, y = 0\}$, Σ_0 et Σ_L .



On considère à nouveau un problème de diffraction de même nature que (5.1) et on introduit directement le problème posé sur le domaine borné Ω , pour $g \in L^2(\Sigma_0)$:

$$(P) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \cup \Gamma_0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial u} = g & \text{sur } \Sigma_0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial u} = Tu & \text{sur } \Sigma_L \end{array}} \quad (8.1)$$

dont la formulation variationnelle dans $H^1(\Omega)$ est :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega - k^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, d\Omega - \langle Tu, \bar{v} \rangle_{\Sigma_L} = \int_{\Sigma_0} g \bar{v} \, d\Sigma \end{array} \right. \quad (8.2)$$

Ce problème est de type Fredholm et donc, sauf pour au plus un ensemble dénombrable de fréquences k , il admet une unique solution. Notre objectif est d'exposer une méthode hybride multimodale/éléments finis permettant de résoudre efficacement ce problème.

8.1.2 Principe de la méthode multimodale

L'idée de la méthode multimodale repose sur le fait que sur chaque section transverse $\Sigma_x = \{(x, y), \} / 0 \leq y \leq h(x)\}$, la trace de la solution u admet la décomposition suivante :

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 0} (u|_{\Sigma_L} | \varphi_n^x)_{L^2(\Sigma_L)} \varphi_n^x(y)$$

où $(\varphi_n^x)_n$ est la base orthonormale des fonctions propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ muni des conditions aux limites de Neumann sur Σ_x . Plus précisément, on a :

$$\varphi_n^x(y) = a_n \cos \frac{n\pi y}{h(x)} \text{ et } \lambda_n^x = \left(\frac{n\pi}{h(x)} \right)^2.$$

L'idée de la méthode multimodale consiste alors à chercher la solution u sous la forme :

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \varphi_n^x(y),$$

les inconnues étant les fonctions $(u_n(x))_{n \geq 0}$.

Avant de continuer plus avant, nous allons opérer un changement de variable sur le problème qui va nous permettre d'avoir une vision plus simple des choses

8.1.3 Approximation multimodale

On introduit le changement de variable suivant :

$$\mathcal{H} : (x, y) \in \Omega \rightarrow (X = x, Y = \frac{y}{h(x)}) \in]0, L[\times]0, 1[.$$

et on pose :

$$A =]0, L[, \quad B =]0, 1[, \quad B_0 = \{0\} \times B, \quad B_L = \{L\} \times B \\ U(X, Y) = u(x, y), \quad G(Y) = g(y)$$

Après changement de variable, le problème (8.2) devient :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } U \in H^1(A \times B), \text{ tel que } \forall V \in H^1(A \times B) \\ \int_{A \times B} (\mathbb{H} \nabla U) \cdot \nabla \bar{V} - k^2 \int_{A \times B} h U \bar{V} - \int_{B_L} T U \bar{V} = h(0) \int_{B_0} G \bar{V} \end{array} \right., \quad (8.3)$$

avec $\mathbb{H}(X, Y)$ la matrice définie par :

$$\mathbb{H}(X, Y) = h(X) \begin{bmatrix} 1 & -Y \frac{h'(X)}{h(X)} \\ -Y \frac{h'(X)}{h(X)} & 1 + \frac{(Y h'(X))^2}{h^2(X)} \end{bmatrix}.$$

On a ainsi transformé un problème à coefficients constants posé sur un domaine à section variable en un problème à coefficients variables posé sur un domaine à section constante. L'intérêt réside dans le fait que la base sur lequel on décompose (et accessoirement l'espace fonctionnel sur lequel on va travailler) ne dépend plus de la fonction h .

Reprenant l'idée de l'approche multimodale, la fonction U est de la forme :

$$U(X, Y) = \sum_{n \geq 0} U_n(X) \varphi_n(Y)$$

où cette fois, les fonctions $\varphi_n(y) = a_n \cos n\pi Y$ sont indépendantes de X !

Dans la pratique, on va tronquer à un certain rang N , la série précédente. Ce qui revient à dire que l'on va chercher une solution approchée U^N dans l'espace :

$$V_N = H^1(A) \otimes \underset{0 \leq n \leq N}{Vect} \{\varphi_n\} = \left\{ v(X, Y) = \sum_{0 \leq n \leq N} v_n(X) \varphi_n(Y), \forall n \quad v_n \in H^1(A) \right\}$$

Ce choix nous conduit à introduire la formulation variationnelle approchée :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } U^N \in V_N, \text{ tel que } \forall V \in V_N \\ \int_{A \times B} \mathbb{H} \nabla U^N \cdot \nabla \bar{V} - k^2 \int_{A \times B} h U_n \bar{V} - \int_{B_L} T U_N \bar{V} = h(0) \int_{B_0} G \bar{V} \end{array} \right. \quad (8.4)$$

En injectant l'expression de U^N et en choisissant des fonctions tests $V = v\varphi_n$, on obtient $\forall v \in H^1(A)$, $\forall m = 1, N$:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{0 \leq n \leq N} \left(\delta_{nm} \int_A h U_n' v' - \int_A h' U_n v' \int_B Y \varphi_n' \varphi_m - \int_A h' U_n v \int_B Y \varphi_n \varphi_m' \right. \\ \left. + \delta_{nm} \int_A \frac{n^2 \pi^2}{h} U_n v - k^2 \int_A h U_n v \delta_{nm} + U_n(L) v(L) \int_B T \varphi_n \bar{\varphi}_m \right) \\ = h(0) v(0) \int_B G \bar{\varphi}_m \end{array} \right. \quad (8.5)$$

Ce problème variationnel se réinterprète comme un système différentiel d'ordre 2 de dimension $N + 1$ portant sur les inconnues U_n muni de conditions initiale et finale.

On peut obtenir des estimations d'erreur précisant la qualité de l'approximation modale :

Théorème 8.1 *Si U est une solution régulière de (8.3) et U^N son approximation modale, alors $\forall \varepsilon > 0$:*

$$\|U - U_N\|_{H^1(A \times B)} \leq \frac{C}{N^{\frac{1}{2} - \varepsilon}} \left(\|U\|_{H^{3/2}(A \times B)} \right).$$

Cette estimation est optimale et montre la faible qualité de l'approximation. Ce résultat médiocre résulte du fait que l'on utilise une base de fonctions φ_n vérifiant $d_Y \varphi_n(1) = 0$ alors que la solution U ne vérifie pas une telle condition, puisque l'on a $\partial_\nu u = 0$ sur Γ qui lorsque la section varie n'implique pas $\partial_Y U = 0$! On obtient un résultat qui peut paraître surprenant au premier abord :

$$\partial_Y \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n \leq N} U_n(X) \varphi_n(0) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_Y \sum_{n \leq N} U_n(X) \varphi_n(0) = 0!$$

En fait, la série précédente ne converge que dans H^1 , ce qui est insuffisant pour prendre la trace de la dérivée normale! Le problème se perçoit plus précisément dans la démonstration dont nous donnons ici les grandes lignes.

DMS. Le problème est du type coercif +compact et on a donc l'estimation de type Cea suivante :

$$\|U - U_N\|_V \leq C \inf_{V \in V_N} \|U - V\|_V.$$

On note \mathcal{A} l'opérateur non borné $-\frac{d^2}{dx^2}$ muni des conditions aux limites de Neumann sur B et Π_N le projecteur orthogonal de V sur V_N . On considère $V \in H^1(A) \otimes D(\mathcal{A}^r)$.

Comme $\mathcal{A}^r V(X, \cdot) \in L^2(B)$, V vérifie :

$$\int_A \left(\sum_{n>N} \lambda_n^{2r} |V_n(X)|^2 + \sum_{n>N} \lambda_n^{2r} |V'_n(X)|^2 \right) < \infty.$$

On a alors l'estimation suivante (on l'admet)

$$\|V - \Pi_N V\|_{H^1(A \times B)} \leq C N^{1-2r} \left(\|V\|_{H^1(X) \otimes D(\mathcal{A}^r)} \right).$$

Par ailleurs on montre que :

$$D(\mathcal{A}^r) = \begin{cases} H^{2r}(B) & \text{if } r < 3/4 \\ \{v \in H^{2r}(B), v'(0) = v'(1) = 0\} & \text{if } 3/4 < r < 7/4 \\ \{v \in H^{2r}(B), v'(0) = v'(1) = v'''(0) = v'''(1) = 0, \} & \text{if } 7/4 < r < 11/4 \end{cases} .$$

Les résultats de régularité standard montre que $U \in H^1(X) \otimes D(\mathcal{A}^r)$ avec $r < \frac{3}{4}$ et pas mieux car U ne vérifie pas la condition aux limites $\frac{\partial}{\partial Y} U = 0$. Ce qui donne le résultat annoncé. □

Faisons quelques remarques.

- Tout d'abord, la perte de convergence est liée à la condition de Neumann sur la frontière Γ . Sur la frontière Γ_0 (qui est droite), le problème ne se pose pas. Ainsi, dans le cas d'un guide droit (pour lequel cette méthode n'a aucun intérêt), on aurait une bien meilleure convergence.
- Si au lieu d'une condition de Neumann sur Γ on avait considéré une condition de Dirichlet, on aurait également obtenu une bien meilleure convergence en utilisant, bien évidemment, la base spectrale associée au problème de Dirichlet !
- On peut améliorer la convergence de la méthode en introduisant une fonction auxiliaire $\varphi_{-1}(Y)$ qui est telle que $\frac{\partial}{\partial Y} \varphi_{-1}(1) = 1$ (par exemple la première fonction propre du problème de Dirichlet transverse). On cherche alors une approximation de U de la forme :

$$\tilde{U}^N(X, Y) = U_{-1}(X) \varphi_{-1}(y) + \sum_{n \leq N} U_n(X) \varphi_n(Y);$$

l'introduction de la fonction supplémentaire étant destinée à "capter" la dérivée $\partial_Y U(X, 1)$! On obtient dans ce cas une estimation de convergence en $\frac{C}{N^{5/2-\varepsilon}}$ ce qui est assez bon ! [2008]

8.1.4 Méthode hybride EF/Modal

Donnons quelques indications sur la façon dont on peut résoudre le problème approché (8.5). Les inconnus de ce problème sont les $(N + 1)$ fonctions $U_n \in H^1(A)$. Une idée

naturelle consiste à les approcher par une méthode d'éléments finis de Lagrange 1D. Si on note, $(\varphi_i)_{i=1,P}$ les fonctions de base de cette approximations éléments finis, on est donc amené à chercher des approximations de U_n de la forme :

$$U_n^h = \sum_{n \leq N} \sum_{i=1,P} U_n^i \varphi_i(X) \varphi_n(Y),$$

soit encore à considérer le problème variationnel (8.3) dans l'espace d'approximation :

$$V_N^h = \text{vect}(\varphi_i)_{i=1,P} \otimes \text{Vect} \{\varphi_n\}_{0 \leq n \leq N}.$$

On montre que ce problème est alors équivalent à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\mathbb{A}Z = B$$

où Z est le vecteur de dimension $q = P \times (N+1)$ des inconnues U_n^i , B un vecteur second membre et \mathbb{A} une matrice d'ordre q ayant une structure tridiagonale (en éléments finis P1) de blocs pleins.

8.2 Quelques applications des méthodes multimodales

Nous donnons quelques exemples de l'utilisation de méthodes numériques impliquant l'approche multimodale.

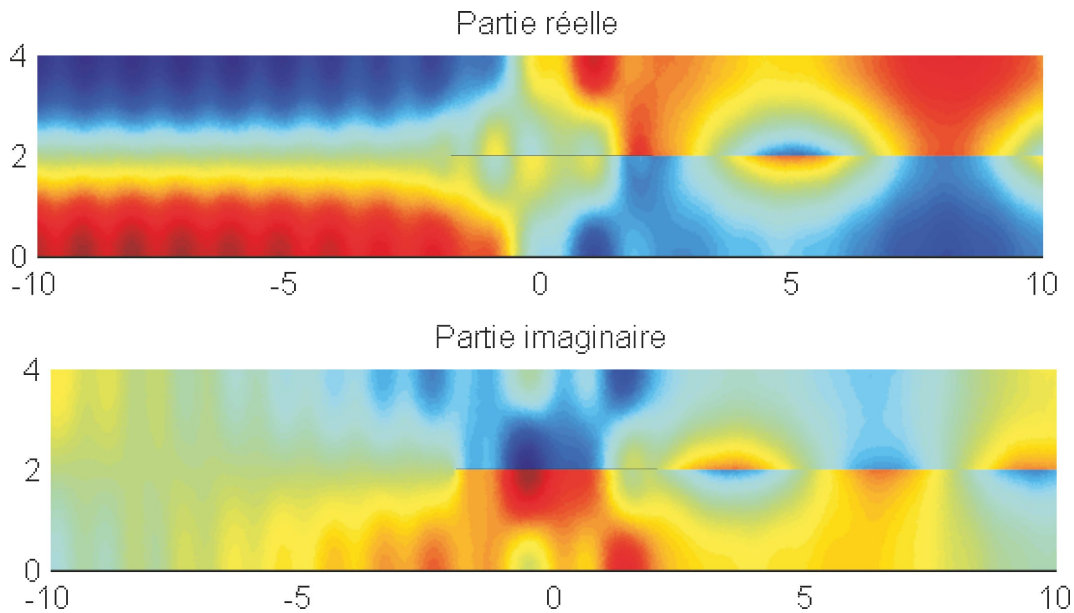
8.2.1 Acoustique en écoulement

Dans cet exemple, on cherche à déterminer les perturbations acoustiques induites par une plaque d'épaisseur nulle en présence d'un écoulement uniforme dans un guide droit D de bord ∂D . Le modèle utilisée est celui de l'équation de Hemholtz convectée, posé en potentiel des vitesses de part et d'autre de la ligne de plaque Γ (hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement). Au bord de fuite, une condition de Kutta-Joukowski (vitesse bornée) est imposée, ce qui induit un saut du potentiel sur le demi-droite (S) issue du point de fuite et par conséquent, une ligne de rotationnalité dans l'écoulement que l'on appelle encore sillage acoustique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0 & \text{sur } D/(S \cup \Gamma) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 & \text{sur } \partial D \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi_{inc}}{\partial y} & \text{sur } \Gamma \\ [\varphi]_S = F e^{i \frac{k}{M} x} \text{ et } \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_S = 0 & \text{sur } S \end{array} \right.$$

k désigne le nombre d'onde, M le nombre de Mach, φ_{inc} un potentiel incident (mode du guide) et F est une inconnue du problème représentant l'amplitude du sillage.

Les résultats numériques qui sont présentés ici ont été obtenus par une approximation par élément fini couplée à une méthode d'éléments finis localisés permettant de prendre en compte l'infini. Une autre méthode de type éléments finis localisés a été utilisée pour coupler le calcul éléments/finis à une représentation en série de la solution au voisinage des bords de fuite et d'attaque à l'aide de série, permettant de déterminer le coefficient F . Sur la figure ci-dessous nous présentons la partie réelle et la partie imaginaire du potentiel obtenue, lorsque l'on injecte le deuxième mode dans le guide pour une fréquence $k = 0.9$ et un nombre de Mach $M = \sqrt{3}/2 \simeq 0.866$. On observe d'une part, le phénomène Doppler bien connu (décalage fréquentiel dû à l'écoulement) ainsi que le phénomène de sillage.



8.2.2 Optimisation de forme d'un guide d'onde

Nous illustrons l'utilisation de la méthode hybride dans le contexte de l'optimisation de forme d'un guide d'onde. Plus précisément, on cherche à déterminer la forme du guide d'onde, permettant par exemple, de générer en sortie du guide un mode donné (indice d) alors qu'on injecte en entrée un mode différent (indice i). C'est un convertisseur de modes. On peut formuler ce problème comme un problème d'optimisation de forme : trouver la fonction de forme $h : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $h(0) = h(L) = h_0$ (section du guide à l'entrée et à la sortie) et $h'(0) = h'(L) = 0$ (raccord régulier avec des guides de section droite) qui maximise le module du mode d en sortie ($x = L$) :

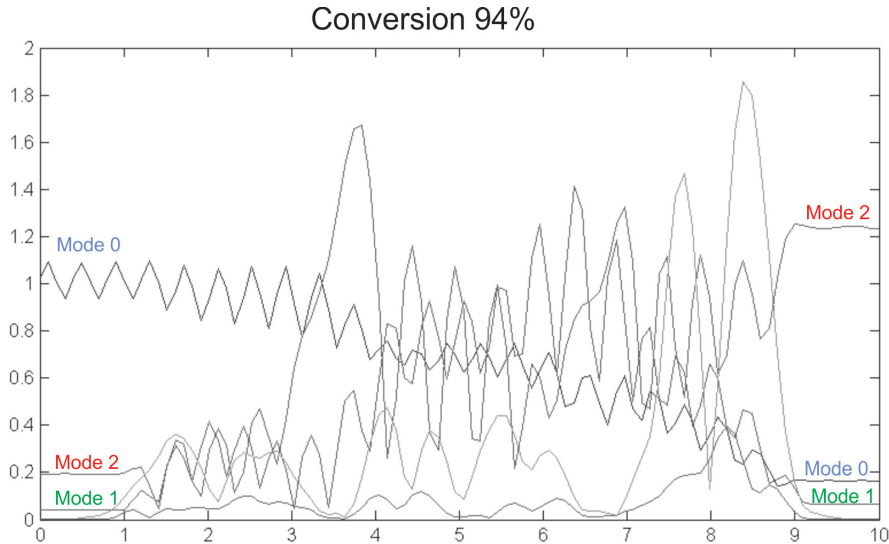
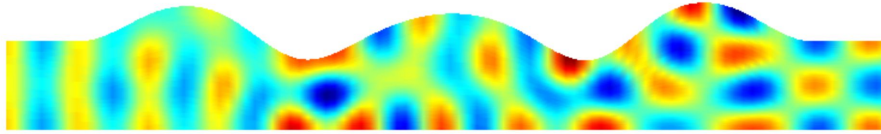
$$\max_h |(u|_{x=L}, w_d)|^2$$

avec u solution de (8.2). En choisissant une classe de forme particulière, par exemple les fonctions splines cubiques sur les abscisses $(x_k)_{k=0,K+1}$ avec $x_0 = 0$ et $x_{K+1} = L$ et en utilisant une approximation hybride éléments finis/modal, on aboutit un problème d'optimisation en dimension finie :

$$\max_{H \in \mathbb{R}^K} |(U_d^I)|^2$$

où U_d^I représente l'approximation au point $x = L$ de l'amplitude du mode d , U solution du problème (8.5) et H le vecteur dont les composantes sont les valeurs de la fonction spline h aux points $(x_k)_{k=1,K}$. Ce problème d'optimisation est assez délicat à résoudre car la fonction à maximiser est fortement non concave et possède une multitude de maxima locaux et est donc difficile à maximiser par les algorithmes d'optimisation usuels. Il est nécessaire de mettre en œuvre des techniques de sur-itération permettant de trouver une solution satisfaisante (quasi-optimale).

Nous présentons ci-après l'exemple d'un convertisseur 0-2 "quasi-optimal" obtenu et la représentation de la partie réelle de la pression correspondante ainsi que l'évolution de l'amplitude des modes propagatifs le long de l'axe de propagation.



Amplitude des modes

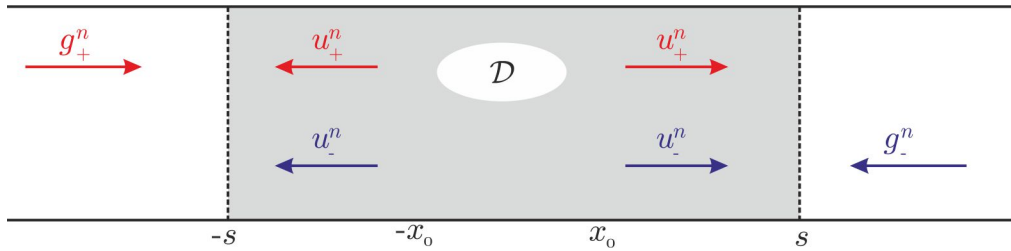
On observe que la forme obtenue n'est pas du tout triviale et difficile à intuitier. En particulier, la conversion du mode 0 et mode 2 n'est pas directe puisqu'au cours de la

transition les autres modes (le mode 1 en particulier) sont excités de façon importante. Le rendement obtenu est de l'ordre de 94% ce qui compte-tenu de la faible longueur du guide est un bon résultat.

8.2.3 Imagerie dans un guide d'onde

Imager des défauts dans un guide d'onde acoustique à l'instar d'une radiographie ou d'une échographie n'est pas une chose si facile. En effet, si il y a peu de modes propagatifs on ne dispose que de peu d'information. On ne peut pas tirer partie des modes évanescents car très rapidement ils sont atténués et couverts par les bruits de mesure. Une technique récente d'imagerie des défauts est la *Linear Sampling Method* dont la philosophie consiste à évaluer une fonction permettant de caractériser le fait qu'un point du guide se trouve ou non dans le défaut. Nous allons décrire brièvement le principe de cette méthode et la forme qu'elle prend dans un contexte modal [2008, 2011].

Supposons qu'un défaut \mathcal{D} soit situé dans un guide de section h entre les abscisses $-x_0$ et $x_0 > 0$ et supposons que l'on sache mesurer des champs diffractés sur les sections $\Sigma_{\pm s}$ avec $s > x_0$. Plus précisément, on suppose que l'on a accès au champ u_{\pm}^n diffracté par l'obstacle lorsqu'il est soumis au mode propagatif du guide (sans obstacle) $g_{\pm}^n(x, y) = \varphi_n(y)e^{\pm i\beta_n x}$ où $+$ (resp. $-$) correspond à un mode se propageant suivant les x positif (resp. négatif).



Ces champs diffractés sont solutions du problème ($G = R \times]0, h[$) :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u_{\pm}^n = 0 & \text{dans } G \setminus \overline{\mathcal{D}} \\ \partial_n u_{\pm}^n = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u_{\pm}^n = -g_{\pm}^n & \text{sur } \partial\mathcal{D} \\ \partial_n u_{\pm}^n = T^{\pm}u_{\pm}^n & \text{sur } \Sigma_{\pm s}, \forall s > x_0 \end{cases} \quad (8.6)$$

où T^{\pm} désigne l'opérateur de Dirichlet to Neumann sur $\Sigma_{\pm s}$ (indépendant de s).

Rappelons que la fonction de Green de l'équation de Helmholtz dans un guide d'onde 2D (source placé au point $M = (x_M, y_M)$) :

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2)G(\cdot, M) = \delta_M & \text{dans } G \\ \partial_{\nu} G(\cdot, M) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_{\nu} G(\cdot, M) = T^{\pm}G(\cdot, M) & \text{sur } \Sigma_{\pm s}, \forall s > y \end{cases}$$

est donnée par :

$$G(P, M) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n |x_M - x_P|}}{2i\beta_n} \varphi_n(y_M) \varphi_n(y_P). \quad (8.7)$$

Pour tout point M appartenant à $\Sigma_s \cup \Sigma_{-s}$, on considère le champ $G_d(P, M)$ diffracté par l'obstacle lorsqu'il est soumis au champ incident $G(P, M)$. En d'autres termes, $G_d(P, M)$ est la réponse, en présence de l'obstacle, à une source situé sur $\Sigma_s \cup \Sigma_{-s}$. C'est aussi la "partie" diffractée de la fonction de Green du guide en présence de l'obstacle qui vérifie les équations :

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2)G_d(\cdot, M) = 0 & \text{dans } G \\ \partial_\nu G_d(\cdot, M) = 0 & \text{sur } \Gamma \\ G_d(\cdot, M) = -G(\cdot, M) & \text{sur } \partial\mathcal{D} \\ \partial_\nu G_d(\cdot, M) = T^\pm G_d(\cdot, M) & \text{sur } \Sigma_{\pm s} \quad \forall s > y \end{cases}$$

La *linear sampling method* consiste à introduire l'opérateur F :

$$F : \begin{array}{ccc} L^2(\Sigma_s) \times L^2(\Sigma_{-s}) & \rightarrow & L^2(\Sigma_s) \times L^2(\Sigma_{-s}) \\ h = (h_+, h_-) & \rightarrow & \int_{\Sigma_{-s}} G_d(M, \cdot) h_+(M) ds(M) + \int_{\Sigma_s} G_d(\cdot, M) h_-(M) ds(M) \end{array}$$

et le problème suivant pour des points Q quelconque du guide :

$$\boxed{(Fh)(P) = G(P, Q) \quad \forall P \in \Sigma_s \cup \Sigma_{-s}.} \quad (8.8)$$

L'idée est la suivante : par construction Fh n'est jamais singulier en un point P appartenant à l'ouvert $] -s, s[\times]0, h[$ et approche toute solution régulière dans le guide. Par conséquent, si Q n'est pas un point situé dans l'obstacle \mathcal{D} , le problème précédent ne peut pas avoir de solution. On peut énoncer des résultats mathématiques plus précis qui sortent du cadre de ce cours. En pratique, on ne résoud pas le problème précédent mais un problème dit régularisé faisant intervenir un paramètre de régularisation ε :

$$(F^*F + \varepsilon I)h_\varepsilon = F^*G(\cdot, Q) \quad (\text{régularisation de Tichonov})$$

Ce problème est toujours bien posé. Le paramètre de régularisation peut être calé en fonction du niveau de bruit des mesures à l'aide du *principe de Morosov* que nous n'exposons pas ici. On s'attend à ce que la norme de la solution h_ε devienne grande lorsque le point Q n'appartient pas à \mathcal{D} . Concrètement, on choisit des points Q_{ij} sur une grille du domaine d'intérêt $] -s, s[\times]0, h[$, on résoud le problème régularisé pour chacun des points Q_{ij} et on représente la norme $L^2(\Sigma_s) \times L^2(\Sigma_{-s})$ (ou une fonction de cette norme) des solutions $h_{\varepsilon, ij}$ ce qui fournit une "image" du défaut.

Dans le cas des guides d'ondes on peut tirer parti de la structure modale. En effet, l'opérateur F nécessite en théorie la connaissance des fonctions de Green diffractés $G_d(M, \cdot)$ pour tout point $M \in \Sigma_s \cup \Sigma_{-s}$. En fait, ce n'est pas utile en pratique car ces fonctions admettent la décomposition modale suivante en dehors de l'obstacle :

$$\forall P \in G \setminus \overline{\mathcal{D}}, \quad G_d(P, M) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n |x_M|}}{2i\beta_n} \varphi_n(y_M) u_-^n(P) & \text{si } x_M = s > x_0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n |x_M|}}{2i\beta_n} \varphi_n(y_M) u_+^n(P) & \text{si } x_M = -s < -x_0. \end{cases}$$

où u_\pm^n sont les réponses modales de l'obstacle au champs incidents g_\pm^n . A partir de cette représentation modale et de celle de la fonction de Green du guide (8.7), il est possible

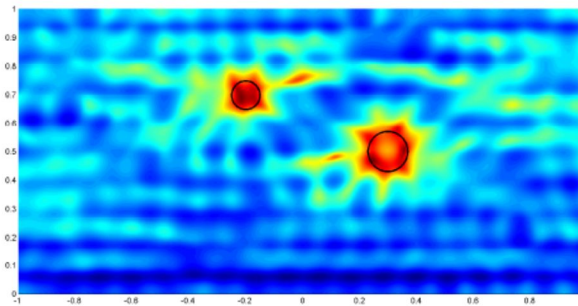
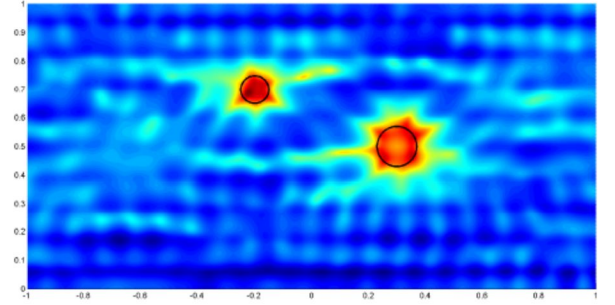
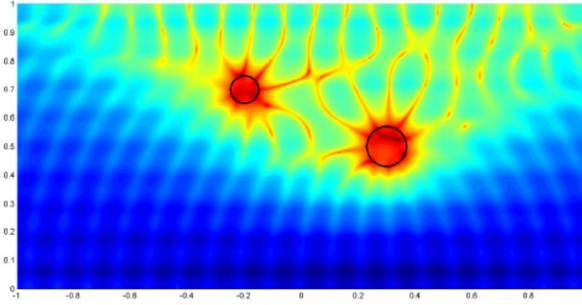
de réécrire l'équation de la *linear sampling method* (8.8) sous forme modale (système infini) :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n s}}{i\beta_n} ((U_+^n)^m h_-^n + (U_-^n)^m h_+^n) = \frac{e^{i\beta_m(s+x_Q)}}{i\beta_m} \varphi_m(y_Q) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n s}}{i\beta_n} ((U_+^n)^m h_-^n + (U_-^n)^m h_+^n) = \frac{e^{i\beta_m(s-x_Q)}}{i\beta_m} \varphi_m(y_Q). \end{cases}$$

où $(U_{\pm}^n)^m$ représente $(u_{\pm}^n, \varphi_m)_{\Sigma_{\pm s}}$ et $h_{\pm}^n = (h_{\pm}, \varphi_m)_{\Sigma_{\pm s}}$.

Dès que le point M s'éloigne de l'obstacle la contribution des modes évanescents devient négligeable ($e^{i\beta_n|x_M|} = e^{-|\beta_n||x_M|}$ pour un mode évanescent) de sorte que les termes de cette matrice correspondant à des indices $n, m \geq N$ (indice au delà duquel les modes sont évanescents) deviennent négligeables. Ils tendent d'ailleurs vers 0 avec n rendant le système de moins en moins inversible! Cette remarque rejoint le fait qu'à longue distance les modes évanescents ne sont plus significatifs et ne véhiculent donc aucune information pertinente dès qu'il y a du bruit dans le système. Dans la pratique on se restreint donc aux modes propagatifs et on utilise le système précédent tronqué ($m, n \leq N$). Il est à noter que le procédé est extrêmement rapide puisqu'il s'agit de résoudre un système linéaire d'ordre N , N étant assez faible en pratique.

Les figures suivantes montrent les images reconstruites avec respectivement 0%, 10% et 20% de bruit sur les données (réponses modales) pour la fréquence $k = 30$ (10 modes propagatifs).



On note que le processus de reconstruction est d'assez bonne qualité (on utilise ici 10 modes) et qu'il est robuste au bruit.

On peut également appliquer cette technique à des situations plus intéressantes telles que le cas de fissure ou encore celui d'obstacles pénétrables :

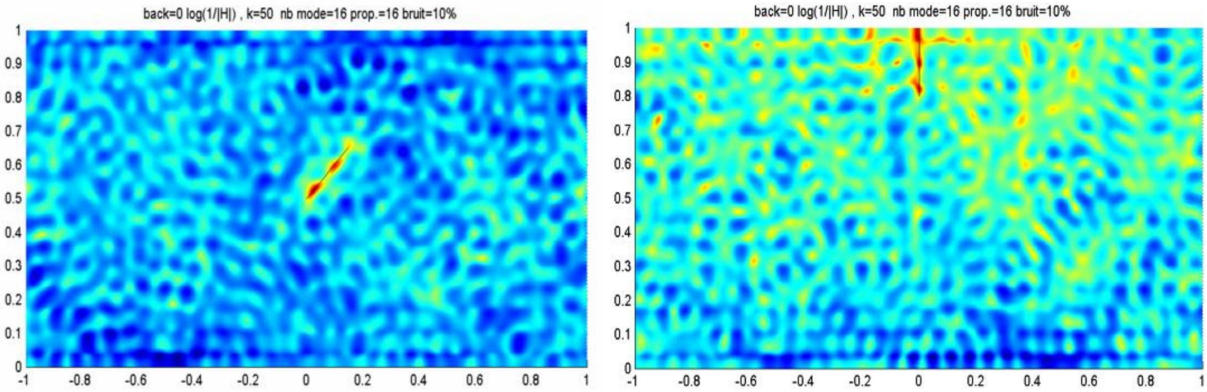


FIGURE 8.1 – Images de fissures

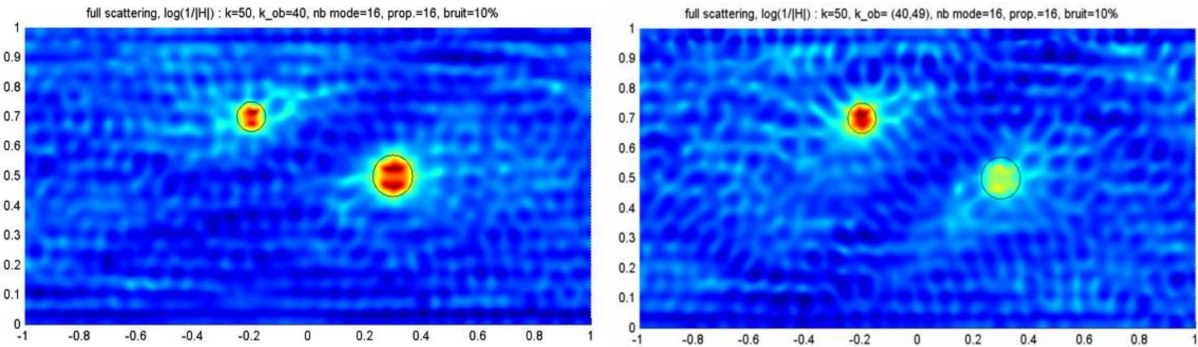


FIGURE 8.2 – Images d'obstacles pénétrables

Enfin, cette technique a été généralisée au cas de la propagation des ondes dans un milieu élastique (ultrasons) [2011]. La théorie est un peu plus complexe, en particulier la construction d'un opérateur de type DtN et, compte-tenu de l'aspect vectoriel du problème, il y a plusieurs équations LSM suivant les composantes du champ de déplacement ou de contraintes que l'on considère. En mixant différentes équations LSM, il est même possible dans le cas des fissures, d'améliorer de façon très significative l'image produite.

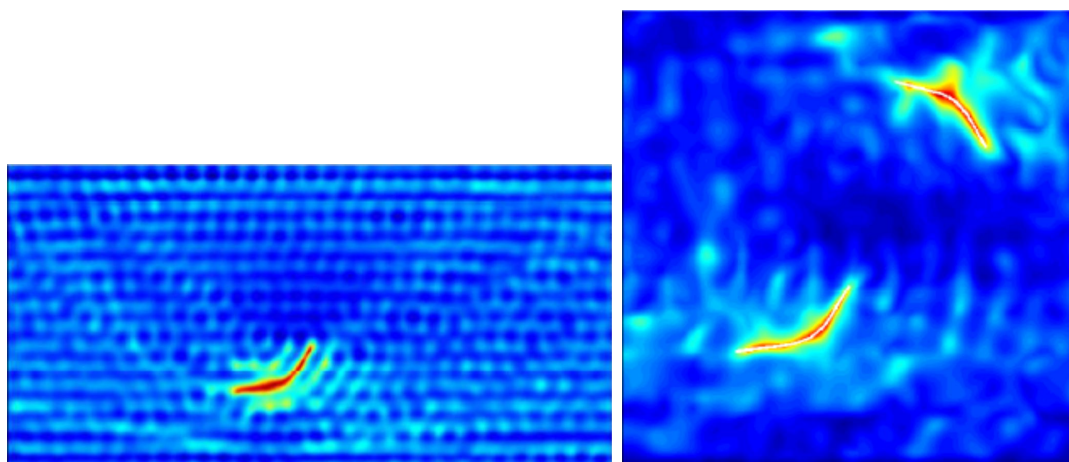


FIGURE 8.3 – Images de fissures élastiques

Bibliographie

- [1972] M. ABRAMOWITZ AND I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions*, Dover Publications, New York.
- [2004] E. BÉCACHE, A.-S. BONNET-BEN DHIA, AND G. LEGENDRE, *Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation*, SIAM J. Numer. Anal., 42 , pp. 409–433.
- [1994] J.-P. BÉRENGER, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114 , pp. 185–200.
- [2014] A.-S. BONNET-BENDHIA, C. CHAMBEYRON AND G. LEGENDRE , *On the use of perfectly matched layers in the presence of long or backward guided elastic waves* , Wave Motion, vol. 51(2), (2014) , pp 266–283.
- [2008] C. HAZARD AND E. LUNÉVILLE, *An improved multimodal approach for non uniform acoustic waveguides* , IMA Journal of Applied Math., vol. 73 (4), pp 668–690.
- [2008] L. BOURGEOIS AND E. LUNÉVILLE , *The Linear Sampling Method in a waveguide : a modal formulation* , Inverse Problems, vol. 24 (1), pp 015018.
- [2011] L. BOURGEOIS, F. LE LOUER AND E. LUNÉVILLE , *On the use of Lamb modes in the linear sampling method for elastic waveguides* , Inverse Problems, vol. 27, pp 055001.
- [1998] M. BRUNEAU, *Manuel d’acoustique fondamentale*, Hermes, Paris.
- [1987] R. DAUTRAY ET J.-L. LIONS (COORDINATEURS), *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 1 : modèles physiques*, Masson.
- [1994] P.J.T. FILIPPI (COORDINATEUR), *Acoustique Générale*, Collection d’Acoustique, Société Française d’Acoustique.
- [1992] D. GIVOLI, *Numerical methods for problems in infinite domains*, Elsevier.
- [1978] J. MIKLOWITZ, *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, Amsterdam.
- [1996] D. ROYER ET E. DIEULESAINT, *Ondes élastiques dans les solides*, Tome 1, Masson.