



**HAL**  
open science

# Une entrée dans les questions langagières relatives à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Christophe Hache

► **To cite this version:**

Christophe Hache. Une entrée dans les questions langagières relatives à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Séminaire national de didactique des mathématiques (ARDM), IREM de Paris, pp.11-22, 2023, 978-2-86612-406-9. hal-04116382

**HAL Id: hal-04116382**

**<https://hal.science/hal-04116382v1>**

Submitted on 8 Jun 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# UNE ENTREE DANS LES QUESTIONS LANGAGIERES RELATIVES A L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Christophe HACHE

LDAR, Université de Paris Cité

IREM de Paris

christophe.hache@u-paris.fr

## Résumé

Cet exposé fait suite à la soutenance de mon habilitation à diriger des recherches soutenue en décembre 2019. Je commencerai ici par exposer quelques exemples qui éclairent mes problématiques. Je présenterai ensuite certains outils et concepts qui étayent mon travail. Je terminerai en précisant les éclairages que me permettent les didactiques des langues.

## Mots clés

Pratiques langagières, didactique des langues, didactique des mathématiques

Mon habilitation à diriger des recherches a été soutenue le 16 décembre 2019 (Hache, 2019) sous le titre « Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ». Je reprends ici la présentation faite le 22 janvier 2021 au séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM. Dans ce texte je renverrai au texte de la note de synthèse si nécessaire et approfondirai les éléments développés pour cet exposé<sup>1</sup>. Je garde la même structure que pour la présentation orale et je commence ainsi par exposer quelques exemples qui éclairent mes problématiques. J'évoquerai ensuite quelques éléments concernant l'ancrage de mes questions et de mes recherches dans le champ de la didactique des mathématiques et certains outils et concepts qui étayent mon travail.

## I. EXEMPLES D'ANALYSES

### 1. « Courbes »

#### *Contexte*

Le contexte de cette étude est celui d'une collaboration initiée avec Cristelle Cavala (DILTEC, Université Sorbonne Nouvelle, sciences du langage, didactique des langues) ayant pour but la comparaison de nos outils d'analyses de texte. La recherche d'un corpus de textes nous a amenés vers un manuel en ligne, celui du site *exo7* (Exo7, 2016). Nous nous sommes

---

<sup>1</sup> Pour mémoire, l'exposé est archivé en vidéo sur le site de l'IREM de Paris : <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/65c71d2c-38d7-49a7-8245-ec8d74166d63>

notamment penchés sur le cours de première année de licence, entre autres le chapitre « Courbes paramétrées ».

Une des premières analyses effectuées a été quantitative, avec une recherche des occurrences de tous les mots. Un des premiers mots utilisés dans un sens non usuel les plus cités dans le chapitre était le mot « courbe ». Nous avons alors mené une étude des usages de ce mot, de ses différentes acceptions au cours du chapitre.

### Exemple d'usages, analyse lexicale

Je présente tout d'abord la 2<sup>ème</sup> page du chapitre, sur laquelle on trouve la définition mathématique d'une courbe paramétrée proposée par les auteurs.

## 1. Notions de base

### 1.1. Définition d'une courbe paramétrée

#### Définition 1.

Une **courbe paramétrée plane** est une application

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

d'un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi, une *courbe paramétrée* est une application qui, à un réel  $t$  (le *paramètre*), associe un point du plan. On parle aussi d'*arc paramétré*. On peut aussi la noter  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou écrire en abrégé  $t \mapsto M(t)$  ou  $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

Enfin en identifiant  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$ , on note aussi  $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$  avec l'identification usuelle entre le point  $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  et son affixe  $z(t) = x(t) + iy(t)$ .

(...)

Par la suite, une courbe sera fréquemment décrite de manière très synthétique sous une forme du type

$$\begin{cases} x(t) = 3 \ln t \\ y(t) = 2t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in ]0, +\infty[ \quad \text{ou} \quad z(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il faut comprendre que  $x$  et  $y$  désignent des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  ou que  $z$  désigne une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{C}$ . Nous connaissons déjà des exemples de paramétrisations.

*Figure 1. Exo7, 2016, p. 128. La figure n'est pas reproduite.*

On voit qu'une courbe est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . L'entrée n'est pas géométrique, même si dans le commentaire de la définition on parle de « points » et de « plans ».

On perçoit aussi sur cette page l'importance relative de la présence de symboles. Ces expressions symboliques ont d'abord un rôle illustrant ou reformulant le contenu d'une phrase (comme dans la définition). Le commentaire qui suit la définition porte notamment sur les notations, plusieurs formulations symboliques de la façon de présenter une courbe paramétrée sont proposées (les notations sont plus ou moins complexes, plus ou moins complètes<sup>2</sup>, certains présupposés des notations sont pointés<sup>3</sup>). Les symboles peuvent aussi désigner au fil de la phrase des objets, à la façon d'un nom propre : «  $x$  et  $y$  désignent des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  ». Enfin on retrouve des usages plus complexes déjà pointés par ailleurs (par exemple Hache et Mesnil, 2020) comme dans la phrase « l'identification usuelle entre le point  $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  et

<sup>2</sup> Certaines notations introduisent l'ensemble de définition de la fonction. Ou bien introduisent le nom de la fonction et un nom alternatif ( $f$  et  $M$ ), voire l'usage conjoint de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Certaines notations vont permettre d'explicitier une formule pour la fonction.

<sup>3</sup> Notamment l'identification nécessaire entre  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ .

son affixe  $z(t) = x(t) + iy(t)$  ». On voit bien dans cette dernière phrase que l'expression qui suit « le point » ne désigne pas un point, mais une égalité, cette égalité peut être vue comme une proposition relative (par exemple « le point  $M(t)$ , dont nous appellerons  $x(t)$  et  $y(t)$  les coordonnées »). Le même type d'analyse peut être fait avec l'expression « son affixe  $z(t) = x(t) + iy(t)$  ».

Ces dernières remarques amènent à des questions méthodologiques : comment intégrer l'analyse des phrases d'un texte, comme celle donnée ici en exemple, dans une analyse lexicale ? Notamment si on pense à des analyses quantitatives, des analyses de cooccurrence<sup>4</sup> ou de proxémie<sup>5</sup> automatisées ? Quels rôles faire jouer aux expressions symboliques dans ces analyses ?<sup>6</sup>

Le mot « courbe » prend plusieurs sens au fil de ses occurrences dans ce chapitre. On repère notamment :

- Un sens plus ou moins naïf de (dessin d'une) ligne courbe ;
- Le sens du cours de mathématique du lycée : « courbe représentative d'une fonction [numérique de variable réelle] », « représentation graphique d'une fonction »<sup>7</sup> ;
- Le sens de « Courbe paramétrée » dont on vient de voir la définition. Les auteurs précisent que l'on peut utiliser aussi l'expression « Arc paramétré », ou « Arc » pour alléger le discours, ou bien, de même, « Courbe », sans adjectif ;
- Le sens de « Support d'une courbe paramétrée ». Le terme est défini dans le chapitre, les auteurs précisent qu'on pourra utiliser « support », ou « graphe », ou « courbe ».

Soulignons ici que cette superposition de sens et d'usage est très classique. Il ne s'agit pas de pointer de mauvaises pratiques des auteurs, mais plutôt de décrire les pratiques de la communauté. En l'occurrence les auteurs font à plusieurs reprises des efforts d'explicitation concernant ces usages complexes du mot « courbe » :

Néanmoins par la suite, quand cela ne pose pas de problème, nous identifierons ces deux notions en employant le mot *courbe* pour désigner indifféremment à la fois l'application et son graphe. Des *courbes* paramétrées différentes peuvent avoir un même support. C'est par exemple le cas des *courbes* :

$$\begin{array}{lcl} [0, 2\pi[ & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} [0, 4\pi[ & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

(...)

Ainsi, la seule donnée du support ne suffit pas à définir un arc paramétré, qui est donc plus qu'un simple dessin. C'est une *courbe munie d'un mode de parcours*. Sur cette *courbe*, on avance mais on peut revenir en arrière, on peut la parcourir une ou plusieurs fois, au gré du paramètre, celui-ci n'étant d'ailleurs jamais visible sur le dessin. On « voit »  $x(t)$ ,  $y(t)$ , mais pas  $t$ .

*Figure 2. Exo7 2016, pp. 129-130.*

Nous produisons ensuite une « carte » des usages du mot courbe sous forme d'un tableau qui nous permet de nous rendre compte de la répartition des occurrences (un point correspond à une occurrence) des sens du mot « courbe » ou des mots proches identifiés :

<sup>4</sup> Analyse de la présence simultanée de deux ou de plusieurs mots ou autres unités linguistiques dans le même énoncé.

<sup>5</sup> Analyse quantitative (mesure de la distance entre les mots dans les textes) des mots couramment utilisés avec un mot donné. L'analyse de fait pour un corpus de texte donné.

<sup>6</sup> Une proposition en cours d'expérimentation consiste à remplacer ponctuellement, quand c'est possible, l'expression symbolique par une reformulation en mot issue de la présentation du cours en vidéo. Le cours d'exo7 est en effet aussi présenté en vidéo (présentation proche du texte écrit). Voir ici pour ce chapitre : [https://youtube.com/playlist?list=PL024XGD7WCIGKVHtuO-Z2q8\\_J2MO4B\\_il](https://youtube.com/playlist?list=PL024XGD7WCIGKVHtuO-Z2q8_J2MO4B_il)

<sup>7</sup> L'usage est également polysémique. Voir par exemple Chauvat (1999), ou Cerclé et al. (2020).

Page	Parties du chapitre	Mot « Courbe » au sens de					Autres mots			Extraits cités ici
		Ligne	Support	Arc	Lycée, graphe	Sens indéf. ou multiple	« Arc »	« Support et graphe »	« Support » (lycée)	
127	(Introduction)	••••				•				3
128	1. Notions de base			••	•	•	•		•	1
129		••		••••• •••			•	••••• ••		2
130			••	•••			•	••		7
131			••••• •••••			•	•••			
132			•••	••		•••••	•			
133			••	•		•	•			6
134	2. Tangente à une courbe paramétrée	••		••		•••••				
135				••••• •		••				
136		•				•		•		4
137								•	•	
138	3. Points singuliers – Branches infinies			••						
139		•	••••• ••	•		•	•			
140			•••••							
141			•			•				
142			•	•		•				
143			••••	•••						
145	4. Plan d'étude d'une courbe paramétrée	••••	•	••						
146			•••			•••	•			
147			••	•						
148		•	•••••			••				
148		•••	••	•		•	•	•		
149			•			••		•		
150	5. Courbes en polaires : théorie			•		•				
151				••		••				
152				•			•			
153						•				
154						•	•			
155	6. Courbes en polaires : exemples		•	••		••				
156			••••• ••	•		•				
157			•••••	•		•••		•		
158			••			•				
159			••	•••				•		5

Tableau 1. « Carte des usages du mot courbe ».

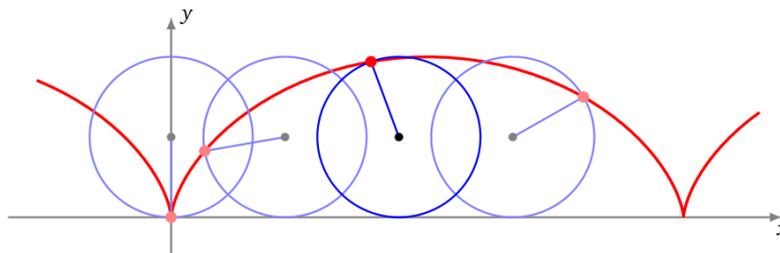
Je vais donner quelques exemples d'usages du mot, des différents sens qu'il peut prendre (et des possibles difficultés à lui attribuer un seul sens parfois).

Dans la figure 3 ci-dessous, le mot est utilisé dans un sens « naïf » : le texte est situé au début du chapitre, aucune définition n'a encore été donnée.

une **courbe** particulièrement intéressante. La **cycloïde** est la **courbe** que parcourt un point choisi de la roue d'un vélo, lorsque le vélo avance. Les coordonnées  $(x, y)$  de ce point  $M$  varient en fonction du temps :

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

où  $r$  est le rayon de la roue.



La cycloïde a des propriétés remarquables. Par exemple, la cycloïde renversée est une **courbe** brachistochrone : c'est-à-dire que c'est la **courbe** qui permet à une bille d'arriver le plus vite possible d'un point  $A$  à un point  $B$ . Contrairement à *Figure 3. Exo7 2016, p. 127.*

Les auteurs parlent ici de la courbe que parcourt un point choisi sur une roue de vélo quand le vélo roule, d'une courbe qui permet à une bille d'aller d'un point  $A$  à un point  $B$ .

Dans la figure 4, de façon évidente, le mot courbe est utilisé au sens mathématique de la définition 2 (rappelée dans la figure 1 ci-dessus).

#### Définition 5.

Soit  $t \rightarrow M(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in D \subset \mathbb{R}$ , une **courbe** paramétrée et soit  $t_0 \in D$ . La **courbe** est **continue en  $t_0$**  si et seulement si les fonctions  $x$  et  $y$  sont continues en  $t_0$ . La **courbe** est **continue sur  $D$**  si et seulement si elle est continue en tout point de  $D$ .

En d'autres termes la **courbe** est continue en  $t_0$  si et seulement si  $x(t) \rightarrow x(t_0)$  et  $y(t) \rightarrow y(t_0)$ , lorsque  $t \rightarrow t_0$ .

*Figure 4. Exo7 2016, p.136.*

On définit ainsi mathématiquement une « courbe continue » à partir des propriétés de continuité des applications composantes de l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

Dans le dernier tiers du chapitre, un travail est fait sur l'étude de courbes et le tracé du support d'une courbe (le tracé d'une courbe). Voici un extrait (Figure 5) concernant l'étude d'une courbe définie en coordonnées polaires, ou « courbe d'équation polaire » :

#### Exemple 21.

Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la **courbe** d'équation polaire

$$r = 1 + 2 \cos^2 \theta.$$

#### Solution.

- La fonction  $r$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique. Donc, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi) : \theta + 2\pi] = [r(\theta) : \theta] = M(\theta).$$

La **courbe** complète est donc obtenue quand  $\theta$  décrit un intervalle de longueur  $2\pi$  comme  $[-\pi, \pi]$  par exemple.

- La fonction  $r$  est paire. Donc, pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$M(-\theta) = [r(-\theta) : -\theta] = [r(\theta) : -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la **courbe** sur  $[0, \pi]$ , puis on obtient la **courbe** complète par réflexion d'axe  $(Ox)$ .

- $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ . Donc, pour  $\theta \in [0, \pi]$ ,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta) : \pi - \theta] = [r(\theta) : \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et construit la **courbe** sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis on obtient la **courbe** complète par réflexion d'axe  $(Oy)$  puis par réflexion d'axe  $(Ox)$ .

*Figure 5. Exo7 2016, p. 159.*

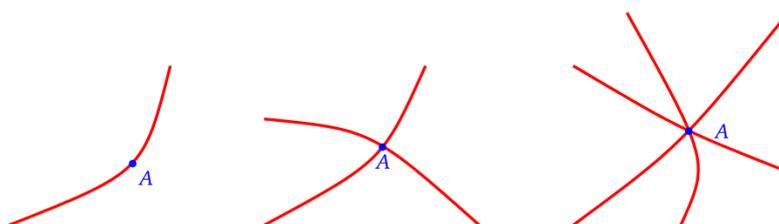
Dans toute cette partie, le mot « courbe » est utilisé pour parler du support de la courbe. Dans la figure 5, la première occurrence de « courbe » fait référence à la définition du chapitre (domaine d'étude de la courbe, courbe d'équation polaire, on parle bien d'une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ ). Par contre, les occurrences suivantes : « courbe complète », « on construit la courbe » font référence plutôt au support de la courbe (on peut noter un petit flou puisque les auteurs disent « on étudie et on construit la courbe » alors que le verbe « étudier » est plutôt associé à l'application, et le verbe « construire » au support).

On retrouve cette superposition possible des sens du mot à d'autres endroits du texte.

### Définition 3.

Soit  $f : t \mapsto M(t)$  une courbe paramétrée et soit  $A$  un point du plan. La multiplicité du point  $A$  par rapport à la courbe  $f$  est le nombre de réels  $t$  pour lesquels  $M(t) = A$ .

En termes plus savants : la multiplicité du point  $A$  par rapport à l'arc  $f$  est  $\text{Card}(f^{-1}(A))$ .



- Si  $A$  est atteint une et une seule fois, sa multiplicité est 1 et on dit que le point  $A$  est un **point simple** de la courbe (première figure).
- Si  $A$  est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre et deux seulement, on dit que  $A$  est un **point double** de la courbe (deuxième figure).

Figure 6. Exo7 2016, p. 133.

On voit par exemple dans la figure 6 que les points multiples sont définis comme des points du plan (classiquement assimilés à des éléments de  $\mathbb{R}^2$ ) ayant une certaine propriété pour l'application  $f$ :  $\text{Card}(f^{-1}(A)) > 1$ . L'expression « point simple de la courbe » ou « point multiple de la courbe » fait à la fois référence à la propriété de l'application  $f$  et du point  $A$ , mais aussi au fait que le point  $A$  est un point du support de la courbe, le formalisme mathématique permettant de modéliser le fait que plusieurs branches du support se croisent en  $A$  (comme le montrent les figures proposées). Le mot courbe renvoie donc à la fois à l'application  $f$  et à son support (concrètement tracé).

### Analyses logiques

D'autres analyses des usages de la langue et du symbolisme peuvent être menées. Notamment des analyses que l'on appelle classiquement analyses logiques. On peut se référer par exemple aux actes du séminaire national de didactique de l'ARDM : Barrier (2019), Chellougui (2020), et Hache et Mesnil (2020). Il s'agit de proposer une ou plusieurs reformulations du texte utilisant un référent logique (ici la logique des prédicats).

On peut par exemple s'attarder sur la phrase « on obtient la courbe complète par translation de vecteurs  $k$ .  $(2\pi, 0) = (2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$  » dans la figure 7 ci-dessous.

**Exemple 2.**  
Déterminer un domaine d'étude le plus simple possible de la courbe

« Pour tous les / Pour chaque / Quel que soit  $t$  appartenant à ... »

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{2} \sin t \\ y(t) = 1 - \frac{3}{2} \cos t \end{cases}$$

Formule (incomplète) désignant effectivement la courbe annoncée

« de vecteur ..., qui est égal à ... quelle que soit la valeur de  $k$  dans  $\mathbb{Z}$  »

Solution. « dans cette dernière égalité,  $u$  désigne ... »

Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} M(t+2\pi) &= \left( t+2\pi - \frac{3}{2} \sin(t+2\pi), 1 - \frac{3}{2} \cos(t+2\pi) \right) \\ &= \left( t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t \right) + (2\pi, 0) = t_{\vec{u}}(M(t)) \end{aligned}$$

«  $2\pi$  désigne effectivement une longueur »

où  $\vec{u} = (2\pi, 0)$ . Donc, on étudie l'arc et on en trace le support sur un intervalle de longueur  $2\pi$  au choix, comme  $[-\pi, \pi]$  par exemple, puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs  $k \cdot (2\pi, 0) \equiv (2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Pour  $t \in [-\pi, \pi]$ ,

$$M(-t) = \left( -t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t \right) = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie la courbe et on en trace le support sur  $[0, \pi]$  (première figure), ensuite on effectue la réflexion d'axe  $(Oy)$  (deuxième figure), puis on obtient la courbe complète par translations de vecteurs  $k\vec{u}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (troisième figure).

« étudier la courbe sur ... »  
« tracer le support sur ... » (?)

« par translation, en utilisant, pour chaque valeur de  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , la translation de vecteur  $k\vec{u}$  »

Figure 7 (Exo7 2016, p130-131)

Il s'agit de réduire le domaine d'étude de la courbe pour arriver à la tracer. Chaque réduction du domaine d'étude (ici on passe de  $\mathbb{R}$  à  $[-\pi, \pi]$ , puis à  $[0, \pi]$ ) est accompagnée d'une explication permettant de retrouver géométriquement l'ensemble de la courbe quand la partie réduite sera tracée.

Dans la phrase évoquée, on peut souligner le pluriel des mots « translations » et « vecteurs » : il est rare de faire opérer plusieurs translations sur un même objet et de le décrire dans une seule phrase. On peut noter aussi que (comme souligné dans la Figure 1) ce qui suit le mot vecteur n'est pas une expression désignant un vecteur, mais une égalité entre deux vecteurs. On peut interpréter là aussi comme une proposition relative, une information ajoutée. On peut aussi voir une trace de quantification dans l'expression « ,  $k \in \mathbb{Z}$  », quantification qui devrait préciser le sens du pluriel des mots « translations » et « vecteurs ». On pourrait ainsi s'approcher un peu du formalisme sous-jacent en disant « on obtient la courbe complète en faisant opérer sur le premier bout de courbe tracé, pour tous les nombres entiers  $k$ , la translation de vecteur  $k \cdot (2\pi, 0)$ , dont on sait bien qu'il est égal au vecteur  $(2k\pi, 0)$  ».

### Conclusion à propos de ces analyses lexicales

On a donc dans ce chapitre un mot central, le mot « courbe », qui a plusieurs sens, plusieurs usages, les sens se succédant, voire se superposant. Ce phénomène est très classique, et d'une certaine façon nécessaire (Hache, 2019, page 16). Mon hypothèse est que le fait d'avoir un seul mot allège les contraintes du formalisme, les formulations seraient fortement alourdies si des termes distincts (courbe paramétrée, support de la courbe paramétrée, représentation graphique,

ligne courbe, etc.) étaient utilisés pour chaque variation de sens, sachant que les différents sens des expressions, et les différents objets auxquels elles font référence sont effectivement très proches mathématiquement. Le fait d'avoir un même mot pour désigner la modélisation (« courbe paramétrée »), l'objet modélisé (« support »), des sens courants ou des sens scolaires plus anciens peut être porteur, et façonne la nouvelle acception du mot proposée dans le chapitre, soutient la conceptualisation, précise son usage... Cela facilite l'expression et la communication pour les mathématiciens et les mathématiciennes. Je souligne ici le fait que ces phénomènes sont essentiellement transparents pour les acteurs, ces choix sont en grande partie inconscients.

On peut bien sûr se demander ce qu'il en est de la réception effective par les étudiants. Comment les étudiants et les étudiantes lisant le texte ou écoutant le cours reconstituent-ils un sens, distinguent-ils les sens ? Font-ils ces rapprochements ? Perçoivent-ils petit à petit ces nuances et ces usages ?

On voit à l'aide de ces deux analyses que les formulations usuelles des mathématiques ne sont pas (uniquement) formelles. Elles ne sont pas dépourvues d'ambiguïtés (il n'y a pas univocité des termes, même des termes techniques). Elles mélangent mots et symboles, font un usage complexe de la langue, incorporent de nombreux implicites. Les formulations sont denses.

Ainsi, des analyses langagières peuvent permettre de mettre en évidence et de décrire certaines complexités de l'activité mathématique, et de l'entrée dans cette activité.

Je vais présenter rapidement un second exemple pour montrer que ces complexités peuvent être des difficultés pour l'enseignement et l'apprentissage. Je développerai ensuite l'idée qu'un travail sur cette dimension de l'activité mathématique peut renforcer également l'apprentissage du contenu.

## 2. Vrai, faux ou autre ?

Les pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes peuvent être étudiées pour elles-mêmes (voir par exemple Hache et Mesnil (2017)), mais il est intéressant d'avoir une approche descriptive des pratiques davantage liées à l'enseignement<sup>8</sup>.

Pour « entrer en classe » il est aussi possible de travailler sur des manuels scolaires du secondaire (en grande partie rédigés par des enseignants), sur les pratiques langagières des enseignants en classe, ainsi que sur les pratiques langagières des élèves. On peut se demander si les usages constatés chez les mathématiciens et les mathématiciennes se retrouvent chez les enseignants. Sur ce point on voit que la confrontation des élèves aux pratiques langagières de la communauté mathématique commence très tôt (Hache, 2015).

La question se pose de savoir si les élèves s'approprient ces pratiques langagières, et de quelle façon, s'il est possible de les accompagner dans cet apprentissage. C'est ce point que j'ai développé le 21 janvier 2021 en présentant le travail mené avec Emmanuelle Forgeoux (Hache et Forgeoux, 2018). L'étude des réponses à un questionnaire vrai – faux sur des questions du type « vrai ou faux ? Si  $(x - 1)(x - 2) = 0$  alors  $x = 1$  ». Cette étude reposait sur la question suivante : dans ce type de phrase mathématique les élèves perçoivent-ils la quantification universelle implicite liée à l'implication exprimée ? On pourrait en effet formuler la phrase ci-dessus ainsi :

$$\ll \forall x [ (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1 ] \gg$$

---

<sup>8</sup> L'exemple précédent est, en quelque sorte, un intermédiaire : il s'agit bien d'une situation d'enseignement, mais le cours est rédigé par des mathématiciens et des mathématiciennes.

Je reprends ici la conclusion de l'article :

*« Globalement, on voit que les élèves n'ont pas conscience des implicites des usages classiques de la langue en mathématiques.*

*Sur ce cas précis chacun tente d'explicitier des règles rationnelles de fonctionnement (c'est le fait qu'ils n'ont pas tous les mêmes qui permet d'avancer dans la discussion), les choses ne sont pas simples car ils n'ont pas les mots pour le dire. La notion de variable pourrait par exemple être utilisée ici... celle de quantification aussi bien sûr. Le fait que ces implicites ne soient pas spontanément partagés peut être source de gros quiproquos » (Hache et Forgeoux, 2018, p. 53)*

D'autres travaux décrivent également les complexités du discours des enseignants (voir par exemple Hache et Mesnil, 2020). Tout d'abord celle du jeu entre oral et écrit : l'enseignant propose bien sûr certains écrits sans les commenter oralement (énoncé d'exercices, corrigés, manuel scolaire ou documents distribués, etc.), mais une part importante de la présentation du contenu mathématique (notamment les preuves) est faite sous la forme d'un écrit commenté, d'un discours oral s'appuyant sur un écrit au tableau, d'un mélange écrit – oral (accompagné d'une gestuelle, d'une spatialisation de l'écrit sur le tableau par exemple). Autre point de complexité dans le contexte de l'enseignement : le discours de l'enseignement mêle de façon forte un discours mathématique et un « discours sur » (pour une preuve par exemple : discours sur les mathématiques, sur la façon de rédiger, sur la façon dont on peut avoir une idée de la preuve qui est en train d'être exposée, sur l'importance du travail présenté, etc.).

Enfin, la transparence pour les acteurs de leurs pratiques langagières (mathématiciens, enseignants, élèves) complique le travail sur cette dimension de l'activité mathématique. Empêche certains leviers que pourraient apporter le travail sur la langue pour l'apprentissage des mathématiques.

Nous reprendrons dans la partie III. cette problématique du travail sur la dimension langagière de l'activité mathématique (en lien avec le travail sur les mathématiques elles-mêmes).

## **II. « AGIR, PARLER, PENSER »**

Je reprends là une approche également présentée par Joris Mithalal (2021). Le titre de ce paragraphe, « agir, parler, penser », fait référence au travail de Maryse Rebière et Martine Jaubert (voir par exemple Rebière, 2013). Elles développent l'idée qu'il n'y a pas séparation possible entre ces trois facettes de l'activité. Le langage est notamment constitutif de la pensée. Il est à l'articulation entre action, communication et régulation sociale, processus psychocognitif. Il a une dimension individuelle et une dimension sociale et culturelle. C'est un outil de construction, de négociation, de transformation des représentations à la fois individuelles et sociales. De ce fait, le langage est au cœur des processus d'enseignement et d'apprentissage (voir également Hache, 2019 : « Pensée et langage, dimension individuelle et dimension sociale » pages 5 et 6).

Chaque groupe social développe des pratiques qui lui sont propres, notamment des pratiques langagières, des usages courants, usuels de la langue. La langue est vue comme un réservoir commun et relativement stable (en lente évolution, décrite dans les dictionnaires, livres de grammaires).

La première partie de l'exposé, et de ce texte, propose donc des analyses des pratiques langagières des mathématiciens et des mathématiciennes, des traces de ces pratiques en classe, et de la façon dont les élèves s'approprient (ou non) ces pratiques, s'acculturent à ces pratiques sociales. Les élèves et les enseignants développant à leur tour des pratiques langagières scolaires propres au cours de mathématiques.

Pour réfléchir à l'accompagnement de cette appropriation par les élèves, dont nous avons vu qu'elle n'allait pas de soi, des pratiques langagières des mathématiciens inhérentes à l'entrée dans l'activité mathématique, je propose d'éclairer notre point de vue à l'aide de résultats de recherche en didactique des langues.

### III. LECTURE ET ECRITURE

Je me suis penché sur certains travaux de recherche en didactique des langues, notamment sur l'apprentissage de la compréhension de texte (lecture) et de la production de texte (écriture) : voir Hache 2019 « Texte, lecteur et auteur en didactique du français » pages 37 à 46.

Je me permets de souligner qu'il n'est pas simple de s'approprier les problématiques, les outils théoriques, les méthodologies d'un champ de recherche. À propos d'apprentissage de la lecture et de l'écriture, il est intéressant de s'appuyer sur des expériences proches, par exemple, en tant que chercheur, la production ou la compréhension d'un article de recherche, ou, en tant que chercheur, mais aussi à propos d'élèves, la production ou la compréhension d'une démonstration, ou encore, à propos d'élèves, la production ou la compréhension d'un programme de construction (Mithalal, 2021).

Une première idée développée est celle du caractère indissociable des activités de lecture et d'écriture de textes, des activités d'apprentissage de la lecture et de l'écriture de textes. De par la nature même de l'activité, mais également de par le fait que le scripteur fait un travail de lecture et de relecture de son texte en cours d'écriture (Plane, 2017), ou de par l'écho que l'on trouve entre l'intention artistique de l'auteur et l'attention esthétique du lecteur (Tauveron, 2002). Pour reprendre une des propositions d'exemples évoquées ci-dessus, le rédacteur d'un article pour une revue scientifique s'adresse à un modèle de lecteur qu'il se construit petit à petit, dont les caractéristiques sont empruntées à ses représentations des relecteurs qui vont lui faire un retour avant publication, à ses représentations du lectorat de la revue. Ces représentations se construisent petit à petit en lien avec ses propres lectures de textes scientifiques (que ce soit comme simple lecteur ou comme relecteur – évaluateur), avec les échanges passés entre collègues qu'il a eus à propos de la compréhension d'un texte, à propos de retours passés sur ses propres textes écrits. L'auteur se construit ainsi une représentation de sa position d'auteur en s'appuyant sur ses expériences de lecture. On peut également éclairer ainsi le travail de rédaction ou de compréhension de preuves ou celui de rédaction ou compréhension de programmes de construction.

Au-delà de cette première idée (indissociabilité de l'appréhension de la lecture et de l'écriture), la description des activités d'apprentissage de la compréhension d'un texte d'une part et d'apprentissage de l'écriture d'un texte d'autre part mettent en lumière trois traits communs centraux : l'importance des dimensions collective, réflexive et consciente (explicite) de ces activités. Ces considérations permettent d'interroger certaines dimensions de l'enseignement des mathématiques, si un travail explicite est parfois mené, par exemple sur les programmes de

construction<sup>9</sup>, il est plus rare sur l'apprentissage de la démonstration (il est rare par exemple que les élèves soient confrontés à une lecture d'un texte de démonstration<sup>10</sup>).

Le caractère collectif, réflexif et conscient de l'activité souligne le fait que la langue (entre autres) devient un objet de travail. C'est aussi ce que soulignent les didacticiens du plurilinguisme. Travailler sur la langue, sur ses usages, s'oppose ainsi à la transparence des activités et des pratiques langagières. Les didacticiens du plurilinguisme montrent que la reformulation en L1 et en L2<sup>11</sup> peut constituer un support du travail métalinguistique, et peut aboutir à des processus méta-cognitifs visant le traitement de l'information disciplinaire (Gajo, 2007, p. 4). L'opacification de la langue (que permet ici la coexistence L1 et L2) permet une remédiation : à la fois au sens de remède, mais également au sens de retour réflexif sur une médiation (en L1) elle permet aussi, à terme, une centration plus grande sur les contenus.

#### IV. CONCLUSION

L'idée était donc dans cette présentation et dans ce texte d'avoir une lecture transversale sur les travaux présentés dans la note de synthèse soutenue fin 2019 (Hache, 2019). Le travail dont la présentation est esquissée ici se poursuit dans plusieurs directions.

On a vu que la description, la caractérisation des pratiques langagières des mathématiciens a tout son intérêt dans la perspective de l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Les études menées jusqu'à présent peuvent être encore approfondies du point de vue de la variété et de la quantité des textes et discours analysés, mais aussi concernant les outils utilisés. On peut tout d'abord penser aux outils issus des recherches en linguistique (notamment les outils lexicométriques). Mais il est également possible de mener des analyses comparatistes : observer les pratiques langagières proches de façon à mieux comprendre celles des mathématiciens (analyse d'un cours de mathématique proposé par des physiciens, analyse de textes mathématiques dans une autre langue que le français, analyse des pratiques langagières des enseignants du premier degré qui n'ont, pour la plupart, pas cette culture mathématique, etc.).

Les analyses des usages de la langue et des formulations utilisées spécifiquement en classe de mathématiques sont également en cours de développement : analyse de discours d'enseignants, analyses de copies ou de discours d'élèves. Les outils sont à adapter, notamment pour les élèves pour lesquels les textes sont souvent très lacunaires.

J'ai évoqué à plusieurs reprises le fait que le travail avec les élèves sur les usages de la langue dans l'activité mathématique était un levier puissant pointé par les didacticiens des langues, notamment pour le travail et l'apprentissage mathématique (et non seulement langagier). Le développement de tâches à mener en classe, l'expérimentation associée, l'analyse des activités et des apprentissages effectivement mis en place par les élèves correspondent à un champ de question très vaste. Ma réflexion porte notamment sur le travail de formulation ou de reformulation collective et réflexive avec les élèves (énoncé du cours, rédaction de

---

<sup>9</sup> Il est aussi mené sur la lecture ou l'écriture d'articles scientifique en master spécialisé ou en formation doctorale.

<sup>10</sup> Les démonstrations, quand elles sont présentées, le sont souvent dans un mixte d'écrit (souvent au tableau) et de commentaires oraux par l'enseignant.

<sup>11</sup> Langue première et langue seconde : première langue parlée, apprise dans le cadre familial (éventuellement plusieurs langues), et langue apprise extérieurement et en général plus tard (cadre scolaire, social).

démonstration, présentation orale – vidéos – de preuve ou d'éléments de cours), ou sur l'appui sur des formulations en langues étrangères en cours de mathématiques.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- BARRIER, T. (2019). Validation empirique, explication et démonstration. In Pilet J., Vendeira-Marechal C., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018*. ARDM – IREM de Paris <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410>
- BODIN, A., BORNE, N., BOURDON, M., CHEN, G., COSTANTINI, G., DESIDERI, L., HANANI, & A., ROUGET, JL. (2016). *Analyse, cours de mathématiques, première année*. Version 1.00, janvier 2016. Exo7 <http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf>
- CERCLE, V., CHESNAIS, A., DESTRIKATS, A., GOSSELIN, E., LEBERRE, J., & NYSSSEN L. (2020). Le repérage au collège et au lycée: des enjeux d'apprentissage au croisement des cadres numérique, géométrique, algébrique et fonctionnel (première partie), *Petit x*, 113. IREM de Grenoble <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/>
- CHAUVAT, G. (1999). Courbes et fonctions au collège, *Petit x* 51, IREM de Grenoble [https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/51x3\\_1568716086451-pdf](https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/51x3_1568716086451-pdf)
- CHELLOUGUI, F. (2020). Pertinence de la prise en compte du formalisme logique pour une étude didactique de l'activité mathématique. In Pilet J., Vendeira-Marechal C., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2019*. ARDM – IREM de Paris
- GAJO, L. (2007). Enseignement d'une DNL en langue étrangère : de la clarification à la conceptualisation, *Trema*, 28, pp 37-48. Faculté d'Éducation de l'Université de Montpellier <https://doi.org/10.4000/trema.448>
- HACHE, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec », *Petit x*, 97, 27-43. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01397401>
- HACHE, C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, note de synthèse d'habilitation à diriger des recherches*. Université Paris Diderot <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02420979/document>
- HACHE, C., & FORGEOUX, E. (2018). Vrai ou faux ? Parlons-en ! *Au fil des maths*, 528. APMEP <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02292639>
- HACHE, C., & MESNIL, Z. (2017). Pratiques langagières et preuves. In *Actes du 22e colloque de la CORFEM, juin 2015*, IREM de Nîmes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285116>
- HACHE, C., & MESNIL, Z. (2020). Outils logiques pour analyser les formulations des preuves dans des manuels de lycée. In Pilet J., Vendeira-Marechal C., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2019*. ARDM – IREM de Paris <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03257750>
- MITHALAL, J. (2021, 21 janvier). *Les programmes de construction: prise en compte de la dimension textuelle pour construire un discours sur les objets et des objets de discours en géométrie*. [Conférence] Séminaire national de didactique des mathématiques. ARDM – IREM de Paris. <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/2d5cae71-156f-45b5-afeb-fcb08d47a5a3>
- PILET, J., & VENDEIRA, C. (2020). *Actes du séminaire de didactique des mathématiques, année 2019*. IREM de Paris <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03041140>
- PLANE, S. (2017). Dynamique de l'écriture et processus de resémantisation. *Pratiques*, 173-174. Centre de recherche sur les médiations. <http://pratiques.revues.org/3307>
- REBIERE, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? In Bronner A. et al. (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp.119-232.) La Pensée Sauvage éditions.
- TAUVERON, C. (2002). L'écriture littéraire : une relation dialectique entre intention artistique et attention esthétique. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, 26/27, pp 203-215. ENS Lyon. [http://www.persee.fr/doc/reper\\_1157-1330\\_2002\\_num\\_26\\_1\\_2402](http://www.persee.fr/doc/reper_1157-1330_2002_num_26_1_2402)