



HAL
open science

L'algorithme : pourquoi et comment le définir pour l'enseigner

Emmanuel Beffara

► **To cite this version:**

Emmanuel Beffara. L'algorithme : pourquoi et comment le définir pour l'enseigner. 2023. hal-04112182

HAL Id: hal-04112182

<https://hal.science/hal-04112182>

Preprint submitted on 31 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L’algorithme: pourquoi et comment le définir pour l’enseigner

Emmanuel Beffara

31 mai 2023

Abstract. The question of the definition of what is an algorithm is recurrent. It is found in teaching, at different levels and particularly in secondary education because of the recent evolutions in high school, with immediate consequences in higher education. It is found in mediation, with the different meanings that the word “algorithm” is charged with in the media space. It is also found in research, with issues in different branches of computer science, from foundations in computability and complexity to applications in big data. Beyond the issue of definition, it is the reason d’être of the notion of algorithm that should be questioned: what do we want to do with it and what is at stake? It is by trying to specify this that we can identify didactic elements that are likely to help teach the algorithm, in interaction with mathematics or not, and to different audiences.

Keywords. Algorithm

Résumé. La question de la définition de ce qu’est un algorithme est récurrente. Elle se trouve dans l’enseignement, à différents niveaux et singulièrement le secondaire du fait des évolutions récentes au collège et au lycée, avec des conséquences immédiates dans le supérieur. Elle se trouve dans la médiation, avec les différents sens dont le mot « algorithme » est chargé dans l’espace médiatique. Elle se trouve aussi dans la recherche, avec des enjeux dans différentes branches de l’informatique, depuis les fondements en calculabilité et complexité jusqu’aux applications dans le traitement des données massives. Au delà du problème de la définition, c’est la raison d’être de la notion d’algorithme qu’il convient de questionner : que veut-on en faire et de quels enjeux est-elle le nom ? C’est en cherchant à préciser cela que l’on peut identifier les éléments didactiques susceptibles d’enseigner l’algorithme, en interaction avec les mathématiques ou pas et à différents publics.

Mots-Clés. Algorithme

Table des matières

1. Introduction	2
2. L’algorithme, de la pratique à l’objet d’étude	2
2.A. Procédures codifiées	2
2.B. Machines programmables	3
2.C. Calculabilité	3
2.D. L’informatique au delà du calcul	4
3. Une définition problématique	4
3.A. Définitions formelles	4
3.B. Définitions conceptuelles	5
3.C. L’usage médiatique	7
4. L’algorithme comme objet d’enseignement	7
4.A. Dans l’enseignement supérieur	8
4.B. Dans l’enseignement secondaire	8
4.C. Dans l’enseignement primaire	10
4.D. Les compétences de l’algorithmique	11
5. Conclusion : pourquoi définir	12
Références	13

1. Introduction

L'objectif de ce texte est de s'interroger sur la bonne définition à donner au mot *algorithme* dans un contexte d'enseignement. Savoir définir ce dont on parle est une nécessité dès qu'il s'agit de développer un discours scientifique, or l'introduction encore récente dans l'enseignement général de la notion d'algorithme, parmi d'autres notions fondamentales de la *science* informatique, répond à une volonté de faire évoluer l'enseignement scientifique pour y intégrer ces objets.

Donner une définition n'est pas difficile en soi et de nombreux ouvrages en proposent. Le problème se situe plutôt dans la variété des définitions disponibles, car chaque contexte d'utilisation correspond à des intentions et des contraintes différentes, au point que certaines formulations et certains usages peuvent sembler contradictoires. Dans un contexte d'enseignement, cette variété suscite de surcroît un enjeu de cohérence : si des définitions différentes peuvent être nécessaires dans des disciplines ou à des niveaux différents, l'enseignante ou la formatrice doit savoir dissiper l'incohérence en ayant conscience de la transposition qui est faite dans ces différents contextes. Ces questions se posent bien entendu dans toute situation où un savoir expert fait l'objet d'une transposition, particulièrement à un public large et non spécialiste.

Pour aborder ces questions dans le cas de l'algorithme, nous commençons en section 2. par décrire l'émergence de la notion d'algorithme comme objet d'étude, pour en évoquer les origines et la situer dans la science actuelle. En section 3., nous identifions différents types de définitions qui en sont proposées dans la littérature et l'usage, afin d'en caractériser les différences essentielles. Nous poursuivons en section 4. par une comparaison de la façon dont se positionnent différents niveaux d'enseignement, de l'école primaire à l'université. Nous concluons en section 5. par une réflexion sur la raison d'être des définitions de la notion d'algorithme.

2. L'algorithme, de la pratique à l'objet d'étude

On ne cherche pas ici à faire une histoire détaillée des algorithmes, mais plutôt à distinguer différentes phases dans l'élaboration de cette notion. Il n'est d'ailleurs pas évident que ces phases soient fidèles à la chronologie historique, il s'agit plutôt de mettre en évidence, dans l'esprit de la dialectique outil-objet (Douady, 1986), les différents statuts que l'algorithme prend successivement dans l'esprit d'un apprenant ou d'une communauté.

2.A. Procédures codifiées

La première phase de construction de la notion concerne la systématisation des procédures de calcul. On peut citer quelques étapes emblématiques, dans une longue histoire des mathématiques et du calcul :

- les méthodes de calcul posé, notamment pour l'addition et la multiplication, liées à chaque système de numération ;
- l'approximation des racines carrées, déjà étudiée chez les babyloniens (d'où vient la méthode qui porte aujourd'hui le nom de Héron d'Alexandrie) ;
- le calcul des diviseurs communs chez Euclide, qui est souvent la première méthode de calcul qui reçoit explicitement le nom d'algorithme dans l'enseignement actuel ;
- la résolution d'équations chez Al-Khwarizmi (dont le nom est notoirement à l'origine du mot « algorithme »), qui fait intervenir des décisions dépendant des données d'entrée.

Ces quelques cas ne sont que des exemples parmi d'autres. Les méthodes systématiques existent depuis aussi longtemps que les mathématiques mais ne sont probablement pas perçues comme objets en elles-mêmes, elles sont de l'ordre du savoir-faire. On n'éprouve pas le besoin de définir ce que serait une méthode *en général*, même si on trouve chez Al-Khwarizmi l'idée d'étudier les méthodes pour elles-mêmes.

Il se pose quand même, dès l'époque de ces exemples, les premières questions de nature algorithmique : on s'interroge sur la faisabilité de certaines choses par des méthodes systématiques. C'est le cas notamment des trois grands problèmes géométriques de l'Antiquité : la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube. Dans les trois cas, on se demande s'il est possible de construire une certaine grandeur avec les outils de la géométrie, autrement dit on cherche un algorithme pour résoudre un problème donné. L'impossibilité de résoudre ces trois problèmes à la règle et au compas ne sera établie que bien plus tard, quand la notion de construction sera suffisamment formalisée pour établir des résultats négatifs.

2.B. Machines programmables

Parallèlement à l'élaboration de méthodes de calcul en mathématiques, l'histoire des techniques a connu le développement de machines pour réaliser diverses tâches. Les automates existent depuis l'Antiquité, ce sont des machines qui agissent de façon plus ou moins autonome selon un plan établi, mais c'est à partir du XVII^{ème} siècle que l'idée de *programmation* apparaît plus distinctement.

D'une part, il y a les machines à calculer, à commencer par la Pascaline de Blaise Pascal, dont la première réalisation remonte à 1645, et qui apporte l'idée de mécanisation du calcul, là où bouliers et abaques servaient essentiellement à aider la mémoire tout en laissant à l'opérateur humain toute la charge de la manipulation. Les *machines à différences* sont imaginées plus tard comme extensions de ce principe pour produire des tables de valeurs de fonctions.

D'autre part, au XVIII^{ème} siècle, on voit apparaître l'idée d'un objet qui porte explicitement de l'*information* qu'un dispositif mécanique utilise pour déterminer son action : ce sont les métiers à tisser semi-automatiques. Le premier métier à rubans perforés est dû à Bouchon en 1725, suivi par le métier Jacquard à cartes perforées en 1801. Il y a alors l'idée de transcrire une procédure dans un langage artificiel et explicitement défini, c'est un précurseur de la notion de *programme* au sens informatique : un *objet* identifié, une information qui détermine l'action d'un opérateur, maintenant mécanique.

La machine analytique de Babbage, conçue en 1834 mais jamais entièrement réalisée, combine les deux aspects : la mécanique fait des calculs guidés par des instructions indiquées sur des cartes perforées. De plus, certaines instructions permettent le branchement conditionnel, donc les structures de contrôle : il est possible de transcrire dans le langage de la machine les structures comme « si ... alors ... sinon ... » et « tant que ... faire ... », ce qui rend la machine *universelle* pour le calcul (au sens où elle peut théoriquement calculer tout ce qui pourrait être calculé avec tout autre dispositif mécanique). C'est pour la machine de Babbage que fut écrit ce qui est considéré comme le premier véritable programme informatique, œuvre d'Ada Lovelace en 1843, destiné à calculer les nombres de Bernoulli et reposant sur une itération conditionnelle (Dufour, 2019).

2.C. Calculabilité

Certains problèmes d'aspect algorithmique, comme les grands problèmes géométriques de l'Antiquité, ou encore la résolution d'équations algébriques par radicaux, ont été résolus négativement au moyen de différentes notions d'invariants. Au début du XX^{ème} siècle, Hilbert énonce deux problèmes fondamentaux qui sont eux aussi de nature algorithmique :

- la recherche d'une méthode de résolution des équations diophantiennes, dixième problème de la liste formulée au Congrès international des mathématiciens de 1900 (Hilbert, 1990) ;
- le problème de la décision, formulé en 1928, qui consiste à établir une procédure permettant de déterminer si un énoncé donné est un théorème en logique du premier ordre (Hilbert, Ackermann, & Luce, 1999).

La résolution négative de ces deux problèmes dans les années 1930 nécessite la formalisation de la notion de calcul. Plusieurs *modèles de calcul* sont proposés, notamment par Church (1941) avec le λ -calcul, Turing (1936) avec la machine qui porte son nom, Herbrand avec les fonctions récursives. La

thèse de Church-Turing en établit l'équivalence et fait émerger l'idée de calculabilité indépendante du modèle de calcul.

L'algorithme est alors un objet d'étude en soi et on essaie de l'approcher par des définitions formelles, notamment pour établir des résultats d'impossibilité. Parmi ceux-ci, il y a l'identification de problèmes dits *indécidables*, pour lesquels on montre qu'il ne peut pas exister d'algorithme : outre les deux problèmes mentionnés ci-dessus, citons l'exemple classique du *problème de l'arrêt* (déterminer si l'exécution d'un programme donné, pour une entrée donnée, finira par s'arrêter ou pas) ou encore le problème consistant à déterminer si une expression donnée, formée avec les quatre opérations et les fonctions usuelle de l'analyse, est égale à 0 (Richardson, 1969).

Plus tard, la théorie de la complexité raffine cette notion en tentant de classer les problèmes calculatoires selon leur difficulté intrinsèque, vue comme borne inférieure de l'efficacité des algorithmes susceptibles de les résoudre (Perifel, 2014).

2.D. L'informatique au delà du calcul

Ainsi, la calculabilité a formalisé la notion de procédure de calcul pour résoudre des problèmes de décidabilité puis a permis le développement de la théorie de la complexité, fondée au départ sur l'idée de calcul séquentiel. Mais la technique ne s'arrête pas au calcul sur machine séquentielle et les ordinateurs ont été développés bien au delà de cet objectif initial : les machines sont devenues capables de faire plusieurs calculs en même temps (parallélisme), de communiquer avec un utilisateur en cours d'exécution (notion d'interface homme-machine), de communiquer de l'information avec d'autres dispositifs (capteurs et actionneurs) et d'autres ordinateurs (réseaux), sans évoquer l'hypothèse de machines changeant fondamentalement la façon de calculer comme les processeurs quantiques.

Ces différents développements s'accompagnent de techniques de programmation différentes qui dépassent aussi le cadre des seules procédures de calcul des origines, et ces techniques nécessitent d'enrichir le cadre théorique de l'algorithmique par de nouvelles notions et de nouveaux outils.

De ce fait, l'étude des algorithmes comporte de nombreux enjeux dans la recherche actuelle, dans des domaines très variés, des plus théoriques, comme la logique et la complexité, au plus concrets, comme l'analyse de données pour la décision et la planification, en passant par la cryptologie, le calcul formel ou numérique, le traitement automatique des langues, l'analyse et évaluation de performances, et d'innombrables autres sujets.

3. Une définition problématique

3.A. Définitions formelles

Les résultats formels nécessitent une définition mathématique, ce qui mène à la notion de modèle de calcul. Par exemple, ce qui suit est une définition mathématique possible d'une machine de Turing (inutile de s'attarder sur le détail, notre but n'est que de donner une idée de ce à quoi ressemble une telle définition) :

Une machine de Turing est un sextuplet $(\Sigma, \Gamma, Q, i, f, \delta)$ où Σ est un ensemble fini non vide (l'alphabet d'entrée et de sortie), Γ est un sur-ensemble fini de Σ (l'alphabet de travail) contenant un élément distingué \emptyset (le symbole vide) non élément de Σ , Q est un ensemble fini non vide (les états), i et f sont des éléments de Q (l'état initial et l'état final) et δ est une fonction de $Q \times \Gamma$ dans $Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$ (la table de transition).

À cette définition devront s'ajouter celle d'une configuration (qui comprend un état de la machine, un contenu de ruban et une position de la tête de lecture sur le ruban) ainsi que la façon dont la machine calcule (les règles de passage d'une configuration à la suivante). De là, on pourra obtenir une définition mathématique de ce que calcule une machine de Turing et donc étudier les propriétés de cette notion de calcul.

La machine de Turing est un objet formel sur lequel on peut fonder toute la théorie de la calculabilité et de la complexité algorithmique, comme le font bon nombre de textes de référence. Pourtant, sa description formelle n'est pas totalement satisfaisante si on veut lui donner le statut de définition générale de la notion d'algorithme :

- Il y a dans la définition ci-dessus des choix assez arbitraires, comme le fait d'identifier un unique état final f , les possibilités de déplacement de la tête (l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$), le fait d'avoir le même alphabet Σ en entrée et en sortie, etc. On trouve dans la littérature de nombreuses définitions qui font des choix différents.
- Pour un objet correspondant à la définition, il y a des détails absolument pas fondamentaux, comme le choix de l'alphabet de travail, la dénomination des états, etc.
- Au delà de ces détails, il y a des choix particuliers de modélisation : le calcul est purement séquentiel et déterministe, avec une donnée d'entrée et une donnée de sortie, représentées par des suites de symboles pris dans l'alphabet Σ .
- Plus largement, il y a inadéquation entre l'objet ainsi défini et l'usage de la notion d'algorithme : dans l'algorithme d'Euclide, on n'éprouve pas le besoin de préciser l'alphabet de travail et la représentation des nombres dans cet alphabet. Le fait d'écrire les nombres en base dix, en binaire ou même en chiffres romains ne fait pas partie de ce qui caractérise cet algorithme.

Le même phénomène se retrouvera quel que soit le modèle de calcul : il y aura forcément des choix de modélisation et des conventions pour la représentation des données. Cela est inhérent à l'idée de définition formelle.

Notons au passage que si la machine de Turing fait figure de modèle de référence pour la notion de calcul, c'est en particulier pour la simplicité de sa définition (même si cela n'est pas forcément évident pour un lecteur qui ne serait pas habitué à lire des définitions de ce genre). On aurait aussi bien pu choisir comme modèle un langage de programmation quelconque, mais la définition formelle aurait été largement plus complexe et essentiellement impossible à manipuler mathématiquement (spécifier complètement des langages de programmation pour en démontrer des propriétés est le travail de plusieurs équipes de recherche dans le monde actuellement et celles-ci n'obtiennent des résultats qu'en utilisant des logiciels pour manipuler les définitions et les démonstrations, tellement celles-ci sont techniques). En quelque sorte, les modèles de calcul sont des langages de programmations simplifiés à l'extrême pour ne conserver que le minimum permettant de calculer.

La *thèse de Church-Turing* affirme que tous les modèles de calcul qui correspondraient à des choses physiquement réalisables, du moins dans leur principe, sont équivalents, au sens où ce qui est calculable par un modèle le sera par les autres (ce n'est pas un théorème, parce que sa formulation n'est pas assez précise pour le permettre, mais cette équivalence a effectivement été démontrée pour tous les modèles de calculs précis qui ont été définis). Elle peut se raffiner pour exprimer que le choix de représentation des données que l'on fait dans chaque usage de chaque modèle n'a pas d'importance pour ce qui est des algorithmes que l'on peut transcrire.

Pour ces raisons, toute définition formelle de la notion d'algorithme apparaît comme réductrice parce qu'elle fixe nécessairement des détails et des contraintes qui ne s'imposent pas dans l'absolu. En somme, poser une définition formelle au sens des mathématiques fait passer à côté du sujet puisqu'on en vient à définir ce qu'est un programme. Il semble donc plus pertinent de chercher une définition qui s'attache plutôt au concept, c'est-à-dire caractériser les propriétés opératoires de la notion d'algorithme, ainsi que les techniques et modes de raisonnement qui s'y appliquent (Vergnaud, 1990).

3.B. Définitions conceptuelles

Dans leur ouvrage *Introduction à l'algorithmique*, qui est une des références classiques au niveau universitaire, Cormen, Leiserson, Rivest, et Stein (2004) proposent la définition suivante :

Voici une définition informelle du terme algorithme : procédure de calcul bien définie qui prend en entrée une valeur, ou un ensemble de valeurs, et qui donne en sortie une valeur,

ou un ensemble de valeurs. Un algorithme est donc une séquence d'étapes de calcul qui transforment l'entrée en sortie.

Cette définition met en avant le fait d'éviter l'ambiguïté et le fait de concerner des valeurs prises dans des ensembles mathématiquement bien définis. Elle reste cependant très vague (volontairement) puisqu'elle repose sur l'idée de procédure de calcul, elle-même non définie.

Dans son ouvrage de référence *The Art of Computer Programming*, Knuth (1969) ne définit pas non plus formellement ce qu'est un algorithme, mais introduit la notion par un exemple (l'algorithme d'Euclide, notamment parce qu'il est le premier à porter ce nom dans la littérature mathématique) avant de préciser des critères qu'une procédure doit respecter pour être qualifiée d'algorithme :

- finitude : un algorithme doit toujours se terminer après un nombre fini d'étapes ;
- définition précise : chaque étape doit être définie précisément, les actions doivent être spécifiées rigoureusement et sans ambiguïté pour chaque cas ;
- entrées : des valeurs, prises dans un ensemble d'objets spécifié, qui sont données avant qu'un algorithme ne commence ;
- sorties : une ou plusieurs valeurs produites qui ont une relation spécifiée avec les entrées ;
- effectivité : les opérations à accomplir doivent être assez basiques pour pouvoir être en principe réalisées en un temps fini par une personne utilisant un papier et un crayon.

Il en ressort donc le côté opérationnel (effectivité et non-ambiguïté) et, à nouveau, le fait de concerner des valeurs prises dans des ensembles mathématiquement bien définis.

La définition proposée par Modeste (2012) dans sa thèse synthétise ces points, en ajoutant explicitement la référence à un problème que l'algorithme est censé résoudre :

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille.

La notion de problème ici est à comprendre au sens informatique : c'est la spécification d'un ensemble de valeurs d'entrées possibles (les instances du problème) et d'une réponse attendue pour chaque entrée. L'algorithme est alors vu comme une méthode permettant de calculer effectivement cette réponse, sachant que la définition du problème permet de caractériser la réponse attendue mais pas la façon de l'obtenir.

Le chapeau de l'article *Algorithme* de l'encyclopédie en ligne Wikipédia donne une formulation concise cohérente avec celle de Modeste (source consultée en septembre 2022) :

Un algorithme est une suite finie et non ambiguë d'instructions et d'opérations permettant de résoudre une classe de problèmes.

D'autres variantes, notamment issues de documents destinés aux enseignants, reprennent ce principe d'une procédure destinée à résoudre un problème. Ainsi, dans leur brochure destinée aux enseignants de mathématiques en classe de seconde, Sopena et al. (2012) écrivent :

Un algorithme décrit un enchaînement d'opérations permettant, en un temps fini, de résoudre toutes les instances d'un problème donné. Un algorithme permet donc, à partir d'une instance du problème (les données en entrée), d'obtenir un résultat correspondant à la solution du problème sur cette instance. Ce résultat est obtenu en réalisant « pas à pas » une succession d'opérations élémentaires.

Cette formulation met en avant l'idée d'opération « élémentaire », ce qui reprend l'idée d'effectivité dans les critères de Knuth.

Cette comparaison de différentes définitions informelles révèle donc une différence fondamentale avec les définitions formelles évoquées plus haut : la référence à la notion de *problème*. Dans la définition de Knuth, la « relation spécifiée » entre les entrées et les sorties, bien que plus allusive, dit quelque chose de similiaire : une suite d'opérations prend le statut d'algorithme quand on précise la nature des entrées et des sorties ainsi que la façon dont la sortie est censée dépendre de l'entrée. Ainsi, selon ces définitions, le texte suivant une procédure effective et non ambiguë mais pas un algorithme :

Entrées : a et b , entiers naturels
Tant que $b \neq 0$,
 si $a > b$ alors retrancher b à a
 sinon échanger a et b .
Renvoyer a .

Ce texte devient un algorithme si on exprime que la valeur renvoyée doit être le plus grand diviseur commun de a et b , ou si on annonce qu'il est censé résoudre le problème du calcul du PGCD. Du reste, c'est aussi un algorithme si on annonce qu'il est censé renvoyer le produit de a et b , ce qu'il ne fait pourtant pas en général.

3.C. L'usage médiatique

Au-delà des tentatives de définitions, qu'elles soient formelles ou informelles, il est indispensable d'évoquer l'usage médiatique du mot « algorithme », étant donnée la place croissante qu'il a pris ces dernières années. Comme dans le cas de beaucoup de termes issus du vocabulaire scientifique repris par les médias, le sens attribué à ce mot est très flou, probablement autant pour les rédacteurs que pour les lecteurs. On peut néanmoins identifier quelques traits significatifs.

Le mot est principalement utilisé pour désigner les différents systèmes informatiques utilisés dans de nombreux contextes de la vie publique, de l'administration à la finance, et tout particulièrement les systèmes de captation et de monétisation de l'attention tels qu'ils sont développés dans les réseaux sociaux et les sites de commerce en ligne. De plus, il y a souvent une confusion entre « algorithme » et « intelligence artificielle ». Cette expression, dont on connaît le potentiel médiatique, est elle-même prise dans un sens plutôt restreint qui correspond aux dernières applications connues du grand public, notamment l'apprentissage profond et le traitement des grandes masses de données. Il est inutile de préciser qu'une telle interprétation ne rend justice ni à l'algorithmique ni à l'intelligence artificielle, domaines dont la richesse et la diversité excèdent largement ces quelques thèmes.

Il est tout à fait normal que ces sujets préoccupent les médias et l'ensemble des citoyens, puisque ces systèmes affectent le quotidien de tout le monde avec des effets préoccupants dont le grand public prend progressivement conscience ; les effets des bulles informationnelles sur les comportements de consommation et sur les processus démocratiques sont d'ailleurs bien connus et documentés (Ertzscheid, 2017). C'est un manque de culture scientifique qui mène à cette confusion dans le vocabulaire médiatique, quand on désigne du nom savant d'algorithme un objet fantasmé, mystérieux et inquiétant, sorte de cerveau immatériel qui prendrait des décisions sur la vie de chacun de façon autonome et incontrôlée.

Ce ne sont pas « les algorithmes » qui nous gouvernent. Les infrastructures informatiques des réseaux sociaux sont conçues par des humains qui y impriment leur vision du monde et ce sont des humains qui font le choix de les utiliser dans le fonctionnement de leurs plate-formes. Savoir correctement définir la notion d'algorithme est indispensable pour pouvoir prendre le recul nécessaire pour comprendre ces enjeux.

4. L'algorithme comme objet d'enseignement

La transposition didactique (Chevallard, 1991) consiste à partir d'un savoir *savant*, notion définie et utilisée par les experts, et à en faire un savoir *à enseigner*, notion adaptée au contexte, c'est-à-dire aux connaissances et savoir-faire supposés de la part du public ciblé. Il faut donc respecter la contrainte que la notion à enseigner soit accessible tout en étant aussi fidèle que possible à la notion savante. Dans le cas de l'algorithme, des approches assez différentes se rencontrent selon les niveaux. Au delà des contraintes propres de la transposition, la variété d'approches correspond à différentes intentions que l'on peut mettre dans l'enseignement de la notion, c'est-à-dire différents raisons qui poussent à l'inclure dans les programmes d'enseignement.

4.A. Dans l'enseignement supérieur

Dans l'enseignement supérieur, la notion d'algorithme se trouve dans les filières pour lesquelles l'informatique est au cœur des objectifs d'apprentissage. On y vise donc un savoir expert, qu'il s'agit de construire avec très peu d'effet de transposition. Selon que les filières concernées sont plus orientées vers la pratique ou vers la théorie, il s'agit d'apprendre à de futurs informaticiens à concevoir leurs programmes ou bien de poser les bases pour comprendre des résultats de calculabilité et de complexité. On retrouvera donc les algorithmes classiques et les techniques pour les programmer, la démonstration de correction des algorithmes par rapport à leur spécification et l'analyse de la complexité des algorithmes et des problèmes.

Même si on n'éprouve pas le besoin de donner une définition précise de ce qu'est un algorithme, comme en témoignent les choix de Knuth (1969) ou de Cormen et al. (2004), on voit en fait l'algorithme comme l'idée derrière la conception d'un programme. En d'autres termes, l'objectif est l'implémentation sous forme d'un programme sur une machine, l'algorithme est la description de haut niveau de l'organisation d'un programme, indépendamment des aspects liés spécifiquement à la mise en œuvre (détails de syntaxe du langage utilisé, choix des structures de données à employer, utilisation de bibliothèques logicielles). La programmation sert donc de justification et de référence et les résultats formels portant sur la correction et la complexité sont fondés sur l'intuition partagée par les étudiants après plusieurs années de pratique de la programmation. Les modèles de calcul définis mathématiquement n'apparaissent dans les cursus universitaires qu'en fin de licence ou en master, en s'appuyant sur cette pratique de la programmation, dans le but de fonder les notions de calculabilité et de complexité des problèmes.

Une étude de Rafalska et Modeste (2018) sur les préconceptions des élèves et étudiants quant à la notion d'algorithme montre que, à partir de la licence, l'idée d'algorithme est fondamentalement liée à la notion de problème à résoudre : on n'envisage pas ce que serait une procédure de calcul indépendamment de ce qu'elle est censée calculer. De fait, à partir de la deuxième année de licence, la notion de preuve d'algorithme, c'est-à-dire de démonstration de l'adéquation entre la procédure décrite et une spécification donnée indépendamment, prend une importance majeure ; on étudie un algorithme pour démontrer qu'il est correct. À cela s'ajoute le critère d'efficacité dans la qualité d'un algorithme, qui est présente dans les conceptions des étudiants dès la première année de licence.

4.B. Dans l'enseignement secondaire

Dans l'enseignement obligatoire en France, l'algorithmique est explicitement présente depuis les programmes de 2016. Que ce soit dans l'enseignement primaire ou secondaire, de tronc commun ou optionnel, elle est abordée comme un objet de culture générale scientifique, contribuant à développer la « pensée informatique¹ » telle que la présente Wing (2006). Néanmoins, le rapport à l'algorithme change fondamentalement entre le cycle 3 (transition du primaire au collège) et le cycle 4 (trois dernières années du collège) et les définitions pertinentes doivent être adaptées aux attentes. On pourra se reporter à la brochure de la CII Lycée (Beffara, More, & Prouteau, 2017) pour une étude plus détaillée des notions en jeu à ce niveau.

Au collège, la notion d'algorithme est introduite explicitement et elle se construit en même temps que la pratique de la programmation, comme en témoigne le « Thème E – Algorithmique et programmation » du programme de mathématiques de cycle 4, dont les attendus de fin de cycle indiquent :

Écrire, mettre au point, exécuter un programme

Connaissances

— Notions d'algorithme et de programme.

1. J'emploie ici le mot *informatique* comme traduction de l'anglais *computational* faute de mieux : on rencontre parfois le mot *computationnel* dans des textes en français mais c'est plus une adaptation phonétique de l'anglais qu'une traduction, quant au mot *calculatoire* qui en est une traduction correcte dans certain cas, il est trop restrictif dans le contexte qui nous intéresse.

- Notion de variable informatique.
- Déclenchement d'une action par un événement.
- Séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles.

Compétences associées

- Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné.

(Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse, 2020a, annexe 3)

Dans l'esprit des documents institutionnels pour le collège, les notions d'algorithme et de programme sont implicitement distinguées, mais l'algorithme est essentiellement vu comme un brouillon de programme : sa raison d'être est l'implémentation qui en sera faite. De plus, le logiciel Scratch est utilisé systématiquement comme référence (il n'est pas mentionné explicitement dans les programmes officiels mais son influence y est visible, de plus il est explicitement utilisé dans les documents d'accompagnement et dans les sujets du brevet).

Les choix des différents manuels pour le cycle 4 quant à la définition de la notion d'algorithme sont variés, mais des traits communs se retrouvent. La distinction entre algorithme et programme est toujours présente, même si elle est plus ou moins claire selon les documents, et parfois formulée de façon discutable. Ainsi, le *Cahier d'algorithmique et de programmation Cycle 4* (éd. Delagrave, 2016, pp. 4-5), écrit :

Je comprends

- Un *algorithme* est une suite d'*instructions* à appliquer dans un ordre logique pour résoudre un problème et obtenir rapidement² un résultat. Il est écrit à la main ou à l'aide d'un logiciel dans un langage compréhensible par tous.

Je retiens

- Un algorithme sert à préparer l'écriture d'un programme informatique.

De façon similaire, le manuel *Transmath cycle 4* (éd. Nathan, 2016, p. 548) écrit :

Je retiens

- Un algorithme décrit la démarche logique d'un programme. Il met en évidence la structure de ce programme et fait apparaître ses variables.
- Un fois mis au point, l'algorithme est codé dans un langage de programmation.

On comprend de ces formulations que l'algorithme est considéré comme une méthode, par opposition au programme qui est une mise en œuvre concrète, et que le fait qu'il soit communicable est mis en avant.

En revanche, ces deux définitions suggèrent une méthode de travail qui consiste en deux phases bien marquées et distinctes : premièrement élaborer un algorithme sur papier jusqu'à ce qu'il soit parfaitement au point, deuxièmement le programmer sur ordinateur. Cette vision est discutable tant du point de vue épistémologique que du point de vue pratique. D'une part, l'écriture d'un programme n'est pas la seule raison d'être d'un algorithme : l'algorithme de l'addition posée est étudié et pratiqué en détail par les élèves à l'école primaire, mais on ne cherche pas à le faire programmer aux élèves. D'autre part, un informaticien qui élabore un algorithme ne s'interdira pas d'en programmer des ébauches dans un but d'expérimentation, car c'est ce qui permet d'acquérir des intuitions sur son fonctionnement. Néanmoins, identifier l'élaboration de l'algorithme et sa programmation comme deux activités différentes est pertinent et utile pour l'enseignement car ces activités mettent en œuvre des compétences différentes.

Quelques manuels évitent la référence à la programmation comme un passage obligé et emploient des analogies avec des situations où l'ordinateur n'intervient pas. Ainsi, le manuel *Myriade Cycle 4* (éd. Bordas, 2016, p. 20) propose :

2. On considèrera la référence à la rapidité dans cette définition comme une simple maladresse : l'intention est certainement de suggérer que l'efficacité des algorithmes est une préoccupation importante, mais il est bien clair qu'une méthode systématique et non ambiguë qui permettrait d'obtenir un résultat sans que ce soit rapide mériterait tout autant d'être appelée algorithme.

Un *algorithme* est une suite finie d'instructions permettant de résoudre un problème.

Exemple : Une recette de cuisine est un algorithme.

En effet, on dispose d'ingrédients au départ, on applique les instructions données par la recette et on obtient le plat désiré à la fin.

Si l'image avec la recette de cuisine est tentante et permet de faire comprendre l'idée de suite d'opérations communicable, il convient de prendre garde à ne pas pousser trop loin l'analogie, pour éviter de créer des confusions (les ingrédients ne sont pas des *données* d'entrée, le problème à résoudre est difficile à identifier, etc.).

Au delà de la question de définir la notion d'algorithme, les manuels scolaires du secondaire se focalisent sur les structures perçues comme fondamentales : les structures de contrôle (séquence, condition, itération), la notion de variable, et plus tard les structures de données (listes et tableaux, au lycée). L'enjeu de la correction des algorithmes est évoqué dans les dernières années de l'enseignement secondaire sans être un sujet central : ce sont la compréhension des techniques et le savoir-faire algorithmique qui sont les objectifs principaux.

4.C. Dans l'enseignement primaire

À l'école élémentaire, les sujets explicitement informatiques sont plutôt anecdotiques mais les prémices de l'algorithmique sont présents. La notion d'algorithme n'est explicitement mentionnée en mathématiques qu'en référence aux procédures du calcul posé, mettant donc en avant l'enjeu de développer un savoir-faire calculatoire. Ainsi, le programme officiel ([Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse, 2020a](#), annexe 2) indique :

Calcul posé. Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer :

- l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers ou décimaux ;
- la division euclidienne d'un entier par un entier ;
- la division d'un nombre décimal (entier ou non) par un nombre entier.

La notion est également vue comme objet à découvrir dans le cadre des apprentissages en *Sciences et technologie* :

Les élèves découvrent l'algorithme en utilisant des logiciels d'applications visuelles et ludiques.

Néanmoins, des activités de programmation sont évoquées, en lien avec le repérage. Ainsi, dans la partie *Espace et géométrie* du programme de mathématiques de cycle 2, on trouve parmi les attendus détaillés de fin de cycle :

(Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations

[...]

- Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran :
 - repères spatiaux ;
 - relations entre l'espace dans lequel on se déplace et ses représentations.

L'esprit de cet attendu, qui est confirmé dans les diverses ressources proposées aux enseignants comme dans les pratiques en classe, est de mettre en avant la notion de suite d'opérations et les deux premières compétences fondamentales liées à l'informatique que sont l'anticipation et l'évaluation (voir section 4.D.). En effet, à la différence de l'attendu sur les algorithmes de calcul posé où il n'est question que de connaître et savoir appliquer un algorithme donné, les problèmes de programmation de déplacement mettent en jeu la planification d'un trajet et sa formulation au moyen de codes et de conventions. Ceux-ci peuvent être fournis, comme dans le cas du langage de commande d'un robot ou des instructions élémentaires de Scratch, ou élaborés par l'élève, comme dans les activités telles que le *robot idiot* ([Romero, DufLOT-Kremer, & Viéville, 2018](#)).

À l'école maternelle, le mot « algorithme » est employé par les programmes ([Ministère de l'Éducation Nationale 2020b](#)) pour désigner ce qu'on désignerait dans un langage plus courant comme des suites logiques,

parfois qualifiées dans ce contexte de « suites algorithmiques ». Dans ce contexte, l'initiation à une pensée informatique ne fait pas partie des objectifs (à juste titre, car distinguer une forme de pensée typiquement informatique à l'âge de l'école maternelle n'est certainement pas pertinent). Néanmoins, l'attention est portée sur l'identification de régularités dans un processus, en lien avec l'idée de rythme (travaillée aussi avec le corps, par la musique et la percussion) et de répétition. L'attendu qui consiste à savoir identifier un motif et le reproduire peut être envisagé comme un précurseur de l'identification de « motifs » opératoires, plus tard formalisés en algorithmes. L'utilisation de suites logiques, par opposition aux situations de déplacement pratiquées à l'école élémentaire, a l'avantage de ne pas recourir au repérage spatial, compétence qui est en cours de construction à cet âge et se développe encore dans les années suivantes (Léonard, Peter, Secq, Alvarez, & Fluckiger, 2021).

4.D. Les compétences de l'algorithmique

Comme on l'a vu, les façons d'aborder l'objet algorithme sont très variées d'un niveau d'enseignement à l'autre, ce qui pose la question de la cohérence vis-à-vis de la notion sous-jacente. L'approche didactique, en analysant les compétences en jeu dans les tâches considérées comme liées à l'algorithmique, permet de dégager de grands principes qui permettent de faire le lien entre les différentes approches. On reprend ici la structuration en cinq compétences élaborée notamment par Declercq à l'occasion de la mise en place des formations d'enseignants lors de l'introduction de la nouvelle discipline « Numérique et sciences informatiques » au lycée général (Marquet & Declercq, 2019).

Anticiper consiste à se mettre en posture de programmeur pour décrire l'enchaînement d'une suite d'opérations, avant le début de l'exécution. C'est un élément fondamental du passage du statut d'outil à celui d'objet pour l'algorithme, puisqu'il s'agit, pour reprendre l'analyse de Samurçay et Rouchier (1985), de passer de *faire* une suite d'opérations pour résoudre un problème à *faire faire* ces opérations à un autre opérateur (humain ou mécanique) à un autre moment. Cette planification, déconnexion entre le temps de l'écriture et celui de l'exécution, est un trait fondamental de l'élaboration d'algorithmes.

Évaluer consiste à attribuer mentalement une valeur à un programme donné. Le mot « valeur » est à prendre dans un sens très large : il peut s'agir bien entendu de suivre un algorithme pour en obtenir le résultat, mais aussi d'évaluer le nombre d'opérations à effectuer en fonction de l'entrée, de déterminer si le résultat respectera une spécification donnée, etc. Là encore, il s'agit de considérer l'algorithme comme un objet, et en particulier de le considérer pour ce qu'il est (avec ses erreurs éventuelles) plutôt que pour ce qu'on voudrait qu'il soit. Se dégager de l'intentionnalité est l'enjeu des activités d'initiation comme le *robot idiot* autant que des problèmes de démonstration de correction qui se rencontrent aux niveaux avancés.

Décomposer est une compétence liée à la résolution de problème, elle consiste à transformer un problème complexe en un ensemble de problèmes plus simples dont l'agencement permet de résoudre le problème initial. Cette compétence se retrouve de façon très voisine dans l'enseignement des mathématiques, sa spécificité dans le cas algorithmique est peut-être de raisonner en termes de décomposition dans le temps.

Généraliser consiste à inférer un schéma général à partir d'une ou plusieurs instances particulières. Cela inclut la reconnaissance de motifs, enjeu de certaines activités d'école primaire et de collège notamment, mais aussi la capacité à repérer dans un problème particulier la répétition de traitements ou de données suivant un même schéma. Par la suite, la capacité à généraliser consiste à formuler un problème général à partir d'une instance, pour en rendre le traitement plus systématique ou le rapprocher de schémas connus (par exemple en voyant le calcul du 100^{ème} terme de la suite Fibonacci comme un cas particulier du calcul du n -ième terme d'une récurrence linéaire d'ordre 2).

Abstraire consiste à sélectionner l'information utile pour la résolution d'un problème donné, et donc à « faire abstraction » des informations non pertinentes. Cela met donc en jeu la notion d'information, caractéristique de la science informatique (qui en tire son nom), puisqu'un algorithme traite

uniquement de l'information, sous forme de données bien définies. À un niveau avancé, l'abstraction est ce qui permet de créer des solutions où la manière de résoudre un problème peut être « abstraite » à l'aide d'une interface pertinente (par exemple, rechercher une valeur dans une liste de nombres croissante ou un mot dans un dictionnaire peuvent être vus comme deux instances d'une recherche dans une liste triée, l'interface étant celle de la structure d'ordre).

Bien entendu, la plupart des tâches algorithmiques impliquent plusieurs de ces compétences, qu'il s'agisse d'élaborer ou d'analyser des algorithmes. C'est l'association de ces différentes dimensions qui caractérise l'activité propre à l'algorithmique et permet en fin de compte d'établir une cohérence entre les enseignements experts et les enseignements les plus transposés.

5. Conclusion : pourquoi définir

Comme on l'a vu, on peut tenter de définir l'algorithme de différentes façons, plus ou moins formelles. La variété de définitions n'exclut pas la cohérence et elle correspond à différents objectifs. En fin de compte, il convient de se demander ce que l'on veut tirer d'une définition.

Pour obtenir des résultats mathématiques de calculabilité, comme des théorèmes d'indécidabilité ou des bornes de complexité, il faut un modèle de calcul. C'est un élément de savoir savant qui sert de fondement aux autres approches, comme la logique formelle sert de fondement à la preuve mathématique : c'est un point de référence théorique mais le domaine ne s'y réduit pas. Si l'on cherche un moyen de spécifier, valider et analyser des méthodes de calcul, il faut plutôt caractériser un type de discours univoque et opératoire. Un tel discours pourrait *en principe* être précisé jusqu'à être implémenté dans un modèle de calcul (qu'il s'agisse d'un modèle théorique ou d'un langage de programmation concret), mais cela ne nécessite pas la définition précise d'un tel modèle. Là encore, c'est un élément de savoir savant qui suppose un fondement théorique précis et un environnement scientifique qui permet de le faire vivre. Si la définition est envisagée comme un élément de culture scientifique sur les méthodes de calcul et la conception de programmes, il faut alors mettre en avant le rôle des notions connexes de donnée, information, problème, machine (ce qui permet ensuite d'aborder la notion savante en en comprenant les enjeux). Il s'agit dans ce contexte d'introduire à la pensée informatique (Wing, 2006) en s'appuyant sur les grandes notions qui fondent la science informatique (Dowek, 2011). On a alors un élément de savoir à enseigner qui est le résultat d'une transposition didactique de la notion savante, dans un contexte institutionnel particulier. Si l'objectif est de transmettre un élément de culture générale pour contribuer à démystifier l'informatique, les définitions opératoires évoquées précédemment sont secondaires, l'enjeu important est de suggérer le genre de questions qui se rapportent à la notion d'algorithme et les façons de penser qui y sont associées. On est dans ce cas dans une forme de médiation qui donne à apercevoir un domaine de connaissance et justifie son apprentissage.

Au delà de ces différentes façons d'aborder la notion d'algorithme, il convient bien entendu de se poser la question de la pertinence de cet enseignement. Si la recherche d'une « raison d'être » de l'enseignement de l'algorithme, pour reprendre les termes de Chiprianov, Coulange, et Train (2018), n'est pas l'objet de nos réflexions ici, c'est une question inextricablement liée à celle de la définition de l'objet et de l'orientation à donner à son enseignement. S'il est admis que travailler l'algorithme, au même titre que tout autre objet de savoir scientifique, peut contribuer à apprendre à raisonner avec rigueur, il est possible que connaître de l'algorithmique n'ait que peu d'effet sur la capacité à utiliser des dispositifs numériques avec aisance et esprit critique. Quelle que soit l'opinion que l'on peut avoir sur l'intérêt d'enseigner l'informatique à tous les élèves et sur l'âge à partir duquel ce serait pertinent, la présence grandissante du mot « algorithme » dans le discours public et la sphère médiatique l'impose comme un élément de culture générale sur lequel il est indispensable que chaque citoyen ait quelques notions justes.

Références

- Beffara, E., More, M., & Prouteau, C. (2017). *Algorithmique et programmation au cycle 4 : Commentaires et recommandations du groupe Informatique de la CII Lycée*. Paris : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné* (2. éd éd.). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chiprianov, V., Coulanges, L., & Train, G. (2018, juin). Enseigner l'informatique à l'École : à la recherche d'une raison d'être. *1024 : Bulletin de la Société Informatique de France*.
- Church, A. (1941). *The calculi of lambda-conversion*. Princeton University Press.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2004). *Introduction à l'algorithmique : cours et exercices* (X. Cazin & G.-L. Kocher, Trad.). Paris : Dunod.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Dowek, G. (2011, octobre). Les quatre concepts de l'informatique. In G.-L. Baron, É. Bruillard, & V. Komis. (Eds.), *Sciences et technologies de l'information et de la communication en milieu éducatif : Analyse de pratiques et enjeux didactiques*. (pp. 21–29). Patras, Greece : Athènes : New Technologies Editions.
- Dufour, C. (2019). *Ada ou La beauté des nombres : La pionnière de l'informatique*. Paris : Fayard.
- Ertzscheid, O. (2017). *L'appétit des géants : pouvoir des algorithmes, ambitions des plateformes*. Caen : C&F éditions.
- Hilbert, D. (1990). *Sur les problèmes futurs des mathématiques : les 23 problèmes* (Réimpression autoris. de l'éd. Paris 1902 éd. ; L. Laugel, Trad.). Paris : Gabay.
- Hilbert, D., Ackermann, W., & Luce, R. E. (1999). *Principles of mathematical logic*. Providence, R.I : AMS Chelsea.
- Knuth, D. E. (1969). *Fundamental algorithms* (Vol. 1). Addison-Wesley.
- Léonard, M., Peter, Y., Secq, Y., Alvarez, J., & Fluckiger, C. (2021). MOTIF..MOTIF.. : initier à la notion de répétition en maternelle sans mobiliser de repérage spatial. doi: 10.23709/STICEF.28.3.4
- Marquet, P., & Declercq, C. (2019, avril). DIU « Enseigner l'informatique au lycée ». *Bulletin 1024*(13), 47–56. doi: 10.48556/SIF.1024.13.47
- Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse. (2020a, juillet). Programme d'enseignement : cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4). *Bulletin officiel de l'éducation nationale*, 31.
- Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse. (2020b, juillet). Programme d'enseignement : école maternelle. *Bulletin officiel de l'éducation nationale*, 31.
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat). Université de Grenoble.
- Perifel, S. (2014). *Complexité algorithmique*. Paris : Ellipses.
- Rafalska, M., & Modeste, S. (2018, octobre). Conception de la notion de l'algorithme à la transition secondaire-supérieure en France. In *Actes du Colloque EMF 2018* (pp. 1668–1676). Paris : IREM de Paris.
- Richardson, D. (1969, janvier). Some undecidable problems involving elementary functions of a real variable. *Journal of Symbolic Logic*, 33(4), 514–520. doi: 10.2307/2271358
- Romero, M., Dufлот-Kremer, M., & Viéville, T. (2018). Le jeu du robot : analyse d'une activité d'informatique débranchée sous la perspective de la cognition incarnée. *Review of science, mathematics and ICT education*.
- Samurçay, R., & Rouchier, A. (1985). De «faire» à «faire faire» : planification d'actions dans la situation de programmation. *Enfance*, 38(2), 241–254. doi: 10.3406/enfan.1985.2883
- Sopena, É., Boyer, J.-Y., Canouet, J., Faure, L., Grandjean, P., Guidez, Y.-M., ... Ubera, C. (2012). *Initiation à l'algorithmique en classe de seconde*. Talence : IREM d'Aquitaine.
- Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42(1), 230–265. doi: 10.1112/plms/s2-42.1.230
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2.3), 133–170.
- Wing, J. M. (2006, mars). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35. doi: 10.1145/1118178.1118215

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, 38000 Grenoble, France
e-mail: emmanuel.beffara@univ-grenoble-alpes.fr