



**HAL**  
open science

# PSK-LoRa : Analyse de la capacité et design de codes LDPC

Jocelyn Bourduge, Charly Poulliat, Benjamin Gadat

► **To cite this version:**

Jocelyn Bourduge, Charly Poulliat, Benjamin Gadat. PSK-LoRa : Analyse de la capacité et design de codes LDPC. GRETSI 2022, Sep 2022, Nancy, France. hal-04106916

**HAL Id: hal-04106916**

**<https://hal.science/hal-04106916>**

Submitted on 25 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PSK-LoRa : Analyse de la capacité et design de codes LDPC

Jocelyn BOURDUGE<sup>1</sup>, Charly POUILLIAT<sup>1</sup>, Benjamin GADAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>INP Toulouse, 2 Rue Charles Camichel, 31000 Toulouse, France

<sup>2</sup>Airbus Defense & Space, 31 rue Cosmonautes, 31400 Toulouse, France

jocelyn.bourduge@toulouse-inp.fr,  
charly.poulliat@toulouse-inp.fr, benjamin.gadat@airbus.com

**Résumé** – Dans ce papier, nous étudions les efficacités spectrales atteignables par les modulations par étalement *chirp* telles que les formes d’onde PSK-LoRa. Nous concevons également des codes LDPC binaires pour des systèmes de type BICM avec décodage itératif.

**Abstract** – In this paper, we investigate on the achievable spectral efficiencies of chirp spread spectrum coded modulations, such as PSK-LoRa waveforms. We also design binary LDPC for BICM systems with iterative decoding.

## 1 Introduction

De nos jours, la modulation LoRa adoptée dans les réseaux longue portée (LoRaWAN) connaît un succès important dans les réseaux étendus basse consommation (LPWAN) [1]. Les propriétés théoriques de ces modulations par étalement de type chirp (CSS) ont été analysées par de nombreuses contributions [2, 3, 4, 5]. De plus, des modifications de la forme d’onde LoRa sont proposées [6, 7] dont notamment la forme d’onde PSK-LoRa [8] afin d’augmenter l’efficacité spectrale du système. Cette modification de LoRa consiste à ajouter de l’information dans la phase du signal à l’aide de la modulation PSK (Phase-Shift Keying). Du point de vue du codage, les systèmes LoRa utilisent des codes de Hamming avec entrelaceur [9], qui peuvent éventuellement être décodés de manière itérative [10]. Cependant, les débits ( au sens de la capacité) atteignables asymptotiques n’ont pas été étudiés de manière approfondie. En outre, le design de codes correcteurs efficaces dans le contexte de la modulation LoRa et surtout PSK-LoRa n’a pas été abordé. Ainsi, dans ce papier, nous étudierons les débits atteignables asymptotiques de la modulation PSK-LoRa, ie. la capacité à entrées contraintes (CM) et la capacité BICM (Bit-interleaved coded modulation). Pour des raisons de place, on se limitera ici au cas cohérent. Puis, nous proposerons un design de code LDPC binaire pour un décodage itératif.

Le papier est organisé de la manière suivante. Dans la Section 2, nous décrivons le système de communication PSK-LoRa. Dans la Section 3, une étude de la capacité CM et BICM est réalisée. L’optimisation du système BICM avec détection et décodage itératif (ID) et une analyse du débit atteignable pour des codes LDPC binaires irréguliers sont décrites dans la Section 4. Enfin, les conclusions et perspectives sont données dans la Section 5.

## 2 Modèle du système de communication

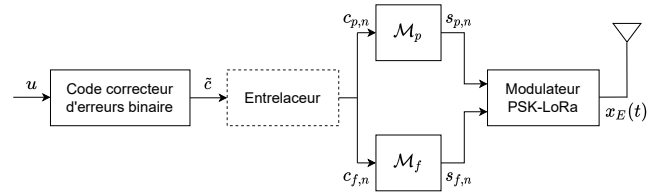


FIGURE 1 – Système de communication BICM : l’entrelaceur peut être omis pour le cas des codes LDPC.

On considère le système de communication de type BICM présenté par la figure 1. Pour la suite, on notera  $\mathbb{F}_2$  le corps de Galois binaire. Le message d’information  $u \in \mathbb{F}_2^K$  est codé par un code correcteur d’erreurs binaire en  $\tilde{c} \in \mathbb{F}_2^N$ . Ensuite, ce mot de code est entrelacé en  $c \in \mathbb{F}_2^N$ . Le vecteur binaire  $c$  est divisé en  $N_s$  vecteurs binaires  $c_n \in \mathbb{F}_2^{SF+\log_2(L)}$ ,  $n \in \llbracket 0, N_s - 1 \rrbracket$ , où  $N_s = N/(\log_2(M) + \log_2(L))$  avec  $M = 2^{SF}$ ,  $SF$  étant le facteur d’étalement lié à la modulation LoRa, et  $L$  étant l’ordre de la modulation PSK. On prendra la notation  $Q = SF + \log_2(L)$ . Les  $\log_2(L)$  premiers bits de  $c_n$  notés  $c_{p,n}$  sont associés après codage de Gray à un symbole  $s_{p,n} = \mathcal{M}_p(c_{p,n}) \in \mathcal{S}_p$ , où  $\mathcal{S}_p = \llbracket 0, L - 1 \rrbracket$ , et correspondent aux symboles PSK. Les  $SF$  derniers bits notés  $c_{f,n}$  sont quant à eux associés au symbole  $s_{f,n} = \mathcal{M}_f(c_{f,n}) \in \mathcal{S}_f$ , où  $\mathcal{S}_f = \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$  et correspondent aux symboles classiques LoRa. Pour la partie LoRa, la modulation sous-jacente à échantillonnage critique étant une modulation de type orthogonale ( ici type Frequency-shift keying, FSK), on peut montrer que la règle de mapping est indifférente, dans le sens où tous les mapping sont équivalents. En revanche, la règle de mapping a de l’influence pour la partie PSK. Pour  $t \in [0, T_s[$  avec  $T_s$  la

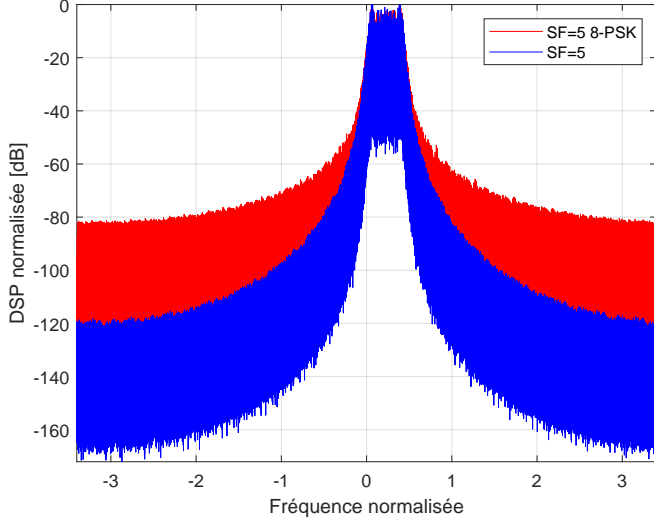


FIGURE 2 – Densité spectrale de puissance (DSP) de la forme d'onde LoRa pour  $SF = 5$  et PSK-LoRa pour  $SF = 5$  et  $L = 8$ .

durée d'un symbole, les symboles sont modulés pour donner le signal PSK-LoRa suivant :

$$x(t; s_p, s_f) = \gamma \exp(j\phi_{s_p, s_f}(t)), \quad s_p \in \mathcal{S}_p, s_f \in \mathcal{S}_f, \quad (1)$$

où  $\gamma$  est l'amplitude de l'enveloppe complexe et sera supposée égale à 1, et

$$\phi_{s_p, s_f}(t) = 2\pi \left[ \frac{s_f B t}{M} + \frac{B t^2}{T_s} - B(t - \tau_{s_f})U(t - \tau_{s_f}) + \frac{s_p}{L} \right]$$

avec  $B$  la bande occupée,  $BT_s = M$ , et  $U(\cdot)$  correspond à la fonction de Heaviside telle que  $\forall t \geq 0, U(t) = 1$  et  $U(t) = 0$  sinon. Le temps  $\tau_{s_f} = (M - s_f)/B$  correspond au moment où la fréquence instantanée [3] du signal atteint son maximum. Nous pouvons décomposer [4] le signal tel que  $x(t) = z(t)\tilde{x}(t)$  où  $z(t) = \exp\{j\pi B(t^2/T_s - t)\}$  souvent appelé *up-chirp* et ne portant pas d'information, et  $\tilde{x}(t) = \exp\{j2\pi(Bs_f t/M - BU(t - \tau_{s_f}) + s_p/L)\}$ . Enfin, le signal en bande de base émis peut s'écrire :

$$x_E(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(t - nT_s; s_{p,n}, s_{f,n})g_{T_s}(t - nT_s), \quad (2)$$

où  $g_{T_s}(t) = 1, \forall t \in [0, T_s]$  et  $g_{T_s}(t) = 0$  sinon.

La figure 2 illustre la densité spectrale de puissance de LoRa et de PSK-LoRa. Nous constatons que le spectre de la forme d'onde PSK-LoRa est toujours concentré dans la même bande que le signal LoRa sous-jacent. En revanche, l'ajout d'information par le symbole PSK dans la phase initiale du symbole LoRa fait perdre la propriété de modulation à phase continue [3], ce qui fait remonter les lobes secondaires du spectre. Notons également que les symboles ne sont plus strictement orthogonaux mais forment des groupes orthogonaux à un symbole PSK fixé, généralisant les formes d'ondes bi-orthogonales.

Côté récepteur, le signal reçu peut être décrit comme  $\tilde{y}(t) = h(t)x_E(t) + w(t)$  avec  $h(t)$  l'évanouissement du canal supposé constant sur  $T_s$  et  $w(t)$  un bruit additif blanc gaussien

(AWGN) de densité spectrale de puissance égale à  $N_0$ . Après un filtrage passe bas idéal et multiplication par  $z^*(t)$  ( $*$  étant la fonction conjugué) correspondant au *down-chirp*, le signal échantillonné au temps  $T_c = T_s/M$  est défini sur  $[nT_s, (n+1)T_s], n \in \llbracket 0, N_s - 1 \rrbracket$ , par :

$$y_{n,k} = h_n \tilde{x}_{n,k} + w_{n,k}, \quad k \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket. \quad (3)$$

On notera pour la suite  $\mathbf{y}_n = [y_{n,i}]_{i=0}^{M-1}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_n = [\tilde{x}_{n,i}]_{i=0}^{M-1}$ . La vraisemblance permettant de calculer les LLRs (Log-likelihood ratio) conditionnellement à  $h_n$  s'écrit :

$$\mathbb{P}(\mathbf{y}_n | \tilde{\mathbf{x}}_n = \boldsymbol{\nu}, h_n) \propto \exp \left\{ - \frac{\sum_{k=0}^{M-1} |y_{n,k} - h_n \nu_k|^2}{\sigma_w^2} \right\}, \quad (4)$$

avec  $\sigma_w^2 = N_0 B$  la variance de  $w$ , bruit complexe circulaire. Finalement, en notant  $\mathcal{F}$  la fonction de mapping PSK-LoRa telle que  $\tilde{\mathbf{x}}_n = \mathcal{F}(\mathbf{c}_n)$  avec  $\mathbf{c}_n = [c_n[i]]_{i=0}^{Q-1}$ , le LLR associé au bit  $c_n[i]$  utilisé pour la détection itérative est donné pour  $n \in \llbracket 0, N_s - 1 \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 0, Q - 1 \rrbracket$  par :

$$\begin{aligned} L(c_n[i]) &= \log \left( \frac{\mathbb{P}(c_n[i] = 0 | \mathbf{y}_n, h_n)}{\mathbb{P}(c_n[i] = 1 | \mathbf{y}_n, h_n)} \right), \\ &= \log \left( \frac{\sum_{\mathbf{c}_n \in \mathcal{C}_i^0} \mathbb{P}(\mathbf{y}_n | \mathcal{F}(\mathbf{c}_n), h_n) \mathbb{P}(\mathbf{c}_n)}{\sum_{\mathbf{c}_n \in \mathcal{C}_i^1} \mathbb{P}(\mathbf{y}_n | \mathcal{F}(\mathbf{c}_n), h_n) \mathbb{P}(\mathbf{c}_n)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\mathcal{C}_i^j = \{c[i] = j | c \in \mathbb{F}_2^Q\}$ , pour  $j = 0, 1$ . On a également  $\mathbb{P}(\mathbf{c}_n) = \prod_{k=0}^{Q-1} \mathbb{P}(c_n[k])$ ,  $\mathbb{P}(c_n[k])$  étant l'information a priori provenant du décodeur. L'information extrinsèque est obtenue facilement comme  $L_E(c_n[i]) = L(c_n[i]) - L_A(c_n[i])$  avec  $L_A(c_n[i]) = \log(\mathbb{P}(c_n[i] = 0)/\mathbb{P}(c_n[i] = 1))$ .

Le récepteur itératif fonctionne de la manière suivante. A l'itération  $\ell$ , le démodulateur calcule  $L_E$  à l'aide des observations et de l'information a priori ( $L_A$ ) provenant du décodeur. En utilisant cette information, le décodeur canal fournit en retour son information extrinsèque souple comme a priori pour l'itération suivante. Pour les codes LDPC, on utilisera l'algorithme BP (Belief Propagation). La détection itérative assume ici pour l'analyse et l'optimisation qu'une itération de turbo-détection est composée d'une étape de détection et d'une étape de décodage BP.

### 3 Capacités atteignables pour PSK-LoRa

L'efficacité spectrale maximale (exprimée ici en bits par seconde et par Hertz) atteignable par le système est définie par :

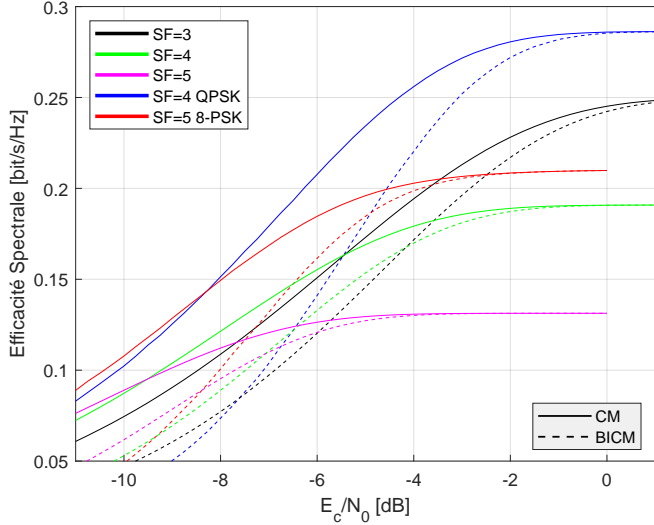
$$\eta_\infty \triangleq \frac{\log_2(M) + \log_2(L)}{(1 + \alpha)BT_s}, \quad (6)$$

où  $\alpha \geq 0$  est un facteur d'excès de bande. En reprenant la méthodologie de [3], le tableau 1 présente les valeurs de  $\alpha$  pour différents  $SF$ . De façon analogue, pour un rapport signal à bruit (SNR) donné, ici défini comme  $\text{SNR} = E_c/N_0$  avec  $E_c$  l'énergie par chip, l'efficacité maximale atteignable s'écrit :

$$\eta(\text{SNR}) = \frac{I(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{y})}{(1 + \alpha)M}, \quad (7)$$

TABLE 1 – Facteur d’excès de bande

$SF$	3	4	5	6	7
$\alpha$	0.50	0.31	0.19	0.13	0.05


 FIGURE 3 – Efficacités atteignables pour  $SF = 3, 4, 5$  et  $L = 4, 8$  sur canal AWGN ( $\forall n, h_n = 1$ ).

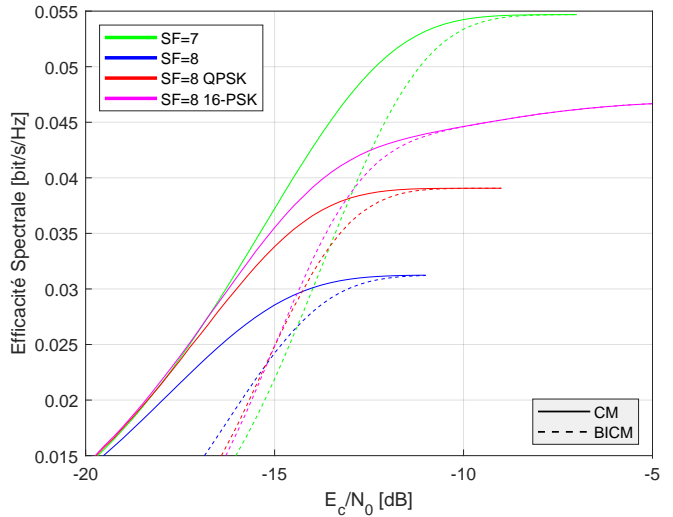
où  $0 \leq I(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{y}) \leq Q$  désigne l’information mutuelle entre  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{y}$ . Par définition, nous avons  $I(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{y}) = H(\tilde{\mathbf{x}}) - H(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{y})$ , avec  $H(\tilde{\mathbf{x}}) = Q$  et où  $H(\tilde{\mathbf{x}} | \mathbf{y})$  est l’entropie conditionnelle qui peut être calculée à l’aide de (4). La capacité BICM du système [11] est donnée par :

$$\eta_{\text{bicm}} = \frac{\sum_{k=0}^{Q-1} I(c[k]; \mathbf{y})}{(1 + \alpha)M}, \quad (8)$$

où  $c[k]$  représente le  $k$ -ième bit transmis associé au symbole transmis  $\tilde{\mathbf{x}}$ , et

$$I(c[k]; \mathbf{y}) = 1 - \mathbb{E} \left( \log_2 \left( 1 + e^{-(1-2c[k])L(c[k])} \right) \right). \quad (9)$$

Les capacités atteignables par les deux types de modulations pour des  $SF$  faibles ( $SF = 3, 4, 5$ ) sont illustrées sur la figure 3 pour un canal AWGN, et pour des  $SF = 7, 8$  sur la figure 4. Comme nous pouvons le voir, un écart important entre la capacité CM et BICM existe quelque soit le  $SF$  et quelque soit l’ordre de la modulation PSK. Cette pénalité met en lumière le fait qu’un système BICM n’est pas assez efficace en terme de débit et nécessite l’utilisation d’un système BICM-ID pour bénéficier de toute la capacité offerte par ce type de modulations. Pour des  $SF$  faibles ( $SF \leq 5$ ), l’ajout d’information dans la phase augmente de façon significative l’efficacité spectrale du système. En effet, à un  $SF$  fixé, la modulation PSK-LoRa peut atteindre des débits supérieurs au débit maximal d’un  $SF$  plus petit. En revanche, pour des  $SF$  plus élevés ( $SF \geq 7$ ) correspondant au standard LoRa, le gain en efficacité spectrale


 FIGURE 4 – Efficacités atteignables pour  $SF = 7, 8$  et  $L = 4, 16$  sur canal AWGN.

n’est visible que pour un  $SF$  fixe et reste sous optimale à l’utilisation d’un facteur  $SF$  plus petit (voir Fig. 4). Des résultats similaires sont obtenus sur canal de Rayleigh cohérent.

## 4 Optimisation des codes LDPC binaires

Dans cette partie, nous allons étudier la capacité atteignable par la modulation PSK-LoRa dans un contexte BICM-ID ayant un code LDPC binaire comme code correcteur d’erreurs externe. Un code LDPC binaire est défini par sa matrice (creuse) de parité  $\mathbf{H}$  de taille  $M_H \times K$ . En notant  $\mathcal{C}_H$  le code associé à  $\mathbf{H}$ , la matrice de parité vérifie  $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^K, \mathbf{H}\mathbf{c}^T = \mathbf{0}$  où  $(\cdot)^T$  est la fonction transposée et où  $M_H \geq N - K$  est le nombre d’équations de parité. On peut définir le rendement  $R$  du code LDPC tel que  $R = K/N \geq 1 - M_H/N$  avec égalité si et seulement si  $\mathbf{H}$  est de rang plein. Le graphe de Tanner (ou graphe bipartite) [12] basé sur la matrice de parité est composé de deux ensembles : (a) les noeuds de variables notés VNs représentent les colonnes de  $\mathbf{H}$  et sont associés aux bits du mot de code, et (b) les noeuds de contrôle notés CNs représentent les lignes de  $\mathbf{H}$  et sont associés aux équations de parité du code. Un VN d’indice  $i \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$  est relié par une branche du graphe à un CN d’indice  $j \in \llbracket 0, M_H - 1 \rrbracket$  si  $\mathbf{H}(i, j) = 1$ . Les ensembles de codes LDPC binaires sont caractérisés par les polynômes  $\lambda(x) = \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i x^{i-1}$  et  $\rho(x) = \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j x^{j-1}$  où  $\lambda_i$  représente la proportion de branches connectées aux VNS de degré  $i$  et  $\rho_j$  la proportion de branches connectées aux CNs de degré  $j$ . Le rendement de design du code  $R_d$  peut ainsi s’écrire  $R_d = 1 - \sum_{j=2}^{d_c} \frac{\rho_j}{j} / \sum_{i=2}^{d_v} \frac{\lambda_i}{i}$  [13].

La recherche des polynômes optimaux  $\lambda_{\text{opt}}(x)$  et  $\rho_{\text{opt}}(x)$  se fait grâce à une analyse EXIT charts (voir par exemple [14]). Comme le montre la figure 5, il est plus intéressant d’utiliser, à partir d’un certain SNR, la modulation PSK-LoRa pour une

efficacité spectrale fixée. Ce constat est illustré Fig.6 où le taux d'erreurs trame est tracé pour  $\eta = 0.115$  où la PSK-LoRa a de meilleures performances que LoRa. Notons également que le rendement du code interne est plus faible pour la PSK-LoRa, expliquant les différences de diversités obtenues.

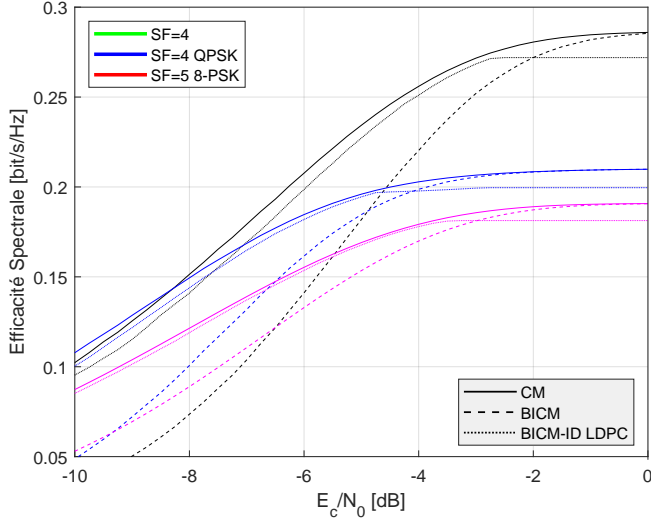


FIGURE 5 – Efficacités atteignables pour LoRa ( $SF = 4$ ) et PSK-LoRa ( $SF = 5$  8-PSK et  $SF = 4$  QPSK) et  $d_v = 15$ .

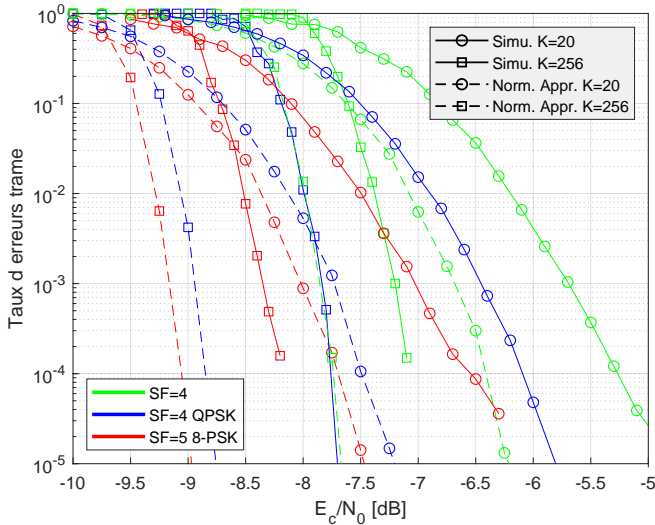


FIGURE 6 – Taux d'erreurs trame pour  $K = \{20, 256\}$  octets,  $\eta = 0.115$  et  $d_v = 15$ . La borne Normal Approximation [15] est ajoutée afin d'avoir une borne inférieure à taille finie.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons étudié la modulation PSK-LoRa et plus particulièrement les propriétés du signal. Nous avons

ainsi pu constater que PSK-LoRa permet d'envoyer plus d'information dans la même bande que LoRa, mais que celle-ci n'est intéressante que pour des  $SF$  faibles et qui étendraient la proposition LoRa actuelle. Nous avons étudié également les capacités atteignables et optimisé des codes LDPC binaires pour un schéma de détection itératif et la définition de schémas binaires quasi-optimaux (asymptotiquement). Les travaux à venir porteront sur l'étude du cas non-cohérent (PSK différentielle) et sur l'évaluation du gain d'utilisation de codes non binaires.

## Références

- [1] U. Raza, P. Kulkarni, and M. Sooriyabandara. Low power wide area networks : An overview. *IEEE Commun. Surv. Tuto.*, 2017.
- [2] L. Vangelista. Frequency shift chirp modulation : The lora modulation. *IEEE Sig. Proc. Letters*, 2017.
- [3] M. Chiani and A. Elzanaty. On the lora modulation for iot : Waveform properties and spectral analysis. *IEEE Int. of Things Journal*, 2019.
- [4] G. Colavolpe, T. Foggi, M. Ricciulli, Y. Zanettini, and J.-P. Mediano-Alameda. Reception of lora signals from leo satellites. *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, 2019.
- [5] O. Afisiadis. Physical layer aspects of lora and full-duplex wireless transceivers. Technical report, EPFL, 2020.
- [6] I. B. F. de Almeida, M. Chafii, A. Nimr, and G. Fettweis. In-phase and quadrature chirp spread spectrum for iot communications. In *IEEE Glob. Commun. Conf.*, 2020.
- [7] M. Hanif and H. H. Nguyen. Slope-shift keying lora-based modulation. *IEEE Inter. of Things Journal*, 2021.
- [8] R. Bomfin, M. Chafii, and G. Fettweis. A novel modulation for iot : Psk-lora. In *IEEE VTC2019-Spring*, 2019.
- [9] O. Afisiadis. Physical layer aspects of lora and full-duplex wireless transceivers. 2020.
- [10] T. Elshabrawy and J. Robert. Evaluation of the ber performance of lora communication using bicm decoding. In *IEEE ICCE-Berlin*, 2019.
- [11] A. G. i Fabregas, A. Martinez, and G. Caire. *Bit-interleaved coded modulation*. Now Publishers Inc, 2008.
- [12] R. M. Tanner. A recursive approach to low complexity codes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1981.
- [13] T. J. Richardson, M. A. Shokrollahi, and R. L. Urbanke. Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2001.
- [14] T. Benaddi, C. Poulliat, M.-L. Boucheret, B. Gadat, and G. Lesthievant. Design of unstructured and protograph-based ldpc coded continuous phase modulation. In *IEEE ISIT*, 2014.
- [15] Y. Polyanskiy, H. V. Poor, and S. Verdú. Channel coding rate in the finite blocklength regime. *IEEE Trans. on Info. Theo.*, 2010.