



**HAL**  
open science

# Tutoriel Optimisation Topologique d'un Transformateur

Théodore Cherrière, Thomas Gauthey

► **To cite this version:**

Théodore Cherrière, Thomas Gauthey. Tutoriel Optimisation Topologique d'un Transformateur. Doctorat. France. 2023. hal-04106150

**HAL Id: hal-04106150**

**<https://hal.science/hal-04106150>**

Submitted on 26 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Tutoriel

# Optimisation Topologique d'un Transformateur

**Théodore Cherière, SATIE, ENS Paris-Saclay**

**Thomas Gauthey, GeePs, CentraleSupélec**

10/05/2023

Cnam, Paris

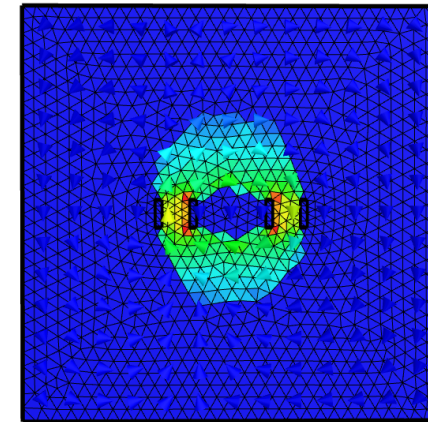
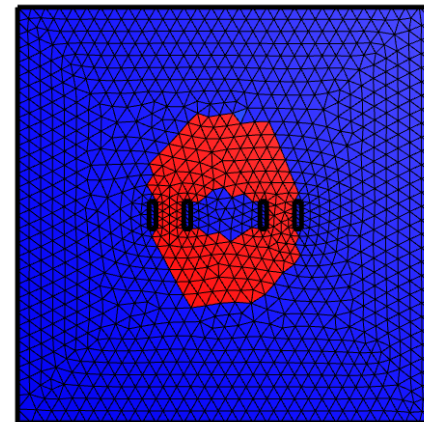
## Objectifs :

1. *Découvrir* en quoi consiste l'optimisation topologique
2. Se *familiariser* avec le vocabulaire et les *concepts mathématiques*
3. *Implémenter* une optimisation topologique simple : **transformateur**



[A 99 line topology optimization code written in Matlab, O. Sigmund, 2001](#)

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$
$$\int_{\Omega} \nabla a^* \cdot \nu(\rho) \nabla a = \int_{\Omega} a^* j$$
$$\forall v \in \mathcal{L}^\infty,$$
$$d_{\rho} f(\bar{a})(v) = \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \nabla a v$$



**Optimisation** : Art de **minimiser un coût** en **respectant des contraintes**

Écrit mathématiquement :

Variables  
d'optimisation

Fonction objectif  
scalaire (coût)

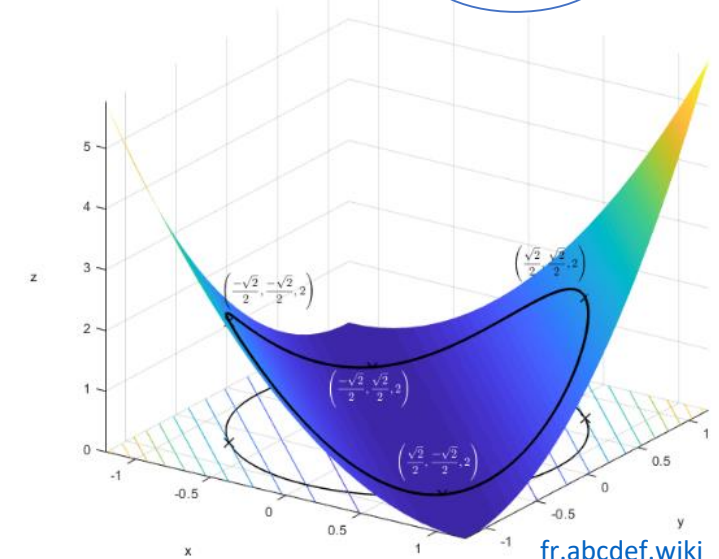
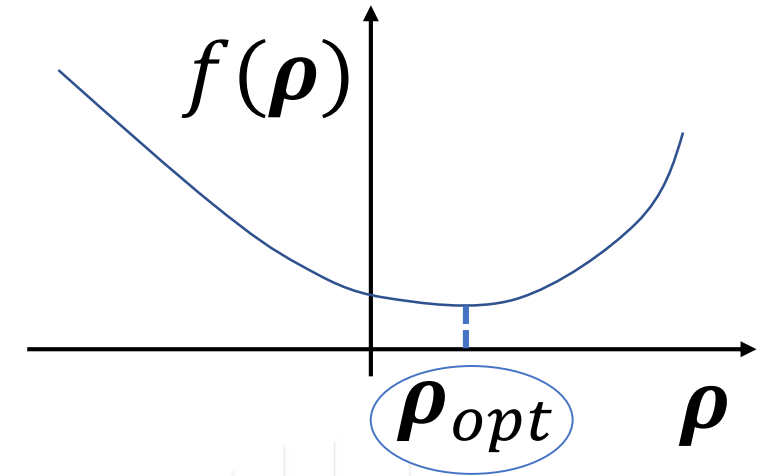
Trouver :

$$\boldsymbol{\rho}_{opt} = \arg \min f(\boldsymbol{\rho})$$

Sous contrainte :

$$h_i(\boldsymbol{\rho}) \leq 0, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Fonctions de contrainte



[fr.abcdef.wiki](http://fr.abcdef.wiki)

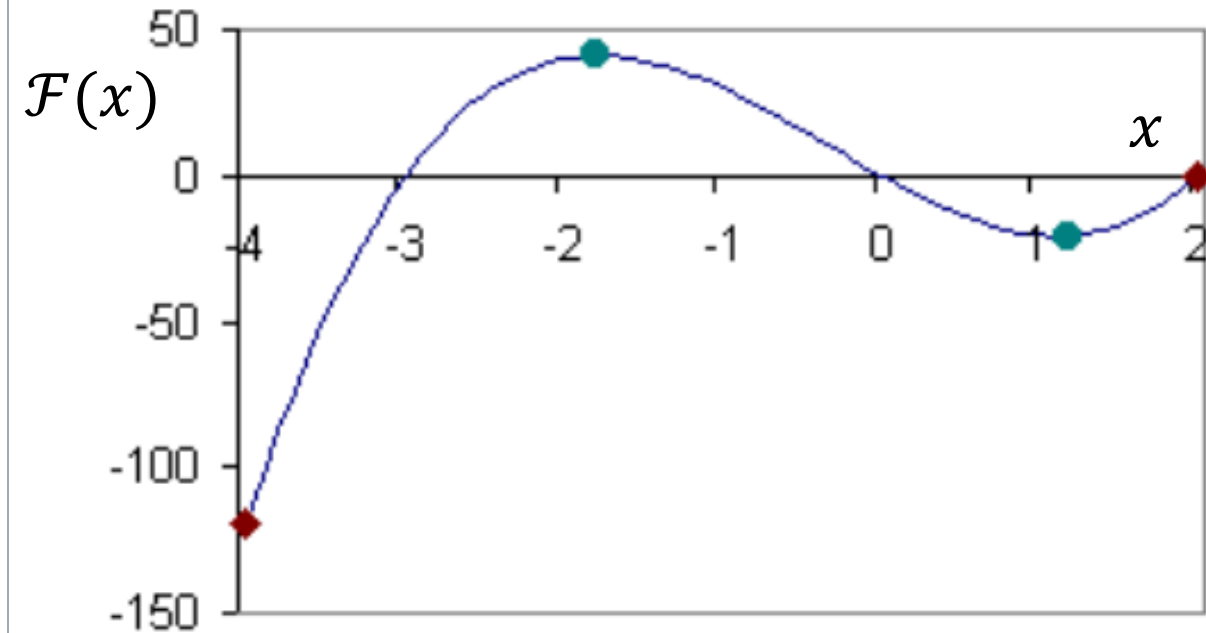
*Exemple simple*

Trouver :

$$x_{opt} = \arg \min \mathcal{F}(x)$$

Sous contrainte :

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ -x \leq 4 \end{cases}$$



**Méthode 1 :** On trace la fonction

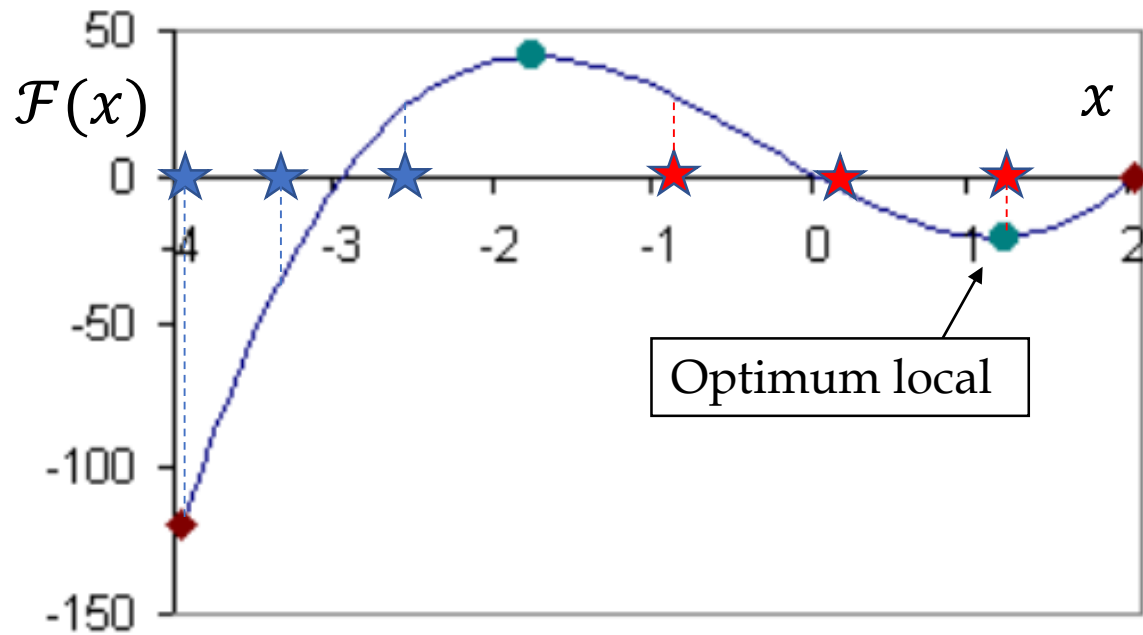
*Souvent bien trop long*

**Méthode 2 :** On calcule la dérivée et on cherche ses points d'annulation.

*Ne pas oublier les points extrémaux*  
*Tout aussi long si on trace la dérivée en chaque point*

## Méthode 3 : Descente de gradient

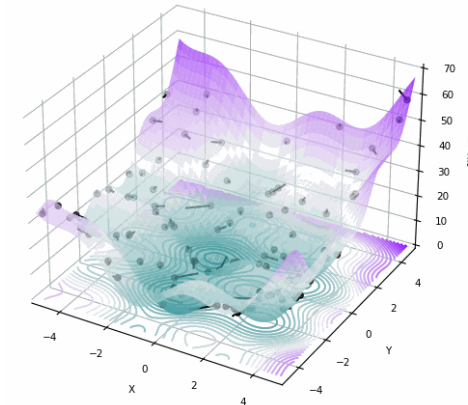
On suit la *pente* de la fonction, donnée par l'opposé de son gradient.



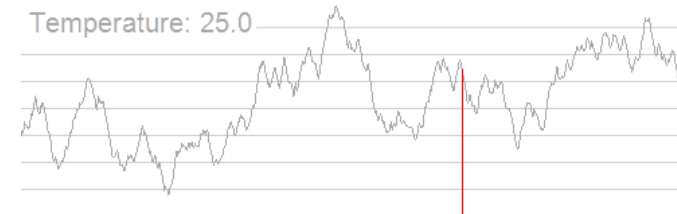
Risque de tomber sur un optimum local

## Méthode 4 : Métaheuristiques

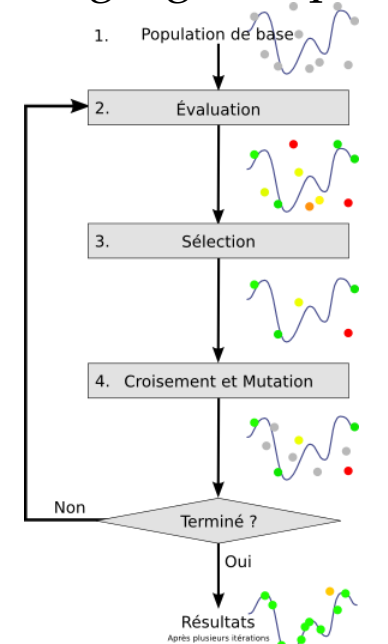
Essais particulières



Recuit simulé



Algo. génétiques



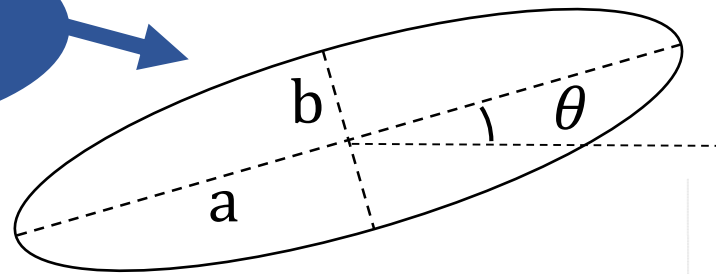
Potentiellement très lent

# 1 Qu'est ce que l'optimisation topologique ?

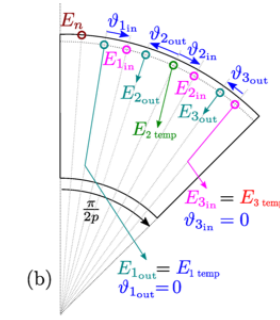
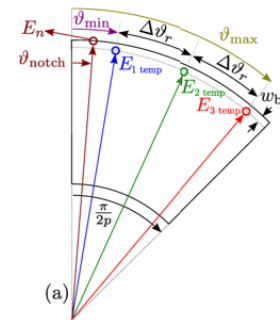
On veut optimiser une géométrie.

**Idée 1:** On part d'une géométrie initiale, et on change quelques paramètres pour en obtenir une meilleure vis-à-vis du cahier des charges donné.

Optimisation paramétrique

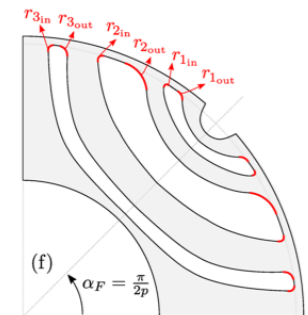
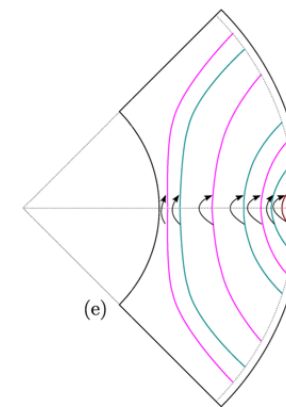
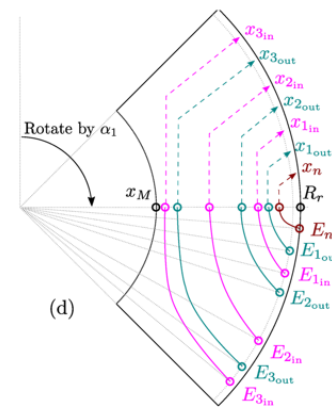


Ban, B.; Stipetic, S. Absolutely Feasible Synchronous Reluctance Machine Rotor Barrier Topologies with Minimal Parametric Complexity. *Machines* 2022, 10, 206. <https://doi.org/10.3390/machines10030206>



- (c)
1. Rotate all by angle  $\alpha = -\pi/2$
  2. Calculate inner barrier line positions
    - $x_{3in} > x_M$
    - $x_{3in} < x_{2in} < x_{1in} < R_r$
  3. Calculate outer barrier line positions
    - $x_{3in} < x_{3out} < x_{2in} < x_{2out} < x_{1in}$
    - $x_{1out} > x_{1in}$
  4. Calculate notch line position
    - $x_{1out} < x_n < R_r$
$$x_{in} = [x_{1in} \ x_{2in} \ x_{3in}]$$

$$x_{out} = [x_{1out} \ x_{2out} \ x_{3out}]$$

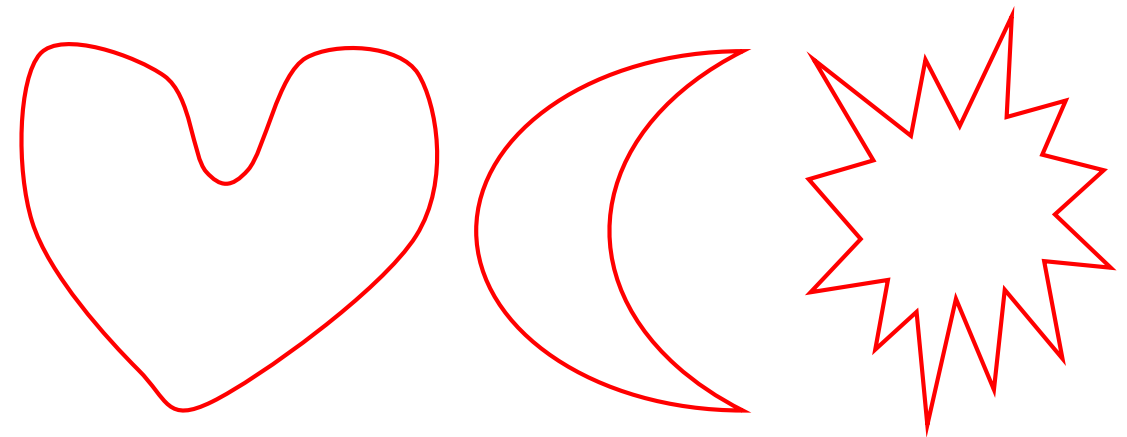
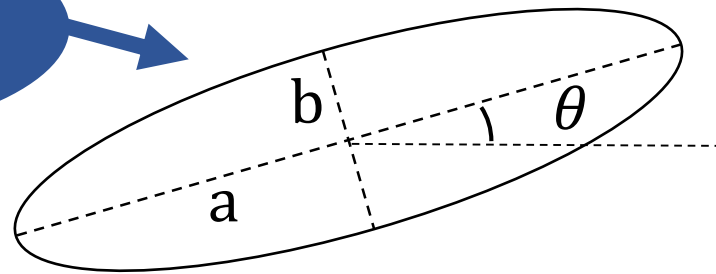


On veut optimiser une géométrie.



**Inconvénient** : La machine optimale est peut être **inatteignable** si les paramètres sont mal choisis ou peu nombreux.

Optimisation  
paramétrique



Exemples de géométries inatteignables avec le jeu de paramètres  $\{a, b, \theta\}$



On aimerait une approche non-paramétrique.

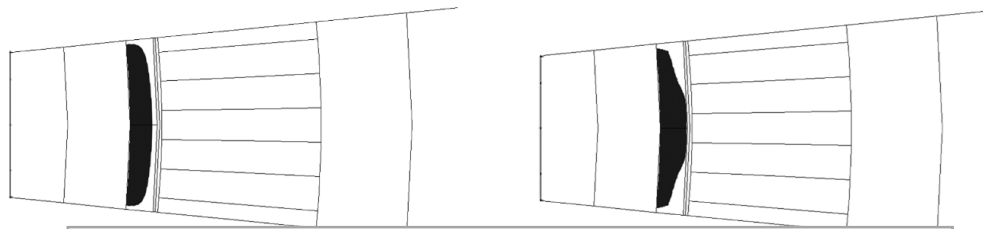
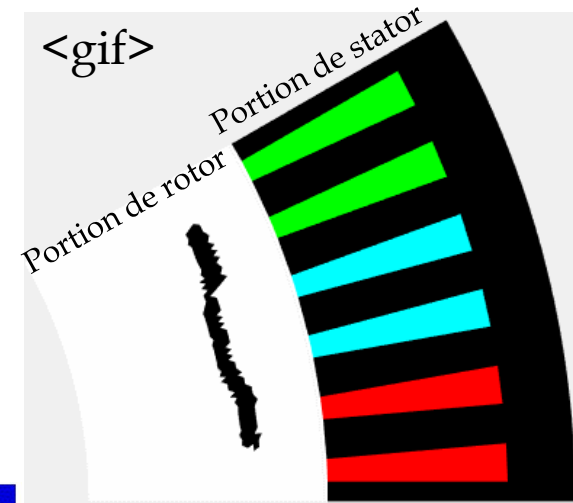
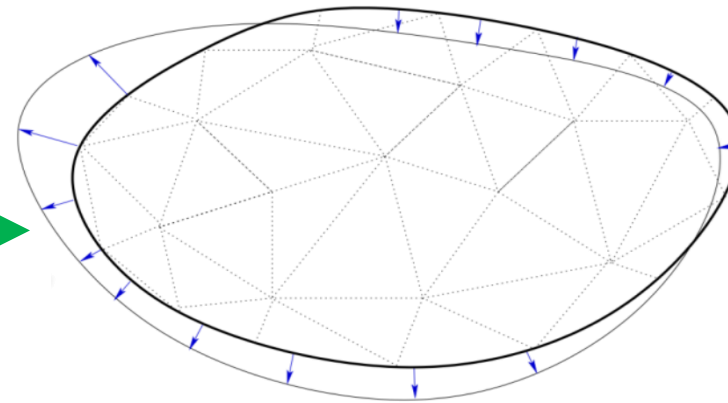
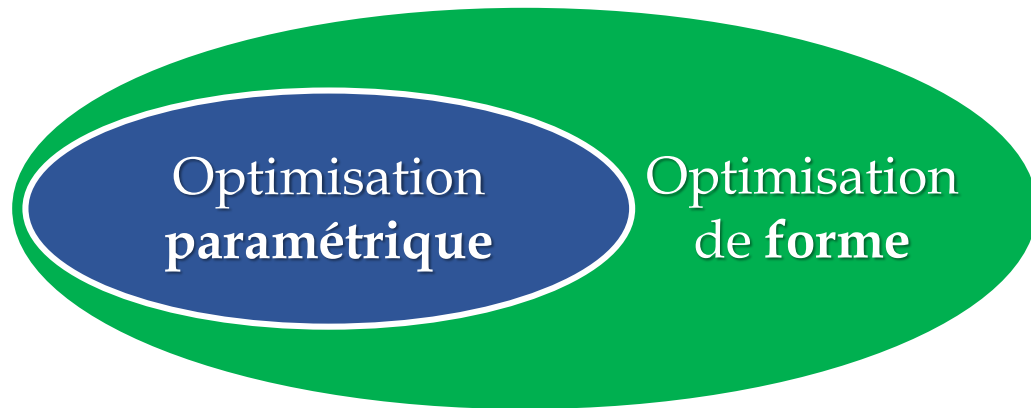


# 1 Qu'est ce que l'optimisation topologique ?

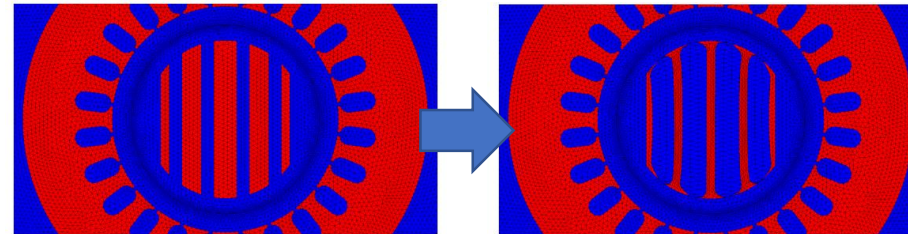
On veut optimiser une géométrie.



**Idée 2:** On part d'une géométrie existante, et on fait bouger ses frontières.



H. Hong and J. Yoo, "Shape design of the surface mounted permanent magnet in a synchronous machine," *IEEE Trans. Magn.*, 2011

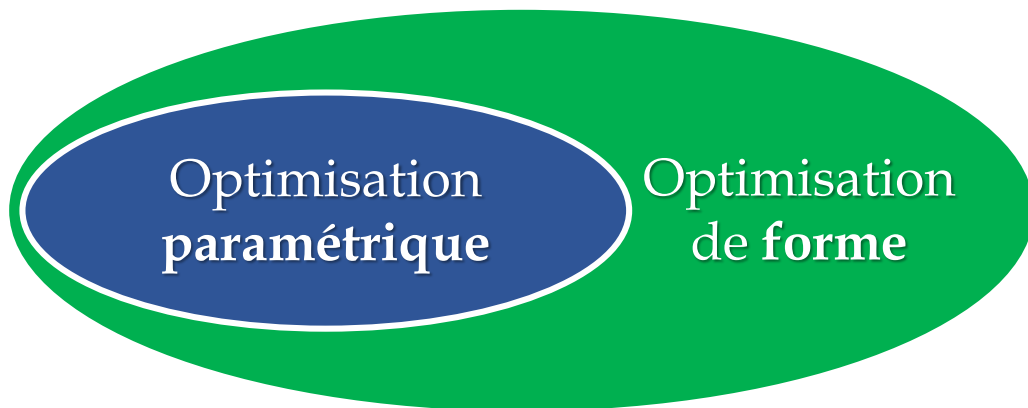


P. Gangl, S. Köthe, C. Mellak, A. Cesarano, and A. Mütze, "Multi-objective free-form shape optimization of a synchronous reluctance machine," 2020

On veut optimiser une géométrie.



**Inconvénients:** Il reste des formes inatteignables. Méthode sensible à la forme initiale.



On aimerait une approche qui permette de changer la topologie.

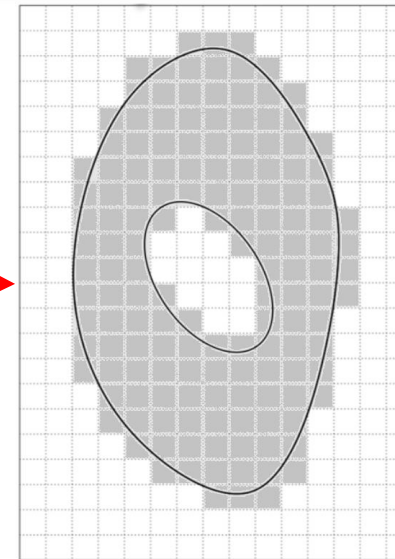
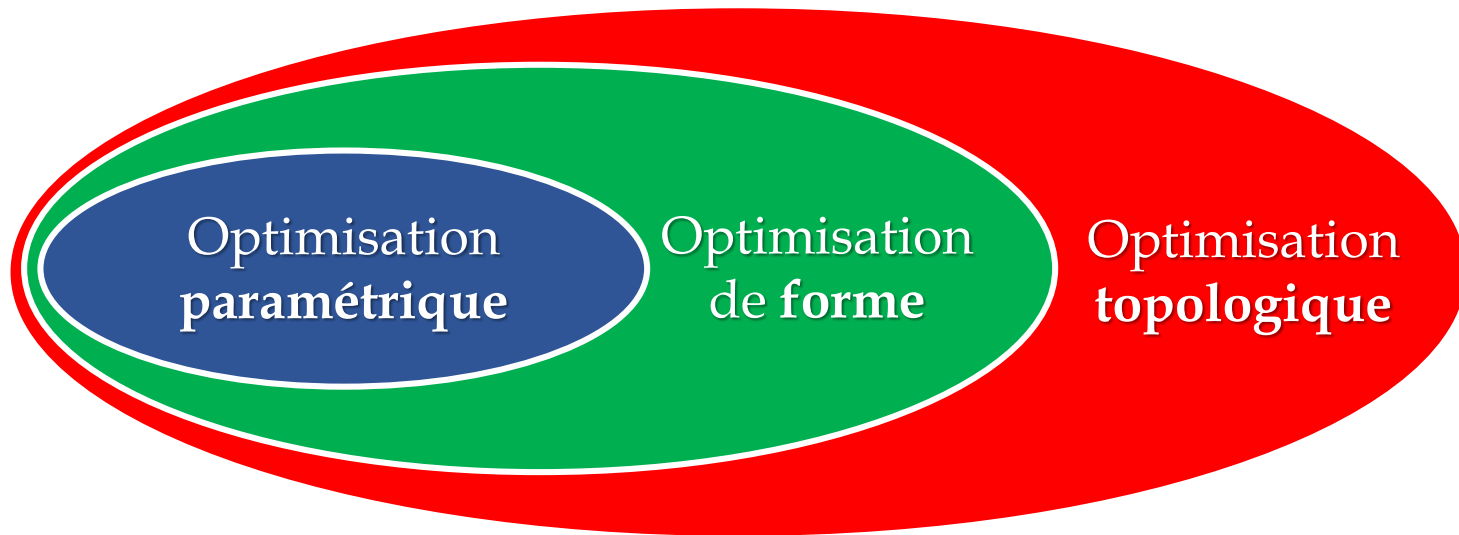


# 1 Qu'est ce que l'optimisation topologique ?

On veut optimiser une géométrie.



**Idée 3:** On représente la géométrie non-plus par ses grandeurs géométriques, mais par un champ de propriétés matériaux.



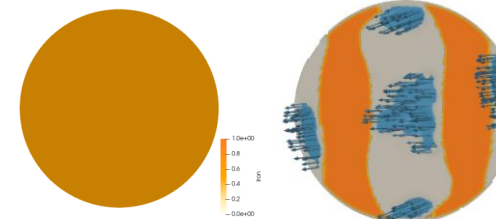
Cherriere et. al., ICEM 2022



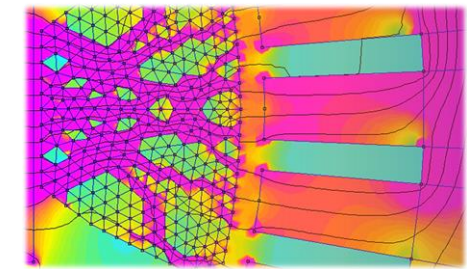
Nous allons étudier en détail cette approche.



Hage Hassan et. al., Compumag 2023

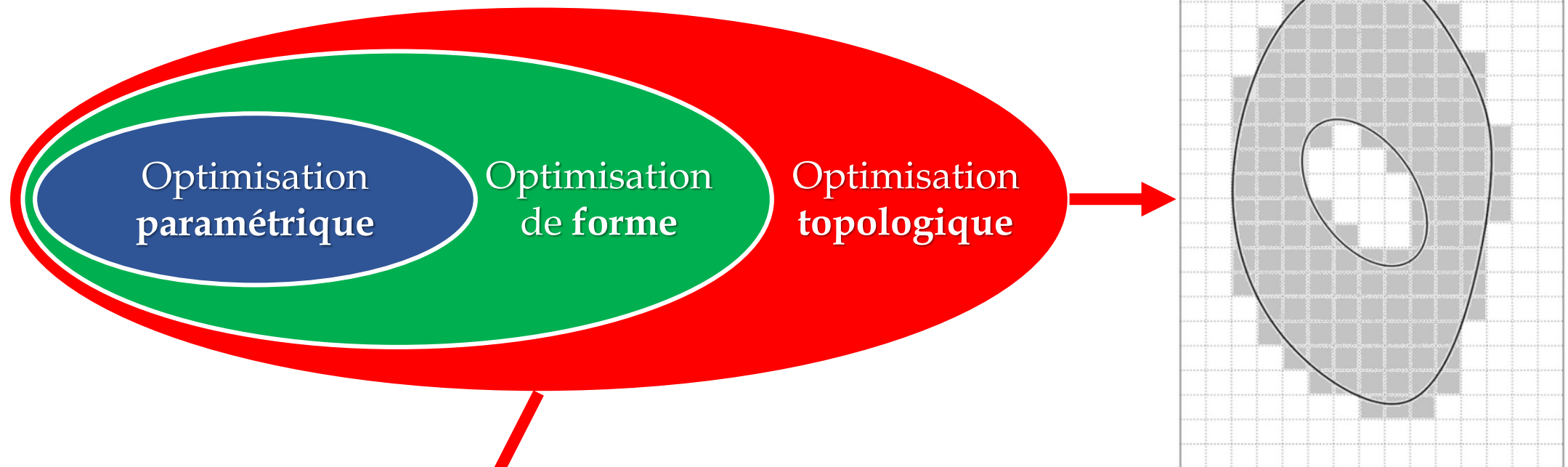


Gauthey et. al., ICEM 2022



Deeper pulse, 2019

## Récapitulatif :



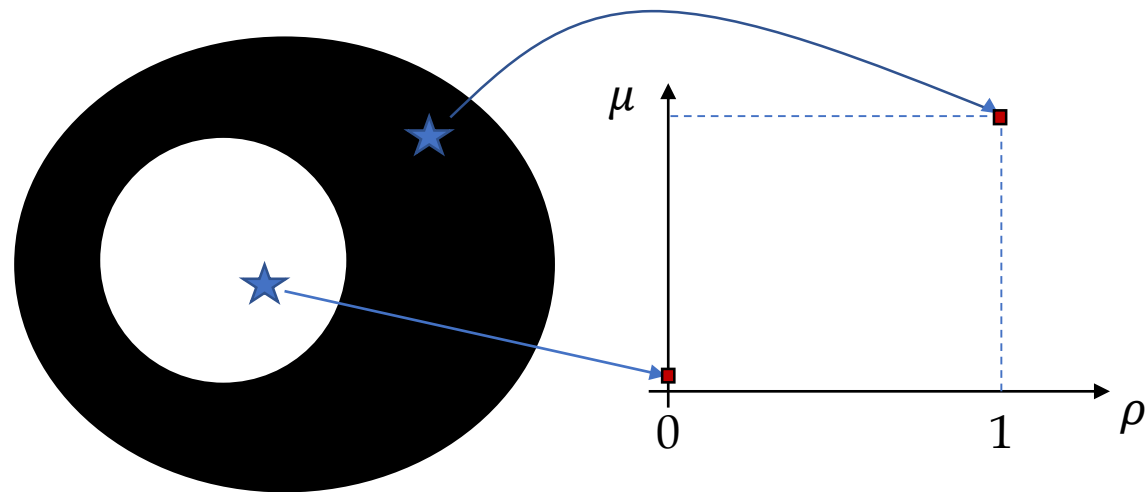
- Non-paramétrique
- Descente de gradient
- Pas besoin d'information sur la géométrie initiale
- Ensemble solutions le plus large possibles

## Méthode à densité (SIMP)

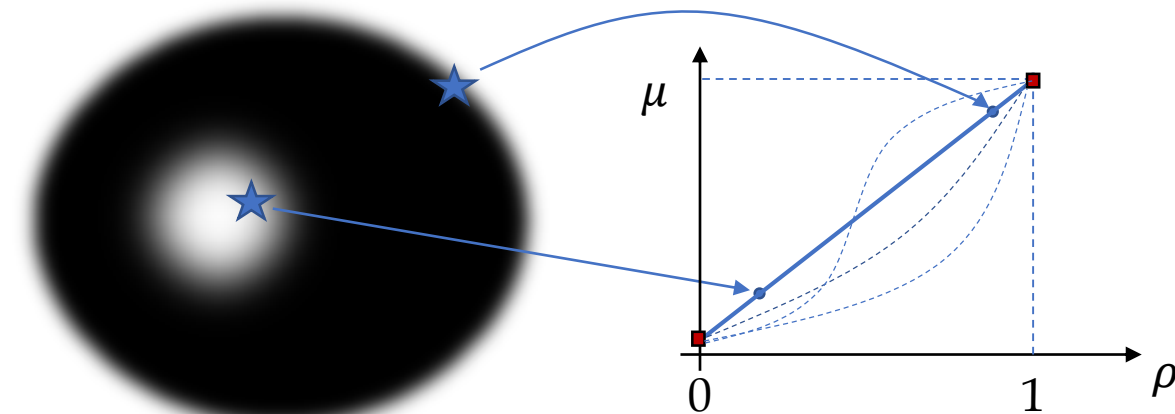
[Bendsøe, 1989](#) , [Rozvany, Zhou, Birker, 1992](#)

Le principe est de relier les propriétés matériaux à un champ de densité  $\rho$  compris entre 0 (air) et 1 (fer), en autorisant des *matériaux intermédiaires* non-physiques.

*Solution possible problème original*



*Solution possible problème relaxé*

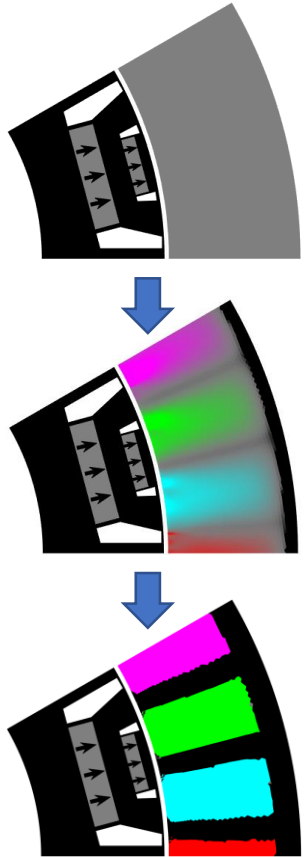


*Il existe une grande variété d'interpolations possibles*

On peut alors calculer des **dérivées** et utiliser une **descente de gradient** (*rapide*)

## Extensions possibles

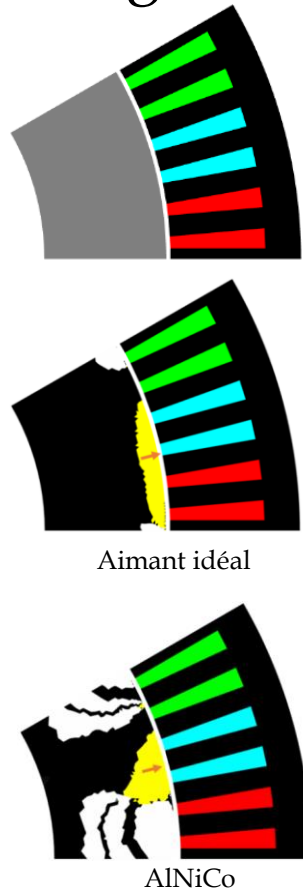
Multi-matériaux



[T. Cherière et. al., Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022](#)

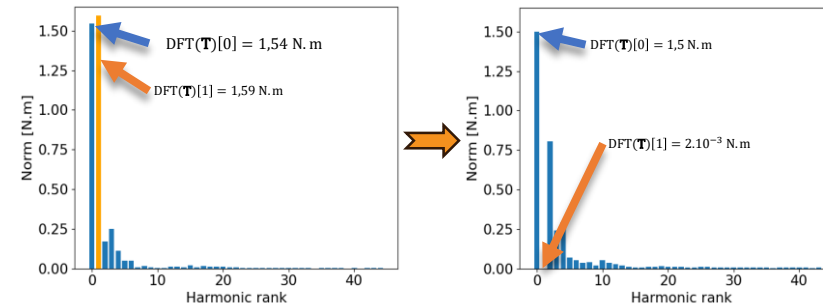
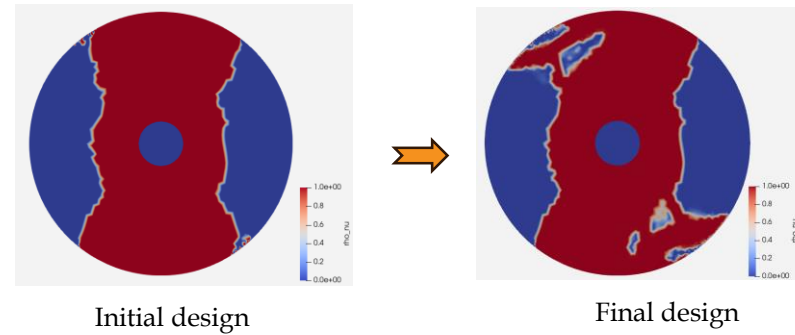
T. Cherière et. al., *Compumag*, 2023

Démagnétisation



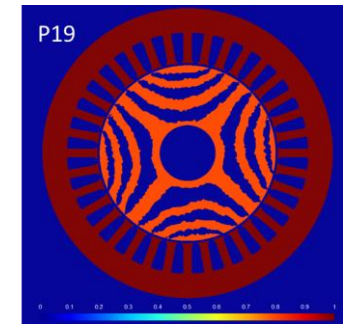
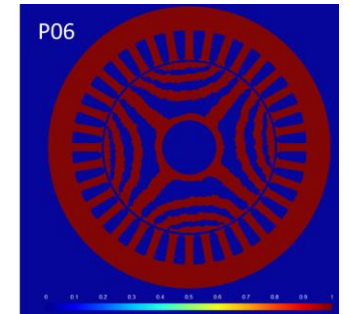
[T. Cherière et. al., IEEE Transactions on Magnetics, 2023](#)

Transformée de Fourier



T. Gauthey et. al., *Compumag*, 2023

Comportement ferromagnétique



M. Hage Hassan et al., *Compumag* 2023

# Maintenant, au travail !

 On suit désormais le déroulé de l'énoncé qui vous a été distribué.

On va implémenter l'optimisation topologique d'un **transformateur** par une **méthode à densité**

*Ecrivons l'équation de la magnétostatique (on suppose le fer linéaire)*

Équation « forte » 3D :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \nu \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \right) = \vec{j}$$

← Densité de courant

← Réductivité magnétique  
(inverse de la perméabilité)
← Potentiel vecteur  
 $\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}$

**Question 1 (p. 2):** Que devient cette équation en 2D ?

$$-\text{div} \left( \nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z \right) = j_z$$

Que vaut la formulation variationnelle associée ?



## Formulation variationnelle

Réécriture d'une équation au sens « faible » sur un domaine  $\Omega$ , en utilisant des intégrales.

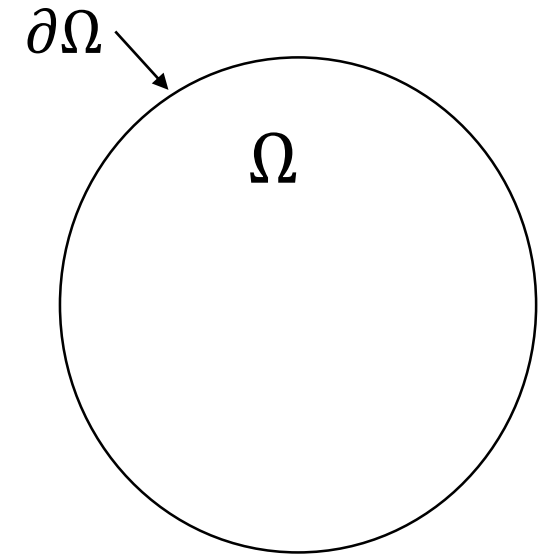
Exemple :

$$\operatorname{div}(\vec{b}) = 0 \text{ sur } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \forall a^* \in \mathcal{H}, \quad \int_{\Omega} a^* \cdot \operatorname{div}(\vec{b}) = 0$$

*Fonction test*

Ensemble *bien choisi*, tel que :

- L'intégrale existe
- $\vec{b}$  vérifie certaines conditions limites.



- $\mathcal{H}^1(\Omega)$  = ensemble des fonctions  $v$  définies sur  $\Omega$ , telles que  $\int_{\Omega} v^2$  et  $\int_{\Omega} |\overrightarrow{\operatorname{grad}} v|^2 < \infty$
- $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  = ensemble des fonctions  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  nulles sur  $\partial\Omega$

## Question 2 (p. 3): Formulation variationnelle magnétostatique 2D ?

Prenons  $a^* \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}$  étant un ensemble de fonctions suffisamment régulières :

$$-\int_{\Omega} a^* \cdot \operatorname{div} \left( \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a_z \right) = \int_{\Omega} a^* \cdot j_z$$

2 dérivées composées...



1 seul degré de dérivation...

### Intégration par partie généralisée :

- Formule de Leibniz :

$$a \cdot \operatorname{div} \vec{b} = \operatorname{div} (a \vec{b}) - \vec{b} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} a$$

- Théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} a = \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} a \cdot \vec{n}$$

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a_z$$

... mais apparition d'un terme de bord

$$-\int_{\partial\Omega} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\operatorname{grad}} a_z \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} a^* \cdot j_z$$

On obtient donc :

$$\forall a^* \in \mathcal{H}, \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z - \int_{\partial\Omega} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z \cdot \vec{n} = \int_{\Omega} a^* \cdot j_z$$

**Question 3 (p. 3):** Justifier qu'imposer  $a_z = 0$  sur  $\partial\Omega$  impose un champ  $\vec{b}$  tangentiel au bord.

Il est temps de s'intéresser à l'espace  $\mathcal{H}$  : on considère des conditions limites de Dirichlet homogène  $\Rightarrow a^* = 0$  sur le bord.

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z = \int_{\Omega} a^* \cdot j_z$$

Et c'est tout ! *Mais pourquoi s'embêter comme ça ?*

$$\forall a^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} a^* \cdot \nu \overrightarrow{\text{grad}} a_z = \int_{\Omega} a^* \cdot j_z$$

Car les formulations variationnelles sont la base de la  
**méthodes des éléments finis**

Il existe des solveurs gratuits, open-source et flexibles qui calculent la solution  $a_z$  à partir de sa formulation variationnelle.


[FEniCSx | FEniCS Project](#)

[ONELAB: Open Numerical Engineering LABoratory](#)

[FreeFEM - An open-source PDE Solver using the Finite Element Method](#)

[Netgen/NGSolve](#)

# Place au code !

 Ouvrez vos ordinateurs, et téléchargez le répertoire suivant sur votre bureau :  
[https://github.com/tcherrie/tutoriel\\_optimisation\\_topologique\\_GDR\\_SEEDS](https://github.com/tcherrie/tutoriel_optimisation_topologique_GDR_SEEDS)

**Si vous avez déjà suivi les instructions d'installation :**

1) Ouvrez une console Anaconda et écrivez :

```
conda activate tutoriel_optim_topo
```

```
jupyter notebook
```

2) Ouvrez le répertoire avec l'explorateur de fichiers de Jupyter

## Si vous n'avez pas installé NGSolve

### Option 1 : Binder

- 1) Ouvrez le fichier readme du répertoire github
- 2) Cliquez sur  launch binder
- 3) Espérez, et si ça se bloque, vous pouvez réessayer 2-3 fois... sinon :

### Option 2 : JupyterHub (GeePs)

1. Se connecter à <https://connectme.geeps.centralesupelec.fr:555>
2. S'identifier avec les id et mots de passe fournis

### Option 3 : Installation locale ( $\approx$ 20 min)

Suivre les instructions sur le readme du répertoire GitHub



Si vous n'êtes pas familier des notebooks Jupyter, commencez par ouvrir [1-Guide Jupyter.ipynb](#)



Ouvrez également en arrière plan [2-BaseNgSolve.ipynb](#) (exemples de syntaxe NGSolve)



Enfin, ouvrez le document principal

[3-Optimisation topologique d'un transformateur.ipynb](#)

et laissez vous guider.

## Dérivée totale vs dérivée partielle

On pose la fonction à deux variables  $f(x, a) = 4x + a$ , avec  $a(x) = 2x$

Calculer la **dérivée totale**  $\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, a(x+h)) - f(x, a)}{h}$

Comme  $a(x) = 2x$ , on a  $f(x, a) = 6x$  donc  $\frac{df}{dx} = 6$

Calculer la *dérivée partielle*  $\frac{\partial f}{\partial x}$

Cela signifie dériver **formellement** par rapport à  $x$ , les autres variables étant fixées **même si elles dépendent de  $x$**



## Dérivée totale vs dérivée partielle

Ici :  $f(x, a) = 4x + a$ , donc  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 4}$

arbitraire



**Remarque 1:** La dérivée partielle *dépend* de l'écriture de  $f$

*Ces deux fonctions sont égales mais n'ont pas les mêmes dérivées partielles:*

$$a(x) = 2x \Rightarrow \begin{cases} f_1(x, a) = 4x + a \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = 4 \\ \parallel \\ f_2(x, a) = 2x + 2a \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2 \end{cases} \neq$$

## Dérivée totale vs dérivée partielle

$$f_1(x, a) = 4x + a$$

$$f_2(x, a) = 2x + 2a$$



**Remarque 2:** La dérivée totale *est indépendante* de l'écriture de  $f$

On peut d'ailleurs le démontrer avec la **règle de la chaîne** :

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dx}}$$

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial a} \cdot \frac{da}{dx}$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial a} \frac{da}{dx}$$



**Remarque 3:** Toute dérivée partielle est « facilement » calculable.

## Dérivée directionnelle (totale)

La dérivée partielle est donc un outil commode pour dériver par rapport à des *variables* qui sont en fait *des fonctions* interdépendantes.

Et lorsque ces **fonctions** sont des **champs de l'espace** ?

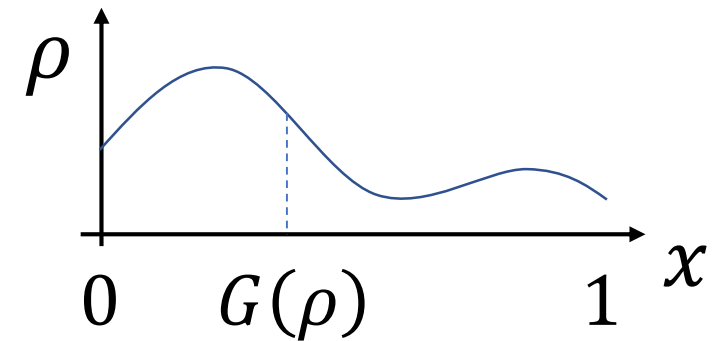
### Généralisation :

$$d_{\rho} f(\rho, a)(d) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\rho + hd, a(\rho + hd)) - f(\rho, a(\rho))}{h}$$

Fonction      Variables (champs)      Direction de perturbation de  $x$

**Exemple à 1 variable** : la position du centre de gravité  $G$  vis-à-vis de la répartition de *densité*  $\rho$

$$G(\rho) = \frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int_{x=0}^{x=1} \rho(x) dx}$$



La variation de position de  $G$  dépend de la manière dont on perturbe la répartition  $\rho$

$$d_{\rho} G(\rho)(d) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_{x=0}^{x=1} x (\rho(x) + hd(x)) dx}{\int_{x=0}^{x=1} (\rho(x) + hd(x)) dx} - \frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int_{x=0}^{x=1} \rho(x) dx}}{h}$$

$$d_{\rho}G(\rho)(d) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_{x=0}^{x=1} x (\rho + hd) dx}{\int_{x=0}^{x=1} (\rho + hd) dx} - \frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int_{x=0}^{x=1} \rho(x) dx}}{h}$$

Développement limité :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int \rho} \left( 1 - \frac{\int_{x=0}^{x=1} h d(x) dx}{\int \rho} \right) + \frac{\int_{x=0}^{x=1} x h d(x) dx}{\int \rho} \left( 1 - \frac{\int_{x=0}^{x=1} h d(x) dx}{\int \rho} \right) + o(h) - \frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int_{x=0}^{x=1} \rho(x) dx} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int \rho} \cdot \frac{\int_{x=0}^{x=1} d(x) dx}{\int \rho} + \frac{\int_{x=0}^{x=1} x d(x) dx}{\int \rho} + o(h) \right] = -\frac{\int_{x=0}^{x=1} x \rho(x) dx}{\int \rho} \cdot \frac{\int_{x=0}^{x=1} d(x) dx}{\int \rho} + \frac{\int_{x=0}^{x=1} x d(x) dx}{\int \rho} \end{aligned}$$

On pose  $M(\cdot) = \int \cdot$  la masse globale de  $\rho$  ou de la perturbation, on obtient :

$$d_{\rho}G(\rho)(v) = \frac{\int_{x=0}^{x=1} x d(x) dx}{M(\rho)} - \frac{M(d)}{M(\rho)} G(\rho)$$

Application au Lagrangien :

$$\mathcal{L}(a, \lambda, \rho) = \int_{S_1} a - \int_{S_2} a + \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot v(\rho) \nabla a - \int_{\Omega} \lambda j$$

Calcul des trois dérivées directionnelles **partielles** :

- $\partial_a \mathcal{L}(a, \lambda, \rho)(d) = \int_{S_1} d - \int_{S_2} d + \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot v \nabla v$
- $\partial_{\lambda} \mathcal{L}(a, \lambda, \rho)(d) = \int_{\Omega} \nabla d \cdot v \nabla a - \int_{\Omega} dj$
- $\partial_{\rho} \mathcal{L}(a, \lambda, \rho)(d) = \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} \nabla a d$

## Règle de la chaîne – dérivée directionnelle

$$d_{\rho}f(a(\rho), \rho)(d) = \underbrace{\partial_{\rho}f(a, \lambda, \rho) + \partial_a f(a, \lambda, \rho)}_{\text{Dérivées partielles}} \underbrace{(d_{\rho}a(\rho)(d))}_{\text{Dérivée totale (considérée comme une direction de perturbation)}}$$

Dérivées partielles

Dérivée totale  
(considérée comme une  
direction de  
perturbation)

À comparer à la formule traditionnelle lorsque les variables ne sont pas des champs :

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\rho}$$

*C'est la même formule, sauf qu'il n'y a qu'une seule « direction » possible à l'évolution des variables*

## Gradient

Le gradient  $\nabla_{\rho} f$  peut être interprété comme la *direction de perturbation* qui *maximise la variation* de  $f$ .

Dans le cas particulier suivant : *Il suffit d'enlever l'intégrale et le  $d$  !*

$$d_{\rho} f(\rho)(d) = \int_{\Omega} f'(\rho) d \Rightarrow \nabla_{\rho} f = f'(\rho)$$

### Exemple :

$$d_{\rho} f(a, \lambda, \rho)(d) = \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} \nabla a d \Rightarrow \nabla_{\rho} f = \nabla \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} \nabla a$$



# Méthode de l'adjoint discrétisée (modèle linéaire)

On a un vecteur de variables d'optimisation  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_n]$ , et une fonction objectif  $f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}))$ .

On ne connaît pas l'expression de  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\rho})$ , mais on sait que  $\mathbf{a}$  et  $\boldsymbol{\rho}$  sont liés par le système linéaire :

$$K(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{a} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\rho})$$

On veut calculer chaque composante du gradient par la **règle de la chaîne** :

Terme dur à calculer

$$\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i}$$

**Astuce** : On dérive le système physique par rapport à  $\rho_i$ , puis on applique la *règle de la chaîne* :

$$\frac{d(K(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{a})}{d\rho_i} = \frac{d\mathbf{s}(\boldsymbol{\rho})}{d\rho_i} \Rightarrow \frac{\partial(K(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{a})}{\partial \rho_i} + \underbrace{\frac{\partial(K(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}}_{K} \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \mathbf{a}}}_0 \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} \Rightarrow \boxed{K \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial K}{\partial \rho_i} \mathbf{a}}$$

**On réécrit donc :**

$$\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \cdot K^{-1} \left( K \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \cdot K^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial K}{\partial \rho_i} \mathbf{a} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial K}{\partial \rho_i} \mathbf{a} \right)}$$

Avec  $\boldsymbol{\lambda}$  solution du système **adjoint** :

$$\boxed{K^T \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}}$$

# Méthode de l'adjoint discrétisée (modèle non linéaire)

On a un vecteur de variables d'optimisation  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_n]$ , et une fonction objectif  $f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}))$ .

On ne connaît pas l'expression de  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\rho})$ , mais on sait que  $\mathbf{a}$  et  $\boldsymbol{\rho}$  sont liés par le système linéaire :

$$K(\mathbf{a}, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{a} = \mathbf{s}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\rho})$$

On veut calculer chaque composante du gradient par la **règle de la chaîne** :

$$\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i}$$

**Astuce** : On dérive le système physique par rapport à  $\rho_i$ , puis on applique la *règle de la chaîne* :

$$\frac{d(K\mathbf{a})}{d\rho_i} = \frac{d\mathbf{s}}{d\rho_i} \Rightarrow \frac{\partial(K\mathbf{a})}{\partial \rho_i} + \frac{\partial(K\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} \Rightarrow \boxed{\left( \frac{\partial(K\mathbf{a} - \mathbf{s})}{\partial \mathbf{a}} \right) \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial K}{\partial \rho_i} \mathbf{a}}$$

Opérateur tangent (le même que dans Newton Raphson)

**On réécrit donc :**

$$\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \left( \frac{\partial(K\mathbf{a} - \mathbf{s})}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \left( \left( \frac{\partial(K\mathbf{a} - \mathbf{s})}{\partial \mathbf{a}} \right) \frac{d\mathbf{a}}{d\rho_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \left( \frac{\partial(K\mathbf{a} - \mathbf{s})}{\partial \mathbf{a}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial K}{\partial \rho_i} \mathbf{a} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{d\rho_i} = \frac{\partial f}{\partial \rho_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial K}{\partial \rho_i} \mathbf{a} \right)}$$

Avec  $\boldsymbol{\lambda}$  solution du système **adjoint** :

$$\boxed{\left( \frac{\partial(K\mathbf{a} - \mathbf{s})}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}}$$