Autour de la fonction de Weierstrass

Claire David

▶ **To cite this version:**

Claire David. Autour de la fonction de Weierstrass. Quadrature, 2021, 122. hal-04104219

HAL Id: hal-04104219
https://hal.science/hal-04104219

Submitted on 23 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Autour de la fonction de Weierstrass

Claire David

2 mars 2021

Sorbonne Université
CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu 75005, Paris, France

Résumé

La fonction de Weierstrass est l'un de ces objets mathématiques dits « pathologiques », continue partout, nulle part dérivable. Mais quelle est, au fond, son origine ? Lubie de mathématicien, qui remet en question les canons de l'analyse classique du XIX^{ième} siècle, ou outil extraordinaire, dont les possibilités n'avaient été, sur le moment, qu'à peine entrevues ?

AMS Classification : 37F20-28A80-05C63.

Introduction

La fonction de Weierstrass, introduite dans la seconde moitié du XIX^{ième} siècle par Karl Weierstrass [KH16], [Wei75], est l'un de ces objets mathématiques que l'on qualifie de « pathologique », continue partout, mais nulle part dérivable. Etant donné $\lambda \in]0,1[$, et un réel b tel que $\lambda\, b > 1 + \dfrac{3\,\pi}{2}$, la fonction est la somme de la série trigonométrique uniformément convergente

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \, \cos\left(\pi\, b^n\, x\right).$$

L'histoire de cette fonction, et son introduction, par Karl Weierstrass, présente un intérêt particulier, tant sur le plan mathématique qu'historique. Sur le plan mathématique, bien sûr, plus que celle de Bernhard Riemann en 1861 [Dar75], puisque, cette fois-ci, la preuve de la non dérivabilité a été donnée. Si toutes les théories existantes, qui remontaient à André-Marie Ampère, au début du siècle, se trouvent, brutalement, remises en question, elles conduisent à un nouvel essor, qui va, au sein de la communauté, susciter l'émergence d'autres fonctions possédant des propriétés similaires.

D'un point de vue historique, l'apparition de cette fonction coïncide avec le renouveau matériel, moral et conceptuel initié par la Prusse au XIX^{ième} siècle, dans le cadre de l'unité allemande, et qui a, probablement, joué un rôle dans la nomination de Karl Weierstrass, jusqu'alors enseignant de lycée, comme Professeur à l'Université Friedrich-Wilhelms de Berlin.

Karl Weierstrass s'est fait connaître, au départ, pour ses résultats sur les fonctions abéliennes [Wei54], [Wei56] : l'université allemande ne pouvait passer à côté d'un tel talent. Ce choix s'est avéré plus que juste. La fonction de Weierstrass function est restée dans l'histoire. Son impact se fait encore ressentir,

même s'il a fallu quelque temps avant que d'autres propriétés ne soient découvertes.

Mais oui ! En sus de son caractère nulle part dérivable, la fonction présente des propriétés d'autosimilarité. Après les travaux d'A. S. Besicovitch et de H. D. Ursell [BU37], c'est Benoît Mandelbrot [Man77] qui a mis en évidence le caractère fractal de la courbe associée à cette fonction. Il a, aussi, émis l'hypothèse selon laquelle la dimension de Hausdorff de la courbe serait égale à $D_{\mathcal{W}} = 2 + \dfrac{\ln \lambda}{\ln b}$. Même s'il n'a pas démontré ce résultat, d'autres l'ont fait par la suite, mettant en lumière la perception mathématique pour le moins exceptionnelle de Mandelbrot.

A la lumière de tout ceci, il semble important de s'intéresser à la fonction de Weierstrass dans une perspective historique, ce, d'autant plus que des discussions très riches à son sujet sont toujours au cœur des préoccupations de la communauté mathématique.

Par exemple, dans [Dav18], il est montré que, lorsque $b = N_b$ est entier, la dimension de Minkowski de la Courbe de Weierstrass, qui se trouve, aussi, être égale à la dimension de Hausdorff [KMPY84], [BBR14], peut, contrairement aux travaux existants, être obtenue de façon simple, sans recourir à des outils nécessitant des connaissances poussées en théorie des systèmes dynamiques. Tout ceci est obtenu à l'aide de préfractales, c'est-à-dire de suites de graphes approchant la courbe.

Au prisme de l'histoire :

d'Ampère et ses croyances, aux objets pathologiques

En 1806, André-Marie Ampère [Amp06] a donné ce qu'il considérait comme « une preuve » du fait que, pour une courbe donnée, il est toujours possible, sauf en un nombre fini de points, d'en calculer la pente. Cette « preuve », que l'on trouve dans les ouvrages de Mathématiques de l'époque, a ainsi servi de référence jusqu'au milieu du XIX^{ième} siècle.

MÉMOIRE.

Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, *et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque.*

Par M. Ampère, Répétiteur à l'École polytechnique.

Toute fonction de deux variables x et i, se change, lorsqu'on donne à i une valeur déterminée, en une fonction de x, à moins qu'elle ne prenne alors une valeur infinie ou nulle pour toutes les valeurs de x.

Je dis pour toutes les valeurs de x, car si cette fonction ne devenait nulle ni infinie quand on donne à i cette valeur déterminée, que pour certaines valeurs de x, ce n'en serait pas moins une fonction de x, seulement cette fonction deviendrait nulle ou infinie pour ces valeurs de x.

Lorsque la fonction de x et de i ne se présente pas sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, quand on substitue à la place de i la valeur qu'on veut lui donner, il est toujours aisé de voir lequel de ces différens cas a lieu; mais lorsque cela arrive, on est obligé, pour le savoir, d'avoir recours à la considération des propriétés particulières à la fonction dont on s'occupe.

Je me propose d'abord de démontrer que la fonction de x et de i

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

qui exprime le rapport de la différence de deux valeurs x et $x+i$ d'une variable, et de la différence des deux valeurs correspondantes d'une quelconque de ses fonctions $f(x)$, ne peut devenir ni nulle ni infinie pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on fait $i = 0$, supposition

dans laquelle l'expression précédente devient $\frac{0}{0}$; il résultera nécessairement de cette démonstration, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

se réduit, quand $i = 0$, à une fonction de x. Cette fonction, qui dépend évidemment de $f(x)$, et que M. *Lagrange* a nommée en conséquence sa fonction dérivée, est, comme on sait, de la plus grande importance dans les mathématiques, et sur-tout dans leur application à la géométrie et à la mécanique; nous la représenterons, comme cet illustre mathématicien, par $f'(x)$, et notre premier but sera d'en démontrer l'existence.

Cette démonstration est d'autant plus nécessaire, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

est la seule des fonctions qu'on trouve, en donnant diverses valeurs constantes à m dans

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i^m},$$

qui ne devienne ni nulle ni infinie lorsque $i = 0$, si ce n'est pour des valeurs particulières de x, quoique toutes ces fonctions se présentent alors sous la même forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Il est évident, en effet, que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i^m}$$

est égal à

$$\frac{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}}{i^{m-1}}$$

et devient par conséquent nul ou infini, suivant que m est plus petit ou plus grand que 1, quand i s'évanouit, toutes les fois que

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i},$$

reste fini; ce qui arrive toujours, comme nous allons le démontrer, à l'exception de certaines valeurs particulières et isolées de x.

Le début du mémoire d'André-Marie Ampère [Amp06].

Tout ceci a duré un certain temps : jusque vers 1860 environ, pour être exact. Voici ce qu'écrit Jean Gaston Darboux [Dar75] :

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES,

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Jusqu'à l'apparition du Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques aucun doute ne s'était élevé sur l'existence de la dérivée des fonctions continues. D'excellents, d'illustres géomètres, au nombre desquels il faut compter Ampère, avaient essayé de donner des démonstrations rigoureuses de l'existence de la dérivée. Ces tentatives étaient loin sans doute d'être satisfaisantes; mais, je le répète, aucun doute n'avait été formulé sur l'existence même d'une dérivée pour les fonctions continues (').

Gaston Darboux fait, bien sûr, référence à l'évocation, en 1861, par Bernhard Riemann, alors Professeur à l'Université de Göttingen, de l'existence d'une fonction continue qui ne serait nulle part dérivable :

$$x \mapsto \mathcal{R}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

Il n'est pas certain que Riemann ait jamais donné de preuve. Si c'est le cas, on n'en trouve aucune mention dans la littérature de l'époque. Personne d'ailleurs, à ce moment là, n'avait d'idée pour l'obtenir.

Quelque deux ans plus tard, durant l'hiver 1863-1864, l'ancien enseignant de lycée (1842-1855) Karl Weierstrass, qui était, depuis 1856, Professeur dans ce qui était en passe de devenir l'Université Friedrich-Wilhelm de Berlin (the Königliches Gewerbeinstitut), donna un cours sur les fonctions analytiques (des fonctions développables en série). C'est à cette occasion particulière qu'il évoqua, pour la première fois, une nouvelle fonction, continue partout, mais nulle part dérivable, fonction qui serait ensuite appelée, bien sûr, « fonction de Weierstrass ». Comment eut-il l'idée d'une telle fonction ? D'aucuns, comme J.-P. Kahane [Kah64], suggèrent que ce fut à la suite de la fonction de Riemann, dont il ne savait pas prouver le caractère non dérivable. Sans prendre parti, cela peut tout simplement venir du fait que ces questions étaient dans l'air du temps. Pour utiliser une expression actuellement bien en cour chez les historiens, on peut donc parler de « circulation des idées ».

Il est intéressant de noter que la nomination de Karl Weierstrass comme Professeur coïncide avec l'essor global, matériel, moral, conceptuel, initié par la Prusse. La Prusse voulait d'une science allemande qui domine le monde. Ainsi, lorsque le ministre de l'enseignement autrichien, Leopold Graf von Thun und Hohenstein, proposa à Karl Weierstrass de lui attribuer une chaire, dans l'université de son choix, avec un salaire annuel de 2000 gulden [KH16], Berlin fit immédiatement une contre-proposition. C'est alors le moment culminant du processus de renouveau prussien, lancé en 1806, après la défaite de Iéna contre Napoléon.

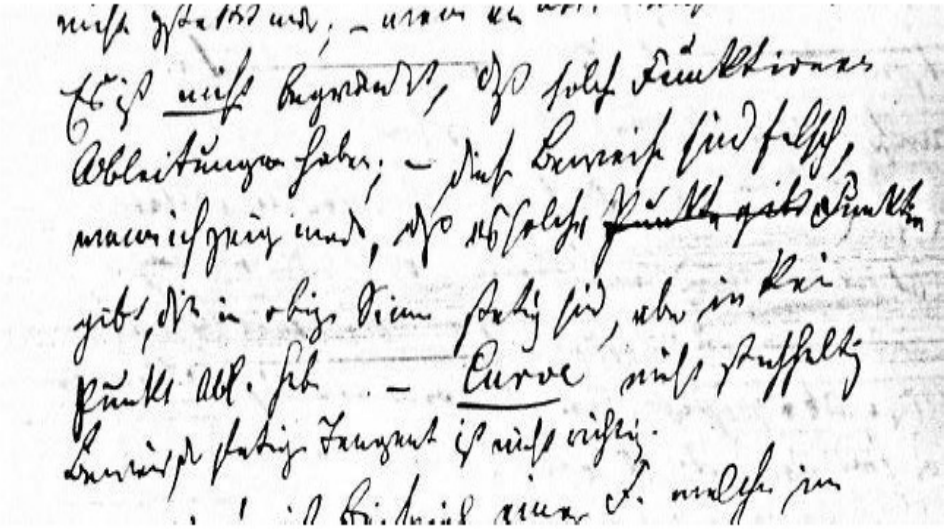
En 1864, ainsi, l'Université Friedrich-Wilhelm attribua une chaire à Karl Weierstrass, au moment

Karl Weierstrass jeune. Institut Mittag-Leffler.

exact où Bismarck lançait l'unification allemande (Guerre des duchés). Tout était alors concerné : les sciences, l'industrie, la prospérité, le pouvoir politique et militaire.

Au-delà de cette configuration, l'histoire de cette fonction, et son émergence au sein de la communauté mathématique de l'époque, revêt un intérêt particulier. Commençons donc par nous intéresser à la plus ancienne mention connue de son existence, un fac-similé de notes manuscrites d'Hermann Amandus Schwarz, alors âgé de 20 ans, qui suivait le cours du Professeur Weierstrass (ABBAW, Nachlass Schwarz, Nr. 29, Archivs der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, [KH16] :

≪ Il n'est pas prouvé que de telles fonctions aient des dérivées. Les preuves sont fausses si je montre que de telles fonctions, sont continues au sens précédent, mais n'ont de dérivées en aucun point. ≫



La plus ancienne source :
Des notes d'Hermann Amandus Schwarz, alors âgé de vingt ans, qui suivait le cours.
(ABBAW, Nachlass Schwarz, Nr. 29, Archivs der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, [KH16].)

Mais il fallut attendre jusqu'au mois de Juillet 1872, le 18, pour la première présentation (orale) de la fonction de Weierstrass suscitée, à l'Académie des Sciences de Berlin, par Karl Weierstrass lui-même.

En ce qui concerne la première référence écrite, elle se trouve dans une lettre écrite par Karl Weierstrass à Paul-Gustave du Bois-Reymond, en 1873 [Wei73] :

BRIEFE VON K. WEIERSTRASS AN PAUL DU BOIS-REYMOND.

Berlin, 23. November 1873.
Potsdamer Str. No. 40.

Verehrter Herr Kollege!

In Ihrer neuesten, mir von Borchardt mitgeteilten Abhandlung[1] haben Sie meinen Beweis, daß die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$$

unter den angegebenen Bedingungen an keiner Stelle einen bestimmten Differential-Koeffizienten besitze, aufgenommen. Damit bin ich völlig einverstanden,

Début de la lettre écrite par Karl Weierstrass à P.-G. Du Bois-Reymond [Wei73].

La traduction donne :

« Cher collègue,

Dans votre dernier article, publié par Borchardt, vous exposez la preuve où je montre que, sous les conditions que je donne, la fonction (...) n'est nulle part dérivable. Je suis d'accord avec tout. »

Il est légitime de se demander ce que pensait Karl Weierstrass de la fonction de Riemann. Déjà, et avant toute chose, il a pointé l'absence de preuve, mais aussi, de précision : est-ce que la fonction $\mathcal{R}$

était partout non dérivable, ou bien alors, en quelques points quand même ?

> Es wäre zunächst nach meiner Ansicht zweckmäßig ausdrücklich zu erwähnen, daß RIEMANN bereits im Jahre 1861 einigen seiner Zuhörer die durch die Reihe
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$
>
> dargestellte Funktion als eine solche, die keine Ableitung besitze, bezeichnet, seinen Beweis dafür aber niemandem mitgeteilt, sondern nur gelegentlich geäußert habe, derselbe sei aus der Theorie der elliptischen Funktionen zu holen. Auch sei nichts darüber bekannt, ob Riemann behauptet habe, seine Funktion besitze an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten, — im Kreise von Riemanns Schülern schien man wenigstens von der Existenz solcher Funktionen nichts gewußt zu haben, wie aus einer Äußerung HANKELS (Untersuchungen über

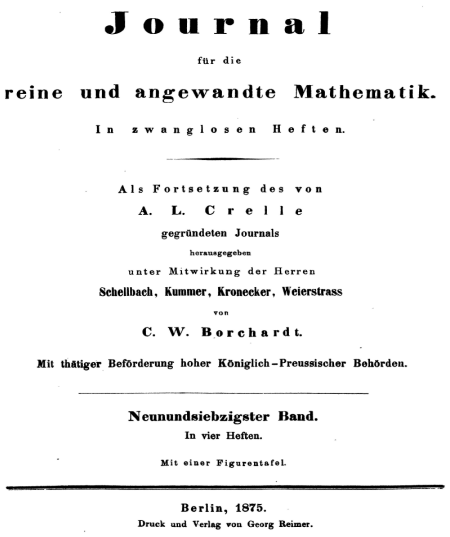
Second extrait de la lettre écrite par Karl Weierstrass à P.-G. Du Bois-Reymond [Wei73].

« Il semble important de rappeler que Riemann a présenté cette fonction à ses étudiants en 1861. Cette fonction n'est pas dérivable, pourtant, la preuve n'a été communiquée à personne, il a juste été fait mention d'un recours à la théorie des fonctions elliptiques. On ne sait pas, non plus, si Riemann a dit que sa fonction était nulle part non dérivable, ou bien en certains points seulement. »

Cette dernière remarque est d'autant plus intéressante, que ce n'est pas avant les années 1970 que n'a été prouvé, par Joseph Gerver [1] [Ger70], le caractère dérivable de la fonction $\mathcal{R}$ en des multiples rationnels particuliers de π, de la forme :

$$\frac{2\,p+1}{2\,q+1}\,\pi \quad , \quad p,\, q \text{ entiers}$$

En ce qui concerne la publication, elle a eu lieu en 1875, dans le Journal de Crelle, au sein d'un article écrit par P.-G. du Bois-Reymond [BR75] :



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von
A. L. Crelle
gegründeten Journals
herausgegeben
unter Mitwirkung der Herren
Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass
von
C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Neunundsiebzigster Band.
In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1875.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Ganz etwas Anderes scheinen mir aber die Functionen zu bedeuten, die Herr ***Weierstrass*** seinen Bekannten mittheilt, die in ***keinem*** Punkte einen Differentialquotienten besitzen, was noch von keiner der vorher angeführten Functionen nachgewiesen worden ist, und welche bei ihrer grossen Einfachheit und scheinbaren Unverfänglichkeit ahnen lassen, eine wie verbreitete Eigenschaft die Nichtdifferentiirbarkeit der Functionen sein mag. Hier sind nicht besondere Zahlenarten, die doch schliesslich immer isolirt auftreten, mit gewissen Singularitäten behaftet, sondern diese sind durch das ganze Grössengebiet des Arguments gleichförmig und gleichsam stetig vertheilt **).

Um meine Zweifel zu zerstreuen, hatte Herr ***Weierstrass*** die Güte, mir ein Beispiel einer solchen Function mitzutheilen, und ich glaube mir die Fachgenossen zu Dank zu verpflichten, wenn ich es hier, wo es als Beispiel einer durchweg stetigen Function, die nicht zur folgenden Classe gehört, an seinem Platze ist, wörtlich nach der Aufzeichnung des Verfassers abdrucken lasse:

„Es sei x eine reelle Veränderliche, a eine ungerade ganze Zahl, b eine positive Constante, kleiner als Eins, und

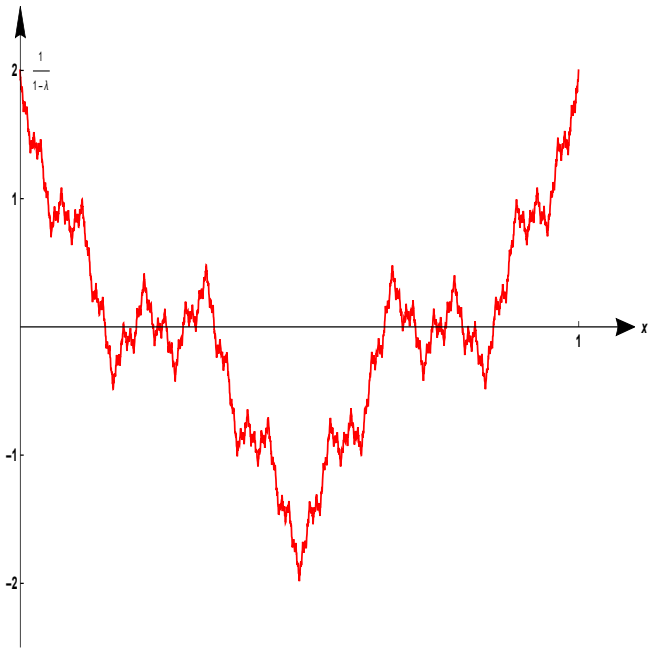
$$f(x) = \sum_0^\infty{}_n(b^n \cos(a^n x)\pi);$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich zeigen lässt, dass sie, sobald der Werth des Products ab eine gewisse Grenze übersteigt, ***an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten hat.***

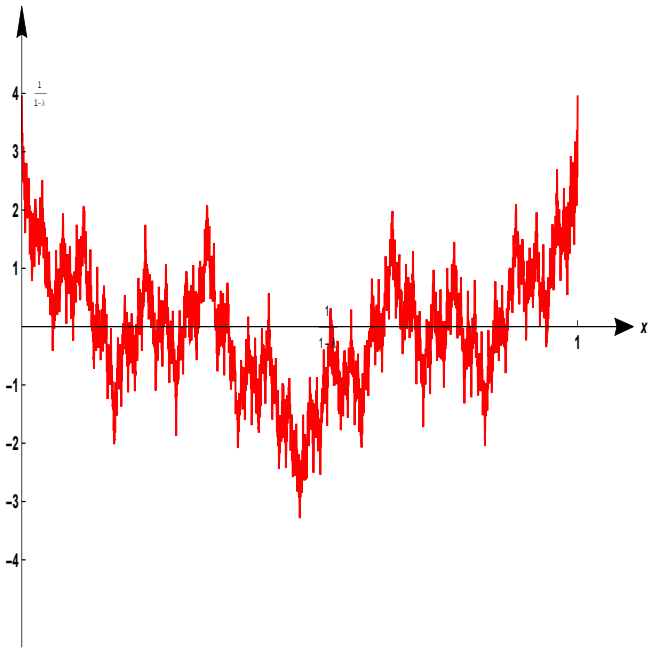
Extrait de l'article de P.-G. du Bois-Reymond dans le Journal de Crelle [BR75].

1. Joseph Leonid Gerver, Professeur émérite à l'Université de Rutgers (Camden, New Jersey) est aussi celui qui a apporté une solution partielle au problème très concret du sofa, ou : quel est le sofa d'aire maximale que l'on peut déplacer horizontalement dans un couloir d'un mètre de large, mais comportant un angle droit ? Le sofa obtenu par Joseph Gerver comporte 18 sections de courbes, chacune prenant une forme analytique lisse.

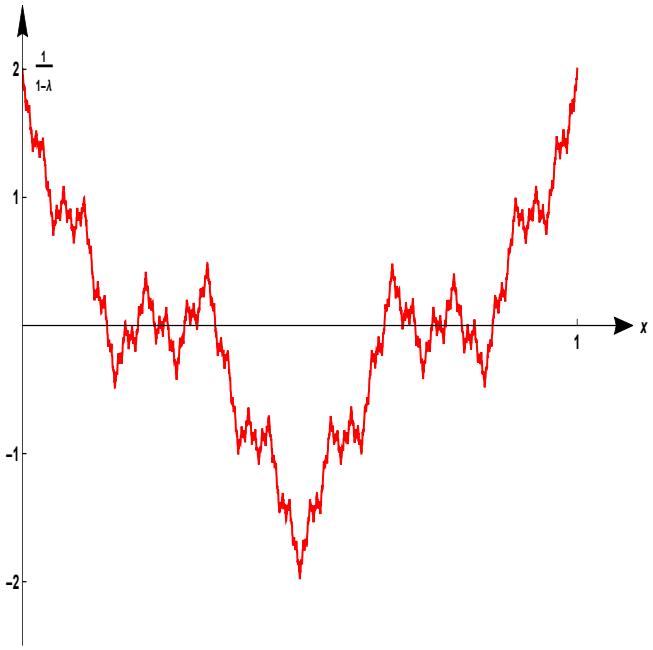
≪ Les fonctions présentées par Monsieur Weierstrass à son public habituel m'ont semblé différentes, dans la mesure où elles n'ont, nulle part, de dérivée ; cela n'a jamais été prouvé auparavant ; et, en dépit d'une apparence de grande simplicité, et aussi inconcevable que cela puisse paraître, elles n'ont pas cette propriété attendue de dérivabilité. Cela ne concerne pas des points isolés, qui pourraient avoir des singularités, mais des intervalles uniformément répartis au sein du domaine étudié. Pour mettre fin à mes doutes, Monsieur Weierstrass a eu la gentillesse de me donner l'exemple d'une telle fonction, et je lui en suis très reconnaissant ; c'est l'exemple d'une fonction continue partout, dérivable nulle part, qui n'appartient pas aux ensembles habituels de fonctions. Ecoutez comme l'auteur la présente : " Etant donné un nombre réel x, un entier impair a, et une constante positive b, plus petite que un (...) alors $f(x)$ est une fonction continue partout qui, dès que le produit $a\,b$ dépasse une certaine valeur, n'est nulle part dérivable." ≫



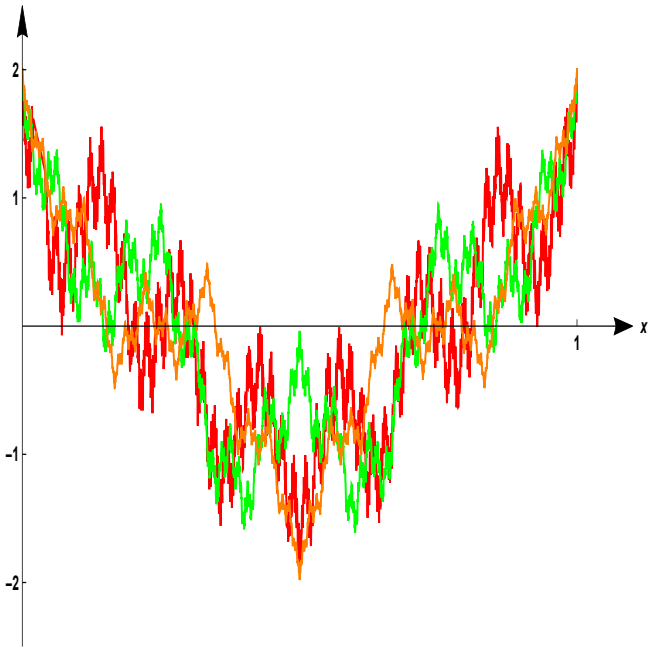
La courbe de Weierstrass, dans le cas $b = 3$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$.



La courbe de Weierstrass, dans le cas $b = 3$, $\lambda = \dfrac{3}{4}$.



La courbe de Weierstrass, dans le cas $b = 7$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

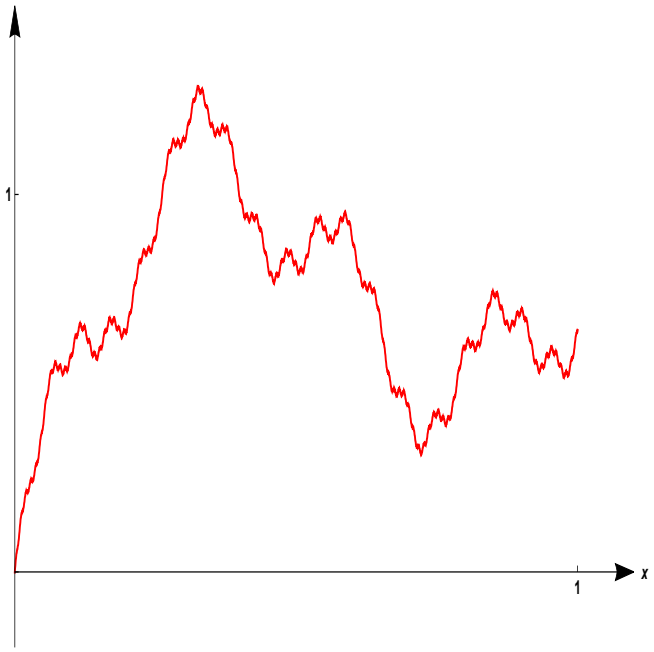


L'influence du paramètre b sur la courbe de Weierstrass.

Orange : $b = 3$ - Vert : $b = 4$ - Rouge : $b = 7$

L'impulsion donnée par Weierstrass a conduit, à partir des années 1870, à l'émergence d'autres fonctions de ce type. On peut citer, notamment, celle proposée par Jean Gaston Darboux [Dar75], [Dar79] :

$$x \mapsto \mathcal{D}arboux(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!}\,.$$



La courbe de Darboux

Jean Gaston Darboux prouve le caractère non dérivable de sa fonction (voir [Dar75], pages 107-108). Le terme $(n+1)\,!$, plutôt que $n\,!$, peut intriguer. Il faut se pencher sur la preuve (non complètement explicitée), pour comprendre qu'un $n\,!$ a remplacé le terme initial $(n+1)\,!$, le facteur crucial $n+1$ pour la non-dérivabilité aurait été porté manquant ...

Plus précisément : en introduisant un entier strictement positif N, Darboux a recours à une décomposition de sa fonction sous la forme :

$$\mathcal{D}arboux = \phi_N + \psi_N$$

où, pour tout réel x :

$$\phi_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} \quad , \quad \psi_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sin\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!}\,.$$

Etant donné deux réels strictement positifs h et ε tels que :

$$N \times N\,! \times h = 2\,\varepsilon$$

alors, à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 2 que le lecteur aura fait de lui-même :

$$\phi_N(x+h) - \phi_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ h\,(n+1)\,! \,\frac{\cos\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} - \frac{h^2}{2}\,\left((n+1)\,!\right)^2\,\frac{\sin\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} \right\} + o\left(h^2\right)$$

on obtient « facilement » (pour reprendre les termes de Darboux) :

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_N(x+h) - \phi_N(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ h\,(n+1)\,! \,\frac{\cos\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} - \frac{h^2}{2}\,\left((n+1)\,!\right)^2\,\frac{\sin\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} \right\} + o\left(h\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ (n+1)\,! \,\frac{\cos\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} - \frac{h}{2}\,\left((n+1)\,!\right)^2\,\frac{\sin\left((n+1)\,!\,x\right)}{n\,!} \right\} + o\left(h\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ (n+1)\,\cos\left((n+1)\,!\,x\right) - \frac{h}{2}\,(n+1)\,(n+1)\,!\,\sin\left((n+1)\,!\,x\right) \right\} + o\left(h\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \left\{ n\,\cos\left(n\,!\,x\right) - \frac{h}{2}\,n\,n\,!\,\sin\left(n\,!\,x\right) \right\} + o\left(h\right)
\end{aligned}$$

Il y a un point qui n'est pas clair dans la preuve initiale, puisque, au lieu de l'expression précédente, Darboux a écrit :

$$\frac{\phi_N(x+h) - \phi_N(x)}{h} = \sum_{n=???}^{N} n\,\cos\left(n\,!\,x\right) - \varepsilon\,\sin\left(N\,!\,x\right) + \omega\left(N,\varepsilon\right)$$

(la borne inférieure de la somme n'est pas lisible dans le texte original - d'où la présence des « ? ? ? ». Il est en effet difficile de distinguer si c'est un « 1 », un « r », un « x »). ω désigne une fonction telle que, pour une valeur donnée de ε :

$$\lim_{N \to +\infty} \omega\left(N,\varepsilon\right) = 0$$

Ainsi, avec nos notations, ω correspond à une somme de « $o\left(\cdot\right)$ ». Il n'y a pas plus de détails.

Le point essentiel, dans la preuve de Darboux, est que, pour des réels x tels que :

$$\lim_{N\to+\infty} \sin(N!\,x) = 0$$

la limite

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=???}^{N} n\,\cos(n!\,x)$$

n'existe pas.

Nous terminerons en donnant un exemple d'une fonction *qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable.*.

Soit

$$f(x) = \sum_{1}^{n} \frac{\sin[1.2.3\ldots(n+1)x]}{1.2.3\ldots n}.$$

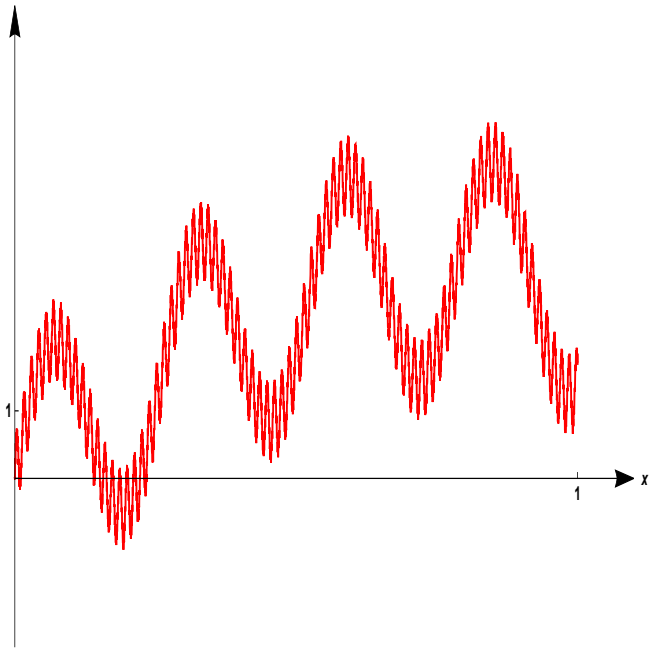
Très élégamment, Darboux cite Riemann, Schwarz et quelques autres, mais pas Weierstrass ...

On tombe, un peu plus tard, sur un autre exemple de fonction, comme celle donnée en 1877 par le mathématicien italien Ulisse Dini [Din77], [Din78] [2] :

$$x \mapsto \mathcal{D}ini(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n\,\cos(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)\,x)}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)} \quad , \quad \alpha > 1+\frac{3\pi}{2}\cdot$$

La statue d'Ulisse Dini, à Pise.

2. Eh oui, celui des théorèmes de Dini, qui relient convergence simple et uniforme, théorèmes bien connus des élèves de classes préparatoires et de cursus de Mathématiques.



La courbe de Dini, dans le cas $\alpha = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\,\pi}{2}$

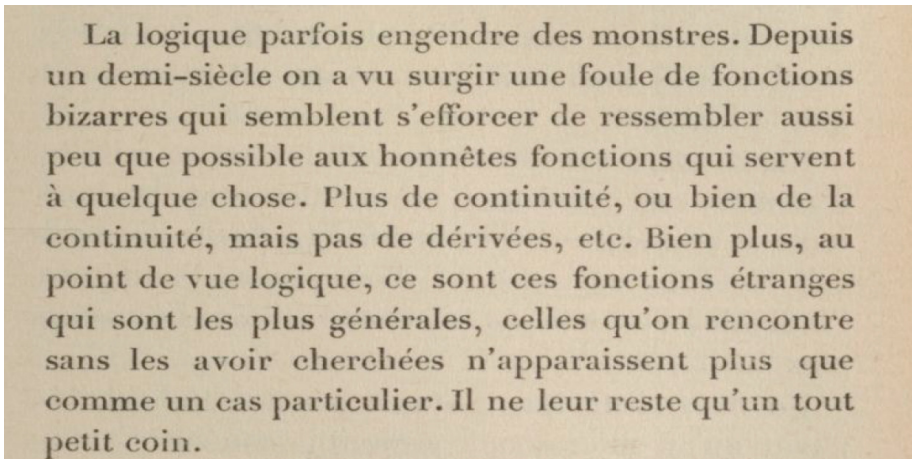
L'existence de ces fonctions a jeté un froid au sein de la communauté mathématique. Il suffit de relire ce qu'écrivait Charles Hermite, dans l'une de ses nombreuses lettres à Thomas Stieltjes, en 1893 ([Cor05], lettre 374) :

≪ Ces développements élégants sont maudits (...) L'analyse diminue d'une main ce que l'autre est. Je deviens terrifié par cette plaie déplorable, des fonctions continues nulle part différentiables. ≫

Portrait de Charles Hermite jeune, au début du Tome I de l'édition de ses œuvres complètes publiées par Emile Picard, en 1905, chez Gauthier-Villars.

Source : Gallica

En ce qui concerne Henri Poincaré [Poi90], voici ce qu'il en disait :



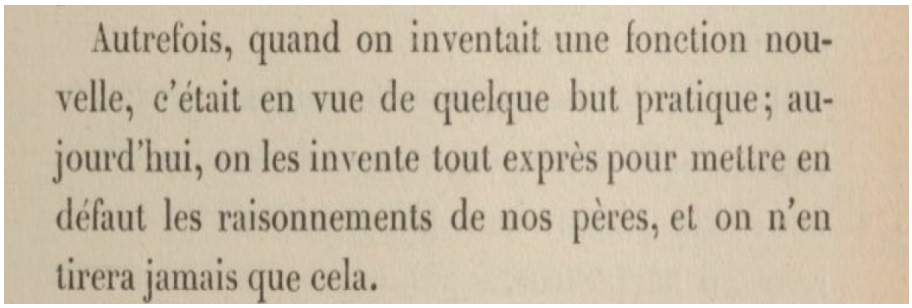
La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblent s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc. Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions étranges qui sont les plus générales, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées n'apparaissent plus que comme un cas particulier. Il ne leur reste qu'un tout petit coin.

Néanmoins, et, chose très importante, contrairement à certaines interprétations erronées que l'on peut trouver dans la littérature ([JP15], page 4), Poincaré n'a jamais décrit les travaux de Weierstrass comme un obstacle au sens commun [Poi98] :

Je citerai d'abord une note lue à l'Académie de Berlin le 18 juillet 1872, et où Weierstrass a cité des exemples de fonctions continues d'un argument réel, qui pour aucune valeur de cet argument, ne possèdent une dérivée déterminée.

Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun. Une fonction continue, aurait-on dit, est par essence susceptible d'être représentée par une courbe et une courbe a évidemment toujours une tangente.

Ce que disait Poincaré de ces fonctions était donc, pour le moins, assez dur. Par exemple [Poi99] :



Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Depuis, la fonction de Weierstrass n'a cessé de susciter l'intérêt des mathématiciens. Si, au départ, cela était dû à son caractère nulle part dérivable, ses propriétés fractales, mises en évidence quelques quatre-vingt dix ans plus tard par B. Mandelbrot [Man82], pages 388-390, l'ont fait envisager sous un autre angle. Mandelbrot cherchait à approcher le mouvement brownien.

En se plaçant dans un cadre un peu plus général, Mandelbrot s'est ainsi intéressé à la fonction à valeurs complexes, définie, pour tout réel x, par :

$$\mathcal{W}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} w^n \, e^{2\,i\,\pi\,b^n\,x}$$

où :

$$b > 1 \quad , \quad w = \frac{1}{b^H} = b^{D_{\mathcal{W}}-2} \quad , \quad 1 < 2 - H = D_{\mathcal{W}} < 2$$

Après une comparaison avec le mouvement brownien, B. Mandelbrot s'est placé sous l'angle de la physique. Il cherchait, en particulier, à étudier le spectre de la fonction : pour chaque fréquence f de la forme $f = b^n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, la ligne spectrale d'énergie, i.e. celle qui provient de l'émission ou de l'absorption de lumière dans une bande étroite de fréquences, donnée par :

$$\frac{1}{1-w^2}\, w^{2\,n}$$

produit une énergie cumulée en fréquences $f \geqslant b^n$ de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{1-w^2}\, w^{2\,k} = \frac{1}{(1-w^2)^2}\, w^{2\,n} = \frac{1}{(1-w^2)^2}\, \frac{1}{b^{2\,n\,H}} = \frac{1}{(1-w^2)^2}\, \frac{1}{f^{2\,H}} \, .$$

B. Mandelbrot rappelle que, comme « la dérivée d'une fonction est obtenue en multipliant son $n^{ième}$ coefficient de Fourier par n », pour des physiciens, l'amplitude au carré du $n^{ième}$ coefficient de Fourier b_n vaut :

$$\frac{1}{1-w^2}\, w^{2\,n}\, b^{2\,n} \, .$$

Ainsi, dans la mesure où les énergies cumulées pour des fréquences supérieures ou égales à b^n sont infinies, une interprétation, sous le prisme de la physique, de la non-dérivabilité de la fonction $\mathcal{W}$, ressort comme un caractère « intuitivement évident ».

B. Mandelbrot explique ensuite que si « l'énergie totale à haute fréquence est infinie », c'est « catastrophique pour la théorie », en écho à la théorie des années 1900 de Rayleigh et Jeans sur le rayonnement des corps noirs (les physiciens Lord Rayleigh et James Jeans avaient établi que celui-ci était proportionnel à l'inverse de la longueur d'onde à la puissance 4, ce qui était cohérent avec les expériences pour des longueurs d'ondes élevées, mais complètement aberrant pour de faibles longueurs d'onde, qui ne pouvaient conduire à des énergies aussi grandes).

En reprenant sa comparaison avec le mouvement brownien, et dans la perspective d'applications futures, B. Mandelbrot suggère de prendre en compte une version modifiée de la fonction - qui sera vite qualifiée de fonction de Weierstrass-Mandelbrot - définie, pour tout réel x, par :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{M}}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w^n \, \left\{ e^{2\,i\,\pi\,b^n\,x} - 1 \right\}$$

Mieux que la fonction de Weierstrass, celle de Weierstrass-Mandelbrot, $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}$, toujours continue partout, et nulle part dérivable, possède, en plus, une invariance d'échelle (ce qui signifie qu'aucune

échelle ne la caractérise), et est auto-affine :

$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{M}}\left(b^m\, x\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w^n \left\{ e^{2\,i\,\pi\, b^{m+n}\, x} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{w^m}\, \mathcal{W}_{\mathcal{M}}(x) \\ &= b^{m\,H}\, \mathcal{W}_{\mathcal{M}}(x) \end{aligned}$$

Pour mieux coller à la réalité, en particulier, mieux approcher les fonctions de Brown (celles du mouvement brownien), B. Mandelbrot a ensuite proposé d'introduire de l'aléatoire.

Et comme cela est souvent le cas, son intuition s'est révélée juste : la fonction de Weierstrass-Mandelbrot possède de nombreuses applications. Ainsi, dans les années 1990, il a été montré que cette fonction pouvait servir à modéliser la turbulence [HSR92].

En ce qui concerne la fonction de Weierstrass, elle occupe encore de nos jours les mathématiciens. Un point important reste la détermination de la dimension de la courbe, que ce soit celle de Minkowski-Bouligand, ou celle de Hausdorff. Les premiers travaux sont ceux de J.-L. Kaplan et al. [KMPY84], on trouve, ensuite, beaucoup de choses très intéressantes dans le livre de K. Falconer [Fal86] (exemple 11.3). D'autres discussions sur le sujet ont suivi dans les articles de F. Przytycki and M. Urbańki [PU89], après, un nouvel indice dimensionnel a été introduit par T-Y. Hu et K-S. Lau [HL93]. En ce qui concerne la dimension de Hausdorff, une première preuve a été donnée par B. Hunt [Hun98] en 1998, dans le cas de phases aléatoires. Récemment, K. Barańsky, B. Bárány et J. Romanowska [BBR14] ont prouvé que, pour n'importe quelle valeur du nombre b, il existe une valeur limite λ_b dans $\left]\frac{1}{b}, 1\right[$ telle que la dimension soit égale à $D_{\mathcal{W}}$ pour tout b de $]\lambda_b, 1[$. Dans [Kel17], G. Keller a proposé ce qui ressort comme une preuve originale et bien plus simple. Les résultats de W. Shen [She18] vont plus loin que ceux de [BBR14].

Replacée dans le contexte de l'époque, l'œuvre mathématique de Karl Weierstrass n'était pas si évidente. Elle remet en cause toute une tradition académique, une pensée pleine d'ordre et de classicisme, qui ne veut pas, et ne cherche pas à remettre en cause ce qui est considéré comme acquis. Il faudra attendre encore un bon siècle avant que la communauté mathématique ne prenne au sérieux et commence à exploiter l'extraordinaire potentiel donné par le caractère nulle part dérivable de la fonction. Il n'est pas innocent de noter que la découverte de notre professeur berlinois a connu un regain d'intérêt lorsque, grâce à Mandelbrot, le lien a été fait avec le mouvement brownien. La prise en compte de comportements d'apparence erratique fait définitivement son entrée au sein de la science dite ≪ sérieuse ≫. Cela va de pair avec l'extension de la notion de dimension, de plus en plus présente dans notre quotidien.

Références

[Amp06] A.-M. Ampère. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque. *J. École Polytech.*, 6 :148–181, 1806.

[BBR14] K. Barańsky, B. Bárány, and J. Romanowska. On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function. *Advances in Math.*, 265 :791–800, 2014.

[BR75] P.-G. Du Bois-Reymond. Versuch eine Classification der willkürlichen Funktionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79 :21–37, 1875.

[BU37] A. S. Besicovitch and H. D. Ursell. Sets of Fractional dimensions (v) : on dimensional numbers of some continuous curves. *J. London Math. Soc.*, 12(1) :18–25, 1937.

[Cor05] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes - Tome II.* Paris : Gauthier-Villars, 1905.

[Dar75] G. Darboux. Mémoire sur les fonctions discontinues. *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 2*, 4 :57–112, 1875.

[Dar79] G. Darboux. Addition au mémoire sur les fonctions discontinues. *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 2*, 8 :195–202, 1879.

[Dav18] Cl. David. Bypassing dynamical systems : A simple way to get the box-counting dimension of the graph of the Weierstrass function. *Proceedings of the International Geometry Center*, 11(2) :1–16, 2018.

[Din77] U. Dini. Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata. *Annali di Matematica*, 8 :122–137, 1877.

[Din78] U. Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa : Tipografia T. Nistri e C., 1878.

[Fal86] K. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, 1986.

[Ger70] J. Gerver. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π. *American Journal Math.*, 82 :33–55, 1970.

[HL93] T.-Y. Hu and K.-S. Lau. Fractal dimensions and singularities of the Weierstrass type functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 335(2) :649–665, 1993.

[HSR92] J. A. C. Humphrey, C. A. Schuler, and B. Rubinsky. On the use of the Weierstrass- Mandelbrot function to describe the fractal component of turbulent velocity. *Fluid Dynamics Researc*, 9 :81–95, 1992.

[Hun98] B. Hunt. The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :791–800, 1998.

[JP15] M. Jarnicki and P. Pflug. *Continuous Nowhere Differentiable Functions, The Monsters of Analysis.* Sringer, 2015.

[Kah64] J.-P. Kahane. Lacunary Taylor and Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70(2) :169–181, 1964.

[Kel17] G. Keller. A simpler proof for the dimension of the graph of the classical Weierstrass function. *Ann. Inst. Poincaré*, 53(1) :169–181, 2017.

[KH16] Wolfgang König and Jürgen Sprekels Hrsg. *Karl Weierstrass (1815-1897) Aspekte seines Lebens und Werkes.* Wiesbaden : Springer, 2016.

[KMPY84] J. Kaplan, J. Mallet-Paret, and J. Yorke. The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 4 :261–281, 1984.

[Man77] B. B. Mandelbrot. *Fractals : form, chance, and dimension.* San Francisco : Freeman, 1977.

[Man82] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature.* San Francisco : W. H. Freeman & Co Ltd, 1982.

[Poi98] H. Poincaré. L'œuvre mathématique de Weierstrass. *Acta mathematica*, 22, 1898.

[Poi99] H. Poincaré. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *Enseign. Math.*, 12(1) :157–162, 1899.

[Poi90] H. Poincaré. *Science et méthode.* Paris : E. Flammarion, 190 ?

[PU89] F. Przytycki and M. Urbański. On the Hausdorff dimension of some fractal sets. *Studia Math.*, 93(2) :155–186, 1989.

[She18] W. Shen. Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions. *Math. Z.*, 289 :223–266, 2018.

[Wei54] K. Weierstrass. Zur Theorie der Abelschen Functionen. *J. Reine Angew. Math.*, 47 :289–306, 1854.

[Wei56] K. Weierstrass. Theorie der Abel'schen Functionen. *J. Reine Angew. Math.*, 52 :285–380, 1856.

[Wei73] K. Weierstrass. Briefe von K. Weierstrass an Paul du Bois-Reymond, 1873.

[Wei75] K. Weierstrass. Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differential quotienten besitzen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79 :29–31, 1875.