



**HAL**  
open science

# Modélisation de l'amortissement dans les structures en béton armé sous séisme

François Voldoire

► **To cite this version:**

François Voldoire. Modélisation de l'amortissement dans les structures en béton armé sous séisme. 10ème Colloque National AFPS (Association française du génie parasismique) 2019, Association Française du Génie Parasismique, Sep 2019, Strasbourg, France. hal-04101323

**HAL Id: hal-04101323**

**<https://hal.science/hal-04101323>**

Submitted on 19 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

---

## Modélisation de l'amortissement dans les structures en béton armé sous séisme

François Voltaire\*,\*\*

\* *Électricité de France, R&D Dept., SEISM Institute,  
7, Boulevard Gaspard Monge, F-91120 Palaiseau, France  
francois.voldoire@edf.fr*

\*\* *IMSIA UMR EDF-CNRS-CEA-ENSTA 9219,  
F-91120 Palaiseau, France*

---

*RÉSUMÉ. La dissipation d'énergie qui doit être prise en compte dans les analyses de comportement sous séisme de structures en béton armé provient de sources nombreuses : interaction dynamique avec le domaine de fondation, éléments non structurels, dissipation aux interfaces et dans les matériaux.*

*Le retour d'expérience de campagnes expérimentales sur des maquettes représentatives ou des structures à échelle ordinaire en béton armé donne accès à des éléments de justification d'hypothèses de modélisation de l'amortissement provenant du comportement des matériaux. On présente ici l'état des lieux, les difficultés pratiques, ainsi qu'une proposition de modélisation du comportement du matériau intégrant l'amortissement, qui vise à réduire certains aspects arbitraires des choix d'hypothèses des études de Génie Civil et à en améliorer les capacités prédictives. On vise en particulier les simulations par éléments finis tenant compte des non-linéarités matérielles, permettant notamment d'étudier les redistributions d'efforts au sein du schéma structurel du bâtiment. Dans ce but, on a choisi une démarche de modélisation basée sur des arguments physiques.*

*ABSTRACT. The energy dissipation that shall be taken into account in analyses of reinforced concrete structures under seismic loading comes from numerous sources: dynamic interaction with the foundation domain, non-structural elements, dissipation at interfaces and in materials.*

*Feedback from experimental campaigns on representative models or regular-scale reinforced concrete structures gives access to justification elements of damping modelling hypotheses derived from the behaviour of constitutive materials. We present here the state of the art, the practical difficulties, as well as a proposal of nonlinear constitutive modelling accounting for damping, which aims to reduce certain arbitrary aspects of the choices of hypotheses of Civil Engineering studies and to improve their predictive abilities. In particular, we aim at finite element simulations taking into account material nonlinearities, allowing in particular to account for the redistribution of forces within the building structural scheme. For this purpose, we chose a modelling approach based on physical arguments.*

*MOTS-CLÉS : Dynamique des matériaux et des structures, Modèles de comportement non linéaires, Approches de calcul, Amortissement, Béton armé.*

*KEYWORDS: Structural Dynamics, nonlinear constitutive relations, Simulation methods, Damping, Reinforced Concrete.*

---

## 1 Introduction

### 1.1 Objectifs

L'établissement des hypothèses de calcul sismique par simulation numérique des bâtiments en béton armé, tant avec des modèles linéaires que non linéaires, se heurte à la maîtrise de la modélisation de l'amortissement qui contrôle la dissipation d'énergie dans la structure mais aussi, de manière directe, l'amplitude des réponses maximales, donc les valeurs des critères de défaillance. De plus, les valeurs d'amortissement visqueux à affecter aux structures en béton armé font l'objet de recommandations divergentes selon les référentiels techniques nationaux. L'analyse de plusieurs campagnes expérimentales permet d'identifier des valeurs d'amortissement en fonction des niveaux de chargement observés. On se propose de revisiter les aspects principaux de ces questions et d'indiquer des voies possibles afin de renforcer la cohérence et la représentativité des hypothèses de calcul en particulier pour des analyses non linéaires en dynamique transitoire, à utiliser en dimensionnement ou en réanalyse des marges de sûreté des structures en béton armé. On met l'accent ci-après sur l'amortissement « résiduel », sachant que la modélisation de la dissipation d'énergie pendant les phases fortes du transitoire sismique constitue l'apanage des modèles de comportement non linéaires. En particulier, on propose une formulation de relations de comportement non linéaire, incluant une dissipation visqueuse supplémentaire pilotée par l'endommagement, afin de représenter l'amortissement « résiduel ».

### 1.2 Démarches de modélisation et énergie dissipée

L'énergie dissipée par divers mécanismes physiques dans les structures est contrôlée par diverses variables ; certaines sont observables comme les déformations associées aux déplacements  $\mathbf{u}$  et/ou aux vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$ , comme cela est proposé dans des modélisations phénoménologiques globales en dynamique linéaire ; et on utilise aussi des variables internes, intervenant dans des lois constitutives au point matériel, exprimées dans un cadre thermodynamique adapté. On s'intéresse ici à des structures discrétisées par un nombre fini de degrés de liberté.

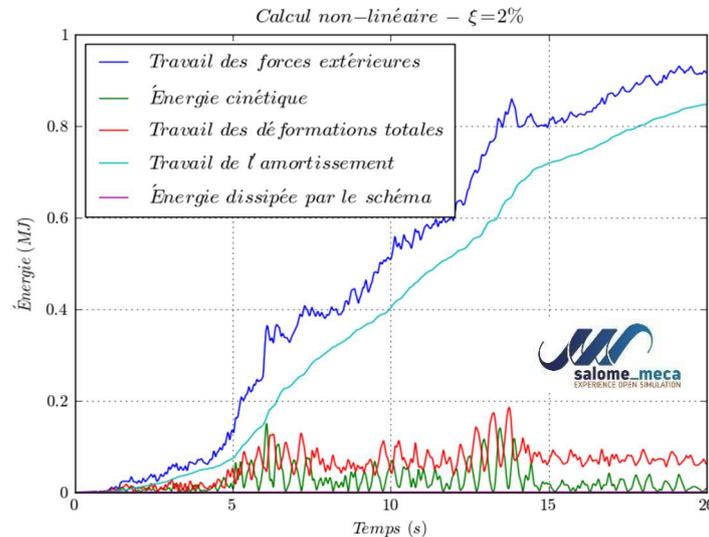
♦ Au premier cas appartiennent les modélisations globales instantanées de la dissipation visqueuse linéaire. On dispose d'une modélisation de l'amortissement de type Rayleigh, paramétrée sur les matrices de raideur initiale  $\mathbf{K}$ , ou réactualisée  $\mathbf{K}_t$ , et d'inertie  $\mathbf{M}$ , par deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement. Ceux-ci sont identifiés par zone et/ou matériau dans la structure étudiée, sur une gamme de fréquences d'intérêt  $[f_1, f_2]$ . On peut choisir aussi la modélisation d'amortissement de type « modal », paramétré par la donnée des coefficients d'amortissement réduit modaux  $\xi_\rho$ , calibrés pour chaque mode propre  $\Phi_\rho$  utilisé dans la base modale définie sur toute la structure, qui a le défaut de faire manipuler une matrice pleine. Dans ce cadre, la densité volumique de puissance dissipée s'écrit :  $\mathcal{D} = c \cdot \dot{\mathbf{u}}^2$  – le coefficient  $c$  étant déterminé à partir des paramètres de modélisation de l'amortissement – et elle dépend des pulsations du signal d'excitation. Elles conduisent à des fréquences de résonance du système affectées par l'amortissement, et des amortissements dépendant de la pulsation d'excitation. Enfin on dispose aussi de l'amortissement de type « hystérétique » ou « structural », utilisé en résolution dynamique linéaire fréquentielle, pour laquelle la puissance dissipée est fonction des vitesses de déformation et ne dépend pas de la pulsation d'excitation. Ces modélisations admettent toutes l'hypothèse d'une contribution additive de forces « visqueuses » s'ajoutant aux autres forces intérieures. Pour l'amortissement de type Rayleigh, l'amortissement réduit à la pulsation  $\omega$  est  $\xi(\omega) = \frac{1}{2}(\alpha\omega + \beta/\omega)$  ; la valeur minimale  $\xi_{min} = \sqrt{\alpha\beta}$  est atteinte pour la fréquence  $f_m = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\beta/\alpha}$ . Il n'y a pas de recommandation définitivement fondée sur l'usage de la matrice de raideur initiale ou réactualisée  $\mathbf{K}_t$ , tout étant une affaire de calage des réels  $\alpha$  et  $\beta$  sur la plage de fréquences visée ; on pourra consulter cependant (Jéhel *et al.*, 2014), (Chopra *et al.*, 2016). La caractérisation expérimentale des paramètres d'amortissement global utilise la définition proposée par (Jacobsen, 1930) d'un coefficient adimensionnel :  $\eta = \frac{\mathcal{D}_{dissip-par-cycle}}{2\pi\mathcal{E}_{elas-max}}$  par le rapport entre l'énergie dissipée sur un cycle de chargement et l'énergie maximale stockée élastiquement. Par exemple, en régime stationnaire sur un cycle, l'énergie dissipée est égale au travail fourni par les actions extérieures. Pour un matériau comme le béton qui se comporte différemment en traction et en compression et dont la rigidité élastique se dégrade – ce qui contribue à créer le « *pinching effect* » observé sur les

hystérèses de réponse cyclique d'une section en béton armé – on doit adapter le raisonnement, voir par exemple (Bekö *et al.*, 2015), (Heitz *et al.*, 2018), (Chambreuil *et al.*, 2019). Pour un système viscoélastique de pulsation propre  $\omega$ , d'amortissement réduit  $\xi$ , pour un cycle de pulsation forcée  $\Omega$ , on obtient :  $\eta = 2\xi\Omega/\omega$ , ce qui permet de déduire un amortissement réduit visqueux équivalent à partir de l'expression de Jacobsen.

◆ Au second cas, appartiennent les modélisations des phénomènes dissipatifs incluses dans la relation de comportement au point matériel. Le champ phénoménologique offert est plus large : on peut inclure des contributions de type écoulement plastique, frottement, endommagement (dégradation de rigidité, de résistance), dépendance au tenseur de vitesse de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (viscosité)... Ces contributions sont décrites par des variables internes dédiées : déformations plastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , variables d'écrouissage isotrope et cinématique  $p, \mathbf{X}^p$ , endommagement scalaire  $d$ , déformation visqueuse  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ ... dont l'histoire au cours du transitoire produit une description spatiale et temporelle locale de la dissipation d'énergie. L'évaluation énergétique de l'évolution des dissipations dans la structure au cours du chargement sismique « mélange » la dissipation d'énergie provenant de chacun des phénomènes modélisés, pas forcément activés aux mêmes instants dans les cycles de chargement. En particulier, tandis que la dissipation d'énergie par amortissement visqueux se cumule tout au long du transitoire et sur l'ensemble de la structure, celle advenant par fissuration reste localisée en temps et en espace, de sorte que le cumul de la dissipation totale est le plus souvent dominé par la contribution de l'amortissement visqueux, voir Figure 1.1. Dans les deux cas, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{R}_{in}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{F}_{ex}(t) \quad [1]$$

où le vecteur  $\mathbf{R}_{in}$  des forces internes résulte de la loi de comportement et du modèle d'amortissement visqueux choisi. On préfère choisir un schéma d'intégration temporel, par exemple le schéma dissipatif HHT, qui n'introduit d'amortissement numérique que sur une gamme de fréquences au-delà de la fréquence de coupure de l'excitation, afin de réduire les possibles artefacts résultant de l'intégration numérique du comportement. Comme les mouvements rigides ne sont pas dans le noyau de la matrice  $\mathbf{M}$ , on les retire dans le calcul de  $\mathbf{R}_{in}$  dans [1].



**Figure 1.1.** Cumuls d'énergie dissipée (en MJ), comparés à l'énergie cinétique, dans un calcul sismique transitoire non linéaire de bâtiment industriel (d'environ 4000 tonnes ; 1<sup>er</sup> mode à 1,4 Hz ; à 5 niveaux) avec modèle de comportement d'endommagement de béton armé GLRC\_DM [Code\_Aster R7.01.32], (Markovic *et al.*, 2007), et amortissement visqueux de type Rayleigh calé à 2%. Le travail des forces extérieures retranché à l'énergie cinétique est égal au travail de déformation, incluant la dissipation totale, par amortissement visqueux et par endommagement. Le schéma dissipatif HHT choisi dissipe très peu ici.

### 1.3 Recommandations issues de référentiels d'ingénierie

Des recommandations en termes de valeurs d'amortissement visqueux équivalent sont proposées dans le rapport NUREG CR-6707, dans le Bulletin CEB n°209, dans le code ASCE 43-05, dans les règles KTA 2201.3, et qui sont associées à une démarche de dimensionnement en « capacité », exploitant la ductilité du béton armé... Ces référentiels ne font pas la distinction entre dissipation se produisant pendant les cycles endommageants et celle résiduelle identifiée après ces cycles ; ils proposent des valeurs du taux d'amortissement réduit équivalent  $\xi_{\text{éq}}$  qui s'échelonnent de 4% à 7% (voire 10%) pour le béton armé, à utiliser en analyse conventionnelle linéaire. L'accroissement de l'amortissement réduit équivalent  $\xi_{\text{éq}}$ , provenant de contributions des non-linéarités de comportement, est paramétré par le coefficient de ductilité  $\mu$  et le type d'élément structurel considéré, puis utilisé dans une analyse linéaire pour décrire la dissipation d'énergie pendant les cycles endommageant, selon les classes de dégradation visées. Dans (Heitz *et al.*, 2018) on trouve une comparaison de plusieurs expressions  $\xi_{\text{éq}}(\mu)$  issues de la littérature où l'on constate une très forte sensibilité à la valeur de  $\mu$  pour les cas faiblement non linéaires : ceci rend leur usage questionnable pour la pratique d'ingénierie, pour des séismes peu endommageants, « loin » de la ruine de la structure. Dans les règles KTA 2201.3 (§ 4.3.3.3) on précise cependant que dans le cadre d'une analyse transitoire non linéaire (avec modélisation des hystérésis de comportement), on peut ajouter un amortissement visqueux réduit égal à 4% en sus pour le béton armé. Dans le Guide ASN n°2/01, dans le même cadre, cette valeur est limitée à 2% pour le mode fondamental et inférieure à 5% à la fréquence de coupure, prévue à seule fin de contrôle d'éventuels artefacts numériques. De plus, il y est stipulé que la prédiction obtenue doit être majorée pour tenir compte de la variabilité des excitations sismiques.

## 2 Constatations sur des campagnes expérimentales

De nombreuses campagnes expérimentales ont été menées depuis au moins trois décennies sur des éléments structurels ou des structures en béton armé et elles ont fait l'objet de publications. Elles ont permis de constater et documenter deux régimes principaux de sources de dissipation d'énergie :

- le premier, lors des phases fortes de chargement où la structure se dégrade (endommagement, fissuration, plasticité, glissement acier-béton...);
- le second, lors de phases faibles du chargement ou des phases résiduelles du chargement, dans des transitoires où les variables décrivant la dégradation n'évoluent pas. On peut leur attribuer par exemple une dissipation d'énergie par frottement sur des fissures de tailles diverses.

Cependant, ces campagnes d'essais n'ont pas apporté de conclusions sur la distribution spatiale de l'amortissement, cette grandeur n'étant pas directement mesurable.

L'identification de l'amortissement à partir des résultats expérimentaux nécessite donc l'emploi de méthodes adaptées, cf. par exemple (Heitz *et al.*, 2018) : par exemple en traitant le pic d'amplification pour des modes bien séparés avec la largeur de bande à  $-3dB$ ... Ainsi, le niveau de dissipation – donc l'amortissement réduit équivalent – dépend du contenu fréquentiel, de l'amplitude, de la forme des hystérésis envisagées dans la réponse dynamique de la structure, de la fenêtre temporelle utilisée, selon le type d'excitation exercé (run sismique, marteau de choc, bruit blanc...).

On présente ci-après de manière synthétique quelques résultats expérimentaux issus de la littérature sur des structures ou des quasi-structures en béton armé en situation de chargement sismique. Rappelons que le facteur d'échelle n'affecte pas l'évolution relative des fréquences ni celle des coefficients d'amortissement réduit. Le lecteur intéressé peut trouver des compléments d'informations dans les références bibliographiques.

### 2.1 Essais NUPEC - Nuclear Regulatory Authority of Japan : 1991-2004

Ces essais sur des structures en béton armé, sur la table vibrante du laboratoire de Tadotsu, (Cherry *et al.*, 2000, Kitada *et al.*, 1997, Torita *et al.*, 2004), ont été conçus pour vérifier et améliorer les pratiques de dimensionnement.

Il s'est agi d'essais de cisaillement sur des murs en béton armé, puis sur une enceinte (RCCV) cylindrique de confinement en béton armé à l'échelle 1:8, sur radier, avec des séismes horizontaux (h) et verticaux (v), avec un co-financement par la US-NRC (voir rapport NUREG CR-6707). À la fin de chaque run, après application d'une excitation de petite amplitude, la première fréquence de la maquette et son amortissement équivalent « résiduel » sont identifiés en évaluant la largeur du premier pic du module de la fonction de réponse en fréquence : voir Tableau 2.1. L'augmentation de l'amortissement équivalent « résiduel » est à associer à la fissuration consécutive aux niveaux sismiques croissants, observable par la chute de fréquence.

**Tableau 2.1.** Essais NUPEC sur mur puis sur enceinte de confinement en béton armé à l'échelle 1:8. Première fréquence et amortissement équivalent « résiduel », consécutifs aux runs successifs.

Essai	Mur 0.0 g	Mur 0.317 g	Mur 0.36 g	Mur 0.58 g	RCCV : 0.0 g	RCCV : h 0.29 g	RCCV : h 0.29 g + v 0.15 g	RCCV : h 0.42 g + v 0.21 g
1 <sup>ère</sup> fréquence (Hz)	13.2	11.3	9.9	7.7	13.6	9.5	8.0	≈ 7.0
Amortissement (%)	1.1	2.5	3.0	4.0	1.0	4.5	≈ 5.0	≈ 6.0

## 2.2 Essais CEA de planchers en béton armé sous séisme vertical : 2002-2004

Le CEA a réalisé une campagne d'essais, lors d'un programme de R&D commun EDF-CEA, sur la table vibrante Azalée, dans le but de caractériser l'effet du comportement non linéaire sur l'amplification de spectres de planchers en béton armé représentatifs de la construction nucléaire (élancement environ 1/25), soumis à un séisme vertical (spectre de bâtiment), pour un facteur d'échelle de 1:2.5 puis 1:3.3. À la fin de chaque run sismique, une sollicitation de faible amplitude, inférieure à 0.1g, de type bruit blanc, est utilisée pour évaluer la fonction de réponse en fréquence. Le Tableau 2.2 récapitule les différents résultats. Les valeurs de fréquence entre parenthèses correspondent à la fréquence « apparente » du plancher déterminée à partir du spectre de l'accéléromètre situé au centre du plancher. L'augmentation de l'amortissement équivalent « résiduel » est à associer à la fissuration consécutive aux niveaux sismiques croissants, observable par la chute de fréquence. La fissuration de flexion est restée limitée à quelques zones particulières des plancher. Ces essais ont servi à la validation de *Code\_Aster* (test SDNV140) ; voir aussi (Voldoire *et al.*, 2018ab).

**Tableau 2.2.** Essais CEA sur plancher en béton armé sous séisme vertical. Première fréquence et amortissement équivalent « résiduel », consécutifs aux runs jusqu'à plus de 4 fois le niveau de dimensionnement.

Essai	Plancher 1								Plancher 2					
	0.0 g	0.074 g	0.15 g	0.23 g	0.34 g	0.59 g	0.79 g	1.08 g	0.0 g	0.066 g	0.16 g	0.22 g	0.33 g	0.45 g
1 <sup>ère</sup> fréquence (Hz)	19.3	19.3 (19.6)	19.3 (19.6)	19.24 (19.6)	18.9 (19.0)	17.9 (16.5)	16.7 (15.4)	16.06 (14.2)	21.21	21.04 (20.75)	20.85 (20.75)	20.23 (20.75)	19.81 (20.75)	18.486 (18.49)
Amortissement (%)	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.2	5.4	6.4	2.70	2.62	2.54	2.88	3.43	3.61

## 2.3 Campagne d'essais SMART en béton armé sous séisme : CEA, 2008-2013

Le CEA a réalisé deux campagnes d'essais, au sein d'un programme de R&D commun EDF-CEA, dans le but de caractériser l'effet du comportement non linéaire et de la torsion sur l'amplification de spectres de bâtiments en béton armé représentatifs de la construction nucléaire, ayant servi de base à deux benchmarks internationaux (Richard *et al.*, 2016ab). Le facteur d'échelle des maquettes à trois étages est de 1:4 ; elles ont été testées sur la table vibrante Azalée, pour des runs sismiques bidirectionnels horizontaux croissants allant au-delà de 4 fois le niveau de dimensionnement (égal à 0.20 g). Le Tableau 2.3 récapitule les différentes mesures obtenues sur le premier mode, après application d'un signal bas niveau à la fin de chaque run sismique. Pour la maquette SMART 2013, après application de runs sismiques de type « aftershock », l'amortissement « résiduel » identifié a conservé un niveau constant.

**Tableau 2.3.** Essais CEA sur maquettes SMART sous séisme. Première fréquence et amortissement équivalent « résiduel », consécutifs aux runs jusqu'à 4 fois le niveau de dimensionnement.

Essai	SMART 2008						SMART 2013					
	0.0 g	0.20 g	0.67g	0.77g	1.05 g	1.1 g	< 0.1 g	0.13 g	0.22 g	0.40 g	0.60 g	1.1 g
1 <sup>ère</sup> fréquence (Hz)	6.81	5.14	4.32	4.32	4.17	3.96	6.29	6.21	6.15	4.49	3.79	2.61
Amortissement (%)	1.8	1.8	4.8	4.7	5.3	4.1	2.8	3.3	3.3	5.6	6.2	6.8

Pour les modes d'ordre supérieur, pour les deux maquettes, la valeur de l'amortissement « résiduel » identifié est légèrement supérieure à celle obtenue pour le premier mode (Charbonnel, 2018).

## 2.4 Campagne d'essais TESSH sur des voiles en béton armé, JRC, Ispra

On peut également faire référence à la campagne d'essais cycliques sur des voiles en béton armé en cisaillement plan, à échelle 1, réalisée au laboratoire ELSA du JRC Ispra, dans le cadre du projet européen IRIS (7<sup>ème</sup> PCRD), cf. (Bekö *et al.*, 2015). Les résultats ont permis d'identifier l'évolution de l'amortissement équivalent en fonction du niveau de chargement (et de ductilité appelée) au cours des cycles (à très basse fréquence), correspondant surtout aux phases de croissance de l'endommagement des sections de béton armé ; des valeurs supérieures à celles admises dans les référentiels de dimensionnement ont été obtenues (8 à 10% dans les phases endommageantes).

## 2.5 Résumé des constatations expérimentales

De ces essais, on a pu conforter des modèles de comportement non linéaires capables de décrire une part de la dissipation d'énergie durant les phases fortes des transitoires sismiques. De manière générale, on a observé que l'amortissement équivalent « résiduel » identifié sur des structures en béton armé ayant subi des chargements cycliques a les propriétés suivantes :

- il est globalement inférieur à 2% sur le premier mode pour la structure saine ; il est de l'ordre de 3% pour un chargement sismique de niveau dimensionnement, peu endommageant ;
- il est croissant après chaque transitoire provoquant une fissuration du béton ; il atteint des valeurs de l'ordre de 4 à 6% sur le premier mode pour des chargements sismiques à 2-4 fois le niveau de dimensionnement ; il reste stable pour des runs de type « aftershock » ;
- pour les modes d'ordre supérieur, sa valeur identifiée est légèrement supérieure à celle obtenue pour le premier mode ;
- il ne peut pas être modélisé avec les relations de comportement non linéaire usuellement utilisées en dynamique transitoire non linéaire, qui se chargent de décrire essentiellement les dissipations matérielles, localisées, advenant lors des cycles forts.

Pour accroître la pertinence des modélisations « avancées », il est essentiel d'améliorer les dissipations décrites par les modèles de comportement pour être moins dépendant de l'amortissement forfaitaire. Cela peut passer notamment par l'ajout d'un terme de dissipation dans les potentiels des relations de comportement dépendant de l'endommagement et des déformations.

## 3 Modélisation de l'amortissement via les lois de comportement du solide

Cette voie offre la latitude, en revenant à la physique du matériau constitutif, de donner accès à l'identification locale et à la distribution spatiale de la dissipation d'énergie. Certains modèles proposent de traiter l'effet de mémoire sur l'amortissement via un noyau intégral viscoélastique de Boltzmann-Biot ; d'autres utilisent la valeur instantanée des variables d'état (effet de retard non vieillissant) : c'est cette piste que l'on propose d'investiguer ci-après, étant plus adaptée au cadre des modèles de comportement non linéaire utilisés pour le béton armé. Comme l'amortissement de Rayleigh est très pratiqué pour sa simplicité de mise en œuvre, on se propose de le prendre comme cible.

### 3.1 Formulation thermodynamique et amortissement de Rayleigh

La densité d'énergie libre est contrôlée par le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , les tenseurs de déformation visqueuse  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  et des « contraintes irréversibles »  $\boldsymbol{\tau}$ , cf. (Salençon, 1983) :  $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v, \boldsymbol{\tau})$  ; on admet rester en situation isotherme. On n'a pas nécessairement une décomposition additive des déformations comportant des déformations visqueuses, mais il peut y avoir une liaison  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v$ . La densité de puissance mécanique dissipée est :  $\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v, \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Phi} = -\Phi_{,\varepsilon^v}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^v, \boldsymbol{\tau}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v$ . Après discrétisation en temps et intégration de la relation de comportement, le travail des forces intérieures  $\mathbf{R}_{in}$  ne produit pas de termes de type  $\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}(t)$ , car  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v$  est exprimé par l'accroissement  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^v / \Delta t$ . En adoptant la classe des modèles *standard généralisés*, on définit une densité de pseudo-potentiel de dissipation pour formuler les *lois complémentaires* d'évolution vérifiant le *principe de dissipation maximale* de Drucker-Ilyushin (1959), voir (Marigo, 1989), ou par exemple (Voltaire, Bamberger, 2008). En reprenant le modèle viscoélastique rhéologique (Christensen, 1982), on propose ici la formulation suivante pour retrouver le modèle d'amortissement viscoélastique de Rayleigh :

$$\text{densité d'énergie libre :} \quad \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \cdot \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) + \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^v) \quad [2]$$

$$\text{pseudo-potentiel de dissipation :} \quad \Psi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v$$

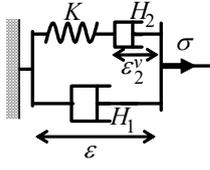
avec les tenseurs symétriques définis positifs paramétrés par les coefficients réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\mathbf{H}_1 = \alpha \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \beta^{-1} \mathbf{A} \quad [3]$$

Le modèle rhéologique uniaxial correspondant à cette formulation est constitué d'un amortisseur  $H_1$  en parallèle d'une chaîne ressort  $K$  avec amortisseur  $H_2$ , cf. (Semblat, 1997). Le système à un degré de liberté associé, de pulsation non amortie  $\omega_0$ , exhibe un coefficient d'amortissement réduit :

$$\xi(\omega_0) = \frac{1}{2}(\alpha\omega_0 + \beta/\omega_0) = \frac{1}{2}(H_1\omega_0/K + K/H_2\omega_0) \quad [4]$$

Les relations d'état du modèle de comportement tridimensionnel s'écrivent :



$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1^v = \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\tau} = -\Phi_{,\varepsilon_1^v} = \mathbf{H}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v \\ \boldsymbol{\sigma} = \Phi_{,\varepsilon} = \Phi_{,\varepsilon_2^v} = \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) + \mathbf{H}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v = \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \\ \mathbf{H}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v = \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v + \beta \boldsymbol{\varepsilon}_2^v - \beta \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad [5]$$

On obtient l'écriture différentielle :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \beta \boldsymbol{\sigma} = (1 + \alpha\beta) \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \alpha \mathbf{A} \cdot \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad [6]$$

et la densité de puissance dissipée :

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v) = \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \beta (\boldsymbol{\sigma} - \alpha \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \alpha \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq 0 \quad [7]$$

On déduit de la formulation variationnelle des équations du mouvement après discrétisation par EF :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}(t) + \alpha \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(t) - \mathbf{F}_2^v(t) = \mathbf{F}_{ex}(t) \\ \dot{\mathbf{F}}_2^v(t) + \beta \mathbf{F}_2^v(t) - \beta \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad [8]$$

En repère entraîné par un mouvement rigide  $\mathbf{U}_{ent}(t)$ , après transformation de Laplace, avec  $s \in \mathbb{C}$ , on obtient les équations suivantes après réarrangement, exprimées en mouvement relatif :

$$\begin{cases} (s^2 \mathbf{M} + s(\alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}) + (1 + \alpha\beta) \mathbf{K}) \cdot \hat{\mathbf{U}}_r(s) = -s(s + \beta) \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{ent}(s) \\ \hat{\mathbf{F}}_2^v(s) = (1 + s/\beta)^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{U}}_r(s) \end{cases} \quad [9]$$

En pratique, l'amortissement étant supposé faible :  $\alpha\beta = \xi_{min}^2 \ll 1$  et  $2\pi f_{min} > |s| \gg \beta$  dans la gamme de fréquences visée. On retrouve donc bien le modèle d'amortissement global de Rayleigh avec son opérateur d'amortissement visqueux  $\alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}$ .

### 3.2 Relation de comportement avec endommagement et amortissement de Rayleigh

Du résultat précédent, on propose d'introduire une relation d'endommagement *standard généralisée* avec amortissement visqueux, décrite à l'aide d'une variable interne scalaire  $d \geq 0$  croissante, et un critère à seuil  $k_d$ .

$$\begin{aligned} \text{densité d'énergie libre :} \quad & \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v, d, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \cdot \mathbf{A}(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) + \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^v) \\ \text{pseudo-potential de dissipation :} \quad & \Psi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v, \dot{d}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v + k_d \cdot |\dot{d}| \end{aligned} \quad [10]$$

On note  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(0)$  ; on suppose le tenseur d'élasticité  $\mathbf{A}(d)$ , défini positif, décroissant strictement convexe de son argument  $d$ . On propose les tenseurs viscoélastiques paramétrés par les coefficients réels positifs  $\alpha(d)$  et  $\beta(d)$  :  $\mathbf{H}_1 = \alpha(d) \mathbf{A}_0$  ;  $\mathbf{H}_2 = \beta(d)^{-1} \mathbf{A}_0$ . Les relations d'état s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_1^v = \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\tau} = \alpha(d) \mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) + \alpha(d) \mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v \\ \mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v = \beta(d) \cdot \mathbf{A}(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \\ Y = -\Phi_{,d} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \cdot \mathbf{A}'(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \end{cases} \quad [11]$$

Les lois d'évolution irréversibles, avec le critère d'endommagement à seuil  $Y(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \leq k_d$ , sont :

$$\begin{cases} \dot{d} = -\frac{|Y_{,\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_+}{Y_{,d}} = -2 \frac{|A'(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_+}{(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \cdot A''(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v)} \geq 0 \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v = \beta(d) \cdot \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{A}(d) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_2^v) \end{cases} \quad [12]$$

La densité de puissance dissipée s'écrit :

$$\mathfrak{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^v, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^v, \dot{d}) = \alpha(d) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \beta(d) (\boldsymbol{\sigma} - \alpha(d) \mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot \mathbf{A}(d)^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \alpha(d) \mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + k_d \cdot \dot{d} \geq 0 \quad [13]$$

On observe donc bien que la dissipation d'énergie va se produire de manière localisée en temps lorsque l'endommagement croît ( $\dot{d} > 0$ ), mais que tout au long du transitoire, la dissipation visqueuse intervient, avec des paramètres  $\alpha(d)$  et  $\beta(d)$  que l'on va identifier croissants, sur la base des observations expérimentales décrites au § 2.5. Cependant comme  $d$  n'est pas une variable d'état observable, il est préférable d'utiliser une mesure de dégradation de raideur élastique, par exemple la plus forte valeur propre du tenseur d'élasticité  $\mathbf{A}(d)$ .

## 4 Évaluation du modèle sur le cas rhéologique unidimensionnel

Considérons un système rhéologique à un degré de liberté  $u(t)$  avec une masse ponctuelle  $M$  et une force interne régie par une chaîne ressort endommageable  $K(d)$ , décroissant strictement convexe, avec amortisseur  $H_2 = K_0/\beta(K(d))$  (variables internes  $u_2(t)$  et  $d$ ) en parallèle d'un amortisseur  $H_1 = \alpha(K(d))$ .  $K_0$ , en ayant noté  $K_0 = K(0)$ . La puissance dissipée instantanée s'écrit (seuil d'endommagement  $k_d$ , dimensionnellement identifié au ratio  $f_t^2/E_c$  pour du béton) :

$$\mathfrak{D}(\dot{u}, \dot{u}_2, \dot{d}) = H_1 \cdot \dot{u}^2 + H_2 \cdot \dot{u}_2^2 + k_d \cdot \dot{d} = K_0 (\alpha(K(d)) \cdot \dot{u}^2 + \beta(K(d)) \cdot (u - u_2)^2) + k_d \cdot \dot{d} \geq 0 \quad [14]$$

Limitons-nous à une évolution à endommagement constant  $\dot{d} = 0$ , pour un transitoire de faible niveau. Le coefficient d'amortissement réduit identifié (à faible niveau) dépendant de la pulsation  $\Omega$  est :

$$\xi(\Omega, d) = \frac{1}{2} (\alpha(K(d)) \cdot \Omega + \beta(K(d))/\Omega) \quad [15]$$

L'énergie dissipée sur un cycle stationnaire contrôlé en déplacement  $a \cdot \exp(i\Omega t)$  à la pulsation  $\Omega$  est :

$$\mathcal{E}_{cycle}^{diss} = \pi a^2 \cdot K(d) \cdot \Omega \cdot \left( \alpha(K(d)) + \frac{\beta(K(d))}{\Omega^2 + \beta^2(K(d))} \right) \quad [16]$$

De manière grossière, la compilation des résultats du § 2 peut conduire à identifier une dépendance affine – avec un coefficient 2,5 – de l'amortissement réduit « résiduel » évalué à la fréquence fondamentale :

$$\xi_f(d) \approx \xi_{f_0} \cdot (1 + 2,5(1 - K(d)/K_0)) \quad [17]$$

Selon la pratique industrielle, par exemple celle qui est codifiée au § 3 de l'ASCE 43.05, il est admis d'abattre le module de Young du béton armé d'une section de béton armé en flexion fissurée par un facteur 2 (pour un niveau de chargement de type dimensionnement), et l'amortissement réduit codifié est supérieur à la valeur  $2,25 \cdot \xi_{f_0}$  d'amortissement « résiduel » prédite par [17]. En décidant de caler les coefficients d'amortissement de Rayleigh minimal, cf. § 1.2, à la fréquence fondamentale, et avec le choix de dilater uniformément l'amortissement réduit en fonction de l'endommagement (ayant  $\xi_{min} = \sqrt{\alpha\beta}$ ), on propose de définir les coefficients :

$$\alpha(K(d)) = \alpha_0 \sqrt{1 + 2,5(1 - K(d)/K_0)} ; \quad \beta(K(d)) = \beta_0 \sqrt{1 + 2,5(1 - K(d)/K_0)} \quad [18]$$

Comme à ce stade, on admet pouvoir conserver la même gamme de fréquences d'intérêt  $[f_1, f_2]$  pour la définition de l'amortissement de Rayleigh, on doit veiller à ce que la fréquence fondamentale dégradée reste suffisamment supérieure à  $f_1$ . Avec le choix [18], l'expression [17] de l'énergie dissipée par amortissement visqueux sur un cycle stationnaire à endommagement constant, ayant  $\Omega \gg \beta$ , prend la forme simple :

$$\mathcal{E}_{cycle}^{diss} \approx \pi \alpha^2 \cdot K(d) \cdot \sqrt{1 + 2,5(1 - K(d)/K_0)} \cdot \Omega \cdot \left( \alpha_0 + \frac{\beta_0}{\Omega^2} \right) \quad [19]$$

L'analyse des observations expérimentales sur des éléments de structure et la mise en œuvre de ce type de modélisation, décrit au § 3.2, de l'amortissement « résiduel » dans des études transitoires non linéaires de bâtiments en béton armé pourront permettre de consolider cette expression.

## 5. Conclusion

Le choix du cadre thermodynamique et de la modélisation du comportement standard généralisé permet de formuler de manière robuste l'introduction d'une contribution dissipative de type visqueux au sein d'une relation de comportement non linéaire, qui permet de rejoindre la pratique courante en analyse dynamique sismique de l'amortissement visqueux global de Rayleigh, tout en donnant l'accès à une description spatiale et temporelle locale de la dissipation d'énergie. Même si on peut objecter que choisir la variable d'endommagement qui décrit la mémoire des processus de dégradation de raideur et de résistance du matériau pour affecter les propriétés viscoélastiques ne permet pas de tenir compte de toutes les configurations influant sur les capacités de dissipation dans les situations de « bas niveau dynamique » (après une phase forte d'excitation sismique) et que la procédure d'identification des paramètres nécessaires doit être travaillée, on constate cependant que cette démarche de modélisation permet de compléter la capacité prédictive des simulations de réponse sous séisme de structures en béton armé par confrontation à des expérimentations. En particulier elle permet de décrire plus précisément la contribution évolutive respective de la dissipation d'énergie apportée par les mécanismes de dégradation non linéaire par rapport à celle apportée par le modèle d'amortissement visqueux communément pratiqué, que l'on sait être dominante sur l'ensemble d'un transitoire. On espère ainsi faciliter l'expertise critique de la mise en œuvre de simulations du comportement dynamique non linéaire sous séisme des structures en béton armé, comme avec des modèles homogénéisés : GLRC\_DM, DHRC (*Code\_Aster*), à fin d'évaluation des marges de dimensionnement.

## Remerciements

Le travail présenté dans cette publication s'inscrit dans les activités soutenues par l'Institut SEISM (<http://www.institut-seism.fr>). L'auteur remercie également S.Fayolle pour la Figure 1.1.

## 6. Bibliographie

- Bekö A., Rosko P., Wenzel H., Pégon P., Markovic D., Molina F.J. "RC shear walls: Full-scale cyclic test, insights and derived analytical model". *Engineering Structures*, Vol. 102, p.120–131, 2015.
- Chambreuil C., Heitz T, Giry C, Ragueneau F. « Analyse de la dissipation dans des éléments de structures en béton armé », *Actes du Xème Colloque AFPS, EOSt, Strasbourg*, 2019.

- Charbonnel P.E., Analyse modale automatisée : suivi de la signature modale du spécimen testé lors de la campagne expérimentale SMART2013. Rapport CEA/DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI/NT/2018-63083, 2018.
- Cherry J.L., et al., Seismic analysis of a reinforced concrete containment vessel model. NUREG/CR-6707, US-NRC, 2000.
- Chopra A., McKenna F. “Modeling viscous damping in nonlinear response history analysis of buildings for earthquake excitation”. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* Vol. 45, n°2, p.193-211, 2016.
- Christensen R. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, 2<sup>nd</sup> edition. Academic Press, 1982.
- Code\_Aster, 2001. General public licensed structural mechanics finite element software, included in the Salomé-Méca simulation platform. Website <http://www.code-aster.org>.
- Combesure Ch., Dumontet H., Voldoire F. “Dissipative Homogenised Reinforced Concrete (DHRC) constitutive model dedicated to reinforced concrete plates under seismic loading”. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 73–74, p. 78–98, 2015. <https://hal.inria.fr/hal-01634203>.
- Filippou F.P., D'Ambrisi A., Issa A. Nonlinear static and dynamic analysis of reinforced concrete subassemblages. Report No. UCB/EERC–92/08, University of California, Berkeley, 1992.
- Heitz T., Le Maout A., Richard B., Giry C., Ragueneau F. “Dissipations in reinforced concrete components: Static and dynamic experimental identification strategy”. *Engineering Structures* Vol. 163, 2018, p. 436-451.
- Houlsby G.T., Puzrin A.M. “Rate-dependent plasticity models derived from potential functions”. *J. of Rheol.* Vol. 46, n°1, p. 113-126, 2002. DOI: 10.1122/1.1427911.
- Jacobsen L. “Steady forced vibrations as influenced by damping”. *Trans. ASME*, 52(15), p.169-181, 1930.
- Jéhel P., Léger P., Ibrahimbegovic A. “Initial versus tangent stiffness-based Rayleigh damping in inelastic time history seismic analyses”. *Earthquake Engng Struct. Dyn.* Vol. 43, 2014; p. 467-484.
- Kitada Y., Akino K., Terada K., Aoyama H. and Miller A. “Report on seismic shear wall international standard problem organized by OECD/NEA/CSNI. Programme OECD/NEA workshop 1994. Seismic shear wall NUPEC”, 14<sup>th</sup> SMIRT, Lyon, France, 1997.
- Marigo, J.J. Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property. *Nucl. Eng. and Design*, 114, p. 249–272, 1989.
- Markovic D., Koechlin P., Voldoire F. “Reinforced concrete structures under extreme loading: Stress resultant Global Reinforced Concrete Models (GLRC)”. *CompDyn*, Rethymno, Crete, Greece, 13–16 June 2007.
- Richard B., Martinelli P., Voldoire F., Chaudat T., Abouri S., Bonfils N. “SMART 2008: Overview, synthesis and lessons learned from the International Benchmark”. *Engineering Structures*, Vol. 106, 2016, p. 166–178.
- Richard B., Cherubini S., Voldoire F., Charbonnel P.-E., Chaudat T., Abouri S., Bonfils N. “SMART 2013: experimental and numerical assessment of the dynamic behavior by shaking table tests of an asymmetrical reinforced concrete structure subjected to high intensity ground motions”. *Engineering Structures*, Vol. 109, 2016, p. 99–116.
- Salençon J. *Cours de calcul des structures anélastiques. Viscoélasticité*. Presses ENPC, 1983.
- Semblat J.-F. “Rheological interpretation of Rayleigh damping”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 206, n°5, p. 630-633, 1997.
- Torita et al. “Shaking table test of RC-box type shear wall in multi-axis loading”. 13<sup>th</sup> WCCE, Vancouver, 2004.
- Voldoire F., Bamberger Y. *Mécanique des structures : initiation, approfondissements, applications*. Presses des Ponts, 2008.
- Voldoire F., Banci F., Hervé-Secourgeon E., Richard B., Zentner I. “New advances in the seismic analysis of nuclear structures and equipment from the SINAPS@ project”. *Best Practices in Physics-based Fault Rupture Models for Seismic Hazard Assessment of Nuclear Installations: issues and challenges towards full Seismic Risk Analysis*, Cadarache, May 2018.
- Voldoire F., Hervé-Secourgeon E., Fayolle S., Banci F., Guilloux A. “Seismic analysis of reinforced concrete nuclear buildings: comparison of two constitutive models by reference to experiments”. *TINCE 2018*, Paris-Saclay, France, August 2018.