



**HAL**  
open science

# Sur les intégrales stochastiques associées aux processus ponctuels

A. Ramakrishinan, S. K. Srinivasan

► **To cite this version:**

A. Ramakrishinan, S. K. Srinivasan. Sur les intégrales stochastiques associées aux processus ponctuels. Annales de l'ISUP, 1956, V (2), pp.95-106. hal-04095373

**HAL Id: hal-04095373**

**<https://hal.science/hal-04095373>**

Submitted on 11 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# SUR LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES ASSOCIÉES AUX PROCESSUS PONCTUELS

par

RAMAKRISHNAN A. et S. K. SRINIVASAN

**RÉSUMÉ :** L'interprétation phénoménologique des intégrales des fonctions aléatoires, qui a récemment été formulée par un de nous, trouve son application aux problèmes de la Physique où interviennent des processus ponctuels plus complexes que ceux du type de Poisson simple.

## INTRODUCTION

On rencontre en Physique des processus aléatoires que l'on peut représenter symboliquement par des intégrales associées à un processus plus simple qu'on appelle le processus aléatoire de base (p.a.b.), et dont on connaît les caractères stochastiques et le mode de développement. Bien que l'intégration stochastique ait attiré l'attention des mathématiciens, il n'y a pas eu jusqu'ici de tentatives systématiques d'interprétation de ces intégrales du point de vue physique. Dans de récents travaux (que nous appellerons désormais articles A, B, C), un de nous (R) a développé une interprétation phénoménologique de ces intégrales à partir du concept de "l'évolution" du processus stochastique, en fonction du paramètre qui représente la "durée" du processus.

Dans l'article A, en vue de donner une idée des possibilités d'application aux problèmes physiques réels, nous avons choisi le processus de Poisson comme p.a.b., ce dernier étant le processus évolutif non-multiplicatif le plus simple. Ici nous allons étudier des intégrales associées à d'autres processus ponctuels. Bien que nous n'insistions pas sur des problèmes physiques réels qui correspondent à des intégrales, nos résultats reposent, toutefois, entièrement sur des raisonnements phénoménologiques, ce qui leur permet d'être applicables aux problèmes physiques. Comme la théorie de l'intégration stochastique se trouve dans un état naissant, nous avons considéré utile de présenter nos résultats qui constituent un premier pas vers l'application de cette théorie aux problèmes physiques concrets.

## FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME

Considérons la variable aléatoire  $y_m(t)$  définie par la formule :

$$y_m(t) = \int_0^t \Phi_m(t_m) dt_m \int_0^{t_m} \Phi_{m-1}(t_{m-1}) dt_{m-1} \dots \int_0^{t_2} \Phi_1(t_1) n(t_1) dt_1 \quad (1)$$

où les  $\Phi_i(t)$  sont des fonctions certaines connues du paramètre à une dimension  $t$ ;  $n(t)$  désigne le nombre de points aléatoires, ou des évènements, dans l'intervalle  $(0, t)$  sur l'axe de  $t$ . Notre but est de déterminer la densité de probabilité (d.p.) de  $y_m(t)$ , ou tout au moins ses moments, quand on connaît les caractères statistiques du processus  $n(t)$ . Dans la partie I nous supposons que  $n(t)$  est un processus de Furry, le plus simple processus ponctuel multiplicatif dont nous disposons, et ensuite, dans la partie II, nous étendrons ces résultats à des processus ponctuels plus généraux.

### PREMIÈRE PARTIE

#### 1. $n(t)$ REPRÉSENTE UN PROCESSUS DE FURRY

La distribution des évènements aléatoires sur l'axe de  $t$  est déterminée par la loi suivante : la probabilité qu'un évènement aléatoire arrive entre  $t = \tau$  et  $t = \tau + d\tau$  est  $\{1 + n(\tau)\} \lambda d\tau$  où  $n(\tau)$  est une variable aléatoire qui représente le nombre d'évènements aléatoires qui se sont produits dans l'intervalle  $(0, \tau)$  sur l'axe de  $t$ . La probabilité  $\pi(n; t)$  que  $n(t) = n$  s'écrit \*

$$\pi(n; t) = e^{-\lambda t} (1 + e^{-\lambda t})^n \quad (2)$$

Nous supposons qu'il existe un évènement aléatoire à  $t = 0$ , qui peut s'interpréter comme un individu "primaire" générateur d'une population d'individus "secondaires" correspondant aux évènements aléatoires qui se produisent dans  $(0, \tau)$ . Leur nombre est représenté par  $n(\tau)$ , et leur d.p. par (2).

Nous pouvons alors considérer  $\lambda dt$  comme étant la probabilité qu'un individu en "produise" un autre dans l'intervalle  $(t, t + dt)$ .

Remarquons que correspondant à une réalisation des évènements à  $t_1, \dots, t_n$  dans l'intervalle  $(0, t)$ , la courbe  $n^R(\tau)$  de cette réalisation de  $n(\tau)$  se caractérise par des sauts discrets de valeur unité aux points  $t_1, \dots, t_n$ , la courbe restant parallèle à l'axe de  $t$  entre deux transitions. La valeur réalisée de  $n(\tau)$  s'écrit

$$n^R(\tau) = \sum_{i=1}^n H(\tau - t_i), \quad (0 < \tau < t) \quad (3)$$

où  $t_1, \dots, t_n$  sont les points sur l'axe de  $t$  où se produisent les évènements aléatoires, et  $H(t)$  est la fonction de Heaviside. La courbe de réalisation de  $\frac{dn(\tau)}{d\tau}$  peut donc s'interpréter par

\* Conforme à la manière habituelle des auteurs, le même symbole  $\pi$  sera utilisé pour désigner toutes les d.p., la distinction entre les diverses d.p. étant évidente selon le contexte.

$$\frac{d^R n(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \delta(\tau - t_i) \quad (4)$$

Nous définissons maintenant  $y_m(t)$  d'une manière plus générale par la formule

$$y_m(t) = \int_0^t \Phi_m(t_m) dt_m \int_0^{t_m} \Phi_{m-1}(t_{m-1}) dt_{m-1} \dots \int_0^{t_1} \Phi_0(t_0) \frac{dn(t_0)}{dt_0} dt_0 \quad (5)$$

Si  $\Phi_0(t_0) \equiv 1$ , alors (5) redevient (1). Renversant l'ordre des intégrales sur  $t_0, t_1, \dots, t_m$ , on obtient :

$$y_m(t) = \int_0^t \frac{dn(t_0)}{dt_0} F(t, t_0) dt_0, \quad (6)$$

où  $F(t, t_0)$  s'écrit comme

$$F(t, t_0) = \Phi_0(t_0) \int_{t_0}^t \Phi_1(t_1) dt_1 \int_{t_1}^t \Phi_2(t_2) dt_2 \dots \int_{t_{m-1}}^t \Phi_m(t_m) dt_m \quad (7)$$

## 2. SOLUTION PAR LA MÉTHODE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

On voit que l'on ne peut pas obtenir la d.p.  $\pi(y_m; t)$  de  $y_m(t)$  sans recourir à la d.p. simultanée de l'ensemble des  $y_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Pour surmonter cette difficulté nous nous servons de la technique développée par l'un de nous (R., 1956, article C), et remplaçons  $t$  par  $a$  dans l'intégrale,  $a$  étant un paramètre général quelconque indépendant de  $t$ . Si  $\pi(y_m, n; t)$  désigne la d.p. simultanée de  $y_m$  et de  $n$ , on obtient par un raisonnement élémentaire :

$$\frac{\partial \pi(y_m, n; t)}{\partial t} = -\lambda(n+1)\pi(y_m, n; t) + \lambda n \pi(y_m - F(a, t), n-1; t) \quad (8)$$

avec les conditions initiales

$$\pi(y_m, n; 0) = \delta_0^n \delta(y_m) \quad (9)$$

où  $\delta_0^n$  est la fonction de Kronecker, c'est-à-dire que  $\delta_0^n = 0$  si  $n \neq 0$ ,  $\delta_0^0 = 1$ , et où  $\delta(y_m)$  est la fonction delta de Dirac. Remarquons que dans cette équation nous avons affaire avec la fonction de fréquence de

$\int_0^t \frac{dn(t_0)}{dt_0} F(a, t_0) dt_0$  et non pas celle de  $y_m$  comme définie par (6). En dési-

gnant par  $G(y_m, u; t)$  et  $g(s, u; t)$  les fonctions

$$G(y_m, u; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(y_m, n; t) u^n \quad (10)$$

$$g(s, u; t) = \int_0^{\infty} G(y_m, u; t) e^{-\delta y_m} dy_m \quad (11)$$

on obtient



$$\frac{\partial g(s, u; t)}{\partial t} = -\lambda u \frac{\partial g(s, u; t)}{\partial u} + \lambda u^2 e^{-sF(a, t)} \frac{\partial g(s, u; t)}{\partial u} + \lambda g(s, u; t)(ue^{-sF(a, t)} - 1) \quad (12)$$

Utilisant la méthode habituelle des "caractéristiques", nous obtenons la solution à (12) sous la forme

$$g(s, u; t) = \frac{e^{-\lambda t}}{u} \left[ \frac{1}{u} - \lambda \int_0^t e^{-sF(a, \tau) - \lambda(t-\tau)} d\tau \right]^{-1} \quad (13)$$

On peut donc obtenir directement la transformée de Laplace\*,  $p(s; t)$ , de  $\pi(y_m; t)$ . Comme

$$\begin{aligned} \pi(y_m; t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi(y_m, n; t) \\ &= G(y_m, 1; t) \end{aligned} \quad (14)$$

on obtient  $p(s; t)$  comme suit :

$$\begin{aligned} p(s; t) &= g(s, 1; t) \\ &= e^{-\lambda t} \left[ 1 - \lambda \int_0^t e^{-sF(a, \tau) - \lambda(t-\tau)} d\tau \right]^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

On remplace  $a$  par  $t$  pour obtenir la transformée de Laplace de la d.p. de  $y_m$  défini en (6). Une méthode alternative pour obtenir la même transformée qui utilise la distribution simultanée de  $y_m$  et des  $n(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , est exposée dans l'appendice.

Les moments de  $y_m(t)$  se calculent à partir de la relation classique

$$E \left\{ y_m^r(t) \right\} = \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} \right)^r p(s; t) \right]_{s=0} \quad (16)$$

Les trois premiers moments sont

$$E \left\{ y_m(t) \right\} = \lambda \int_0^t e^{\lambda\tau} F(t, \tau) d\tau \quad (17)$$

$$E \left\{ y_m^2(t) \right\} = 2 \left[ E \left\{ y_m(t) \right\} \right]^2 + \lambda \int_0^t e^{\lambda\tau} F^2(t, \tau) d\tau \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E \left\{ y_m^3(t) \right\} &= 6 \left[ E \left\{ y_m(t) \right\} \right]^3 + 6\lambda E \left\{ y_m(t) \right\} \int_0^t e^{\lambda\tau} F^2(t, \tau) d\tau \\ &\quad + \lambda \int_0^t e^{\lambda\tau} F^3(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

On peut obtenir  $\pi(y_m; t)$  explicitement dans les cas particuliers.

$$(i) \quad m = 1 \quad ; \quad \Phi_0(t_0) \equiv \Phi_1(t) \equiv 1$$

$$\text{Dans ce cas } F(t, \tau) = t - \tau \quad ; \quad (20)$$

\* Comme dans le cas de  $\pi$ , nous employons le symbole  $p$  pour désigner toutes les transformées de Laplace, la distinction entre les diverses transformées étant mise en évidence par le contexte.

$$p(s; t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k (1 - e^{-(\lambda+s)t})^k \quad (21)$$

$\pi(y_1; t)$  s'évalue par la formule d'inversion

$$\begin{aligned} \pi(y_1; t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} p(s; t) e^{sy_1} ds \\ &= e^{-\lambda t} \delta(y_1) + e^{-\lambda(y_1+t)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} \frac{(y_1 - rt)^{k-1}}{(k-1)!} H(y_1 - rt) \end{aligned} \quad (22)$$

$\pi(y_1; t)$  est continue pour tout  $y_1 > 0$  sauf  $y_1 = t$ ; à  $y_1 = t$ ,  $\pi(y_1; t)$  a une discontinuité de la grandeur  $\lambda e^{-2\lambda t}$

(ii)  $m = 0$  ;  $\Phi_0(\tau) = \tau$ .

Dans ce cas  $F(t, \tau) = \tau$ ;  $p(s; t)$  s'écrit comme

$$p(s; t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s-\lambda}\right)^k (e^{-\lambda t} - e^{-st})^k \quad (23)$$

Prenant l'inverse de (23), on obtient

$$\pi(y_0; t) = e^{-\lambda t} \delta(y_0) + e^{\lambda(y_0-t)} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda e^{-\lambda t})^k \sum_{r=0}^k \frac{(y_0 - tr)^{k-1}}{(k-1)!} (-1)^r \binom{k}{r} H(y_0 - tr) \quad (24)$$

Il est intéressant de remarquer que dans ce cas également,  $\pi(y_0; t)$  est continue pour tout  $y_0 > 0$  sauf à  $y_0 = t$ ;  $\pi(y_0; t)$  est discontinue à  $y_0 = t$ , la discontinuité étant de grandeur  $\lambda e^{-\lambda t}$ . Nous remarquons de même que

$$\int_0^t \frac{dn(\tau)}{d\tau} (t - \tau) d\tau \text{ et } \int_0^t \frac{dn(\tau)}{d\tau} \tau d\tau$$

ne représentent pas des processus "équivalents", comme on peut s'y attendre d'ailleurs, puisque la distribution des points aléatoires n'est pas "symétrique" par rapport aux extrémités de l'intervalle  $(0, t)$ . Selon la définition de R, deux processus  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont dits "équivalents" si les d.p. de  $x_1(t)$  et de  $x_2(t)$  sont identiques en tout point  $t$ . Une discussion plus détaillée des processus équivalents se trouve dans les articles A, B et C. D'autre part, quand  $n(\tau)$  représente un processus de Poisson, les deux intégrales représentent des processus "équivalents".

### 3. SOLUTION PAR LA MÉTHODE DES D.P. (1)

Considérons maintenant la variable aléatoire  $y_m(t)$  définie par (6), au point de vue de la théorie des D.P. (1). Remarquons qu'à chaque point aléatoire  $t_i$  nous associons la fonction  $F(t, t_i)$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème démontré par l'un de nous (R, 1953) qui relie les moments de  $y_m$  aux D.P. des points aléatoires (secondaires). Le moment d'ordre  $r$  de  $y_m$  s'écrit :

(1) Densités-produits.

$$\begin{aligned}
 E \{ y_m^r(t) \} &= C_r^r \int_{t_1} \int_{t_2} \dots \int_{t_r} F(t, t_1) F(t, t_2) \dots F(t, t_r) \\
 &\quad f_r(t_1, t_2, \dots, t_r) dt_1 dt_2 \dots dt_r \\
 &+ C_{r-1}^r \int_{t_1} \int_{t_2} \dots \int_{t_{r-1}} F^2(t, t_1) F(t, t_2) \dots F(t, t_{r-1}) f_{r-1}(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) dt_1 dt_2 \dots dt_{r-1} \\
 &+ \sum_{h=2}^{r-2} \sum_{i=1}^r C_{h(i)}^r \int_{t_1} \int_{t_2} \dots \int_{t_h} F^{h_1}(t, t_1) F^{h_2}(t, t_2) \dots F^{h_h}(t, t_h) f_h(t_1, t_2, \dots, t_h) dt_1 dt_2 \dots dt_h \\
 &+ C_1^r \int_{t_1} F^r(t, t_1) f_1(t_1) dt_1
 \end{aligned} \tag{25}$$

La somme sur  $i$  pour un  $h$  particulier désigne la somme sur toutes les diverses combinaisons pour cet  $h$  donné. Les coefficients  $C_h^r$  se décomposent en combinaisons si  $h > 1$  et  $h < r-1$ . On écrit  $C_{h(i)}^r$ , où la combinaison  $i$  appartenant à  $(h, r)$  est caractérisée par les nombres  $l_1, \dots, l_h$  tels que  $l_1 + \dots + l_h = r$ , comme

$$C_{h(i)}^r = \frac{r!}{l_1! l_2! \dots l_h! k_1! k_2! \dots k_p!} \tag{26}$$

où  $p$  parmi  $h$  entiers sont différents l'un de l'autre, et  $k_1, \dots, k_p$  sont les nombres d'entiers d'égales valeurs.

Il nous reste à obtenir les D.P.  $f_i(t_1, \dots, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , pour le processus de Furry. La fonction  $f_r(t_1, \dots, t_r) dt_1 \dots dt_r$  est la probabilité qu'il y ait un seul point aléatoire dans chaque intervalle  $(t_i, t_i + dt_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Dans cette définition  $t_1, \dots, t_r$  ne sont pas nécessairement ordonnés. De plus,  $f_r$  est symétrique par rapport à toutes les variables. Par des raisonnements élémentaires de la théorie de probabilité on obtient

$$f_1(t_1) = \lambda + \lambda \int_0^{t_1} f_1(\tau) d\tau \tag{27}$$

$$f_2(t_1, t_2) = 2\lambda f_1(t_1) + \lambda \int_0^{t_2} f_2(\tau, t_1) d\tau \tag{28}^*$$

L'équation intégrale pour une forme générale de  $f_i$  en fonction de  $f_{i-1}$  peut s'écrire facilement si l'on suppose que  $t_1, \dots, t_i$  sont ordonnés, ce qu'on peut faire sans aucune perte de généralité en vue de la symétrie de la fonction par rapport aux variables.

En supposant  $t_1 < t_2 < \dots < t_r$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 f_r(t_1, t_2, \dots, t_r) &= \lambda r f_{r-1}(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) \\
 &\quad + \lambda \int_0^{t_r} f_r(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{29}$$

Dans la fonction sous l'intégrale,  $t_1, \dots, t_{r-1}$  seuls sont ordonnés,  $\tau$  pouvant prendre une valeur quelconque entre 0 et  $t_r$ . Le premier terme de l'équation (29) se déduit du fait que "l'individu" (point aléatoire) en  $t_r$  est produit par un quelconque des  $r$  "individus" qui constituent le "primaire" en  $t = 0$ , et par les "secondaires" en  $t_1, \dots, t_{r-1}$ . Le second membre résulte de la remarque que tout individu se trouvant ailleurs sur l'axe des  $t$  peut également en produire un autre en  $t_r$ .

Prenant la dérivée par rapport à  $t_r$  des deux membres en (29), on obtient

$$\frac{\partial f(t_1, t_2, \dots, t_r)}{\partial t_r} = \lambda f_r(t_1, t_2, \dots, t_r) \tag{30}$$

\* Il est à remarquer qu'à  $t_i = 0$  il existe un point aléatoire (primaire) qui est générateur de la distribution, et nous n'en tenons pas compte dans la définition des D.P.

dont la solution est la suivante :

$$f_r(t_1, t_2, \dots, t_r) = e^{\lambda t_r} Q(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) \quad (31)$$

Comme  $f_r$  est une fonction symétrique de  $t_1, \dots, t_r$ , alors  $Q$  s'écrit

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) = k(r) e^{\lambda(t_1 + t_2 + \dots + t_{r-1})} \quad (32)$$

La substitution de (31) et de (32) dans l'équation (29) nous donne la relation de récurrence

$$k(r) = \lambda r k(r-1), \quad k(1) = \lambda, \quad (33)$$

qui admet la solution simple :

$$k(r) = \lambda^r r! \quad (34)$$

Donc

$$\begin{aligned} f_r(t_1, t_2, \dots, t_r) &= \lambda^r r! e^{\lambda(t_1 + t_2 + \dots + t_r)} \\ &= r! f_1(t_1) f_1(t_2) \dots f_1(t_r) \end{aligned} \quad (35)$$

Les moments de  $y_m$  se calculent par la substitution de (35) dans (25). Les trois premiers moments obtenus par cette méthode s'accordent avec (17), (18) et (19).

## DEUXIÈME PARTIE

### 4. $n(t)$ REPRÉSENTE UN PROCESSUS MULTIPLICATIF GÉNÉRAL

Reprenons la relation (6) où  $n(t)$  représente une distribution des points aléatoires pour laquelle la probabilité qu'il se trouve un point aléatoire entre  $t$  et  $t+dt$  est  $\lambda \Psi(n) dt$ . La d.p.  $\pi(n; t)$  de  $n$  s'écrit

$$\pi(n; t) = \Psi(n-1) \Psi(n-2) \dots \Psi(0) \prod_{k=0}^{n-1} A_k^n e^{-\lambda \Psi(k)t} \quad (36)$$

où

$$A_k^n = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=n} \{ \Psi(j) - \Psi(k) \}^{-1} \quad (37)$$

Pour obtenir la d.p. de  $y_m(t)$  comme définie par (6) où  $a$  remplace  $t$  dans  $F(t, t_0)$ , nous adopterons la méthode des équations aux dérivées partielles. Si la d.p. simultanée de  $y_m$  et de  $n$  est  $\pi(y_m, n; t)$ , par des raisonnements maintenant familiers, on obtient

$$\frac{\partial \pi(y_m, n; t)}{\partial t} = -\lambda \Psi(n) \pi(y_m, n; t) + \lambda \Psi(n-1) \pi(y_m - F(a, t), n-1; t) \quad (38)$$

Si l'on désigne par  $p(s, n; t)$  la transformée de Laplace de  $\pi(y_m, n; t)$  relative à  $y_m$ , on trouve

$$\frac{\partial p(s, n; t)}{\partial t} = -\lambda \Psi(n) p(s, n; t) + \lambda \Psi(n-1) e^{-sF(a, t)} p(s, n-1; t) \quad (39)$$

c'est-à-dire

$$p(s, n; t) = \lambda \Psi(n-1) \int_0^t p(s, n-1; \tau) e^{-sF(a, \tau) - \lambda \Psi(n) \cdot (t-\tau)} d\tau \quad (40)$$



Une solution explicite pour  $p(s, n; t)$  n'est possible que dans deux cas particuliers :

- (i)  $m = 0$  et  $\Phi_0(t) \equiv t$   
 (ii) les  $\Psi(n)$  sont en progression arithmétique  
 (i) Dans ce cas (40) devient

$$p(s, n; t) = \lambda \Psi(n-1) \int_0^t p(s, n-1; \tau) e^{-s\tau - \lambda \Psi(n)(t-\tau)} d\tau \quad (41)$$

Désignant, de plus, par  $\rho(s, n; q)$  la transformée de Laplace de  $p(s, n; t)$  par rapport à  $t$ , on obtient

$$\rho(s, n; q) = \frac{\lambda \Psi(n-1) \rho(s, n-1; q+s)}{q + \lambda \Psi(n)} \quad (42)$$

Nous obtenons, par itération :

$$\rho(s, n; q) = \frac{\lambda^n \Psi(n-1) \Psi(n-2) \dots \Psi(0)}{\prod_{k=0}^{n-1} (q + n-k s + \lambda \Psi(k))} \quad (43)$$

comme

$$\rho(s, 0; q) = \frac{1}{q + \lambda \Psi(0)} \quad (44)$$

En décomposant le second membre de (43), nous avons

$$\rho(s, n; q) = \lambda^n \Psi(n-1) \Psi(n-2) \dots \Psi(0) \sum_{k=0}^n \frac{B_k^n}{q + s(n-k) + \lambda \Psi(k)} \quad (45)$$

où  $B_k^n$  s'écrit

$$B_k^n = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=n} \left[ \lambda \{ \Psi(j) - \Psi(k) \} - (j-k)s \right]^{-1} \quad (46)$$

Prenant l'inverse par rapport à  $q$ ,

$$p(s, n; t) = \lambda^n \Psi(n-1) \Psi(n-2) \dots \Psi(0) \sum_{k=0}^n B_k^n \exp[-\lambda \Psi(k)t - (n-k)st] \quad (47)$$

$$B_k^n = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=n} (j-k)^{-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=n} \left[ \lambda \frac{\Psi(j) - \Psi(k)}{j-k} - s \right]^{-1} \\ = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=n} (j-k)^{-1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{l=n} C_{k,l}^n \left[ \lambda \frac{\Psi(l) - \Psi(k)}{l-k} - s \right]^{-1} \quad (48)$$

où

$$C_{k,l}^n = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k, l}}^{j=n} \left[ \frac{\Psi(j) - \Psi(k)}{j-k} - \frac{\Psi(l) - \Psi(k)}{l-k} \right]^{-1} \quad (49)$$

Une autre inversion par rapport à  $s$  nous donne

$$\pi(y, n; t) = -\lambda \frac{\Psi(n-1)\Psi(n-2)\dots\Psi(0)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=n} (j-k)} \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^n C_{k,l}^n \exp \left[ -\lambda \Psi(k)t + \lambda \frac{\Psi(j) - \Psi(k)}{j-k} (y_1 - \overline{n-k}t) \right] H(y_1 - \overline{n-k}t) \quad (50)$$

$\pi(y_1; t)$  est donné par

$$\pi(y_1; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(y_1, n; t) \quad (51)$$

(ii) Les  $\Psi(n)$  sont en progression arithmétique

Soit  $\Psi(n) - \Psi(n-1) = k$ . Alors (40) devient

$$P(s, n; t) = \lambda^n \Psi(n-1)\Psi(n-2)\dots\Psi(0) \int_0^t e^{-sF(a, t_{n-1}) - \lambda \Psi(n)(t-t_{n-1})} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} e^{-sF(a, t_{n-2}) - \lambda \Psi(n-1)(t_{n-1}-t_{n-2})} dt_{n-2} \dots \int_0^{t_1} e^{-sF(a, t_0) - \lambda \Psi(1)(t_1-t_0)} p(s, 0; t) dt_0 \quad (52)$$

où

$$p(s, 0; t_0) = e^{-\lambda \Psi(0)t_0} \quad (53)$$

Donc on peut écrire (52) comme

$$P(s, n; t) = \lambda^n \Psi(n-1)\Psi(n-2)\dots\Psi(0) e^{-\lambda \Psi(n)t} \int_0^t e^{-sF(a, t_{n-1}) + \lambda k t_{n-1}} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} e^{-sF(a, t_{n-2}) + \lambda k t_{n-2}} dt_{n-2} \dots \int_0^{t_1} e^{-sF(a, t_0) + \lambda k t_0} dt_0 = \frac{\lambda^n \Psi(n-1)\Psi(n-2)\dots\Psi(0)}{n!} e^{-\lambda \Psi(n)t} \left[ \int_0^t e^{-sF(a, \tau) + \lambda k \tau} d\tau \right] \quad (54)$$

La transformée de Laplace  $p(s; t)$  de  $\pi(y_m; t)$  est

$$p(s; t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(s, n; t) \quad (55)$$

On peut facilement obtenir les moments de  $y_m$  à partir de (55).

### 5. n (t) REPRÉSENTE UN PROCESSUS PONCTUEL DONT LA "MÉMOIRE" NE S'ÉTEND QUE JUSQU'AU DERNIER POINT RÉALISÉ

Considérons la distribution suivante des points sur l'axe de  $t$  : la probabilité conditionnelle qu'il ne se trouve aucun point entre  $t = t_1$  et  $t = t_2 (t_2 > t_1)$ , étant donné qu'il y a un point aléatoire en  $t = t_1$ , est  $\Phi(t_2 - t_1)$ , et ceci indépendamment de la distribution des points pour  $t < t_1$ . Il a été montré par Ramashrishnan et Mathews (1953) que  $\Phi$  détermine d'une manière unique la distribution des points sur la droite.

Remarquons que  $-\frac{d\Phi(t)}{dt} dt$  représente la probabilité pour que le premier point aléatoire se produise entre  $t$  et  $t + dt$ , étant donné qu'il se trouve un point aléatoire en  $t = 0$ . Nous allons désigner  $-\frac{d\Phi(t)}{dt}$  par  $\omega(t)$ .

La valeur réalisée par l'aléatoire  $\int_0^t \frac{dn(\tau)}{d\tau} F(t, \tau) d\tau$  est

$$\sum_{i=1}^n F(t, t_i)$$

pour la réalisation d'événements aléatoires en  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Le processus d'intégrale n'est pas régénératif, puisque si l'on reporte l'origine en  $t_1$ , on obtient pour valeur de réalisation

$$\sum_{i=2}^n F(t-t_1, t_i-t_1)$$

ce qui ne peut être écrit en fonction de  $\sum_{i=1}^n F(t, t_i)$  d'une manière simple.

Néanmoins, si  $F(t, t_i)$  n'est fonction que de  $t-t_i^*$ , alors les valeurs correspondantes sont

$$\sum_{i=1}^n F(t-t_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^n F(t-t_i)$$

et donc le processus est régénératif, puisque les deux quantités ne diffèrent que par le terme simple  $F(t-t_1)$ . Dans un pareil cas, l'équation intégrale pour  $\pi(y_m; t)$  s'écrit facilement. Par la méthode des points régénératifs, on obtient

$$\pi(y_m; t) = \int_0^t \omega(\tau) \pi(y_m - F(t-\tau); t-\tau) d\tau + \left[ 1 - \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] \omega(y_m) \quad (56)$$

La transformée de Laplace par rapport à  $y_m$  donne

$$p(s; t) = \int_0^t \omega(\tau) e^{-sF(t-\tau)} p(s; t-\tau) d\tau + \left[ 1 - \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] \omega(y_m) \quad (57)$$

On obtient les moments de  $y_m$  en prenant la dérivée des deux termes de (57) par rapport à  $s$ .

\* Ceci est vrai si  $y_m$  satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients constants,  $\frac{dn(\tau)}{d\tau}$  étant le terme non-homogène de l'équation (voir Bartlett, 1955).

**6. UNE ENTRÉE\* x (t) TYPIQUE DU SERVO-MÉCANISME ASSOCIÉ A n (t) COMME DÉFINI DANS LA SECTION 5**

Etudions enfin le processus x(t) associé à n(t) de la section 5 de la manière suivante

$$x(t) = a_i \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (58)$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où les a<sub>i</sub> sont des variables aléatoires indépendantes avec la même distribution χ(a<sub>i</sub>), et où les longueurs d'intervalles t<sub>i+1</sub> - t<sub>i</sub> = l<sub>i</sub> sont, de même, des variables aléatoires indépendantes avec la même d.p. ω(l<sub>i</sub>) d'après la section 5.

Un tel processus stochastique a une grande importance dans l'étude des manoeuvres d'un avion dirigé par le radar (James, Nichols et Phillips, 1947). L'étude de la distribution de

$$y_m(t) = \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} F(t, \tau) d\tau$$

est extrêmement difficile et reste encore à faire. En vue des sauts aléatoires dans x(t) le processus devient non-régénératif même dans le cas spécial où F(t, τ) n'est fonction que de (t-τ), ce qui entraîne l'échec de la technique employée dans la section 5. Nous allons nous borner à la d.p. de y(t) où

y(t) = ∫<sub>0</sub><sup>t</sup> x(τ) dτ. La méthode des points de régénération nous donne

$$\pi(y; t) = \sum \chi(a_i) \int_0^t \pi(y - a_i(t-\tau); t-\tau) \omega(\tau) d\tau + \left[ 1 - \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] \delta(y) \quad (59)$$

Si p(s; t) est la transformée de Laplace de π(y; t), on a

$$p(s; t) = \sum \chi(a_i) \int_0^t p(s; t-\tau) e^{-a_i(t-\tau)s} \omega(\tau) d\tau + \left[ 1 - \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] \quad (60)$$

En principe, (60) détermine p(s; t). Si nous voulons les moments de y, nous pouvons les obtenir en prenant la dérivée par rapport à s des deux membres de (60). Si E{y'(s)} et w̄(s) désignent les transformées de Laplace de E{y'(t)} et de w̄(t) respectivement, nous avons

$$E\{y(\zeta)\} = E\{a\} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta^2 [1-\omega(\zeta)]} \quad (61)$$

$$E\{y^2(\zeta)\} = E\{a^2\} \frac{2\omega(\zeta)}{\zeta^3 [1-\omega(\zeta)]} - \frac{2E\{a\}\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} E\{y(\zeta)\} \quad (62)$$

$$E\{y^3(\zeta)\} = E\{a^3\} \frac{6\omega(\zeta)}{\zeta^4 [1-\omega(\zeta)]} - \frac{3E\{a\}\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} E\{y^2(\zeta)\} + 3E\{a^2\} \frac{\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)} \frac{d^2}{d\zeta^2} E\{y(\zeta)\} \quad (63)$$

(\*) Input.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Ramakrishnan, Alladi, A. Proc. Kon. Ned. Acad. Van. Wet. 58, 1955, 470.
2. Ramakrishnan, Alladi, B et C. Proc. Kon. Ned. Acad. Van. Wet. (1956) (in press)
3. Ramakrishnan, Alladi. Proc. Camb. Phil. Soc. 49 (1953), 473.
4. Ramakrishnan, Alladi and Mathews, P.M. - Phil. Mag. 44 (1953), 1122.
5. Bartlett, M.S. Stochastic processes (1953) (Cambridge)
6. James, H.M., Nichols, N.B., Theory of Servo-mechanisms (1947, and Philips, R.S. McGraw Hill, London)

## APPENDICE

Considérons la variable aléatoire  $y_m(t)$ , comme définie par (6) où  $n(\tau)$  représente un processus de Furry. On remarque, d'abord, que si la durée de l'intervalle s'étend jusqu'à  $t$ , nous associons la fonction  $F(t, t_i)$  au point aléatoire à  $t_i$ . Donc la variable aléatoire est la somme de ces fonctions.

La probabilité composée pour que le premier évènement aléatoire se produise entre  $\tau_1$  et  $\tau_1 + d\tau_1$ , le deuxième entre  $\tau_2$  et  $\tau_2 + d\tau_2, \dots$ , la  $n$ ème entre  $\tau_n$  et  $\tau_n + d\tau_n$ , et qu'aucun autre évènement ne se produise jusqu'à  $t$  s'écrit

$$n! \lambda^n \exp \left[ -\lambda \tau_1 - 2\lambda (\tau_2 - \tau_1) - \dots - n\lambda (\tau_n - \tau_{n-1}) - (n+1)\lambda (t - \tau_n) \right] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n.$$

Si  $\pi(y_m, n; t)$  est la d.p. simultanée de  $y_m$  et de  $n$ , alors  $\pi$  satisfait à l'équation

$$\pi(y_m, n; t) = \lambda^n n! \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 \dots \int_{\tau_{n-1}}^t \exp \left[ -\lambda \tau_1 - 2\lambda (\tau_2 - \tau_1) - \dots - (n+1)\lambda (t - \tau_n) \right] \cdot \delta(y_m - \sum_{i=1}^n F(t, \tau_i)) d\tau_n \quad (A-1)$$

Donc la transformée de Laplace  $p(s, n; t)$  de  $\pi(y_m, n; t)$  s'écrit

$$p(s, n; t) = \lambda^n n! \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 \dots \int_{\tau_{n-1}}^t \exp \left[ -\lambda(n+1)t + \sum_{i=1}^n \{\lambda \tau_i - sF(t, \tau_i)\} \right] d\tau_n \quad (A-2)$$

c'est-à-dire

$$p(s, n; t) = e^{-\lambda t} \left[ \lambda \int_0^t \exp \{ -\lambda(t-\tau) - sF(t, \tau) \} d\tau \right]^n \quad (A-3)$$

La transformée de Laplace  $p(s; t)$  de  $\pi(y_m; t)$  est donnée par :

$$p(s; t) = \sum_{n=0}^{\infty} p(s, n; t) = e^{-\lambda t} \left[ 1 - \lambda \int_0^t \exp \{ -\lambda(t-\tau) - sF(t, \tau) \} d\tau \right]^{-1} \quad (A-4)$$

ce qui concorde bien avec l'expression (15).