



HAL
open science

Analycité et périodicité des fonctions caractéristiques

M. Girault

► **To cite this version:**

M. Girault. Analycité et périodicité des fonctions caractéristiques. Annales de l'ISUP, 1956, V (2), pp.91-94. hal-04095369

HAL Id: hal-04095369

<https://hal.science/hal-04095369>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ANALYCITÉ ET PERIODICITÉ DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES

par

M. GIRAULT

Le but de cette note est d'indiquer quelques particularités qui peuvent se présenter concernant les propriétés d'analycité et de périodicité des fonctions caractéristiques (f.c.).

Rappelons brièvement les résultats connus de cette question :

Soit $\varphi_x(Z)$ la f. c. associée à la variable aléatoire X de fonction de répartition $F(x)$

$$\varphi_x(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iZx} dF(x)$$

Cette intégrale est absolument convergente pour Z réel et définit alors une fonction continue de Z . L'intégrale peut exister pour Z complexe = $t + iy$.

a) Pour $t = 0$

$$\varphi_{(iy)} = \int e^{-xy} dF(x)$$

Cette intégrale est convergente en général lorsque y est dans un intervalle contenant l'origine.

Soit : $y' < y < y''$. Elle définit une fonction réelle analytique de y .

b) Si y_0 est une valeur de l'intervalle de convergence précédemment défini :

$$\varphi_{(t,y_0)} = \int e^{itx} e^{-y_0x} dF(x)$$

où $e^{-y_0x} dF(x)$ est la différentielle d'une fonction non décroissante à variation bornée. Donc $\varphi_{(t,y_0)}$ est, par rapport à la variable t une fonction caractéristique à un facteur positif près et par suite :

$$|\varphi_{(t,y_0)}| \leq \varphi_{(0,y_0)}$$

Ce résultat implique que l'intégrale qui définit $\varphi_{(t,y)}$ est convergente dans toute la bande

$y' < I_{(Z)} < y''$ où $I_{(Z)}$ est la partie imaginaire pure de Z .

La fonction ainsi définie est analytique dans cette bande ($y'y''$).

J'ai démontré (1) (thèse p. 239) que dans l'intervalle $y'y''$ de l'axe des y la fonction $\varphi(y)$ est convexe :

$$\text{si } y' < y_1 < y_2 < y_3 < y'' \quad \text{avec } \frac{y_1 + y_3}{2} = y_2$$

$$\text{On a : } \frac{\varphi(y_1) + \varphi(y_3)}{2} \geq \varphi(y_2)$$

L'égalité n'étant réalisée que pour $\varphi \equiv 1$.

L'ensemble des propriétés précédentes permet d'étudier la périodicité de $\varphi(Z)$ dans la bande de convergence. J'ai démontré (1) que la seule période possible de $\varphi(Z)$ est une période réelle. Pour que θ soit période, il faut et il suffit que la distribution de probabilité soit une distribution de treillis $\left(0, \frac{2\pi}{\theta}\right)$, c'est-à-dire que X soit presque certainement égal à l'une des valeurs : $0, \pm \frac{2\pi}{\theta}; \dots \pm n \frac{2\pi}{\theta} \dots$

A ces résultats ajoutons les remarques suivantes :

I. REMARQUES SUR LE DOMAINE D'ANALYCITE OU BANDE DE CONVERGENCE

Bien entendu, y' ou y'' ou les deux à la fois peuvent être infinis et la bande de convergence devient un demi plan ou le plan; elle peut aussi se réduire au seul axe réel (c'est le cas de la loi de Cauchy).

En général, la fonction devient infinie en certains points au moins des limites; mais il est intéressant de signaler que $\varphi(Z)$ peut être bornée dans tout le domaine de convergence.

Exemple :

$$\varphi(Z) = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n$$

C'est bien une f. c. car on lit sur ce développement qu'elle est associée à la distribution de masses $\frac{1}{2^n n^2}$ en $x = n$

où k est défini par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{1}{k}$

Pour Z imaginaire pur, égal à iy , on a :

$$\varphi(iy) = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{e^{-y}}{2}\right)^n$$

(1) Les fonctions caractéristiques et leurs transformations - Publications ISUP

série convergente pour $\left| \frac{e^{-y}}{2} \right| \leq 1$. Soit pour $y \geq -\log 2$ le domaine de convergence est le demi-plan $\text{I}(Z) \geq -\log 2$. Or dans tout le domaine y compris sa frontière $\varphi(Z)$ est une fonction bornée.

II. REMARQUES SUR LA PÉRIODICITÉ

Si $\varphi(Z)$ ne peut pas avoir de période complexe dans son domaine de convergence défini plus haut, il peut toutefois arriver que $\varphi(Z)$ puisse être défini dans l'ensemble du plan complexe sauf en certains points singuliers ou en certaines lignes singulières et que la fonction étudiée dans l'ensemble du plan complexe, admette une période complexe.

Un exemple simple est donné par $\varphi(Z) = \frac{1}{\text{ch}Z}$

C'est une fonction caractéristique. Elle est associée à une distribution continue admettant d'ailleurs pour densité la même expression analytique :

$$f(x) = \frac{1}{2 \text{ch} \frac{\pi x}{2}} \quad \text{or pour } Z = iy \text{ on a } \varphi(iy) = \frac{1}{\cos y}$$

la bande de convergence est limitée par $y' = -i\frac{\pi}{2}$ et $y'' = i\frac{\pi}{2}$

et la fonction admet la période imaginaire pure $2i\pi$.

EXEMPLE DE FONCTION CARACTÉRISTIQUE ELLIPTIQUE

On peut même avoir des fonctions caractéristiques doublement périodiques dans l'ensemble de leur domaine de définition.

Ainsi soit :

$$\Phi(Z) = \prod \frac{1 - k^n}{1 + k^n} \frac{1 + k^n e^{iz}}{1 - k^n e^{iz}} \quad (1)$$

où le produit est étendu à toutes les valeurs impaires de n de $-\infty$ à $+\infty$

Remarquons tout d'abord que :

$$P(u) = \prod \frac{1 - k^n}{1 + k^n} \frac{1 + k^n u}{1 - k^n u} \quad (2)$$

est un produit convergent pour k positif différent de 1 et pour $u \neq k^{2n-1}$ (n entier positif ou négatif).

En effet, supposons par exemple $0 < k < 1$, pour $n > 0$ le terme général du produit infini a pour logarithme :

$$\log \frac{1 - k^n}{1 + k^n} \frac{1 + k^n u}{1 - k^n u} \sim 2 k^n (u-1) \quad \underline{n \text{ impair} > 0}$$

et pour $n < 0$ $n' = -n$

$$\log \frac{1 - k^{n'}}{1 + k^{n'}} \frac{1 + k^{n'} u^{-1}}{1 - k^{n'} u^{-1}} \sim 2 k^{n'} (u^{-1} - 1) \quad \underline{n' \text{ impair} > 0}$$

La fonction $P(u)$ est une fonction loxodromique qui réalise :

$$P(k^4 u) \equiv P(u)$$

La fonction $\Phi(Z)$ admet donc la période imaginaire pure $iy = 4i \log k$ mais elle admet aussi la période réelle $t = 2\pi$

$\Phi(Z)$ est une fonction caractéristique analytique dans la bande :

($y' = -\log k$ $y'' = +\log k$) car c'est le produit des fonctions :

$$\varphi_n(Z) = \frac{1 - k^n}{1 + k^n} \frac{1 + k^n e^{iZ}}{1 - k^n e^{iZ}}$$

pour toutes les valeurs impaires positives et négatives de n .

Pour $n \geq 0$

$$\varphi_n(Z) = \frac{1 - k^n}{1 + k^n} \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} k^{pn} e^{piZ} \right)$$

Et pour $n = -n' < 0$

$$\varphi_n(Z) = \frac{1 - k^{n'}}{1 + k^{n'}} \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} k^{pn'} e^{-piZ} \right)$$

Ces développements indiquent les distributions de probabilité correspondantes.

BIBLIOGRAPHIE

- GIRAULT. M. : "Les fonctions caractéristiques et leurs transformations"
p. 237 - Pub. de l'Institut de Statistique - Volume IV
fasc. 4.
- LUKACS. E. : "On certain Periodic Characteristic Functions"
Proceedings of the International Congress of Mathematicians".
Amsterdam 1954 - Volume II p. 296.