



HAL
open science

Problèmes de dépouillements

P. Dufresne

► **To cite this version:**

| P. Dufresne. Problèmes de dépouillements. Annales de l'ISUP, 1956, V (2), pp.75-89. hal-04095362

HAL Id: hal-04095362

<https://hal.science/hal-04095362>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

PROBLÈMES DE DÉPOUILLEMENTS

par

P. DUFRESNE

NOUVELLE EXTENSION DU PROBLÈME DE SCRUTIN

Probabilité pour que le nombre des bulletins extraits au nom d'un candidat soit constamment supérieur à k fois le nombre des bulletins extraits au nom d'un autre candidat.

Nous nous proposons de rechercher la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins extraits portant le nom du candidat A soit constamment supérieur à k fois le nombre des bulletins extraits portant le nom du candidat B.

Le problème n'a un sens que si k est un nombre positif, nous sous-entendons toujours cette condition. Nous garderons les notations $a, b, N(a, b)$ avec les mêmes sens que précédemment.

Je désignerai par $N(a, b)A > kB$ le nombre des différents dépouillements qu'il est possible de constituer avec a bulletins A et b bulletins B et dans lesquels le nombre des bulletins extraits au nom de A est toujours supérieur à k fois le nombre des bulletins extraits au nom de B

et par $P(a, b)A > kB$ la probabilité cherchée.

Conséquence immédiate des définitions :

$$P(a, b)A > kB = \frac{N(a, b)A > kB}{\frac{(a+b)!}{a! b!}}$$

Lemme : Si $a + b > 1$ et $a > kb$

$$N(a, b)A > kB = N(a-1)A > kB + N(a, b-1)A > kB$$

La démonstration est identique à celle des lemmes précédents.

Théorème : Si $a \geq kb$ et si k est un nombre entier $N(a, b)A > B = \frac{a-kb}{a+b} \frac{(a+b)!}{a! b!}$

Si $a < kb$ il est clair que $N(a, b)A > kB = 0$, la formule donnerait un résultat négatif donc absurde.

Si $a = kb$ il est encore clair que $N(a, b)A > kB = 0$ la formule proposée donne bien un résultat nul.

Nous supposons $a > kb$

La proposition est exacte pour $\theta = 1$; en effet, en vertu de l'hypothèse $a > kb$ le seul bulletin existant ne peut être qu'un bulletin A, il y a donc un dépouillement favorable et un seul, résultat qui serait donné par la formule.

Nous emploierons un mode de raisonnement par récurrence et nous établirons que la proposition est exacte lorsque le nombre des bulletins est θ_λ si elle est exacte lorsque le nombre des bulletins est $\theta_\lambda - 1$

En vertu du lemme :

$$N(a_\lambda, b_\lambda)A > kB = N(a_\lambda - 1, b_\lambda)A > kB + N(a_\lambda, b_\lambda - 1)A > kB$$

et en supposant la proposition exacte lorsque $\theta = \theta_\lambda - 1$

$$N(a_\lambda - 1, b_\lambda) = \frac{a_\lambda - kb_\lambda - 1}{a_\lambda + b_\lambda - 1} \frac{(a_\lambda + b_\lambda - 1)}{(a_\lambda - 1)! b!}$$

(du fait que $a_1 > kb$, il en résulte forcément que $a_1 \geq kb_1 + 1$)

$$N(a_1, b_1 - 1)A > kB = \frac{a_1 - kb_1 + k}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{a_1! (b_1 - 1)!}$$

donc

$$\begin{aligned} N(a_1, b_1)A > kB &= \frac{a_1 - kb_1 - 1}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{(a_1 - 1)! b_1!} + \frac{a_1 - kb_1 + k}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{a_1! (b_1 - 1)!} \\ &= \left(\frac{a_1 - kb_1 - 1}{a_1 + b_1 - 1} \frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_1 - kb_1 + k}{a_1 + b_1 - 1} \frac{b_1}{a_1 + b_1} \right) \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!} \\ &= \frac{(a_1 - kb_1)a_1 - a_1 + (a_1 - kb_1)b_1 + kb_1}{(a_1 + b_1 - 1)(a_1 + b_1)} \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!} \\ &= \frac{a_1 - kb_1}{a_1 + b_1} \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!} \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème : Si $a \geq kb$ et si k est un nombre (positif) quelconque $\frac{a - kb}{a + b} \frac{(a+b)!}{a! b!} \leq N(a, b)A > kB \leq \frac{a - jb}{a + b} \frac{(a+b)!}{a! b!}$ j désignant un nombre entier immédiatement inférieur à k .

Il est clair que $N(a, b)A > kB \leq N(a, b)A > jB$ or,

$$N(a, b) > jB = \frac{a - jb}{a + b} \frac{(a+b)!}{a! b!}$$

donc

$$N(a, b)A > kB \leq \frac{a - jb}{a + b} \frac{(a+b)!}{a! b!}$$

Il reste à démontrer que

$$\frac{a - kb}{a + b} \frac{(a+b)!}{a! b!} \leq N(a, b)A > kB$$

il suffit de le faire pour $a > kb$ car lorsque $a = kb$, k est obligatoirement un nombre entier et le cas a été traité précédemment.

Nous supposons donc $a > kb$

Nous emploierons un raisonnement par récurrence :

Nous constatons d'abord que la relation est exacte pour la plus petite valeur possible de θ c'est-à-dire pour $\theta = 1$. En vertu de l'hypothèse $a > kb$ le seul bulletin existant ne peut être qu'un bulletin A ; il y a donc un dépouillement favorable possible et c'est le résultat qui serait donné par la formule.

Nous établirons que la proposition est exacte lorsque le nombre des bulletins est θ , si elle est exacte lorsque le nombre des bulletins est $\theta - 1$. Deux cas sont à considérer :

1°) $a_1 \geq kb + 1$ (ou $a_1 - 1 \geq kb_1$)

en supposant la relation exacte pour $\theta = \theta_1 - 1$, on obtient :

$$N(a_1, b_1 - 1)A > B \geq \frac{a_1 - kb_1 + 1}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{a_1! (b_1 - 1)!}$$

$$N(a_1 - 1, b_1)A > B \geq \frac{a_1 - kb_1 - 1}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{(a_1 - 1)! b_1!}$$

et comme en vertu du lemme :

$$N(a_1, b_1)A > kB = N(a_1, b_1 - 1)A > kB + N(a_1 - 1, b_1)A > kB$$

$$N(a_1, b_1)A > kB \geq \frac{a_1 - kb_1}{a_1 + b_1} \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!}$$

suivant un calcul déjà effectué

2°) $a_1 < kb_1 + 1$ (ou $a_1 - 1 < kb_1$)

Il est clair que $N(a_1 - 1, b_1)A > kB = 0$

donc en vertu du lemme,

$$N(a_1, b_1)A > kB = N(a_1, b_1 - 1)A > kB$$

et, en supposant la proposition exacte pour $\theta = \theta_1 - 1$

$$N(a_1, b_1)A > kB = N(a_1, b_1 - 1)A > kB \geq \frac{a_1 - kb_1 + k}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{a_1! (b_1 - 1)!}$$

mais, il a été établi précédemment que :

$$\frac{a_1 - kb_1 + k}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{a_1! (b_1 - 1)!} + \frac{a_1 - kb_1 - 1}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{(a_1 - 1)! b_1!} = \frac{a_1 - kb_1}{a_1 + b_1} \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!}$$

et comme $a_1 - kb_1 - 1$ est négatif

$$\frac{a_1 - kb_1 + 1}{a_1 + b_1 - 1} \frac{(a_1 + b_1 - 1)!}{a_1! (b_1 - 1)!} \geq \frac{a_1 - kb_1}{a_1 + b_1} \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!}$$

d'où il résulte que

$$N(a_1, b_1)A > kB \geq \frac{a_1 - kb_1}{a_1 + b_1} \frac{(a_1 + b_1)!}{a_1! b_1!}$$

Théorème : Si $a \geq kb$ si k est un nombre entier

$$P(a, b)A > kB = \frac{a - kb}{a + b}$$

Si $a \geq kb$ et si k est un nombre quelconque (positif)

$$\frac{a - kb}{a + b} \leq P(a, b)A > kB \leq \frac{a - kb}{a + b}$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1					
4	1	1				
5	1	2				
6	1	3				
7	1	4	3			
8	1	5	7			
9	1	6	12			
10	1	7	18	12		
11	1	8	25	30		
12	1	9	33	55		
13	1	10	42	88	55	

Ce tableau donne, en fonction de θ et de b les valeurs de $N(a, b)A > 2B$

On sait que si $a \geq 2b$

$$N(a, b)A > 2B = \frac{a - 2b}{a + b} \frac{(a + b)!}{a! b!}$$

pour $\theta = 11, a = 9, b = 2$

$$N = \frac{5}{11} \frac{11!}{9! 2!} = 25$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	2	1							
4	1	3	3	1						
5	1	4	6	4						
6	1	5	10	10	4					
7	1	6	15	20	14	4				
8	1	7	21	35	34	18	4			
9	1	8	28	56	69	52	22	4		
10	1	9	36	84	125	121	74	26		
11	1	10	45	120	209	246	195	100	26	
12	1	11	55	165	329	455	441	295	126	26

Ce tableau donne en fonction de θ et de b les valeurs de $N(a, b)A > B/4$.

On sait que si $a \geq kb$

$$\frac{a-kb}{a+b} \frac{(a+b)!}{a!b!} \leq N(a, b)A > kB \leq \frac{a-jb}{a+b} \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

et comme ici $k = \frac{1}{4}$ et $j = 0$

$$\frac{a-b/4}{a+b} \frac{(a+b)!}{a!b!} \leq N(a, b)A > \frac{B}{4} \leq \frac{a}{a+b} \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

ainsi pour $\theta = 11, a = b, b = 5$

$$\frac{19}{44} \frac{11!}{6!5!} \leq N(6, 5)A > \frac{B}{4} \leq \frac{24}{44} \frac{11!}{6!5!}$$

$$199,5 \leq N(6, 5)A > B/4 \leq 252$$

en réalité $N(6, 5)A > \frac{B}{4} = 246$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2				
3	1	3				
4	1	4				
5	1	5	4			
6	1	6	9			
7	1	7	15			
8	1	8	22			
9	1	9	30	22		
10	1	10	39	52		
11	1	11	49	91		

Ce tableau donne en fonction de θ et de b les valeurs de $N(a, b)A > 3B-4$ c'est-à-dire les nombres des différents dépouillements qu'il est possible de constituer avec a bulletins A et b bulletins B et dans lesquels à tout moment le nombre des bulletins A extraits est à quatre unités près constamment supérieur à trois fois le nombre des bulletins B extraits.

Il est facile de démontrer que si $a \geq 3b-4$ et b différent de zéro

$$N(a, b)A > 3B-4 = \frac{a+4-3b}{a+4+b} \frac{(a+b+4)!}{(A+4)3!}$$

ainsi pour $\theta = 11, a = 8, b = 3$.

$$N(a, b)A > 3B-4 = \frac{3}{15} \frac{15!}{12!3!} = 91$$

LA MÉTHODE DES CASSES D'ENTRÉE

Contrairement à la méthode des erreurs qui permet la recherche de nouvelles formules, la méthode des cases d'entrée est seulement un moyen de vérification de formules déjà établies censées donner en fonction de paramètres, θ et b par exemple, les nombres des dépouillements satisfaisant toujours telle condition déterminée ou tel ensemble de conditions déterminées.

Encore est-il nécessaire que ces formules ne soient pas quelconques mais qu'elles se présentent comme des sommes algébriques de termes de la forme

$$\pm \frac{(\theta-1)!}{(b+k)!(\theta-b-k-1)!}$$

(ou encore de la forme : $\frac{\theta!}{(b+k)!(\theta-b-k)!}$ ce qui revient au même puisque :

$$\frac{\theta!}{(b+k)!(\theta-b-k)!} = \frac{(\theta-1)!}{(b+k)!(\theta-b-k-1)!} + \frac{(\theta-1)!}{(b+k-1)!(\theta-b-k)!}$$

Nous savons que les nombres de dépouillements qui satisfont toujours une condition déterminée ou un ensemble de conditions déterminées peuvent être calculés de proche en proche à partir d'un nombre générateur : on établit un tableau en fonction de deux paramètres θ et b par exemple, on détermine les cases de ce tableau qui correspondent à des couples de valeurs de θ et de b satisfaisant aux conditions imposées (nous appellerons surface intérieure la surface de l'ensemble de ces cases, le reste du tableau formant la surface extérieure), on détermine le ou les nombres générateurs (qui ne peuvent être que les nombres 1 placés dans les cases $\theta = 1, b = 0$ et $\theta = 1, b = 1$) enfin on calcule les nombres des dépouillements favorables pour les différentes valeurs possibles de θ et de b à partir des résultats de la ligne précédente.

Il nous est toujours possible de composer un deuxième tableau donnant en fonction des paramètres θ et b les valeurs d'une expression qui serait la somme algébrique de termes de la forme

$$\frac{(\theta-1)!}{(b+k)!(\theta-b-k-1)!} \text{ ou de la forme : } - \frac{(\theta-1)!}{(b+k)!(\theta-b-k-1)!}$$

En effet les valeurs de chacun de ces termes (pour les différentes valeurs de θ et de b) sont celles d'un triangle de Pascal dont le nombre générateur est le nombre 1 ou le nombre -1 placé dans la case $\theta = 1, b = -k$. Il suffirait donc de reproduire un certain nombre de triangles de Pascal dont les nombres générateurs (+1 ou -1) sont tous placés sur la ligne $\theta = 1$ et dans des colonnes dépendant des différentes valeurs de k et de faire le total des nombres qui tombent dans les mêmes cases. Il sera encore plus simple, après avoir inscrit sur la ligne $\theta = 1$ les nombres générateurs des différents triangles de calculer les nombres des autres lignes en commençant par celles qui correspondent aux plus petites valeurs de θ , un nombre d'une case étant la somme des deux nombres situés sur la ligne supérieure l'un dans la même colonne et l'autre dans la colonne immédiatement à gauche.

Sur ce deuxième tableau, nous distinguerons encore une surface intérieure composée exactement des mêmes cases que celles de la surface intérieure du premier tableau et une ou plusieurs surfaces extérieures composées des autres cases.

Il s'agit d'examiner si les nombres placés dans les surfaces intérieures des deux tableaux sont identiques.

Cela se produira lorsque les deux conditions suivantes seront remplies.

- 1°) Les nombres générateurs situés dans les surfaces intérieures des deux tableaux sont identiques et placés dans les mêmes cases.
- 2°) Aucun nombre de la surface extérieure du deuxième tableau n'entre en ligne de compte pour le calcul d'un nombre de la surface intérieure du même tableau.

Revenons sur ces deux conditions :

Première condition : identité des nombres générateurs situés dans les surfaces intérieures.

Les nombres générateurs du premier tableau sont déterminés directement ; trois solutions à envisager selon que pour $\theta = 1$ les deux dépouillements possibles (celui qui correspond à $b = 0$ et celui qui correspond à $b = 1$) satisfont aux conditions imposées ou qu'un seul de ces dépouillements y satisfait.

Or, le nombre 1 situé dans la case $\theta = 1, b = 0$ est le nombre générateur du triangle de Pascal représentatif de l'expression

$$\frac{(\theta-1)!}{b!(\theta-b-1)!}$$

Le nombre 1 situé dans la case $\theta = 1, b = 1$ est le nombre générateur du triangle de Pascal représentatif de l'expression :

$$\frac{(\theta-1)!}{(b-1)!(\theta-b)!}$$

Conclusion : la première condition est vérifiée :

a) si les deux dépouillements ($\theta = 1, b = 0$ et $\theta = 1, b = 1$) sont compatibles avec les conditions imposées et que la formule proposée contient à la fois

les deux termes $\frac{(\theta-1)!}{b!(\theta-b-1)!}$ et $\frac{(\theta-1)!}{(b-1)!(\theta-b)!}$ ou ce qui revient au même, le terme $\frac{\theta!}{b!(\theta-b)!}$

b) Si seul le dépouillement $\theta = 1, b = 0$ est compatible et que la formule proposée contient le terme : $\frac{(\theta-1)!}{b!(\theta-b-1)!}$

c) Si seul le dépouillement $\theta = 1, b = 1$ est compatible et que la formule proposée contient le terme : $\frac{(\theta-1)!}{(b-1)!(\theta-b)!}$

Deuxième condition : les nombres de la surface extérieure sont sans influence sur ceux de la surface intérieure (deuxième tableau).

Il est facile de déterminer les cases de la surface extérieure dont les nombres entrent directement dans le calcul de ceux de la surface intérieure.

Ce sont celles qui sont situées sur une ligne supérieure immédiatement au-dessus ou immédiatement à gauche des cases appartenant à la surface intérieure.

Nous les appellerons des cases d'entrée - d'où le nom de la méthode - car ce sont elles qui donnent accès à la surface intérieure.

Pour que la deuxième condition soit remplie il importe que les nombres à inscrire dans ces cases soient systématiquement nuls.

Nouvelle démonstration de la formule :

$$N_{A > B-m} = \frac{(a+b)!}{a! b!} - \frac{(a+b)!}{(a+m)! (b-m)!}$$

Cette formule a été établie dans les hypothèses suivantes que nous conserverons : $b \geq m \geq 1$ et $a \geq b-m$.

Nous n'examinerons pas le cas $b=m=1$ nous supposons donc $m > 1$.

Etablissement du premier tableau. Pour $\theta = 1$, les deux dépouillements possibles : un objet de la famille A ou un objet de la famille B sont favorables. Il y aura donc deux nombres générateurs : les nombres 1 placés dans les cases $\theta = 1, b = 0$ et $\theta = 1, b = 1$.

Aucune difficulté pour tracer la ligne de démarcation entre la surface intérieure et la surface extérieure : d'un côté de cette ligne seront les cases pour lesquelles $a > b-m$ ou $\theta > 2b-m$, de l'autre côté les autres cases.

TABLEAU 1
donnant en fonction de θ et de b
les valeurs de $N(a, b)_{A > B-4}$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4			
5	1	5	10	10	4		
6	1	6	15	20	14		
7	1	7	21	35	34	14	
8	1	8	28	56	69	48	
9	1	9	36	84	125	117	48
10	1	10	45	120	209	242	165

TABLEAU 2
 donnant en fonction de θ et de b les valeurs
 de la somme $\frac{\theta!}{a! b!} - \frac{\theta!}{(a+4)! (b-4)!}$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1			-1	-1			
2	1	2	1		-1	-2	-1		
3	1	3	3	1	-1	-3	-3	-1	
4	1	4	6	4	0	-4	-6	-4	-1
5	1	5	10	10	4	-4	-10	-10	-5
6	1	6	15	20	14	0	-14	-20	-15
7	1	7	21	35	34	14	-14	-34	-35
8	1	8	28	56	69	48	0	-48	-69
9	1	9	36	84	125	117	48	-48	-69
10	1	10	45	120	209	242	165	0	-165

Etablissement du deuxième tableau : nous reproduisons la ligne de démarcation entre la surface intérieure et la surface extérieure. Nous inscrivons les nombres générateurs de $\frac{(a+b)!}{a! b!}$

Ce sont les nombres 1 qui tombent dans les cases $\theta = 1, b = 0$ et $\theta = 1, b = 1$ et de $-\frac{(a+b)!}{(a+m)! (b-m)!}$

Ce sont les nombres -1 qui tombent dans les cases $\theta = 1, b = m$ et $\theta = 1, b = m+1$.

Les nombres générateurs tombant dans les surfaces intérieures des deux tableaux sont identiques, la première condition est donc remplie.

Soient θ_λ et b_λ les indices d'une case d'entrée.

Deux cas sont à considérer :

- le nombre influencé de la surface intérieure se trouve immédiatement en-dessous et ses indices sont $\theta_\lambda + 1$ et b_λ .
- le nombre influencé de la surface intérieure se trouve sur la ligne suivante et dans la colonne de droite et ses indices sont $\theta_\lambda + 1$ et $b_\lambda + 1$.

mais, ce dernier cas ne peut se produire : en effet θ et b étant les indices d'une case de la surface extérieure

$$\theta_\lambda \leq 2b_\lambda - m$$

et cette inégalité est incompatible avec l'inégalité

$$\theta_\lambda + 1 > 2b_\lambda - m + 2$$

qui résulterait du fait que $\theta_\lambda + 1$ et $b + 1$ seraient les indices d'une case de la surface intérieure.

Reste le premier cas :

Nous avons toujours $\theta_\lambda \leq 2b_\lambda - m$

et en outre $\theta_\lambda + 1 > 2b_\lambda - m$

puisque $\theta_\lambda + 1$ et b_λ sont les indices d'une case de la surface intérieure.

Pour que ces deux inégalités soient vérifiées il est nécessaire que $\theta_\lambda = 2b_\lambda - m$ ou ce qui revient au même $a_\lambda = b_\lambda - m$

Mais si $a = b - m$ la différence : $\frac{(a_\lambda + b_\lambda)!}{a_\lambda! b_\lambda!} - \frac{(a_\lambda + b_\lambda)!}{(a_\lambda + m)! (b_\lambda - m)!}$ est nulle

Les cases d'entrée ne contiennent donc que des nombres nuls ce qui vérifie la deuxième condition.

Nouvelle démonstration de la formule

$$N(a, b) \begin{cases} A > B - m \\ B > A - r = \frac{(a+b)!}{a! b!} - S(a, b) + T(a, b) - U(a, b) + V(a, b) \end{cases}$$

Cette formule a été établie dans les hypothèses suivantes que nous conserverons : $a \geq b - m$, $b \geq a - r$, $m \geq 1$ et $r \geq 1$.

Etablissement du premier tableau. Pour $\theta = 1$ les deux dépouillements possibles : un objet de la famille A ou un objet de la famille B sont favorables et il y aura deux nombres générateurs : les nombres 1 placés dans les cases $\theta = 1$, $b = 0$ et $\theta = 1$, $b = 1$. Il n'y a d'exception que si $m = 1$ auquel cas le nombre générateur est le nombre 1 placé dans la case $\theta = 1$, $b = 0$ et si $r = 1$ auquel cas le nombre générateur est le nombre 1 placé dans la case $\theta = 1$, $b = 1$. Si $m = r = 1$ il n'y a pas de dépouillement favorable donc aucun nombre générateur.

Aucune difficulté pour tracer les lignes de démarcation entre la surface intérieure et les deux surfaces extérieures ; une ligne marquera la séparation entre les cases pour lesquelles $a > b - m$ ou $\theta > 2b - m$ et les autres cases ; une autre ligne marquera la séparation entre les cases pour lesquelles $b > a - r$ ou $\theta > 2a - r$ et les autres cases. La surface intérieure sera comprise entre ces deux lignes, les surfaces extérieures de part et d'autre.

Etablissement du deuxième tableau. Nous reproduirons les lignes de démarcation entre la surface intérieure et les surfaces extérieures.

Nous inscrivons les nombres générateurs de $\frac{(a+b)!}{a! b!}$ ce sont les nombres 1 qui tombent dans les cases $\theta = 1$, $b = 0$ et $\theta = 1$, $b = 1$ ainsi que les nombres générateurs de tous les autres termes qui sont de la forme : plus

ou moins $\frac{(a+b)!}{(a+h)! (b-h)!}$

Ce sont les nombres 1 ou -1 qui sont à inscrire dans les cases : $\theta = 1$, $b = h$ et $\theta = 1$, $b = h + 1$.

Nous remarquerons que les nombres générateurs de $\frac{(a+b)!}{a! b!}$ sont tous les deux dans la surface intérieure sauf si $m = 1$ ou le seul nombre géné-

rateur tombant dans la surface intérieure est celui de la case $\theta = 1, b = 0$ et si $r = 1$ ou le seul nombre générateur tombant dans la surface intérieure est celui de la case $\theta = 1, b = 1$. Si $n = r = 1$ il n'y a pas de surface intérieure.

Il y a donc identité entre les nombres générateurs tombant dans les surfaces intérieures des deux tableaux, la première condition est donc remplie.

Un raisonnement identique à celui qui a été fait pour la démonstration précédente montrerait que les cases d'entrée sont celles pour lesquelles les indices θ, b, a représentent entre eux une des relations suivantes :

soit $a = b - m$ qui peut s'écrire $\theta = 2b - m$
 soit $b = a - r$ qui peut s'écrire $\theta = 2a - r$

Mais si $a = b - m$ la somme $\frac{(a+b)!}{a!b!} - S(a,b) + T(a,b) - U(a,b) + V(a,b)$ est nulle car :

$$T(b-m, b) = U(b-m, b)$$

$$\text{et } S(b-m, b) = \frac{(2b-m)!}{(b-m)!b!} + V(b-m, b)$$

cette somme, pour des raisons analogues est encore nulle si $b = a - r$.

Les cases d'entrée ne contiennent donc que des nombres nuls ce qui vérifie la deuxième condition.

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1								
2		2	1							
3		2	3	1						
4			5	4						
5			5	9	4					
6				14	13					
7				14	27	13				
8					41	40				
9					41	81	40			
10						122	121			
11						122	243	121		
12							365	364		
13							365	729	364	
14								1094	1093	

TABLEAU 1
 donnant en fonction
 de θ et de b
 les valeurs de
 $N(a,b) \begin{cases} A > B-4 \\ B > A-2 \end{cases}$

θ \ b	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-1	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-1	-1	1	1			-1	-1	1	1			-1	-1	1	1			-1	-1	1	1		
2	-1	-2	0	2	1		-1	-2	0	2	1		-1	-2	0	2	1		-1	-2	0	2	1	
3	-1	-3	-2	2	3	1	-1	-3	-2	2	3	1	-1	-3	-2	2	3	1	-1	-3	-2	2	3	1
4	0	-4	-5	0	5	4	0	-4	-5	0	5	4	0	-4	-5	0	5	4	0	-4	-5	0	5	4
5	4	-4	-9	-5	5	9	4	-4	-9	-5	5	9	4	-4	-9	-5	5	9	4	-4	-9	-5	5	9
6	13	0	-13	-14	0	14	13	0	-13	-14	0	14	13	0	-13	-14	0	14	13	0	-13	-14	0	14
7	27	13	-13	-27	-14	14	27	13	-13	-27	-14	14	27	13	-13	-27	-14	14	27	13	-13	-27	-14	14
8	41	40	0	-40	-41	0	41	40	0	-40	-41	0	41	40	0	-40	-41	0	41	40	0	-40	-41	0
9	41	81	40	-40	-81	-41	41	81	40	-40	-81	-41	41	81	40	-40	-81	-41	41	81	40	-40	-81	-41
10	0	122	121	0	-121	-122	0	122	121	0	-121	-122	0	122	121	0	-121	-122	0	122	121	0	-121	-122
11	-122	122	243	121	-121	-243	-122	122	243	121	-121	-243	-122	122	243	121	-121	-243	-122	122	243	121	-121	-243
12	-365	0	365	364	0	-364	-365	0	365	364	0	-364	-365	0	365	364	0	-364	-365	0	365	364	0	-364
13	-729	-365	365	729	364	-364	-729	-365	365	729	364	-364	-729	-365	365	729	364	-364	-729	-365	365	729	364	-364
14	-1093	-1094	0	1094	1093	0	-1093	-1094	0	1094	1093	0	-1093	-1094	0	1094	1093	0	-1093	-1094	0	1094	1093	0

TABLEAU 2

donnant en fonction de θ et de b les valeurs de la somme

$$\frac{(a+b)!}{a!b!} - S(a,b) + T(a,b) - U(a,b) + V(a,b)$$
pour $m = 4$ et $r = 2$

Nouvelle démonstration de la formule

$$N(a, b)A > kB = \frac{a-kb}{a+b} \frac{(a+b)!}{a!b!} \text{ si } a \geq kb \text{ et si } k \text{ est un nombre entier.}$$

Cette formule peut encore s'écrire si b est différent de zéro, ce que nous supposons :

$$N(a, b)A > kB = \frac{(a+b-1)!}{(a-b)!b!} - k \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}$$

Etablissement du premier tableau. Pour $\theta = 1$ un seul dépouillement favorable possible : il faut que ce soit un objet de la famille A qui soit sorti. Donc un seul nombre générateur : le nombre 1 situé dans la case $\theta = 1, b = 0$.

Aucune difficulté pour tracer la ligne brisée de démarcation entre la surface intérieure et la surface extérieure : d'un côté de cette ligne seront les cases pour lesquelles $a > kb$ ou $\theta > (k+1)b$, de l'autre côté les autres cases.

Etablissement du deuxième tableau. Nous reproduirons la ligne de démarcation entre les deux surfaces. Nous inscrivons le nombre générateur de $\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!}$ c'est le nombre 1 placé dans la case $\theta = 1, b = 0$ et le nombre générateur de $-k \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}$ c'est le nombre $-k$ placé dans la case $\theta = 1, b = 1$.

TABLEAU 1

donnant en fonction de θ et de b les valeurs de $N(a, b)A > 3B$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1	1			
6	1	2			
7	1	3			
8	1	4			
9	1	5	4		
10	1	6	9		
11	1	7	15		

TABLEAU 2

donnant en fonction de θ et de b les valeurs de la somme

$$\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - 3 \frac{(a+b-1)!}{a(b-1)!}$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-3							
2	1	-2	-3						
3	1	-1	-5	-3					
4	1	0	-6	-8	-3				
5	1	1	-6	-14	-11	-3			
6	1	2	-5	-20	-25	-14	-3		
7	1	3	-5	-25	-45	-39	-17	-3	
8	1	4	0	-28	-70	-84	-56	-20	-3
9	1	5	4	-28	-98	-154	-140	-76	-23
10	1	6	9	-24	-126	-252	-294	-216	-99
11	1	7	15	-15	-150	-378	-546	-510	-315

Il est clair que seul le premier de ces deux nombres générateurs tombe dans la surface intérieure.

Les nombres générateurs tombant dans les surfaces intérieures des deux tableaux sont identiques ; la première condition est donc remplie.

Soient θ_1 et b_1 les indices d'une case d'entrée.

Deux cas sont à considérer :

- le nombre influencé de la surface intérieure se trouve immédiatement en-dessous et ses indices sont $\theta_1 + 1$ et b_1
- le nombre influencé de la surface intérieure se trouve sur la ligne suivante et dans la colonne de droite et ses indices sont $\theta_1 + 1$ et $b_1 + 1$

mais, ce dernier cas ne peut se produire : en effet, θ_1 et b_1 étant les indices d'une case de la surface extérieure $\theta_1 \leq (k+1)b_1$ et cette inégalité est incompatible avec l'inégalité

$$\theta_1 + 1 > (k+1)b_1 + k$$

Reste le premier cas.

L'inégalité $\theta_1 \leq (k+1)b_1$ subsiste

et puisque $\theta_1 + 1$ et b_1 sont les indices d'une case intérieure

$$\theta_1 + 1 > (k+1)b_1$$

Pour que les deux inégalités soient simultanément vérifiées, il est nécessaire que :

$$\theta_{\lambda} = (k+1)b_{\lambda} \quad \text{ou ce qui revient au même :} \quad a_{\lambda} = kb_{\lambda}$$

Mais si $a = kb$ la différence

$$\frac{(a_{\lambda}+b_{\lambda}-1)!}{(a_{\lambda}-1)!b_{\lambda}} - k \frac{(a_{\lambda}+b_{\lambda}-1)!}{a_{\lambda}!(b_{\lambda}-1)!} \quad \text{est nulle}$$

Les cases d'entrée ne contiennent que des nombres nuls ce qui vérifie la deuxième condition.

BIBLIOGRAPHIE

- DUFRESNE. P. : Problèmes de dépouillements. GAZETA de MATEMATICA
 N° 44 - 45, Septembre 1950 ; N° 46, Décembre 1950 ;
 N° 47, Mars 1951 ; N° 51, Août 1952 ; N° 54, Avril 1953.

