



**HAL**  
open science

# Des distributions symétriques à fonctions caractéristiques convexes

Aurel Wintner

► **To cite this version:**

Aurel Wintner. Des distributions symétriques à fonctions caractéristiques convexes. Annales de l'ISUP, 1956, V (1), pp.43-46. hal-04095341

**HAL Id: hal-04095341**

**<https://hal.science/hal-04095341>**

Submitted on 11 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# DES DISTRIBUTIONS SYMÉTRIQUES A FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES CONVEXES

par

**Aurel WINTNER**

Soit  $\varphi(t)$  une fonction paire, définie sur la droite  $-\infty < t < \infty$  et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1) \quad \varphi(t) \text{ est convexe (et continue) pour } 0 \leq t < \infty$$

et  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ . La fonction  $\varphi(t)$ , évidemment, est monotone et non-décroissante pour  $0 \leq t < \infty$ , et, suivant Jensen, elle a pour  $0 < t < \infty$  des dérivées unilatérales finies, égales excepté sur un ensemble dénombrable de valeurs de  $t$ . De plus,  $\varphi'(t)$  étant l'une de ces dérivées,  $-\varphi'(t)$  est non-négative et non-décroissante pour  $0 < t < \infty$ . Il est clair également que  $\varphi(t)$  est absolument continue (de fait, elle satisfait à la condition de Lipschitz pour  $\varepsilon < t < \infty$ , si  $\varepsilon > 0$ ). Puisque l'intégrale de  $\varphi'(t)$ , prise de 0 à  $\infty$ , est convergente, il s'ensuit d'après un lemme d'Abel que  $t\varphi'(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et quand  $t \rightarrow 0$ .

Considérons la fonction

$$(2) \quad \int_0^{\infty} -\varphi'(t) \sin xt \, dt$$

Il est évident que  $-\varphi'(t)$  est non-négative et non-décroissante, mais n'est pas une constante. Si  $x > 0$ , l'expression (2) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^{\pi/x} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi'(t + \pi k/x) - \varphi'(t + \pi(k-1)/x) \right\} \sin xt \, dt$$

Puisque en chaque point de l'intervalle d'intégration, le  $k^e$  terme  $\left\{ \right\}$

de la somme  $\Sigma$  est non-négatif pour tout  $k$ , et positif pour certains  $k$ , et puisque  $\sin xt$  est positif pour  $0 < t < \pi/x$ , il s'ensuit que la fonction (2) est positive pour tout  $x > 0$ . Cette remarque fondamentale fut faite, citant Steffensen [7], p. 184, par Lindhagen [4], puis par Polya ([5], p. 378, Théorème VII où, cependant, la restriction  $f(\infty) = 0$ ,  $f$  étant  $-\varphi'$ , n'est pas mentionnée), et Steffensen [7], récemment, a amélioré ce point.

On voit aussi que la fonction impaire (2), outre qu'elle est positive pour tout  $x > 0$ , est continue en chaque point  $x \neq 0$ , puisque la convergence est uniforme ou voisine de chaque  $x$ , fixe, positive. Mais une intégration



par parties montre que le produit de  $x$  par la fonction (2) est identique à  $\pi f(x)$ , pour  $-\infty < x < \infty$ ,  $f(x)$  représentant la fonction

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos xt \, dt$$

(l'intégration par parties est légitime puisque  $t\varphi'(t) \rightarrow 0$  que  $t$  tende vers 0 ou  $\infty$ , ainsi qu'il a été dit plus haut). Par conséquent l'hypothèse (1) une fois associée aux hypothèses :  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$  et  $\varphi(t) = \varphi(-t)$ , implique que  $\varphi(t)$  est la transformée de Fourier-Stieltjes d'une fonction de distribution absolument continue ayant une densité  $f(x)$  positive et continue pour  $0 \leq x < \infty$ , et, par suite, également pour  $-\infty < x < \infty$ , puisque  $f(x) = f(-x)$ . Ce fait important et quelques-unes de ses conséquences ont été récemment soulignés par Polya [6], pp. 116-118. Pour une approche différente, cf. un article récent de Dugué et Girault [2].

Dans une note antérieure [9], pp. 592-594, ce théorème était combiné à un résultat de A. Kneser (cf. la présentation de Borel [1], pp. 46-52, et une correction de l'un des énoncés de Kneser dans [8], p. 95 ; la forme finale de l'énoncé correct découle de [10], pp. 601-602.

En vue de l'application donnée dans [9] aux équations différentielles, mais surtout en raison de l'application à la théorie des probabilités, ce qui va suivre répondra à la question : quand la densité  $f(x) = f(-x)$  est-elle continue en  $x = 0$  ?

Il est clair que la condition

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \varphi(t) \, dt < \infty \quad (\varphi \geq 0)$$

suffit à cette fin, puisque (4) entraîne la convergence uniforme de (3) pour  $-\infty < x < \infty$ . On montrera que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Ceci est susceptible d'une interprétation simple aux termes de la considération géométrique de Dugué et Girault [2], pp. 3-5.

En fait, la démonstration sera faite de façon à prouver que si

$$(4 \text{ bis}) \quad \int_0^{\infty} \varphi(t) \, dt = \infty, \quad (\varphi \geq 0)$$

alors non seulement  $f(x)$  doit être discontinue au point  $x = 0$  mais encore le devenir d'une façon tellement prononcée que

$$(5) \quad f(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0$$

En corollaire il s'ensuit que  $f(x)$  doit être continue au point  $x = 0$  chaque fois que

$$(5 \text{ bis}) \quad f(x) < \text{constante}, \quad x \rightarrow 0$$

Un autre corollaire sera que ou bien (5) est vrai ou bien  $f(x)$  est non seulement continue pour  $-\infty < x < \infty$  mais en plus  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ .

En fait cette dernière relation découle de (3) en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue, si elle est applicable c'est-à-dire si (4) est satisfait.



Soit  $g(t)$  une quelconque fonction définie sur le demi-droit ouvert  $0 < t < \infty$  de façon à remplir les conditions suivantes :  $g(t)$  est non-négative et monotone,  $g(\infty) = 0$ , et

$$(6a) \quad \int_0^1 tg(t) dt < \infty, \quad (6b) \quad \int_1^{\infty} g(t) dt = \infty.$$

Alors, ainsi que (3) le montre, la fonction

$$(7) \quad h(x) = \int_0^{\infty} g(t) \sin xt dt$$

doit satisfaire à la relation

$$(8) \quad h(x)/x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow 0$$

Choisissons

$$(9) \quad g(t) = -\varphi'(t), \quad \text{où } 0 < t < \infty.$$

Alors il est clair d'après les remarques faites au début de la note que les conditions spécifiées pour  $g(t)$  avant (6a) et (6b) sont remplies, de même que l'est la condition (6a) (et ceci, que l'on soit dans le cas (4) ou (4 bis)). Mais si on suppose (4 bis), alors la condition (6b) est aussi remplie. De fait, (6b) équivaut à (4 bis) en vertu de (9). Par conséquent, (8) est vrai dans le cas présent.

D'autre part, on voit d'après (8) et (9) que  $h(x)$  est précisément l'intégrale (2). Puisque l'intégration par parties, faite plus haut, montre que le produit de  $\pi x$  par la fonction (3) est identique à l'intégrale (2), il s'ensuit que  $h(x) = \pi xf(x)$ . Donc, (8) prouve (5).

The Johns Hopkins University



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.
- [2] D. Dugué et M. Girault, "Fonctions convexes de Polya", Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, vol. 4 (1955), pp. 3-10.
- [3] P. Hartman and A. Wintner, "On the behavior of Fourier sine transforms near the origin", Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 2 (1951), pp. 398-400.
- [4] A. Lindhagen, Studier öfver Gamma-Funktionen och några beslagade Transcendenter, Uppsala, 1887.
- [5] G. Polya, "Ueber die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen", Mathematische Zeitschrift, vol. 2 (1918), pp. 352-383.
- [6] \_\_\_\_\_, "Remarks on characteristic functions", Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, (1949), pp. 115-123.
- [7] J. F. Steffensen, "Bounds of certain trigonometrical integrals", Tenth Scandinavian Congress of Mathematicians, Copenhagen, 1947, pp. 181-186.
- [8] A. Wintner, "On the Laplace-Fourier transcendents occurring in mathematical physics", American Journal of Mathematics, vol. 69, (1947), pp. 87-98.
- [9] \_\_\_\_\_, "A priori Laplace transformations of linear differential equations", American Journal of Mathematics, vol. 71 (1949), pp. 587-594.
- [10] \_\_\_\_\_, "On almost free linear motions", ibid., vol 71 (1949), pp. 595-602.