



Des positions typiques d'une variable aléatoire

Saad K. Nasr

► To cite this version:

Saad K. Nasr. Des positions typiques d'une variable aléatoire. Annales de l'ISUP, 1956, V (1), pp.33-42. hal-04095332

HAL Id: hal-04095332

<https://hal.science/hal-04095332>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

DES POSITIONS TYPIQUES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

par

Saad K. NASR

1. - INTRODUCTION

Une définition de la moyenne d'une variable aléatoire située dans un espace de Banach a été donnée par Mourier (9). D'autre part, une seconde définition de cette moyenne a été exprimée dans Espace métrique par Doss (2). On sait (10) qu'une moyenne dans le sens de Mourier, si elle existe, est aussi une moyenne dans le sens de Doss. Fréchet (3), généralisa la définition de la moyenne de Doss en vue de définir les positions typiques d'une variable aléatoire située dans un espace métrique (ses positions : moyenne, centrale, équiprobable, dominante, etc...).

Nous définirons sous la définition -2-, dans les conditions les plus générales, les positions typiques d'une variable aléatoire quelconque de telle manière qu'une position typique existant dans le sens de Fréchet, sera aussi dans notre sens une position typique (proposition 2).

2. -

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions numériques (finies) définie sur un ensemble X , telle que pour deux éléments différents x et y appartenant à l'ensemble, il existe un $i \in I$ pour lequel $f_i(x) \neq f_i(y)$. On définit alors une structure uniforme séparée ((1), Ch. IX, parag. §1) sur X par la famille (g_i) des écarts $g_i(x, y) = |f_i(x) - f_i(y)|$. Inversement, étant donnée une structure uniforme séparée sur X , une famille d'écarts est alors définie sur X ((1), Ch. IX, parag. §1).

2.1. Plus généralement étant donnée une variable aléatoire X située dans l'ensemble X , on supposera qu'une structure uniforme séparée est définie sur X par la famille d'écarts finis $d_i(x, y)$ avec $i \in I$. La classe K des transformations

$$d_\alpha(x) = d_{(i,0)}(x) = d_i(x, a) \quad (1)$$

définie dans X pour toute paire d'éléments $\alpha \equiv (i, a)$ avec $i \in I$ et a élément fixe de X , est alors une classe séparative ((8), p. 29).

Définition (1)

LA CLASSE K DE TRANSFORMATIONS $d_\alpha(x)$, définie sous le paragraphe 2.1, est appelée classe séparative de transformations métriques.

On écrira par la suite $T(N)$ pour la position typique d'un nombre aléatoire N en supposant que pour tout α , $d_\alpha(X)$ est un nombre aléatoire pour lequel une position typique $T(d_\alpha(X))$ existe.

Définition (2)

Un élément $\tau(x)$ est dit position typique (correspondant au symbole T) d'une variable aléatoire X située dans un ensemble X , s'il existe une classe séparative $K = \{d_\alpha(x)\}$ avec $x \in X$ de transformations métriques, de telle manière que l'on ait

$$d_\alpha(\tau(X)) \leq T(d_\alpha(X)) \quad ; \quad \tau(X) \in X$$

indépendamment de α .

2.2. Considérons la variable aléatoire X située dans un espace métrique $(\mathcal{D})$ défini par la distance d . Un élément $\bar{x} \in (\mathcal{D})$ est une moyenne dans le sens de Doss (2), si pour tout élément fixe $a \in (\mathcal{D})$ on a $d(\bar{x}, a) \leq \mathbb{M} d(X, a)$ où $\mathbb{M}$ indique la moyenne classique d'un nombre aléatoire. Or $K = (d_\alpha(x)) = (d(x, a))$ étant une classe séparative de transformations métriques, on voit que toute moyenne dans le sens de Doss, est moyenne dans le sens d : notre définition (2). D'où, plus généralement :

PROPOSITION I

TOUTE POSITION TYPIQUE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE X DANS LE SENS DE FRECHET (3) EST UNE POSITION TYPIQUE DE X DANS LE SENS DE LA DEFINITION (2).

2.3. Afin de justifier la condition que la classe K soit nécessairement une classe séparative, nous donnerons l'exemple suivant :

Soit une classe K définie par le seul écart $g(x, y) = |f(x) - f(y)|$ où

$$\begin{aligned} -x & \text{ pour } x < 0 \\ f(x) &= 0 & \text{ pour } 0 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{ pour } x > 2 \end{aligned}$$

Pour une variable aléatoire X qui prend les valeurs 0, 1 et 2, avec une probabilité égale à $1/3$ dans chaque cas, on a

$$\mathbb{M} g(X, a) = f(a) \quad \text{pour tout } a \text{ réel.}$$

Autrement dit, la moyenne classique $\bar{x} = 1$ de la variable aléatoire X n'est pas l'unique solution de l'inégalité

$$g(\tau, a) \leq \mathbb{M} g(X, a)$$

puisque celle-ci est satisfaite par tout élément τ dans l'intervalle $(0, 2)$.

3. -

Considérons à présent la variable aléatoire X située dans l'espace de Banach $(\mathcal{X})$. Un élément $\bar{x} \in (\mathcal{X})$ est une moyenné dans le sens de Mourier (9) si l'égalité

$$x^*(\bar{x}) = \mathfrak{M}(x^*(X)) \quad (1)$$

est satisfaite pour toute fonctionnelle linéaire continue x^* définie dans $(\mathcal{X})$.

3.1. On sait que (10) toute moyenne dans le sens de Mourier est aussi moyenne dans le sens de Doss, d'où, d'après la Proposition I, elle l'est aussi dans le sens de la Définition (2). D'ailleurs ceci peut être prouvé directement comme suit :

PROPOSITION II

LA MOYENNE DE MOURIER D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE $X \in (\mathcal{X})$, si elle existe, EST AUSSI UNE MOYENNE DANS LE SENS DE LA DÉFINITION (2).

En effet, pour n'importe quelle paire d'éléments distincts x et y de $(\mathcal{X})$, il existe ((6), p. 19) une fonctionnelle linéaire x^* telle que

$$|x^*(x-y)| = \|x-y\| > 0 \quad (2)$$

On peut donc dire qu'il existe un écart $d^*(x, y)$ défini par

$$d^*(x, y) = |x^*(x) - x^*(y)| \quad (3)$$

tel que l'on ait

$$d^*(x, y) = |x^*(x) - x^*(y)| = |x^*(x-y)| > 0$$

D'où la famille des écarts $\{d^*(x, y)\} = \{|x^*(x) - x^*(y)|\}$ où x^* appartient à l'espace $(\mathcal{X}^*)$ conjugué ((6), p. 21) de $(\mathcal{X})$, définit une classe de transformations métriques.

Si $\bar{x} \in (\mathcal{X})$ est une moyenne de Mourier d'une variable aléatoire X , on aura de l'égalité (1)

$$x^*(\bar{x}) - x^*(a) = \mathfrak{M}(x^*(X) - x^*(a)) \quad (4)$$

indépendamment de $a \in (\mathcal{X})$.

De (3) et (4) on a

$$d^*(\bar{x}, a) = |\mathfrak{M}(x^*(X) - x^*(a))| \leq \mathfrak{M} d^*(X, a) \quad (5)$$

ce qui démontre la proposition

3.2. LA DÉFINITION DE FRECHET DE LA MOYENNE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE X SITUÉE DANS L'ESPACE DE BANACH ((2), parag. 5)

Dans ce qui suit, E dénote l'ensemble d'événements élémentaires ξ , d'après la terminologie de Kolmogoroff (7). Une variable aléatoire X est dite appartenir à la classe (I F), si quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver une décomposition $\Delta(\Delta_{\varepsilon X})$ de l'ensemble E en une suite dénombrable d'en-

sembles disjoints probabilisables $e_1, e_2, \dots$ ($E = \bigcup_{r=1}^{\infty} (e_r)$) pour laquelle la condition suivante est satisfaite :

$$\left\{ p(e_r) = \text{Prob.}(e_r) = 0 \quad \text{ou} \quad \max_{\xi, \xi' \in e_r} \| \xi x - \xi' x \| < \epsilon \right\}, r=1,2,\dots(i)$$

de telle façon que la série

$$\sigma_\epsilon = \sum_{r=1}^{\infty} p(e_r) \| \xi_r x \|, \quad \xi_r \in e_r, \quad (ii)$$

soit convergente.

Si la somme σ_ϵ existe pour au moins une décomposition $\Delta_{\epsilon, X}$, elle existe pour toute autre décomposition $\Delta_{\epsilon, X}$, (2).

L'espace de Banach étant complet, quand $\epsilon \rightarrow 0$, la limite de

$$S_\epsilon = \sum_{r=1}^{\infty} p(e_r) \xi_r x, \quad \xi_r \in e_r, \quad (iii)$$

existe indépendamment de $\Delta_{\epsilon, X}$. Cette limite $I(X)$ est la moyenne (IF) de X .

Si l'espace (X) est un espace de Banach séparable, une telle décomposition Δ satisfaisant (i) est équivalente à l'affirmation que X est presque sûrement contenu dans un sous-ensemble séparable (X_1) d'un espace de Banach X .

On sait que si (10, Théorème 3) la variable aléatoire X de la classe (IF) est faiblement mesurable ((6), p. 36), la moyenne $I(X)$ est aussi une moyenne dans le sens de Mourier. Il en découle de la proposition II la

PROPOSITION III

SI LA VARIABLE ALEATOIRE X DE LA CLASSE (I, F) EST FAIBLEMENT MESURABLE, LA MOYENNE $I(X)$ EST AUSSI UNE MOYENNE DANS LE SENS DE LA DEFINITION (2).

4. -

Il est important de savoir si une position typique $\tau(X)$ d'une variable aléatoire X existant relativement à une classe K_1 dans le sens de la définition (2), existe de même relativement à une autre classe K_2 , où K_1 et K_2 sont deux classes séparatives de transformations métriques, seules transformations prises en considération par nous.

4.1. L'exemple suivant montre que cela n'est pas toujours le cas.

Soit le nombre aléatoire X prenant les valeurs x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$) avec les probabilités respectives p et q ($p+q=1$). Considérons les deux classes K_1 et K_2 définies respectivement par les deux distances d_1 et d_2 avec

$$d_1(x, y) = |x - y|$$

$$\text{et } d_2(x, y) = 0 \quad \text{si } x = y$$

$$= 1 \quad \text{si } x \neq y.$$

On a alors $d_2(\bar{x}, x_1) = 1$ où $\bar{x} = px_1 + qx_2$, la moyenne classique de X . Comme $\mathbb{M} d_2(X, x_1) = q$, $d_2(\bar{x}, x_1) > \mathbb{M} d_2(X, x_1)$. Ceci montre que la moyenne classique $\bar{x}$, qui est une moyenne dans le sens de la définition 2, relativement à la classe K_1 n'est pas une moyenne relative à la classe K_2 .

En particulier, on remarque qu'une moyenne dans le sens de Doss relative à une certaine distance, n'est pas nécessairement une moyenne dans le même sens relative à n'importe quelle autre distance.

4.2. Etant donnée une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'écarts sur X , soit g_H l'enveloppe supérieure de la famille $(f_i)_{i \in H}$, où H est une partie finie quelconque de I . La famille d'écarts (g_H) est équivalente ((1) Ch. IX, parag. 1) à la famille (f_i) ; on dit que c'est la famille d'écarts obtenue en saturant (f_i) et que (g_H) est une famille d'écarts saturée.

Définition (3)

Soient K_1 et K_2 deux classes différentes définies par les deux familles saturées $(f_i)_{i \in I}$ et $(g_x)_{x \in X}$ sur le même ensemble X . Si U_1 et U_2 sont les deux structures uniformes induites par (f_i) et (g_x) respectivement, on dit alors que K_1 est moins fine que K_2 , si U_1 est moins fine que U_2 . K_1 est dite strictement moins fine que K_2 , si pour tout $i \in I$ il existe un $x \in X$ tel que $f_i \leq g_x$.

4.3. Soit (X) un système linéaire ((6) p. 9) sur lequel on définit les deux classes K_1 et K_2 comme suit :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{ \|x - a\| \}, \\ K_2 &= \{ d_i(x, a) \mid i \in I, a \in (X) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

où $\|x\|$ est la norme de x , (d_i) la famille d'écarts saturée telle que pour tout i , étant donnés des éléments x_1, x_2, y_1, y_2 de (X) on ait :

$$d_i(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leq d_i(x_1, y_1) + d_i(x_2, y_2)$$

$$d_i(kx, ky) \leq |k| d_i(x, y)$$

pour tout nombre réel k .

Remarque : Nous entendons par position typique d'une variable aléatoire celle admise dans la définition (2), sauf affirmation contraire.

PROPOSITION IV

SOIT X UNE VARIABLE ALÉATOIRE SITUÉE DANS UN SYSTÈME LINÉAIRE (X) , SUR LEQUEL ON A DÉFINI LES DEUX CLASSES K_1 ET K_2 INTRODUITES PAR LES RELATIONS (1) CI-HAUT. SI K_2 EST MOINS FINE QUE K_1 , ET SI L'ON SUPPOSE QUE $\mathfrak{M}(d_\alpha(X))$ EXISTE INDÉPENDAMMENT DE $\alpha \equiv (i, a)$, TOUTE MOYENNE (IF) DE X EXISTANT RELATIVEMENT À K_1 EST AUSSI UNE MOYENNE RELATIVE À K_2 .

En effet la classe K_2 étant moins fine que K_1 , pour tout écart d_i et tout $\epsilon' > 0$ ((1) Ch. IX, parag. 1), il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \epsilon \quad \text{implique} \quad d_i(x, y) < \epsilon' \quad (2)$$

La variable aléatoire X étant de la classe (IF), on peut dire de (3.2.) que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une décomposition $\Delta_{\epsilon, X}$ de E en une suite dénombrable d'ensembles disjoints probabilisables $e_1, e_2, \dots$ ($E = \bigcup_{r=1}^{\infty} (e_r)$) pour laquelle la condition (i) de 3.2. est satisfaite.

d_i étant un écart, de (2) on obtient

$$\max_{\xi, \xi' \in e_r} |d_i(\xi x, a) - d_i(\xi' x, a)| \leq \max_{\xi, \xi' \in e_r} d_i(\xi x, \xi' x) < \varepsilon', \quad (3)$$

pour tout élément fixe a de (X) , $r = 1, 2, \dots$,

De (3) et de (i) de 3.2. on voit que pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe une décomposition $\Delta'_{\varepsilon', X} (= \Delta_{\varepsilon', X})$ de E en une suite dénombrable d'ensembles disjoints probabilisables $e_1, e_2, \dots$ ($E = \bigcup_{r=1}^{\infty} (e_r)$) ; pour laquelle la condition

$$\{p(e_r) = 0 \text{ ou } \max_{\xi, \xi' \in e_r} |d_i(\xi x, a) - d_i(\xi' x, a)| < \varepsilon'\}, r = 1, 2, \dots \quad (4)$$

est satisfaite.

$$\text{Posons } s_\varepsilon^{(n)} = \sum_{r=1}^n p(e_r)_{\xi_r} x \quad \text{et} \quad a_\varepsilon^{(n)} = a \cdot \sum_{r=1}^n p(e_r) \quad (5)$$

Avec les conditions imposées à K_2 on obtient :

$$\begin{aligned} d_i(s_\varepsilon^{(n)}, a_\varepsilon^{(n)}) &= d_i\left(\sum_{r=1}^n p(e_r)_{\xi_r} x, \sum_{r=1}^n p(e_r) \cdot a\right) \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^n d_i(p(e_r)_{\xi_r} x, p(e_r) \cdot a) \leq \sum_{r=1}^n p(e_r) d_i(\xi_r x, a) \end{aligned} \quad (6)$$

Comme la série (ii) de 3.2. est convergente, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_\varepsilon^{(n)} = s_\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ fixe}) \quad (7)$$

On a de plus

$$\|a - a_\varepsilon^{(n)}\| = \left\| \sum_{r=n+1}^{\infty} p(e_r) \cdot a \right\| = \|a\| \sum_{r=n+1}^{\infty} p(e_r) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (8)$$

La topologie définie par K_2 étant moins fine que celle définie par K_1 , on a des relations (7) et (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_i(s_\varepsilon^{(n)}, s_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_i(a_\varepsilon^{(n)}, a) = 0 \quad (9)$$

Or d_i est un écart

$$|d_i(s_\varepsilon^{(n)}, a_\varepsilon^{(n)}) - d_i(s_\varepsilon, a)| \leq d_i(s_\varepsilon^{(n)}, s_\varepsilon) + d_i(a_\varepsilon^{(n)}, a) \quad (10)$$

Le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité (6), et de (9) et (10) il découle

$$\begin{aligned} d_i(s_\varepsilon, a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_i(s_\varepsilon^{(n)}, a_\varepsilon^{(n)}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n p(e_r) d_i(\xi_r x, a) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} p(e_r) d_i(\xi_r x, a) \end{aligned} \quad (11)$$

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_\varepsilon = I(X)$ (de la relation (iii) de 3.2.), relative à la topologie définie par K_1 , alors quand $\varepsilon' \rightarrow 0$, (11) donne

$$d_i(I(X), a) \leq \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \sum_{r=1}^{\infty} p(e_r) d_\alpha(\xi_r x), \quad \begin{matrix} \xi_r \in e_r, \\ \alpha = (i, a) \end{matrix} \quad (12)$$

Or $\mathbb{M} d_\alpha(X)$ existe pour tout $\alpha = (i, a)$. $I(d_\alpha(X))$ existe ((2) parag. 5) et égale $\mathbb{M} d_\alpha(X)$. Ceci entraîne que le membre de droite de l'inégalité (11) existe et admette pour limite $\mathbb{M} d_\alpha(X)$ quand $\varepsilon' \rightarrow 0$.

c.q.f.d.

4.4. Nous donnons ici un exemple important de classes K_1 et K_2 satisfaisant les conditions (1) de 4.3.

PROPOSITION V

SOIT X UNE VARIABLE ALÉATOIRE SITUÉE DANS UN SYSTÈME LINEAIRE $(\mathcal{X})$ SUR LEQUEL DEUX CLASSES K_1 et K_2 SONT DÉFINIES RESPECTIVEMENT PAR LES NORMES $\|x\|_1$ ET $\|x\|_2$. SI K_2 EST MOINS FINE QUE K_1 , TOUTE MOYENNE (IF) DE X EXISTANT RELATIVEMENT À K_1 EST AUSSI MOYENNE RELATIVEMENT À K_2 , AVEC LA SUPPOSITION QUE POUR TOUT $a \in (\mathcal{X})$, $d_a(X) = \|X - a\|_2$ SOIT UN NOMBRE ALÉATOIRE.

$\|x\|_2$ étant moins fine que $\|x\|_1$, il existe ((1), Ch. IX, parag. 3) un nombre réel $b > 0$ tel que

$$\|x\|_2 \leq b \|x\|_1 \quad (1)$$

pour tout $x \in (\mathcal{X})$. D'où pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\varepsilon (= \frac{\varepsilon'}{b})$ tel que $\|x - y\|_1 < \varepsilon$ implique $\|x - y\|_2 < \varepsilon'$.

En utilisant les mêmes notations que celles de la proposition IV, pour tout élément fixe a de $(\mathcal{X})$, nous avons l'inégalité

$$\|s_\varepsilon - a\|_2 \leq \sum_{r=1}^{\infty} p(e_r) \|\xi_r x - a\|_2, \quad \xi_r \in e_r, \quad (2)$$

qui est analogue à l'inégalité (11) de la proposition IV.

Comme $I(X)$ est une moyenne relative à K_1 , alors $\mathcal{M}\|X - a\|_1$ existe pour tout $a \in (\mathcal{X})$. D'où la série $\sum p(e_r) \|\xi_r x - a\|_1$, $\xi_r \in e_r$, existe et en conséquence l'existence du membre de droite de (2) découle de (1).

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|s_\varepsilon - I(X)\|_1 = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|s_\varepsilon - I(X)\|_2 = 0$. En prenant les limites des deux membres de l'inégalité (2) quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\|I(X) - a\|_2 \leq I(\|X - a\|_2) \quad (3)$$

L'existence de la moyenne classique du nombre aléatoire $\|X - a\|_2$ résulte de l'existence de la moyenne classique du nombre aléatoire $\|X - a\|_1$, grâce à la relation (1); il en résulte de (3) la démonstration recherchée.

5. - LES POSITIONS TYPIQUES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SITUÉE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN R^n

Une position typique $\tau(X)$ d'une variable aléatoire X existant relativement à une classe K définie par une norme $\|x\|$ sera dite exister relativement à $\|x\|$.

Différentes normes sont définies dans l'espace euclidien; nous choisissons la norme $\|x\|_1 = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $x \equiv (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ pour déterminer relativement à lui quelques positions typiques d'une variable aléatoire X située dans R^n .

5.1. La moyenne : Soit $X \equiv (X_1, \dots, X_n) \in R^n$ tel que $\bar{X}_i = \mathcal{M}X_i$ existe pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. $\bar{X} \equiv (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ est une moyenne de X relativement à la norme $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

On peut facilement prouver, soit directement, soit au moyen de la proposition V, que $\bar{X}$ est aussi une moyenne relativement à $\|x\|_1$.

5.2. Position centrale : Soit X une variable aléatoire stochastiquement bornée (3) située dans R^n , sur lequel une norme $\|x\|$, ($x \in R^n$) est définie. Une position centrale $\gamma \in R^n$ de X , existe dans le sens de la définition (2) relativement à $\|x\|$, si $\|\gamma - a\| \leq \dot{N}$ avec $N = \|X - a\|$, indépendamment de $a \in R^n$, $\dot{N}$ étant la valeur centrale du nombre aléatoire N .

En général, relativement à $\|x\|_2$, une position centrale d'une variable aléatoire stochastiquement bornée $X \in R^n$, n'existe que ((3) p. 232) dans certains cas particuliers. Par contre, relativement à $\|x\|_1$, qui est strictement moins fine (définition 3) que $\|x\|_2$ si $X \equiv (X_1, \dots, X_n)$ est stochastiquement bornée, $X \equiv (\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n)$ où $\dot{X}_i$ ($i = 1, \dots, n$) est la valeur centrale du nombre aléatoire X_i , est aussi une position centrale de X . Car, $\dot{X}_i$ étant la position centrale de X_i , on a (5) :

$$|\dot{X}_i - a_i| \leq \dot{N}_i \quad N_i = |X_i - a_i|$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ avec a_i un nombre réel fixe quelconque.

Et si $a \equiv (a_1, \dots, a_n)$ est un élément fixe quelconque de R^n , on a alors

$$0 \leq N_i \leq \|X - a\|_1 = N \quad \text{d'où} \quad \dot{N}_i \leq \dot{N}$$

Ceci entraîne finalement que $|X_i - a_i| \leq \dot{N}$ pour $i = 1, \dots, n$, prouvant l'affirmation ci-haut.

On remarque qu'une position centrale de $X \in R^n$, si elle existe (3) relativement à $\|x\|_2$, existe aussi relativement à $\|x\|$, mais que l'inverse n'est pas nécessairement vrai, comme on peut le voir par les exemples particuliers donnés par Fréchet ((3) p. 232).

De plus, la position centrale $\dot{X} \equiv (\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n)$ de $X \in R^n$, relativement à $\|x\|_1$ est unique. En effet, s'il existe une autre position centrale $\gamma \equiv (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R^n$ de X , ($\gamma \neq \dot{X}$), relativement à $\|x\|_1$, $\gamma_j \neq \dot{X}_j$ pour un certain entier j , ($1 \leq j \leq n$). La variable aléatoire X étant stochastiquement bornée, on peut choisir un nombre réel c assez grand ($c > 2K$ si $\|x\|_1 < K$) de telle manière que

$$|\xi x_i| \leq \|\xi x\|_1 < K < |\xi x_j - c|$$

pour tout $i \neq j$ et $\xi \in E$ (l'ensemble des événements élémentaires).

Pour $a_0 \equiv (a_1, \dots, a_n)$ avec $a_j = c$ et $a_i = 0$ ($i \neq j$), on a

$$N_0 = \|X - a_0\|_1 = |X_j - c|$$

Comme γ est une position centrale de X , $|\gamma_j - c| \leq \|\gamma - a_0\|_1 \leq \dot{N}_0$, ou

$$|\gamma_j - c| \leq \dot{N}_j \quad \text{où} \quad N_j = |X_j - c| \quad (1)$$

Ceci est contradictoire puisque $\dot{X}_j$ est la solution unique (5) de l'inégalité (1)

5.3. Position équiprobable : Rappelons d'abord, afin d'éviter toute confusion, qu'on appelle valeur équiprobable d'un nombre aléatoire N , tout nombre certain v tel que l'on ait simultanément

$$\{\text{Prob}[N \leq v]\} \geq \frac{1}{2} \leq \{\text{Prob}[N \geq v]\}$$

On représente un tel point v par la notation $\bar{N}$.

Comme au paragraphe 5.2. on a vu que relativement à $\|x\|_2$, une position équiprobable ((3) p. 235) d'une variable aléatoire $X \equiv (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ n'existe pas en général, mais qu'elle n'existe que dans certains cas particuliers. Mais relativement à $\|x\|_1$, $\bar{X} \equiv (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ où $\bar{X}_i$ ($i = 1, \dots, n$) est une valeur équiprobable du nombre aléatoire X_i , est une position équiprobable de X .

En effet, pour $N_i = |X_i - a_i|$ avec a_i = nombre fixe réel quelconque et $i = 1, \dots, n$ on a (5)

$$|\bar{X}_i - a_i| \leq \bar{N}_i$$

et la validité de l'affirmation ci-haut se trouve établie à l'aide de la proposition suivante, puisque $N_i \leq N = \|x - a\|_1$.

PROPOSITION VI

SOIENT $\mu'(N)$ et $\mu''(N)$ LES VALEURS EQUIPROBABLES INFÉRIEURE ET SUPÉRIEURE D'UN NOMBRE ALÉATOIRE N ((4), p. 45). SI $\{\text{PROB}[X \leq Y]\} = 1$, X ET Y ÉTANT DEUX NOMBRES ALÉATOIRES, ON A

$$\mu'(X) \leq \mu'(Y) \text{ ET } \mu''(X) \leq \mu''(Y)$$

En effet, si $\mu'(X) > \mu'(Y)$, comme $\{\text{Prob}[X \leq Y]\} = 1$, on a

$$\{\text{Prob}[Y > \mu'(Y)]\} \geq \{\text{Prob}[X > \mu'(Y)]\} \geq \text{Prob}[X > \mu'(X) - \varepsilon]$$

où $2\varepsilon = \mu'(X) - \mu'(Y) > 0$.

D'où $\{\text{Prob}[Y > \mu'(Y)]\} > 1/2$

ce qui mène à une contradiction puisque $\mu'(Y)$ est valeur équiprobable inférieure de Y . De même, si $\mu''(X) > \mu''(Y)$, comme $\{\text{Prob}[X \leq Y]\} = 1$, on a

$$\{\text{Prob}[X \geq \mu''(X)]\} \leq \{\text{Prob}[Y \geq \mu''(X)]\} \leq \text{Prob}[Y > \mu''(Y) + \eta]$$

où $2\eta = \mu''(X) - \mu''(Y) > 0$.

Donc $\{\text{Prob}[X \geq \mu''(X)]\} < 1/2$,

ce qui est aussi contradictoire, puisque $\mu''(X)$ est la valeur équiprobable supérieure de X .

BIBLIOGRAPHIE

- (1) N. BOURBAKI : Les structures fondamentales de l'analyse. Tome 3. Topologie générale - Paris, Hermann, 1940.
- (2) S. DOSS : Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié (Bull. Sc. Math. 73, 1949, 48-72).
- (3) M. FRECHET : Positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque (Ann. Ec. Norm. Sup. 56-1948, 211-237)
- (4) M. FRECHET : Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités, Livre I, 2e édition (1950), Paris
- (5) M. FRECHET : Une propriété des valeurs typiques d'un nombre aléatoire (Ann. Ec. Norm. (3) LXV - Fasc. 3)
- (6) E. HILLE : Functional analysis and semi-groups (Amer. Math. Soc. Colloquium publications, vol. XXXI).
- (7) A. KOLMOGOROFF : Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits-rechnung (Springer, Berlin, 1933)
- (8) S. LEFSCHETZ : Algebraic topology (Amer. Math. Soc. Colloquium publications, vol. XXVII)
- (9) E. MOURIER : Sur l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace de Banach (C.R. Acad. Sc. Paris 229 -1949, 1300/1301).
- (10) SAAD K. NASR : On random elements (Thesis) - Alexandrie, 1953.