



**HAL**  
open science

# Produit de fonctions caractéristiques et indépendance de variables aléatoires

M. Girault

► **To cite this version:**

M. Girault. Produit de fonctions caractéristiques et indépendance de variables aléatoires. Annales de l'ISUP, 1956, V (1), pp.29-31. hal-04095314

**HAL Id: hal-04095314**

**<https://hal.science/hal-04095314>**

Submitted on 11 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Soit  $\delta(x-s)$  la fonction de Dirac nulle pour  $x \neq s$  infinie pour  $x = s$  et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-s) dx = 1 \quad (37)$$

Soit enfin une fonction  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle  $0 < \psi < 1$  ( $n = 1, \dots, n$ ), elle peut être nulle à l'extérieur de l'intervalle ou encore être négative.

**Théorème.** - La probabilité  $P(y)$  de pour que la fonction  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  des  $n$  variables indépendantes  $X_i$  prenne des valeurs comprises entre  $y$  et  $y + dy$  est telle que :

$$P(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\psi - y) \prod_{i=1}^n dx_i \quad (38)$$

Car on nous n'admettons pas l'existence de la fonction de Dirac, l'intégrale (37) étant évidemment nulle. Nous voyons mal comment on peut appliquer (38) trouver une évaluation correcte de la densité de probabilité  $P(y)$ . Montrer tout d'abord que comment il s'y est pris pour démontrer son soi-disant théorème. Il est probable qu'il a remarqué que : la fonction  $\psi$  est une densité de probabilité, si de plus  $X$  est indépendamment réparti sur le pavé  $0, 1$ , et si enfin  $Y$  est en corrélation avec  $X$ , la densité de probabilité liée  $l_x(y)$  est de la forme  $l_x(y - \psi(x))$  et la densité de probabilité de  $Y$  est :

$$l(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} l_x(y - \psi(x)) dx \quad (39)$$

et il est probable que de (39) il a tiré (38). Il est aisé de mettre (38) sous une forme rigoureuse. On a :

**Théorème XVII.** - La distribution  $T_y$  de la variable aléatoire  $Y = \psi(X_1, \dots, X_n)$  est telle que  $\langle T_y, \phi \rangle = \int \phi(y) dP_y(y)$  où  $dP_y(y)$  est la fonction de densité  $l(y)$  sur le pavé  $(0, 1)$ .

On peut démontrer ce théorème, soit en passant par les fonctions de répartition en utilisant la formule :

$$P(\infty, y) = \int_{-\infty}^y F_x(x) dx$$

soit plus simplement en utilisant le théorème de Schwartz sur la convolution d'une suite de distributions  $l_i(y)$  vers la distribution  $l(y)$ .

(1) Pour la définition de la notion de corrélation dans le cas des distributions de Schwartz voir S. Bernstein, *Fonctions géométriques de la théorie des corrélation*, Mémoires 1958.

# PRODUIT DE FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

## ET INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

par

M. GIRAULT

### OBJET DE L'ÉTUDE

On considère les variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z = X+Y$  et soient  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$ ,  $\varphi_z(t)$  les fonctions caractéristiques associées. On sait que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  $\varphi_z(t) = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$ . Nous voudrions attirer l'attention sur le fait que la réciproque n'est pas exacte ; et plus généralement sur le fait que les lois de répartition de  $X$  ; de  $Y$  (lois marginales) et de  $(X+Y)$  ne déterminent pas complètement la loi du couple  $(X, Y)$ .

On notera en particulier que si  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  suivent des lois du  $\chi^2$  à  $n_1$ ,  $n_2$  et  $(n_1 + n_2)$  degrés de liberté, cela n'entraîne nullement l'indépendance de  $X$  et de  $Y$ .

### DÉVELOPPEMENT

Soit donc le couple aléatoire  $(X, Y)$  et désignons par  $F_{(x)}$  et  $G_{(y)}$  les fonctions de répartition marginales de  $X$  et de  $Y$ .

Si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, la fonction de répartition  $H_{(z)}$  de  $Z = X+Y$  est obtenue par produit de composition de  $F_{(x)}$  et de  $G_{(y)}$ .

$$(1) \quad H(z) = F(x) * G(y) \quad \text{soit} \quad H(z) = \int F(z-y) d G(y)$$

D'autre part un résultat maintenant classique<sup>(1)</sup> nous apprend qu'il y a équivalence entre la relation (1) et la relation (2) suivante pour les fonctions caractéristiques :

$$(2) \quad \varphi_z(t) = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$$

Si  $\Phi_{(rs)}$  =  $E [e^{i(rx+sy)}]$  est la f.c. du couple  $(X, Y)$ , la relation (1) entraîne (3) :

$$(3) \quad \Phi(t, t) = \Phi(t, 0) \cdot \Phi(0, t)$$

(1) Voir H. ROBBINS. Mixture of distributions. Annals of Math. Stat. Vol XIX, n°3 Sept. 1948, p. 365 ; et M. GIRAULT. Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Publications I.S.U.P. 1955.

puisque  $\varphi_z(t) = \Phi(t, t)$  et que les f. c. des distributions marginales sont  $\Phi(r, 0)$  et  $\Phi(0, s)$

Réciproquement, la relation (3) entraîne (1) mais elle n'implique pas l'indépendance de X et de Y.

La condition nécessaire et suffisante d'indépendance de X et de Y relativement à  $\Phi(r, s)$  est

$$(4) \quad \Phi(r, s) = \Phi(r, 0) \cdot \Phi(0, s)$$

et cela pour toutes les valeurs de r et de s. Or la relation (3) indique seulement que (4) est satisfaite sur la droite  $r = s$  et non dans tout le plan. Il n'y a donc pas nécessairement indépendance stochastique.

En d'autres termes, on peut avoir la relation (1) pour certaines distributions de variables liées.

En effet, partons d'une répartition de v.a. indépendantes X et Y ; les fonctions de répartition de X de Y et de X + Y réalisent

$$H = F * G$$

Ajoutons une "pseudo répartition" de masses positives et négatives réalisant les conditions suivantes :

$$I \left\{ \begin{array}{l} \text{masse nulle sur tout intervalle } \Delta x \\ \text{" " " " " } \Delta y \\ \text{" " " " " } \Delta(x + y) \end{array} \right.$$

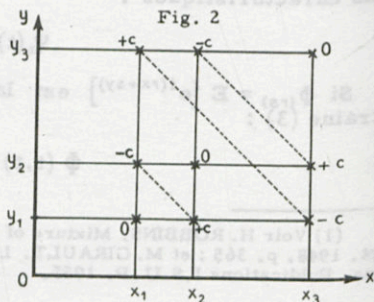
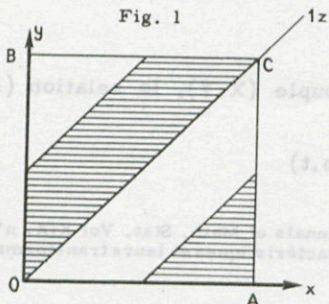
De plus, on imposera à la nouvelle répartition d'être partout à mesure positive.

Il est bien clair que la nouvelle répartition admet encore F, G et H pour fonctions de répartition de X de Y et de (X + Y) et par suite on a encore :  $H = F * G$  d'où  $\varphi_z(t) = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$

Il est facile de montrer que réciproquement, si une distribution réalise  $H = F * G$ , elle est la somme d'une distribution de v.a. indépendantes et d'une distribution de masses réelles réalisant les conditions (I).

Des exemples ont été donnés par H. Cramer (Mathematical Methods of Statistics 1946. Exercice p. 317, n° 2) et H. Robbins (Annals of Math. Stat. Sept. 1948). Dans ces exemples les conditions indiquées ici sont réalisées très simplement.

Voici à titre d'illustration l'exemple de H. Robbins :



Répartition uniforme de densité 2 dans les parties hachurées du carré (fig. I).

Les répartitions de X de Y et de Z sont les mêmes que celles données par une répartition uniforme dans tout le carré.

Ajoutons que la transformation indiquée par les conditions I est toujours possible dès que les répartitions de X et de Y ont au moins trois valeurs possibles :  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ , réalisant :

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

$$x_3 - x_2 = y_3 - y_2$$

A partir de la répartition indépendante, on ajoutera aux points  $(x_i, y_j)$  les masses  $0, +c$  ou  $-c$  conformément à la figure II.

où 
$$c \leq \min. \text{prob} \left\{ \begin{array}{l} X = x_i \\ Y = y_j \end{array} \right\} \quad i, j = 1, 2 \text{ ou } 3$$

Si la distribution est continue, les points  $(x_i, y_j)$  seront remplacés par des éléments  $dx dy$  et  $c$  par une densité.

En résumé les relations (1) ou (2) entraînent l'indépendance dans le seul cas où X et Y ne peuvent pas prendre l'un et l'autre au moins 3 valeurs ayant deux à deux des différences égales.

(fig. 1). Répartition uniforme de densité 2 dans les parties hachurées du carré. Les répartitions de X de Y et de Z sont les mêmes que celles données par une répartition uniforme dans tout le carré.

Ajoutons que la transformation indiquée par les conditions I est toujours possible dès que les répartitions de X et de Y ont au moins trois valeurs possibles :  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  réalisant :

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2$$

$$x_2 - x_3 = y_2 - y_3$$

A partir de la répartition indépendante, on ajoute aux points  $(x_i, y_j)$  les masses  $a_i$  et on se conformant à la figure II.

$$c \leq \min \text{ prob} \begin{cases} X = x_i \\ Y = y_j \end{cases} \quad \{i, j = 1, 2 \text{ ou } 3\}$$

Si la distribution est continue, les points  $(x_i, y_j)$  seront remplacés par des éléments  $dx$  et  $dy$  et c par une densité. En résumé les relations (1) ou (2) entraînent l'indépendance dans le cas où X et Y ne peuvent pas prendre l'un et l'autre au moins 3 valeurs égales.