



HAL
open science

Modèles et décisions économiques sur les fondements de l'économie pure

L. Solari

► **To cite this version:**

L. Solari. Modèles et décisions économiques sur les fondements de l'économie pure. Annales de l'ISUP, 1962, XI (4), pp.[277]-505. hal-04095313

HAL Id: hal-04095313

<https://hal.science/hal-04095313>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Fondateur G. DARMOIS +

Comité de Direction : H. BUNLE, L.-F. CLOSON, J. COMPEYROT,
F. DIVISIA, E. MORICE, J. RUEFF

Rédaction : M. FRÉCHET, M. ALLAIS, R. ROY

Secrétaire de la Rédaction : D. DUGUÉ

L. SOLARI

MODÈLES ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

SUR LES FONDEMENTS DE L'ÉCONOMIE PURE

VOL. XI - FASCICULE 4 - 1962

8° V

64396

(11, IV)

PARIS

9, quai S^t Bernard

1-1952

COMMUNICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE ÉCONOMIQUE
PAR A. LAURENT
F. DIVISA, E. MORICE, J. RUFF

Rédaction : M. FÉCHET, M. ALLAIS, R. ROY
Secrétaire de la Rédaction : D. DUGUÉ



MODÈLES ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES
SUR LES FONDAMENTS DE L'ÉCONOMIE PURE

Toute la correspondance relative aux publications
doit être envoyée à l'adresse
INSTITUT DE STATISTIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
9, quai Saint Bernard - Batiment C - Paris (5^e)

Les manuscrits doivent être envoyés à M. Daniel DUGUÉ
à l'adresse précédente.

AVANT-PROPOS

Toute science éprouve sans cesse le besoin de soumettre à une nouvelle réflexion ses fondements, et ceci plus particulièrement au moment où elle revendique son autonomie ou encore lorsque des progrès récemment constatés conduisent à réexaminer sa structure fondamentale. La science économique n'échappe pas à ce besoin, ainsi qu'en témoigne son évolution depuis les précurseurs jusqu'à nos jours ; en ces dernières années, sous la double pression de ses conquêtes récentes et des responsabilités dont on la charge de plus en plus, ses fondements ont été l'objet d'études approfondies dont l'importance n'a peut-être pas encore été tout à fait reconnue.

Le présent essai, fruit d'une réflexion personnelle sur les aspects logiques de l'économie pure, voudrait apporter une contribution à l'étude des fondements de l'économie, et cela en vue non seulement d'une mise au point logique des concepts de base, mais encore et surtout d'une extension des applications et de leur portée.

Il n'est pas superflu, nous semble-t-il, d'attirer l'attention du lecteur sur l'intérêt que présente, dans une étude qui gravite pour une large part autour de structures logiques, l'emploi de modes de raisonnement s'inspirant des mathématiques "modernes". C'est pourquoi nous n'avons pas hésité tout au long de cette étude à faire appel systématiquement à ces modes de raisonnement, sans nous interdire cependant de les réduire à leur expression la plus simple lorsque celle-ci suffisait pour atteindre le but que nous visions. Par ailleurs, nous avons cru devoir rappeler quelques notions bien connues qui étaient essentielles à notre propos.

En raison des limites que nous avons dû nous imposer, le contenu concret des problèmes économiques a souvent cédé le pas à ce que nous croyons être l'essence même de l'analyse logique des fondements ; toutefois, notre bibliographie permettra, à toutes fins utiles, de remonter de nos développements aux exemples et

problèmes concrets dont ils émanent. L'attention et la place prépondérante que nous avons cru devoir accorder aux fondements de l'économie nous ont paru indispensables lorsque l'on se propose d'arriver à des conclusions susceptibles de recueillir un assentiment plus général.

Toute analyse des fondements requiert d'abord un effort qui permette de sortir de l'ornière des habitudes scientifiques acquises. Pour mener à bien cette opération d'affranchissement, de libération, pour atteindre une position en dehors des sentiers battus, l'ardeur d'un néophyte ne pouvait suffire ; il fallait qu'elle soit soutenue par la compétence, par l'affectueuse sollicitude d'un maître. Notre directeur de recherches, M. le Professeur Lucien Féraud, a été ce maître : tout au long du chemin que nous avons parcouru, il a réussi non seulement à nous guider, mais encore à nous communiquer son intérêt, son enthousiasme pour l'étude des problèmes que posent à la théorie de la connaissance les sciences économiques et sociales. Nous ne saurions manquer de lui exprimer notre profonde gratitude pour toute l'aide qu'il nous a donnée et aussi pour nous avoir ouvert tout un domaine de la pensée.

M. le Professeur René Roy, membre de l'Institut, qui à Paris nous a initié à l'économétrie, et qui reste notre maître dans cette discipline, a bien voulu accorder une bienveillante attention à notre travail. Nous en avons été grandement encouragé et ses conseils, qui nous ont déjà été précieux, ne manqueront pas de nous guider encore dans nos recherches futures. Qu'il sache combien nous lui gardons de reconnaissance et d'attachement.

M. le Professeur Jacques A. L'Huilier, Doyen de la Faculté des sciences économiques et sociales de l'Université de Genève, a éveillé notre intérêt pour la science économique et aussi notre admiration pour les belles structures logiques. Ses enseignements n'ont pas cessé d'être présents à notre esprit au cours de l'élaboration de la présente étude. Il ne nous a pas ménagé ses encouragements et nous lui en sommes particulièrement reconnaissant.

Nous adressons aussi nos profonds remerciements à M. le Professeur Gérald Mentha qui a bien voulu prendre le temps de lire notre manuscrit et de nous manifester l'intérêt qu'il portait aux problèmes que nous nous sommes efforcé de traiter.

Enfin, qu'il nous soit permis, en terminant, d'exprimer toute notre respectueuse reconnaissance à M. le Professeur Claudius P. Terrier, Vice-Recteur de l'Université de Genève, pour la sollicitude qu'il a manifestée à l'égard de nos efforts au cours de ces dernières années (1).

PREMIÈRE PARTIE

MODÈLES ÉCONOMIQUES

(1) Nous ne saurions manquer d'exprimer nos vifs remerciements à M. le Professeur Daniel Dugué, Directeur de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, et au Comité de rédaction, qui ont bien voulu accueillir notre travail dans leur Collection.

L'œuvre de ce maître, tout au long de sa carrière, a été marquée par une constante volonté de perfectionnement. Ses recherches ont porté sur les aspects les plus originaux de la psychologie expérimentale, et ses enseignements ont formé de nombreux chercheurs de renom. Sa personnalité, marquée par une grande simplicité et une profonde humanité, a été pour ses élèves un modèle à suivre. Ses travaux ont été reconnus par la communauté scientifique internationale, et son nom reste associé à l'histoire de la psychologie moderne.

Notre Directeur de recherches, M. le Professeur Louis Pasteur, a été un maître pour nous, tout au long de sa carrière. Il a su nous transmettre non seulement ses connaissances, mais aussi son amour de la science et son sens de la responsabilité. Ses travaux ont été reconnus par la communauté scientifique internationale, et son nom reste associé à l'histoire de la psychologie moderne.

M. le Professeur René Rey, membre de l'Institut, qui a été pour nous un maître et un collègue, a été un maître pour nous, tout au long de sa carrière. Il a su nous transmettre non seulement ses connaissances, mais aussi son amour de la science et son sens de la responsabilité. Ses travaux ont été reconnus par la communauté scientifique internationale, et son nom reste associé à l'histoire de la psychologie moderne.

M. le Professeur Jacques A. L'Houillier, Doyen de la Faculté des Sciences et de la Faculté de Médecine de l'Université de Paris, a été un maître pour nous, tout au long de sa carrière. Il a su nous transmettre non seulement ses connaissances, mais aussi son amour de la science et son sens de la responsabilité. Ses travaux ont été reconnus par la communauté scientifique internationale, et son nom reste associé à l'histoire de la psychologie moderne.

M. le Professeur Albert Michotte, Doyen de la Faculté de Philosophie et de Lettres de l'Université de Paris, a été un maître pour nous, tout au long de sa carrière. Il a su nous transmettre non seulement ses connaissances, mais aussi son amour de la science et son sens de la responsabilité. Ses travaux ont été reconnus par la communauté scientifique internationale, et son nom reste associé à l'histoire de la psychologie moderne.

M. le Professeur Jean Piaget, Doyen de la Faculté de Sciences de l'Université de Genève, a été un maître pour nous, tout au long de sa carrière. Il a su nous transmettre non seulement ses connaissances, mais aussi son amour de la science et son sens de la responsabilité. Ses travaux ont été reconnus par la communauté scientifique internationale, et son nom reste associé à l'histoire de la psychologie moderne.

CHAPITRE I

MODÈLES ET SCIENCE ÉCONOMIQUE

PREMIÈRE PARTIE

MODÈLES ÉCONOMIQUES

PREMIÈRE PARTIE

MODÈLES ÉCONOMIQUES

CHAPITRE I

MODÈLES ET SCIENCE ÉCONOMIQUE

"Con la forma teoretica l'uomo comprende le cose, con la pratica le viene mutando ; con l'una si appropria l'universo, con l'altra lo crea."

B. Croce (1)

"La science pure a pour but la construction d'un modèle abstrait qui se raccorde aux faits au début par une conceptualisation et à la fin par une déconceptualisation."

L. Féraud (2)

"C'est l'économie pure qui devrait répondre aux problèmes les plus fondamentaux et les poser de la façon la plus irréprochable."

B. de Finetti (3)

(1) Benedetto Croce, *Filosofia dello spirito, I, Estetica come scienza dell'espressione e linguistica generale*, Bari, Giuseppe Laterza e figli, 1946, p. 54.

(2), (3), "Réponses à la première enquête scientifique en vue de dégager les possibilités et les limites de l'application des sciences mathématiques (et en particulier du calcul des probabilités) à l'étude des phénomènes économiques et sociaux", (Enquête dirigée par M. Maurice Fréchet) dans *Revue de l'Institut international de statistique*, 14e année, livraison 1/4, 1946.

§ 1 - LA NOTION DE MODELE -

1) Avant d'aborder l'étude des modèles économiques il nous a paru opportun de présenter ici quelques réflexions au sujet de l'utilisation des modèles dans les sciences en général. Réflexions qui pourront peut-être paraître évidentes aux spécialistes de disciplines qui depuis longtemps font largement appel dans leurs recherches à ces instruments, mais qui à notre sens s'imposent ici soit à cause de l'état actuel du développement des méthodes de recherche en science économique(1), soit aussi plus simplement pour préciser le point de vue que nous allons adopter dans le présent ouvrage et mieux délimiter et situer notre recherche dans le cadre d'une étude qui se voudrait plus complète.

Il nous faut donc introduire quelques notions essentielles. D'une façon quelque peu schématique nous dirons que toute science a pour objet une certaine réalité qu'elle considère en vue d'aboutir à certaines conclusions, ou tout au moins à une certaine connaissance. Quant aux méthodes de recherche, on peut dire que toute science procède par deux voies : l'une étant celle de l'expérimentation,

(1) Maurice Allais écrit ce qui suit dans l'introduction à son *Cours d'économie générale de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris* :

"L'économie en tant que science - C'est là certainement une particularité remarquable de la science économique que de nécessiter une introduction dans laquelle sont exposées les raisons qui doivent la faire considérer comme une science, c'est-à-dire comme une discipline susceptible de faire l'objet de théories à la fois efficientes et commodes tant pour la compréhension des faits que pour l'action.

Ces raisons sont en effet identiques à celles qui sont relatives à la mécanique rationnelle ou à la physique mathématique ; mais pour ces sciences, ce sont là des vérités admises depuis fort longtemps et l'on n'éprouve plus le besoin de les justifier. Dans le cas de la science économique, au contraire, il s'agit d'une science toute nouvelle pour laquelle les principes fondamentaux ne sont pas encore suffisamment admis pour qu'on les puisse passer sous silence.

Peut-être, au fond, peut-on regretter que les cours de physique et de résistance des matériaux, par exemple, ne commencent pas également par une introduction dans laquelle seraient exposés leurs principes méthodologiques fondamentaux. Une telle méthode aurait pour le moins l'immense avantage de souligner les difficultés essentielles que l'on finit par oublier complètement. En fait, il est frappant de voir combien les questions de principe que pose dans son élaboration la jeune science économique sont analogues à celles qui ont été soulevées lors de l'élaboration des premières théories physiques. Leur étude présente donc pour la philosophie générale des sciences un intérêt considérable."

l'autre celle du raisonnement⁽¹⁾. Tout cela demande à être précisé.

Le raisonnement fondé sur les règles de la logique ne pourra être conduit que dans le cadre d'un système de concepts abstraits. On substituera à la réalité un système approprié de concepts, en d'autres termes on fera correspondre à une situation réelle donnée un "modèle" abstrait ou théorique. Le processus d'abstraction sera dit une "conceptualisation".

La réalité étudiée relève de la simple description, tandis que le modèle conceptuel introduit est conçu comme un ensemble de propositions, d'hypothèses, desquelles on va tirer les implications ou conséquences théoriques qu'il contient implicitement. Après quoi il s'agira de revenir au réel, de traduire en termes concrets les conséquences théoriques que l'on vient d'établir : ce sera le rôle de la "déconceptualisation".

Il nous paraît inutile de nous attarder ici sur le terme de modèle qui depuis quelques années semble avoir acquis droit de cité dans la terminologie scientifique en général.

Revenons plutôt à l'étude de l'autre voie de recherche que nous avons désignée ci-dessus comme étant celle de l'expérimentation. Nous entendons par expérimentation en un sens très large, toute action directe ou indirecte effectuée sur une réalité donnée en vue de susciter ou de recueillir des conséquences observables. Dans ce sens, l'expérimentation suppose aussi un certain processus d'abstraction permettant de préparer, de planifier l'expérience⁽²⁾. En effet, toute réalité, aussi simple soit-elle, ne saurait donner lieu à une expérimentation sans une certaine abstraction conduisant à un plan d'expérience approprié.

(1) Cf. C.H. Coombs, H. Raiffa, R.M. Thrall, "Some Views on Mathematical Models and Measurement Theory", dans *Decision Processes*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954, pp. 19-37.

(2) Cf. R.A. Fisher, *The Design of Experiments*, Edinburgh, Oliver and Boyd, 1935.

D.L. Cox, *Planning of Experiments*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1958.

D. Dugué, M. Girault, *Analyse de variance et plans d'expérience*, Paris, Dunod, 1959.

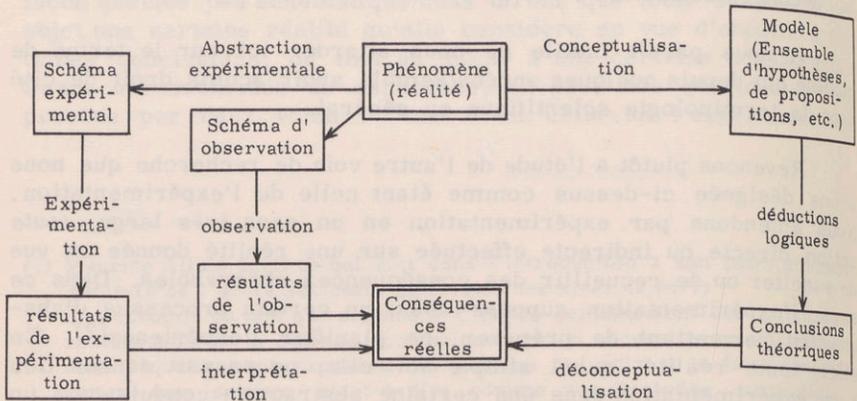
Voir aussi L. Féraud, "Les statistiques et la statistique dans les sciences économiques et sociales", dans *Revue économique et sociale*, 4 (1961), pp. 315-334.

R. Roy, "Du rôle de la statistique dans l'élaboration des concepts", dans *Journal de la Société de statistique de Paris*, 7/8/9 (1961), pp. 212-220.

Le processus d'expérimentation achevé il s'agira encore de revenir au réel par une interprétation (généralement statistique) des résultats de l'expérience.

L'observation dirigée - que nous opposerons à l'observation pure et simple de nature essentiellement descriptive - peut être considérée comme un cas particulier de l'expérimentation telle que nous l'avons définie ci-dessus. Ici le rôle de l'expérimentateur se réduit au choix de certaines conséquences observables, sans qu'il veuille ou puisse en susciter. Toutefois son action ici encore ne saurait se passer d'une certaine abstraction initiale.

Le diagramme qui suit résume ce que nous venons de dire.



Nous avons distingué l'observation dirigée de l'expérimentation, même si, comme nous venons de le dire, cette dernière la comprend comme cas particulier, en raison du rôle important qu'elle joue dans les sciences humaines.

2) Le diagramme que nous venons de donner essaie de rendre compte des deux cheminements essentiels de la recherche scientifique. Par une confrontation entre les résultats de l'expérimentation (ou de l'observation dirigée) et les conclusions auxquelles conduit le modèle théorique, on aboutira à une certaine connaissance, à certaines conclusions au sujet du phénomène étudié. Nous ne pouvons pas nous étendre ici sur les techniques actuelles plus ou moins raf-

finées propres à cette confrontation⁽¹⁾. Soulignons toutefois qu'en général, pour peu que l'on attache suffisamment de confiance à l'expérimentation (observation dirigée) on essaiera par cette confrontation de juger de la plus ou moins grande fidélité de la représentation par le modèle du phénomène envisagé. Ce qui ne va évidemment pas sans un certain arbitraire car, si le modèle simplifie la réalité envisagée, ainsi que nous l'avons vu, l'expérimentation suppose elle aussi une certaine abstraction. Il pourrait donc se faire qu'un modèle ne puisse plus être jugé satisfaisant à la suite d'une amélioration de l'abstraction expérimentale dans le sens d'une représentation plus fidèle de la réalité. Ne pouvant pas éliminer cet arbitraire, un modèle théorique ne pourra être considéré comme fidèle qu'après avoir été confronté à des expériences conduites dans le cadre d'un schéma expérimental déterminé.

Si l'expérimentation - dans le cadre d'un schéma expérimental donné - nous permet de juger de la fidélité d'un modèle théorique, c'est à ce dernier, dans la mesure où il peut être retenu, qu'il appartient de nous éclairer sur la structure et les implications propres au phénomène étudié.

Il nous reste à souligner que la construction d'un modèle théorique aussi bien que celle d'un schéma expérimental ne va pas sans s'inspirer d'expériences (observations) et de modèles antérieurs concernant le même phénomène.

3) A dessein nous n'avons pas utilisé jusqu'ici le terme de modèle mathématique, car ce que nous venons de dire au sujet de la conceptualisation, dans sa généralité, reste valable quelle que soit la représentation formelle adoptée. Ainsi nous ne saurions dénier la qualification de modèles aux schémas conceptuels utilisés par la science économique quand ils ne se présentent pas sous forme mathématique. Dans la suite nous considérerons presque exclusivement des modèles mathématiques⁽²⁾, sans pour cela prétendre

(1) Cf. E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959.

L. Féraud, "Sur les fondements des critères statistiques", dans *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, 10 (1961), pp. 155 - 183.

(2) Cf. E. Malinvaud, "L'agrégation dans les modèles économiques", dans *Cahiers du séminaire d'économétrie*, 4 (1956), pp. 69 - 146.

C.H. Coombs, H. Raiffa, R.M. Thrall, "Some Views on Mathematical Models and Measurement Theory", op. cit.

que ce type de modèle est supérieur aux autres. Il peut même se faire que deux conceptualisations d'une même réalité, formellement différentes et dont une seule est mathématique, soient en correspondance très étroite. Il en est ainsi, par exemple, pour les modèles de l'école marginaliste qui se traduisent immédiatement en termes mathématiques grâce à la formalisation fournie par le calcul infinitésimal. On pourrait considérer que les marginalistes ont redécouvert, sans faire de mathématiques, les premiers éléments du calcul infinitésimal.

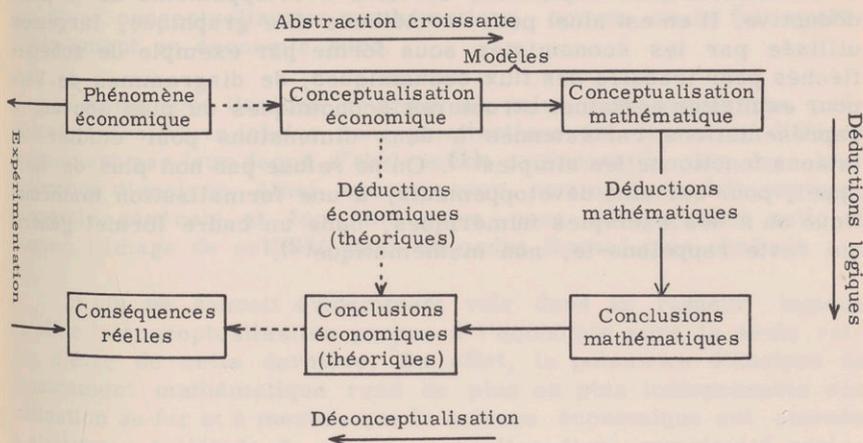
Il reste pourtant un argument très fort en faveur de la formalisation mathématique. En effet, si au stade de la conceptualisation nous sommes principalement intéressés par la reproduction fidèle de la réalité dans un cadre conceptuel, par la suite, sur la voie des déductions logiques devant nous conduire aux conclusions, nous serons particulièrement intéressés par la puissance logique de l'instrument qui nous permettra de franchir cette étape. On conviendra facilement alors que la richesse et la force des mathématiques nous fourniront ici généralement l'instrument le plus efficace.

Ce que nous venons de dire nous conduit à souligner un fait important. Parmi les différentes conceptualisations d'une même réalité, il pourra y en avoir qui se correspondront très étroitement, ne différant que par leur aspect formel, plusieurs d'entre elles pouvant d'ailleurs être d'ordre mathématique. Chacune de ces conceptualisations sera en quelque sorte l'image, dans la formalisation qui lui est propre, des autres conceptualisations. Et d'une façon assez générale, plus on s'éloignera du concret, plus la terminologie, la formalisation, se feront abstraites, plus on gagnera en puissance de raisonnement. C'est là d'ailleurs un fait bien connu des personnes qui s'occupent des machines électroniques où l'on essaie de formuler les programmes sous une forme de plus en plus abstraite, de plus en plus éloignée de la structure réelle de la machine, ceci en vue d'augmenter l'efficacité de la programmation.

§ 2 - ECONOMIE GENERALE ET ECONOMIE PURE -

1) Le schéma que nous avons donné au point 1 du paragraphe précédent s'applique évidemment à la recherche en économie. Nous en donnons ici, en le décomposant, une version quelque peu modifiée, plus adaptée à faire ressortir les problèmes propres à cette science. Ce sera aussi l'occasion de mieux préciser, en fonction de la science économique, quelques notions que nous avons envisagées précédemment d'une façon volontairement très générale.

La partie du diagramme qui traduit les opérations propres à la conceptualisation peut ainsi être représentée :



Les cheminements en tirets et en pointillés essaient de rendre compte des étapes essentielles de la pensée propres à cette partie de l'analyse économique que nous désignerons, à défaut d'un meilleur terme, par "économie générale".

A une réalité économique déterminée on substitue, par un processus d'abstraction, un cadre conceptuel, un modèle, devant permettre d'aboutir par une chaîne de déductions logiques à des conclusions théoriques. Conclusions qu'il s'agit ensuite d'interpréter en termes économiques concrets, de déconceptualiser pour qu'elles puissent nous fournir certaines conclusions au sujet de la réalité ou du phénomène économique étudié. Quant aux formes que prend habituellement cette conceptualisation économique⁽¹⁾, elles ont en général en commun le fait d'utiliser une terminologie pouvant permettre de garder, tout au long du processus déductif, un contact assez étroit avec la réalité, ce qui permet d'ailleurs de faire largement appel à l'intuition. Il arrive ainsi souvent que l'on retrouve des arguments inspirés de "cas réels" entremêlés aux déductions logiques en vue de les appuyer ou de les faciliter. Ce souci de gar-

(1) Cf. dans l'introduction de François Perroux au tome 9 (L'univers économique et social) de l'Encyclopédie Française : "Le passage à la conceptualisation" pp. 9.04 - 1/9.06 - 10.

der un contact plus étroit entre la conceptualisation adoptée et le réel ne signifie toutefois pas que l'on s'abstienne systématiquement de recourir à quelques "instruments" pouvant rendre plus aisés, ou en tout cas plus explicites, certains développements de la phase déductive. Il en est ainsi pour la méthode dite graphique, largement utilisée par les économistes sous forme par exemple de schémas fléchés pour traduire des flux économiques, de diagrammes de Venn pour expliciter certaines structures économiques ou plus souvent de représentations cartésiennes à deux dimensions pour étudier les liaisons fonctionnelles simples⁽¹⁾. On ne refuse pas non plus de faire appel, pour certains développements, à une formalisation mathématique ou à des exemples numériques, dans un cadre formel général qui reste rappelons-le, non mathématique⁽²⁾.

(1) Voir p. ex. J. Robinson, *The Economics of Imperfect Competition*, London, Macmillan, 1950, où il est fait systématiquement usage de représentations cartésiennes.

Voir aussi Meade, *A Geometry of International Trade*, London, 1952, qui représente géométriquement différentes liaisons intervenant dans la théorie du commerce international.

(2) On trouve des exemples nombreux de ceci dans la littérature économique ; voir par exemple :

R. Triffin, *Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory*, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1940.

W. Fellner, *Competition among the Few*, New York, Knopf, 1949.

G. Demaria, *Logica della produzione e della occupazione*, Milano, R. Malfasi, 1950.

D.N. Dunlop, *Wage Determination under Trade Unions*, New York, A.M. Kelley, Inc., 1950.

P. Jannaccone, *Prezzi e mercati*, Torino, Einaudi, 1951 (fait largement appel aux illustrations numériques).

J. Marchal, *Le mécanisme des prix*, Paris, Librairie de Medicis, 1951.

E.H. Chamberlin, *La théorie de la concurrence monopolistique*, Paris, P.U.F., 1953.

W. Fellner, *Emergence and Content of Modern Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1960.

Diran Bodenhorn, *Intermediate Price Theory*, New York, McGraw-Hill, 1961.

Ce qui distingue donc à notre sens l'économie générale de l'économie pure⁽¹⁾ - dont les problèmes méthodologiques appartiennent, sur le diagramme ci-dessus, au cheminement en trait plein - c'est que la première ne s'insère pas de prime abord dans le cadre d'une conceptualisation mathématique, comme on le fait systématiquement en économie pure.

Comme nous l'avions souligné au point 3 du paragraphe précédent, on retrouve ici des conceptualisations qui devraient différer uniquement par leur degré d'abstraction croissant de pair avec leur puissance d'analyse. Ainsi, sans opposer, comme on le fait souvent, économie générale et économie pure, nous envisagerons celle-ci comme l'image de celle-là dans un cadre formel plus abstrait.

2) On ne saurait évidemment voir dans la rigueur logique qu'offre la conceptualisation propre à l'économie pure la seule raison d'être de cette dernière. En effet, la puissance d'analyse de l'instrument mathématique rend de plus en plus indispensable son utilisation au fur et à mesure que la science économique est amenée à s'attaquer à l'étude de situations réelles d'une complexité croissante. Il arrivera ainsi que l'étude théorique d'un phénomène déterminé ne puisse pas être menée à bien dans le cadre des méthodes habituelles de l'économie générale, c'est-à-dire que selon la représentation de notre diagramme, le chemin vertical en pointillé ne pourra pas être parcouru, ou ne pourra l'être que partiellement.

La conceptualisation mathématique elle-même pourra d'ailleurs se faire à des niveaux d'abstraction différents, dictés par la complexité et la généralité du phénomène étudié⁽²⁾. Ceci apparaîtra plus

(1) Un exemple remarquable d'utilisation systématique des apports de l'économie pure est fourni par une étude économique d'ensemble de Maurice Allais (*Economie et intérêt*, Paris, Imprimerie Nationale, 1947), et par le *Traité d'économie pure*, du même auteur.

Voir aussi P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Harvard University Press, 1955, et J. M. Henderson, R. E. Quandt, *Microeconomic Theory, a Mathematical Approach*, New York, McGraw-Hill, 1958.

R. Dehem, *Traité d'analyse économique*, Paris, Dunod, 1958.

P. Massé, *Le choix des investissements*, Paris, Dunod, 1959.

J. Lesourne, *Technique économique et gestion industrielle*, Paris, Dunod, 1960.

(2) On trouvera une illustration de cette tendance à recourir à des abstractions de plus en plus poussées dans les *Contributions to the Theory of Games*, vol. I, II, III, IV, dans la série des *Annals of Mathematics Studies*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

clairement dans la suite de cette étude quand on traitera de la formalisation mathématique des décisions économiques.

Ce que nous venons de dire ne diminue aucunement le rôle très important de l'économie générale. D'un côté en ce qui concerne les opérations de conceptualisation, on ne saurait aller d'une réalité déterminée à un modèle mathématique relevant de l'économie pure sans passer par l'intermédiaire d'une conceptualisation économique. Pour arriver à une formalisation mathématique on se heurterait souvent à des difficultés considérables si l'on n'avait pas la possibilité de recourir à l'économie générale. Certains problèmes économiques ne peuvent pas encore être étudiés ou ne le sont pas d'une façon satisfaisante dans le cadre de l'économie pure, faute de formalisation adéquate. Sur la voie devant aboutir à une telle formalisation, le rôle de l'économie générale est essentiel, car par une première abstraction qui surgit d'elle-même de la terminologie économique, elle permet d'isoler, de délimiter, d'explicitier les composantes essentielles du phénomène étudié. La plupart des conquêtes de la science économique sont redevables d'abord à l'économie générale qui a permis de poser les problèmes en termes abstraits et ainsi ouvert la voie à l'économie pure(1).

La déconceptualisation aussi est largement éclairée par l'apport de l'économie générale qui ne se limite pas à jouer un rôle d'intermédiaire entre les conclusions mathématiques et le réel, mais, de par son abstraction même, contribue à insérer les premières dans le cadre plus vaste de la connaissance économique.

Le rôle de l'économie générale n'est pas moins important dans la phase déductive, même si l'on admet que dans cette phase les instruments propres à l'économie générale risquent de devenir insuffisants. En effet, il sera toujours utile de traduire, dans la mesure du possible, en termes économiques, les différentes étapes du processus mathématique. En nous référant à notre diagramme, on pourrait dire qu'il s'agit en quelque sorte de projeter sur le che-

 (1) L'exemple récent le plus frappant est à notre sens celui de la *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie* de J.M. Keynes. En effet, cet ouvrage, conçu dans le cadre de l'économie générale, et qui ne va pas sans de nombreuses obscurités et sans faire largement appel à l'intuition, de par le renouveau des idées économiques qu'il propose est à l'origine d'un foisonnement de recherches en économie pure, notamment en ce qui concerne les études macroéconomiques.

min vertical en pointillé le chemin vertical en trait plein⁽¹⁾. Nous atteindrons ainsi une meilleure compréhension des mécanismes réels des phénomènes économiques. Sans vouloir anticiper sur le moment où nous serons amené à confronter systématiquement différentes conceptualisations ayant trait aux décisions économiques, nous pouvons nous y référer ici en vue d'éclairer cette dernière remarque. En effet, le processus déductif qui nous permettra d'explicitier les conséquences, sous forme de décisions par exemple, de certaines hypothèses, pourra nous renseigner non seulement sur les décisions qui seront prises, mais aussi sur les mécanismes réels qui engendrent ces décisions, ou si l'on veut sur la façon concrète selon laquelle ces décisions seront prises. Souvent, l'économie générale nous fournira de telles explications mieux que l'économie pure. Soulignons toutefois que l'application pratique de certaines techniques, telles les techniques de la recherche opérationnelle, par exemple, pourra rapprocher, en tout cas en ce qui concerne les problèmes de décisions, les mécanismes réels de prise de décisions, des méthodes d'analyse de l'économie pure.

(1) La structure même de certains traités reproduit ce parallélisme entre conceptualisation économique et conceptualisation mathématique. Ainsi J.R. Hicks, dans *Value and Capital* fournit en annexe une formalisation mathématique générale des problèmes qui l'occupent et dont il donne dans la partie principale une discussion détaillée dans le cadre de l'économie générale. On voit ici clairement apparaître d'une part la puissance d'analyse de l'économie pure et d'autre part l'intérêt que présente une interprétation, en termes relevant de l'économie générale, des étapes essentielles du raisonnement mathématique. De même l'étude fondamentale de J.E. Meade, *The Theory of International Economic Policy*, s'inspire d'un modèle mathématique.

On considère un espace métrique (X, d) et une famille \mathcal{F} de fonctions continues de X dans \mathbb{R} . On définit la distance de Hausdorff d_H entre deux sous-ensembles compacts A et B de X par :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{A \subset U} \inf_{B \subset U} d(x, U^c), \sup_{B \subset U} \inf_{A \subset U} d(x, U^c) \right\}$$

où U est un ouvert de X . Cette distance est équivalente à la distance de Hausdorff définie par :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right\}$$

On note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X . On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}(X)$ par la distance d_H . On note $\mathcal{K}_c(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X qui sont bornés. On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}_c(X)$ par la distance d_H . On note $\mathcal{K}_c(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X qui sont bornés. On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}_c(X)$ par la distance d_H .

On considère un espace métrique (X, d) et une famille \mathcal{F} de fonctions continues de X dans \mathbb{R} . On définit la distance de Hausdorff d_H entre deux sous-ensembles compacts A et B de X par :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{A \subset U} \inf_{B \subset U} d(x, U^c), \sup_{B \subset U} \inf_{A \subset U} d(x, U^c) \right\}$$

où U est un ouvert de X . Cette distance est équivalente à la distance de Hausdorff définie par :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right\}$$

On note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X . On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}(X)$ par la distance d_H . On note $\mathcal{K}_c(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X qui sont bornés. On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}_c(X)$ par la distance d_H .

On considère un espace métrique (X, d) et une famille \mathcal{F} de fonctions continues de X dans \mathbb{R} . On définit la distance de Hausdorff d_H entre deux sous-ensembles compacts A et B de X par :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{A \subset U} \inf_{B \subset U} d(x, U^c), \sup_{B \subset U} \inf_{A \subset U} d(x, U^c) \right\}$$

où U est un ouvert de X . Cette distance est équivalente à la distance de Hausdorff définie par :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right\}$$

On note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X . On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}(X)$ par la distance d_H . On note $\mathcal{K}_c(X)$ l'ensemble des sous-ensembles compacts de X qui sont bornés. On définit la topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}_c(X)$ par la distance d_H .

CHAPITRE II

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES MODÈLES ÉCONOMIQUES

"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intender la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."

Galileo Galilei

"Si, en contemplant les phénomènes, nous ne les rattachions point immédiatement à quelques principes, non seulement il nous serait impossible de combiner ces observations isolées, et, par conséquent, d'en tirer aucun fruit, mais nous serions même entièrement incapables de les retenir ; et, le plus souvent, les faits resteraient inaperçus sous nos yeux."

Auguste Comte⁽¹⁾

§ 1 - PRELIMINAIRES -

1) Avant de proposer une formalisation générale des modèles économiques ayant à notre sens l'avantage de faire ressortir les aspects logiques essentiels de ces derniers en les isolant des détails

(1) Auguste Comte, *Cours de philosophie positive*, Paris, Garnier, p. 15.

purement techniques, il nous faut introduire quelques notions. Dans tout ce qui va suivre, nous utiliserons les symboles habituels des mathématiques modernes. Nous supposerons connues certaines notions élémentaires essentielles⁽¹⁾.

2) Propositions, formes propositionnelles(2)

Soit \mathfrak{X} un ensemble et x un élément arbitraire (dit aussi variable, argument ou élément générique) de cet ensemble. Soit $P(x)$ une affirmation portant sur x . Nous dirons que la phrase $P(x)$ est une *forme propositionnelle*. On désignera par $\tilde{P}(x)$ la négation de $P(x)$.

Si on donne à x dans $P(x)$ une valeur déterminée x^* , c'est-à-dire si on remplace dans la forme propositionnelle $P(x)$, x par un élément déterminé x^* , on obtient une *proposition*, c'est-à-dire une affirmation portant sur l'élément x^* et pouvant être vraie ou fausse.

Si $\left(\forall x\right)$ on considère la forme propositionnelle $P(x)$ on obtient un ensemble de propositions (vraies ou fausses) que l'on peut désigner par $\left\{P(x)\right\}_{x \in \mathfrak{X}}$. On appelle *domaine* de la forme propositionnelle $P(x)$ l'ensemble de propositions ainsi défini. La donnée de la forme propositionnelle $P(x)$ et de l'ensemble \mathfrak{X} est donc équivalente à la donnée d'un ensemble de propositions $\left\{P(x)\right\}_{x \in \mathfrak{X}}$.

On peut remarquer qu'à l'aide d'un sous-ensemble $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ et d'une forme propositionnelle $P(x)$ il est possible de formuler des propositions en écrivant par exemple $\left(\forall x\right) : P(x)$, ou encore $\left(\exists x\right) : P(x)$. Chacune de ces deux affirmations peut être vraie ou

(1) On pourra consulter :

P. Dubreil, *Algèbre*, tome I, 2e édi., Paris, Gauthier-Villars, 1954.
N. Bourbaki, *I Éléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. Théorie des ensembles. Fascicule de résultats*, Paris, Hermann, 1958.

(2) Cf. J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, *Algèbre moderne et activités humaines*, Paris, Dunod, 1960, Chap. I.

A. Monjallon, *Introduction aux mathématiques modernes*, Paris, Vuibert, 1960, Chap. VI.

On pourra consulter aussi : D. Dubarle, "Logique", dans *Revue française de recherche opérationnelle*, 24 (1962), pp. 217-241.

Th. Greenwood, *Les fondements de la logique symbolique*, Paris, Hermann & Cie., 1938.

H. Reichenbach, *Introduction à la logistique*, Paris, Hermann & Cie., 1939.

fausse ; il s'agit donc bien de propositions.

3) Propriété définie dans un ensemble \mathfrak{X} (1)

Considérons le même ensemble \mathfrak{X} . Si on peut définir une propriété caractéristique qui ait un sens pour tout élément de \mathfrak{X} et telle que, quel que soit l'élément particulier $x^* \in \mathfrak{X}$ considéré, une et une seulement des deux affirmations :

- x^* possède la propriété,
- x^* ne possède pas la propriété,

soit vraie, on dit qu'on a défini une propriété dans \mathfrak{X} .

On appelle *ensemble représentatif*(2) de la propriété ainsi définie le sous-ensemble de \mathfrak{X} formé des éléments qui possèdent la propriété.

Considérons maintenant celles que nous appellerons la définition sous forme grammaticale et la définition ensembliste d'une propriété.

Définition sous forme grammaticale d'une propriété dans \mathfrak{X} .

Soit \mathcal{Q} une propriété définie dans \mathfrak{X} . Désignons par $\mathcal{Q}(x)$ la forme propositionnelle " x possède la propriété \mathcal{Q} ". Soit $P(x)$ une forme propositionnelle, dont l'écriture relèvera de la formalisation adoptée. Nous dirons que la propriété \mathcal{Q} peut être définie sous forme grammaticale à l'aide de la forme propositionnelle $P(x)$, ou encore que la forme propositionnelle $P(x)$ peut être considérée comme une définition sous forme grammaticale de la propriété \mathcal{Q} si et seulement si :

$$\left(\forall x \right) : \mathcal{Q}(x) \iff P(x),$$

(1) Cf. P. Dubreil, *Algèbre*, tome I, op. cit., Chap. I.
 A. Lentin et J. Rivaud, *Éléments d'algèbre moderne*, Paris, Vuibert, 1956, Chap. I.
 N. Bourbaki, *I Éléments, Théorie des ensembles, Fascicule de résultats*, op. cit., § 1.
 A. Monjallon, *Introduction aux mathématiques modernes*, op. cit. Chap. I.

(2) Cf. P. Dubreil, *Algèbre*, op. cit., Chap. I.

c'est-à-dire si et seulement si, quel que soit l'élément particulier $x^* \in \mathfrak{X}$ les propositions $\mathcal{Q}(x^*)$ et $P(x^*)$ sont équivalentes⁽¹⁾.

Remarquons que deux formes propositionnelles $P_1(x)$ et $P_2(x)$ d'écriture différente et telles que :

$$\left(\forall x \right) : P_1(x) \iff P_2(x)$$

peuvent être considérées soit comme des définitions sous forme grammaticale, différentes, d'une même propriété, soit comme les définitions sous forme grammaticale de deux propriétés équivalentes. Le premier de ces points de vue s'inspire plutôt de la définition ensembliste que nous verrons ci-après, en considérant comme identiques des propriétés dont l'énoncé sous forme grammaticale peut différer mais ayant même ensemble représentatif. Par contre, d'après le second point de vue, on identifie la propriété à l'écriture particulière de son énoncé sous forme grammaticale dans le cadre de la formalisation adoptée.

Définition d'une propriété sous forme d'ensemble.

Soit \mathfrak{X}_φ un sous-ensemble de \mathfrak{X} , pouvant d'ailleurs coïncider avec \mathfrak{X} . Nous dirons que la donnée de l'ensemble \mathfrak{X}_φ définit dans \mathfrak{X} une propriété \mathcal{Q} si et seulement si :

$$\left(\forall x \right) : \mathcal{Q}(x) \iff x \in \mathfrak{X}_\varphi$$

\mathfrak{X}_φ est alors l'ensemble représentatif de la propriété \mathcal{Q} .

A titre d'exemple, en vue d'illustrer les deux définitions que nous venons d'envisager, considérons la propriété \mathcal{Q} définissant dans l'ensemble N des nombres naturels la qualité de nombre pair. Soit $P_1(n) = "$ n est divisible par 2" et $P_2(n) = "$ $\left(\begin{smallmatrix} \exists m \\ N \end{smallmatrix} \right) : 2m = n"$. Les formes propositionnelles $P_1(n)$ et $P_2(n)$ peuvent être envisagées comme deux définitions sous forme grammaticale et d'écriture différente de la même propriété \mathcal{Q} . Et on aura :

 (1) Rappelons que deux propositions P et Q sont dites équivalentes [$P \iff Q$] si et seulement si elles sont simultanément vraies ou fausses ; ou si l'on préfère : la proposition $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P est vraie et Q est vraie ou P est fausse et Q est fausse.

$$\left(\forall_N^n \right) : \mathcal{Q}(n) \iff P_1(n) \iff P_2(n).$$

On pourrait aussi définir la même propriété \mathcal{Q} à l'aide du sous-ensemble de N :

$$N_{\mathcal{Q}} = \{ 2, 4, \dots \} = \{ 2m \}_{m \in N};$$

on aurait ainsi :

$$\left(\forall_N^n \right) : \mathcal{Q}(n) \iff n \in N_{\mathcal{Q}}.$$

Soulignons que les deux définitions que nous venons d'envisager ne se différencient pas toujours d'une façon très nette d'après leur écriture, tout en s'inspirant de points de vues différents. En particulier la deuxième définition pourrait se ramener à la première en considérant la forme propositionnelle $P(x) = "x \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}"$; réciproquement étant donné une forme propositionnelle $P(x)$ telle que $\left(\forall_{\mathcal{X}'}^x \right) : P(x)$ vraie et $\left(\exists_{\mathcal{X}'}^x \right) : P(x)$ fausse, on pourra définir une propriété \mathcal{Q} d'ensemble représentatif \mathcal{X}' en posant :

$$\left(\forall_{\mathcal{X}'}^x \right) : \mathcal{Q}(x) \iff x \in \mathcal{X}'.$$

Malgré ce que nous venons de dire il sera en général utile de distinguer les deux définitions équivalentes que nous venons de donner d'une propriété définie dans \mathcal{X} , car elles correspondent à la façon concrète par laquelle on est pratiquement amené à introduire des propriétés. Nous verrons par la suite qu'en général la définition d'un modèle économique revient à définir, dans un ensemble \mathcal{X} déterminé, une propriété sous forme grammaticale et que l'essentiel des opérations déductives réside dans la recherche de l'ensemble représentatif de la propriété ainsi introduite, recherche qui ne va pas toujours sans présenter des difficultés techniques.

4) On appellera propriété vide la propriété \emptyset telle que $\mathcal{X}_{\emptyset} = \Phi$, et propriété universelle la propriété \mathcal{U} telle que $\mathcal{X}_{\mathcal{U}} = \mathcal{X}$. La propriété $\bar{\mathcal{Q}}$ négation de \mathcal{Q} est telle que $\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{Q}}} = \overline{\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}}$; on l'appellera propriété complémentaire de \mathcal{Q} .

5) Il convient maintenant d'introduire celles que nous appellerons des propriétés composées. Elles seront définies sous forme grammaticale à partir de deux ou plusieurs formes propositionnelles. Soit les formes propositionnelles $\{P_i(x)\}_{i \in I}$. En utilisant les notations de l'algèbre des propositions⁽¹⁾ nous dirons que les formes propositionnelles composées :

$$P'(x) = \bigwedge_{i \in I} P_i(x) \quad \text{et} \quad P''(x) = \bigvee_{i \in I} P_i(x) \quad (2)$$

définissent dans \mathfrak{X} deux propriétés composées \mathfrak{Q}' et \mathfrak{Q}'' si et seulement si $(\forall x) : \mathfrak{Q}'(x) \iff P'(x)$ et $(\forall x) : \mathfrak{Q}''(x) \iff P''(x)$.

Soit $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}'}$ et $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}''}$ les ensembles représentatifs des propriétés \mathfrak{Q}' et \mathfrak{Q}'' ainsi définies. En désignant par $\{\mathfrak{X}_{\mathfrak{P}_i}\}_{i \in I}$ les ensembles représentatifs des propriétés $\{\mathfrak{P}_i\}_{i \in I}$ définies dans \mathfrak{X} par les formes propositionnelles $\{P_i(x)\}_{i \in I}$, on a évidemment :

$$\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}'} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{X}_{\mathfrak{P}_i} \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}''} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_{\mathfrak{P}_i}.$$

6) Soit \mathfrak{Q}_1 et \mathfrak{Q}_2 deux propriétés définies dans \mathfrak{X} .

Si $(\forall x) : \mathfrak{Q}_1(x) \implies \mathfrak{Q}_2(x)$ on dira que la propriété \mathfrak{Q}_1 est plus forte que la propriété \mathfrak{Q}_2 , ou que cette dernière est plus faible que \mathfrak{Q}_1 .

On vérifie aisément que $\left[(\forall x) : \mathfrak{Q}_1(x) \implies \mathfrak{Q}_2(x) \right] \implies \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}_1} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}_2}$.

On voit ainsi qu'il est équivalent de dire qu'une propriété \mathfrak{Q}_1 est plus forte qu'une propriété \mathfrak{Q}_2 ou que l'ensemble représentatif de la première est contenu dans celui de la seconde. En ce qui concerne les propriétés composées que nous venons d'introduire on vérifie immédiatement que :

$$(\forall x) : \mathfrak{Q}'(x) \implies \mathfrak{Q}''(x) \quad \text{car en effet} \quad \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}'} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}''}.$$

(1) Cf. J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, *Algèbre moderne et activités humaines*, op. cit., Chap. I.

A. Monjallon, *Introduction aux mathématiques modernes*, op. cit., Chap. VI.

7) En vue d'illustrer ce que nous venons de dire au sujet des propriétés définies dans un ensemble \mathcal{X} considérons deux exemples simples ; le premier faisant intervenir un ensemble \mathcal{X} discret et le second un ensemble \mathcal{X} ayant la puissance du continu. A propos du premier exemple soulignons tout de suite que l'étude de situations faisant intervenir des ensembles discrets a été longtemps négligée par la science économique malgré son importance pratique, ce qui s'explique aisément par les difficultés que l'on rencontre dans de telles études. Dans la suite de ce travail nous aurons l'occasion de montrer l'intérêt que présente, pour l'examen de telles situations, une conceptualisation s'inspirant des mathématiques modernes.

A - Soit \mathcal{X} l'ensemble des différentes catégories de biens de consommation durables disponibles à un moment donné sur un marché déterminé. Supposons pour simplifier que les biens de chaque catégorie $x \in \mathcal{X}$ sont disponibles en quantité illimitée. Soit p_x le prix unitaire des biens de la catégorie x . Considérons un individu i déterminé disposant, à la suite par exemple d'une hiérarchisation de ses besoins(1), d'un revenu r_i pour l'achat d'un bien de consommation durable.

La forme propositionnelle $P_i(x) =$ " le consommateur i peut acheter un bien de la catégorie x " peut engendrer des propositions vraies ou fausses selon que x prend des valeurs telles que $p_x \leq r_i$ ou telles que $p_x > r_i$. Si pour toute valeur de x on considère la forme propositionnelle $P(x)$ on obtient l'ensemble de propositions $\{P_i(x)\}_{x \in \mathcal{X}}$ qui est son domaine. A l'aide de la forme propositionnelle $P_i(x)$ définissons dans \mathcal{X} une propriété \mathcal{R}_i , telle que, en désignant par $\mathcal{R}_i(x)$ la forme propositionnelle " x possède la propriété \mathcal{R} " : $(\forall x) : \mathcal{R}_i(x) \iff P_i(x)$.

L'ensemble représentatif de la propriété \mathcal{R}_i sera alors l'ensemble $\mathcal{X}_{\mathcal{R}_i} \subseteq \mathcal{X}$ tel que : $(\forall x) : p_x \leq r_i$ et $(\forall x) : p_x > r_i$.

(1) Cf. R. Roy, "La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus". *Econometrica*, 1 (1933), pp. 265 - 273.
 R. Roy, "La hiérarchie des besoins et la notion de groupes dans l'économie de choix", *Econometrica*, 2 (1943), pp. 13 - 24.
 R. Roy, "La distribution du revenu entre les divers biens", *Econometrica*, 15 (1947), pp. 205 - 225.
 R. Roy, "Les élasticités de la demande relatives aux biens de consommation et aux groupes de biens", *Econometrica*, 20 (1952), pp. 391 - 405.

Considérons maintenant un ensemble I d'individus, et soit i la variable ayant pour champ cet ensemble. Pour chaque valeur particulière de i on peut considérer la forme propositionnelle $P_i(x)$ définissant dans \mathcal{X} une propriété \mathcal{Q}_i .

A l'aide des formes propositionnelles $P_i(x)$ définies $(\forall i)$ on peut alors définir dans \mathcal{X} les deux propriétés composées \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' en posant : $(\forall x) : \mathcal{Q}'(x) \iff \bigwedge_{i \in I} P_i(x)$ et $(\forall x) : \mathcal{Q}''(x) \iff \bigvee_{i \in I} P_i(x)$.

Les formes propositionnelles $\bigwedge_{i \in I} P_i(x)$ et $\bigvee_{i \in I} P_i(x)$ pouvant s'énoncer :

"tous les consommateurs de la classe I peuvent acheter chacun un bien de la catégorie x " et

"un au moins parmi les consommateurs de la classe I peut acheter un bien de la catégorie x ". Soit $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}'}$ et $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}''}$ les ensembles représentatifs des propriétés \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' . On aura évidemment

$$x \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}'} \iff p_x \leq \text{Min} [r_i ; i \in I]$$

$$x \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}''} \iff p_x \leq \text{Max} [r_i ; i \in I].$$

On vérifie aisément sur cet exemple que :

$$(\forall x) : \mathcal{Q}'(x) \implies \mathcal{Q}''(x)$$

car en effet :

$$p_x \leq \text{Min} [r_i ; i \in I] \implies p_x \leq \text{Max} [r_i ; i \in I].$$

Ainsi \mathcal{Q}' est plus forte que \mathcal{Q}'' .

B - Considérons tous les biens de consommation courante (sucre, viande, café, etc.) disponibles sur un marché à un moment déterminé. Soit $x = \vec{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ un vecteur-quantités, ou, conformément à la terminologie économétrique, un "complexe de biens", q_i étant la quantité, exprimée dans une unité appropriée, du bien de rang i . Si on suppose que tous les biens, 1, 2, ..., n , sont parfaitement divisibles et disponibles en quantités illimitées, on aura $\mathcal{X} = R_+^n$.

Considérons maintenant la forme propositionnelle $P_1(\vec{q}) =$ "le complexe de biens \vec{q} fournit une quantité K de vitamines". L'ensemble représentatif de la propriété \mathcal{Q}_1 définie à l'aide de la forme propositionnelle $P_1(\vec{q})$ sera alors la variété linéaire de R_+^n définie par $\sum_{i=1}^n k_i q_i = K$, k_i étant la proportion de vitamines contenue dans une unité du bien de rang i .

D'une façon analogue on pourra aussi définir la propriété \mathcal{Q}_2 à l'aide de la forme propositionnelle $P_2(\vec{q}) =$ "le complexe de biens \vec{q} fournit une quantité H de protéines". Son ensemble représentatif est aussi une variété linéaire de R_+^n définie par $\sum_{i=1}^n h_i q_i = H$, h_i étant la proportion unitaire de protéines contenue dans le bien de rang i .

Soit \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' deux propriétés définies à l'aide des formes propositionnelles composées :

$P_1(\vec{q}) \wedge P_2(\vec{q}) =$ "le complexe de biens \vec{q} fournit une quantité K de vitamines et une quantité H de protéines" et

$P_1(\vec{q}) \vee P_2(\vec{q}) =$ "le complexe de biens \vec{q} fournit une quantité K de vitamines ou une quantité H de protéines".

Leurs ensembles représentatifs seront respectivement l'intersection et la réunion des deux variétés linéaires considérées.

Les deux exemples que nous venons de considérer nous amènent à remarquer que la définition d'une propriété \mathcal{Q} peut dépendre d'un certain nombre d'éléments non complètement spécifiés (dits aussi constantes ou paramètres), éléments pouvant intervenir directement dans la forme propositionnelle de définition à côté de la variable et des symboles auxiliaires (signes particuliers dont la signification dépend de la formalisation adoptée) ou auxquels on se référera d'une façon indirecte. Il en était ainsi pour les p_i , [r_i ; $i \in I$] dans l'exemple A., les k_i et les h_i dans l'exemple B., tandis que les constantes K et H intervenaient directement dans l'écriture de la forme propositionnelle de définition.

Il convient de souligner qu'une propriété n'est définie que si on suppose complètement spécifiés tous les éléments qui interviennent dans sa définition. Il sera pourtant commode en général et dans la mesure du possible de formuler une propriété à l'aide d'éléments dont il suffira de spécifier l'ensemble auxquels ils appartiennent,

ce qui revient en définitive à définir toute une famille de propriétés dépendant d'un certain nombre de paramètres.

§ 2 - STRUCTURE LOGIQUE DES MODELES ECONOMIQUES -

1) Nous avons vu au chapitre I qu'un modèle peut être considéré comme une image commode, dans le cadre conceptuel choisi et au niveau d'abstraction voulu, du phénomène économique que l'on étudie. La construction du modèle, s'inspirant de connaissances et d'expérimentations antérieures, suppose toute une chaîne d'opérations que nous avons résumées par le terme de conceptualisation.

La première opération essentielle de tout processus de conceptualisation revient à remplacer par des concepts⁽¹⁾ bien définis les différentes composantes que l'on a été amené à distinguer dans le phénomène étudié. On introduira par exemple les concepts d'épargne globale, d'investissement, etc., concepts qui relèvent de définitions précises, pouvant d'ailleurs varier selon le point de vue adopté. Ces concepts sont de nature essentiellement théorique, car on ne saurait les isoler par une simple observation de la réalité

(1) Cf. *Grand Larousse Encyclopédique*, ed. 1960 ; *concept* : "... Le concept est une idée *abstraite* (obtenue en se bornant à considérer certains caractères des objets, à l'exclusion d'autres caractères pourtant perçus) et *générale* (étendant les caractères ainsi considérés à tous les objets qui les possèdent). Du point de vue de la logique, tout concept se caractérise par sa *compréhension* (ensemble des caractères considérés dans les objets) et par son *extension* (ensemble des objets auxquels il peut s'appliquer). Compréhension et extension forment donc l'aspect logique du concept une fois élaboré, tandis qu'abstraction et généralisation sont les deux opérations psychologiques par lesquelles il s'élabore."

A. Lalande, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Paris, P.U.F., 1960 : *concept* : "L'idée, au sens B, en tant qu'abstraite et générale, ou du moins susceptible de généralisation. Les diverses écoles diffèrent sur la manière de concevoir et d'expliquer la formation des concepts. On distingue à cet égard : 1) des concepts *a priori* ou *purs* (reine Begriffe, Kant) c'est-à-dire des concepts que l'on considère comme n'étant pas tirés de l'expérience ; par exemple chez Kant, les concepts d'unité, de pluralité, etc. ; 2) des concepts *a posteriori*, ou *empiriques*, c'est-à-dire des notions générales définissant des classes d'objets données ou construites, et convenant d'une manière identique et totale à chacun des individus formant ces classes, qu'on puisse ou non les en isoler. Par exemple le concept de vertébré, le concept de plaisir."

L'utilisation que nous faisons du terme concept relèverait donc de 2), c'est-à-dire de la notion de concept *a posteriori* ou empirique.

étudiée ; leur élaboration suppose déjà une décomposition du phénomène relevant des opérations d'abstraction⁽¹⁾.

L'élaboration de concepts abstraits et généraux ne saurait suffire à les rendre utilisables pour la représentation d'un phénomène dans le cadre d'un modèle. Il faudra en effet préciser l'*extension*⁽²⁾ de chaque concept dans le cadre du modèle, c'est-à-dire l'ensemble des "situations" auxquelles il peut s'appliquer. Une *spécification*⁽³⁾ du phénomène sera définie par un état particulier donné à chacun des concepts utilisés. Ainsi, comme nous le verrons mieux par la suite, si l'un des concepts est la décision d'un agent économique déterminé, une spécification du phénomène étudié sera définie par une décision particulière et par une spécification de chacun des autres concepts.

La représentation abstraite du phénomène ne sera donc complète dans le cadre du modèle, que si l'on a défini pour chaque concept l'ensemble de tous les états particuliers admissibles. Ainsi, pour le concept d'épargne on définira par exemple les états particuliers admissibles dans le cadre du modèle par des montants exprimés en unités monétaires et compris entre des limites déterminées ; le concept "décision d'un agent économique déterminé" comprendra toutes les actions admissibles parmi lesquelles une sera choisie par l'agent considéré.

1) On trouvera par exemple une analyse intéressante de l'évolution de la définition du concept de capital dans la pensée économique dans Giovanni Demaria, *Logica della produzione e della occupazione*, op. cit., 4e partie, chap. Ier., "Il concetto di capitale", pp. 384 et ss.

2) Cf. A. Lalande, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, op. cit. ; *extension* : "... Ensemble des objets (réels ou idéaux, concrets ou abstraits) auxquels s'applique un élément de connaissance, c. à. d. : 1) pour un concept : ensemble des objets qu'il peut désigner (dont il est l'attribut) ; 2) pour une proposition : ensemble des cas où elle est vraie (par suite ensemble des hypothèses dont elle peut être la conséquence) ; 3) pour une relation : ensemble des systèmes de valeurs (attribuées aux termes généraux) qui la vérifient."

3) Cf. A. Lalande, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, op. cit. ; *spécification* : "A. Opération par laquelle on distingue les espèces d'un même genre.

B. Au sens courant du mot spécifier, action de bien déterminer une idée ou un fait, de les distinguer, par un caractère précis, des notions ou des objets voisins avec lesquels on pourrait les confondre."

Il convient de souligner ici que, si dans la plupart des modèles économiques habituels les états particuliers relevant des différents concepts s'expriment numériquement - ce qui permet en général de parler de variables numériques - cela n'est nullement une nécessité. Nous verrons par la suite en étudiant les problèmes de décisions, que s'il peut être commode pour des raisons techniques d'exprimer les actions particulières par des éléments d'un ensemble numérique, cette substitution d'un ensemble numérique à un ensemble d'actions n'est pas essentielle.

2) Comme nous venons de le voir, les différents concepts intervenant dans la représentation d'un phénomène économique peuvent être représentés par leur extension dans le cadre du modèle. Considérons une classe I de concepts, et soit $i \in I$ l'un quelconque d'entre eux ; on pourra représenter le concept i par l'ensemble \mathfrak{X}_i des états particuliers x_i .

La représentation d'un phénomène économique à l'aide des concepts de la classe I prendra donc la forme $\{x_i \in \mathfrak{X}_i\}_{i \in I}$, une spécification du phénomène se traduisant par une spécification de chaque concept de la classe I considérée. Plus brièvement soit $x = [x_i ; i \in I]$ une spécification du phénomène. On pourra la représenter par $x \in \mathfrak{X}$, \mathfrak{X} étant l'ensemble produit $\prod_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Le phénomène ainsi défini peut être considéré comme un concept dont l'extension est donnée par l'ensemble \mathfrak{X} .

3) Ayant ainsi représenté le phénomène étudié par un ensemble, il s'agit maintenant d'introduire les hypothèses que l'on appelle généralement les lois qui régissent le phénomène. Ces hypothèses seront introduites sous forme de liaisons entre les différents concepts $\{x_i \in \mathfrak{X}_i\}_{i \in I}$ utilisés pour définir le phénomène \mathfrak{X} étudié. Dire que les liaisons ainsi introduites portent sur les différents concepts intervenant dans la définition du phénomène équivaut à dire que ces liaisons ont un sens pour toute spécification du phénomène (car comme nous l'avons vu ces spécifications font toutes intervenir les spécifications des mêmes concepts). Dans la représentation du phénomène à l'aide de l'ensemble \mathfrak{X} une hypothèse sera alors vérifiée si et seulement si les liaisons qu'elle définit sont vérifiées. D'après la terminologie utilisée ici, définir dans \mathfrak{X} une hypothèse H revient donc à définir une propriété caractéristique ayant un sens pour tout élément de \mathfrak{X} et telle que pour tout élément particulier $x^* \in \mathfrak{X}$ on ait : H est vérifiée si et seulement si x^* vérifie la propriété. L'hypothèse H peut donc être considérée comme une pro-

priété définie dans \mathcal{X} . Nous désignerons par $H(x)$ la forme propositionnelle " x vérifie l'hypothèse (propriété) H ". Nous dirons aussi que H est une hypothèse définie dans \mathcal{X} , d'ensemble représentatif \mathcal{X}_H .

Comme nous l'avons remarqué au sujet des propriétés, la définition d'une hypothèse H dans \mathcal{X} pourra se faire soit sous forme grammaticale soit sous forme ensembliste. En général les hypothèses que l'on sera amené à introduire dans un modèle seront définies sous forme grammaticale, à l'aide donc de formes propositionnelles appropriées dont l'écriture relèvera de la conceptualisation adoptée, chaque hypothèse, ou si l'on préfère chaque forme propositionnelle qui la définit, traduisant, dans la terminologie propre au cadre conceptuel adopté, certaines connaissances que l'on a au sujet du phénomène étudié.

Pratiquement la construction d'un modèle fera intervenir plusieurs hypothèses $\{H_j\}_{j \in J}$, définies chacune à l'aide d'une forme propositionnelle $\{P_{H_j}(x)\}_{j \in J}$.

Ces hypothèses peuvent se ramener à une hypothèse (ou propriété) composée unique H définie sous forme grammaticale par la forme propositionnelle $P_H(x) = \bigwedge_{j \in J} P_j(x)$ de telle sorte que, par définition, l'hypothèse composée H sera vérifiée si et seulement si chacune des hypothèses $\{H_j\}_{j \in J}$ est vérifiée. Son ensemble représentatif sera $\mathcal{X}_H = \bigcap_{j \in J} \mathcal{X}_{H_j}$.

4) Nous venons de voir que les notions de phénomène et d'hypothèse portant sur les lois régissant le phénomène pouvaient être remplacées par les notions précises d'ensemble et de propriété définie dans cet ensemble, notions qu'il nous a suffi de définir d'une façon générale. Nous verrons par la suite comment ces notions s'appliquent à des cas particuliers. En étudiant notamment la représentation des décisions économiques par des modèles nous verrons d'une façon plus précise comment on sera amené à munir l'ensemble \mathcal{X} d'une structure déterminée, en vue de pouvoir définir des hypothèses (ou propriétés) dans cet ensemble.

Nous pouvons maintenant définir d'une façon générale la notion de modèle en nous inspirant des deux opérations essentielles présidant à sa formulation, soit : la définition d'un ensemble \mathcal{X} et la définition dans \mathcal{X} d'une hypothèse -généralement composée- H .

Nous dirons qu'un modèle M consiste en la définition d'un ensemble \mathfrak{X} et d'une hypothèse (ou propriété) H dans \mathfrak{X} , ce que nous pouvons écrire :

$$\{x \in \mathfrak{X}; H\} \iff \{x \in \mathfrak{X}_H; \mathfrak{X}_H \subseteq \mathfrak{X}\},$$

\mathfrak{X}_H étant l'ensemble représentatif de l'hypothèse H définie dans \mathfrak{X} .

5) Il convient pourtant de distinguer le modèle tel qu'on a été amené à le formuler à la suite des opérations de conceptualisation, du modèle représenté par ses conclusions théoriques. En effet, en général, après avoir défini l'ensemble \mathfrak{X} muni d'une structure appropriée, on sera amené à formuler - dans l'écriture propre à la conceptualisation adoptée - une hypothèse composée H . Comme nous l'avons vu, cette hypothèse H sera définie à l'aide d'une forme propositionnelle composée $P_H(x)$, le caractère composite de cette forme propositionnelle traduisant justement la multiplicité des connaissances dont on s'inspire et qu'on utilise sous forme d'hypothèses particulières en vue de définir le modèle. En d'autres mots, la nature même de nos connaissances théoriques devant nous inspirer dans la formulation de l'hypothèse H est telle, que nous ne saurions en général les exprimer directement par une seule forme propositionnelle sans passer par l'intermédiaire d'autres formes propositionnelles particulières.

La forme propositionnelle $P_H(x)$ à laquelle on aboutira à la suite des opérations de conceptualisation, de par sa nature composite notamment, ne nous fournira pas en général directement les conclusions théoriques contenues dans H , en spécifiant les éléments qui parmi ceux de l'ensemble \mathfrak{X} satisfont l'hypothèse H du modèle. En général la forme propositionnelle $P_H(x)$ permet simplement de définir l'hypothèse H sous forme grammaticale, ou si l'on préfère nous donne une description des propriétés caractéristiques devant être vérifiées par les éléments de \mathfrak{X} pour qu'ils satisfassent H , sans les désigner directement. Il arrivera naturellement dans certains cas que l'on puisse se contenter de définir, dans le modèle, H seulement sous forme grammaticale. Il en sera ainsi notamment quand l'écriture du modèle sous forme grammaticale équivaut pratiquement à désigner les éléments de \mathfrak{X} qui vérifient l'hypothèse H .

Le propre de la phase déductive dont nous avons parlé au chapitre I réside justement dans le passage de l'hypothèse H , formulée sous forme grammaticale, à la désignation des éléments de \mathfrak{X} qui la vérifient ; d'une façon plus précise il s'agira de déterminer, à partir de la forme propositionnelle $P_H(x)$, l'ensemble représentatif

de l'hypothèse H, opération qui peut être considérée comme étant la recherche des conclusions auxquelles conduit l'hypothèse H formulée sous forme grammaticale. Ici naturellement la supériorité d'une formalisation se jugera par la puissance des techniques dont elle dispose en vue d'effectuer cette recherche.

En résumé, d'un même modèle M, pouvant être considéré comme une hypothèse H définie dans un ensemble \mathfrak{X} approprié, nous pouvons distinguer deux écritures différentes et équivalentes M_H et M_C , la première correspondant en général à la formulation du modèle sous forme grammaticale, aboutissement des opérations de conceptualisation, la seconde correspondant aux conclusions contenues implicitement dans M_H , conclusions qu'on aura explicitées sous forme du sous-ensemble de \mathfrak{X} dont les éléments seuls satisfont l'hypothèse H. On aura ainsi : $M_H = \{ x \in \mathfrak{X} ; P_H(x) \}$ et $M_C = \{ x \in \mathfrak{X}_H \subseteq \mathfrak{X} \}$ avec évidemment $M_H \iff M_C$.

6) Si la recherche des conclusions les plus générales devant conduire à déterminer un ensemble \mathfrak{X}_H tel que $H(x) \iff x \in \mathfrak{X}_H$ s'avère trop difficile, il arrivera que l'on se contente de déterminer un ensemble $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ tel que $x \in \mathfrak{X}' \implies H(x)$ c'est-à-dire tel que $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}_H$. On dira alors que l'on a déterminé un ensemble \mathfrak{X}' de solutions particulières $x \in \mathfrak{X}'$ satisfaisant H, ou encore que l'on a déterminé une solution partielle \mathfrak{X}' (de la solution générale \mathfrak{X}_H). Souvent \mathfrak{X}' sera un ensemble singulier. On se contentera alors d'une seule solution particulière parmi celles satisfaisant H.

Il arrivera aussi, toujours pour des raisons techniques, qu'il soit plus aisé de déterminer un ensemble \mathfrak{X}'' tel que $\mathfrak{X}_H \subseteq \mathfrak{X}''$ et qu'il soit possible de se contenter de délimiter ainsi par \mathfrak{X}'' l'ensemble \mathfrak{X}_H des x satisfaisant H, ensemble qu'il peut être difficile de déterminer complètement. On aura alors naturellement : $H(x) \implies x \in \mathfrak{X}''$. Cette façon de procéder revient en définitive à déterminer l'ensemble \mathfrak{X}'' des x satisfaisant une hypothèse H'' plus faible que l'hypothèse H.

7) Du point de vue des conclusions, on distingue en général les trois cas suivants : l'ensemble \mathfrak{X}_H est un ensemble vide, un ensemble singulier ou un ensemble formé d'au moins deux éléments.

Si $\mathfrak{X}_H = \emptyset$, l'hypothèse H n'est vérifiée par aucun $x \in \mathfrak{X}$, elle est vide. S'il peut paraître absurde pratiquement qu'on ait été amené à formuler un modèle sous forme d'une propriété vide, il ne faut toutefois pas perdre de vue qu'en général l'hypothèse H doit être envisagée comme une hypothèse composée. Dire que l'hypothèse

H est vide équivaut donc à dire que les hypothèses $\{H_j\}_{j \in J}$ définies dans \mathfrak{X} sont incompatibles. Dans la terminologie habituelle si $\mathfrak{X}_H = \emptyset$ on dira que le modèle n'admet pas de solution.

Si \mathfrak{X}_H est un ensemble singulier on dira que le modèle admet une solution unique et, si \mathfrak{X}_H comprend au moins deux éléments, que le modèle admet au moins deux solutions, ou encore que la solution du modèle est indéterminée. Cette terminologie, s'inspirant de nos habitudes concernant la résolution des systèmes mathématiques, peut paraître marquer une préférence pour le cas où \mathfrak{X}_H est un ensemble singulier. Il convient donc de souligner que l'intérêt théorique des conclusions auxquelles conduit un modèle, comme nous le verrons mieux par la suite, ne dépend pas nécessairement du fait que \mathfrak{X}_H est singulier. Formellement, en étendant aux modèles les notions introduites au § 1, tout ce que nous pouvons dire en comparant par exemple deux modèles M_1 et M_2 définis à l'aide du même ensemble \mathfrak{X} et tels que $\mathfrak{X}_{H_1} \subseteq \mathfrak{X}_{H_2}$ - c'est-à-dire tels que $H_1(x) \implies H_2(x)$ - c'est que les hypothèses introduites dans le modèle M_1 sont plus fortes que celles du modèle M_2 . Or, du point de vue de la science économique, il peut être aussi intéressant d'étudier des hypothèses moins fortes, pourvu évidemment qu'elles conduisent à des conclusions suffisamment délimitées. En particulier, contrairement à une tendance récente en économie pure, il peut être utile, en vue notamment de discuter les hypothèses à la base d'un modèle, d'étudier celui-ci en le décomposant en plusieurs modèles $\{M_k\}_{k \in K}$ chacun étant défini par une hypothèse $\{H_k\}_{k \in K}$ moins forte.

8) En vue d'illustrer ce que nous venons de dire par un exemple simple, familier aux économistes, considérons ici le premier modèle proposé par Leontief, que l'on appelle d'habitude "modèle fermé" de Leontief. Il va de soi que nous nous intéresserons ici principalement à la structure formelle et logique de ce modèle, notre but n'étant pas de discuter de la validité et du contenu économique de ce dernier. Nous nous limiterons donc à rappeler les éléments économiques essentiels en renvoyant le lecteur pour plus de détails aux nombreuses publications analysant des modèles s'ins-

pirant de la pensée de Leontief⁽¹⁾.

En vue d'alléger l'écriture nous utiliserons autant que possible une présentation matricielle.

Dans le cas du modèle qui nous occupe on représente une économie déterminée, supposée décomposable en n "secteurs productifs", à l'aide des prix unitaires et des quantités produites par chaque secteur pendant une durée déterminée. Le i -ième secteur sera donc représenté par la quantité produite ou "output" du secteur i , pendant la période considérée, quantité exprimée numériquement d'après une certaine unité de mesure⁽²⁾, et par le prix⁽³⁾ de l'unité de mesure choisie pour représenter les quantités. Le i -ième secteur pourra ainsi être représenté par $x_i = (q_i, p_i) \in \mathfrak{X}$, \mathfrak{X} étant l'ensemble des couples quantité-prix admissibles dans

1) Voir par exemple :

L.R. Klein, *Econometrics*, White Plains, New York, Row, Peterson & Co., 1953, p. 201 et ss.

Conference on Research in Income and Wealth, *Input-Output Analysis : an Appraisal*. Studies in Income and Wealth, vol. XVIII, Princeton, Princeton University Press, 1955.

R.G.D. Allen, *Mathematical Economics*, London, Macmillan & Co., Ltd., 1956, p. 358 et ss.

E. Malinvaud, *Initiation à la comptabilité nationale*, Paris, Imprimerie Nationale, 1957, p. 163 et ss.

R. Dorfman, P. A. Samuelson, R.M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1958, p. 204 et ss.

W. W. Leontief, *La structure de l'économie américaine 1919-1939*, Paris, Ed. Génin, 1958.

J.M. Henderson, R.E. Quandt, *Microeconomic Theory*, op. cit. p. 157 et ss.

R. Dehem, *Traité d'analyse économique*, op. cit. p. 127 et ss.

S. Karlin, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, vol. I, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959, p. 244 et ss.

D. Gale, *The Theory of Linear Economic Models*, New York, McGraw-Hill, 1960, p. 301 et ss.

2) Pratiquement, on utilisera en général des indices du volume pour mesurer la production de chaque secteur. Ceci car il ne faut pas perdre de vue que l'homogénéité économique d'un secteur, pouvant produire des biens de nature différente, ne se traduit pas nécessairement par des productions s'exprimant physiquement par des unités pouvant être additionnées.

3) Il s'agira aussi en général d'un indice des prix.

le cadre du modèle. Pour simplifier on admettra que l'ensemble \mathfrak{X}_i est continu et que $q_i \geq 0$ et $p_i \geq 0$; c'est-à-dire que $q_i \in \mathbb{R}_+$ et $p_i \in \mathbb{R}_+$ avec $\mathfrak{X}_i = \mathbb{R}_+^2$. Chacun des n secteurs étant représenté de la sorte, nous aurons en définitive la représentation suivante pour l'économie considérée, envisagée globalement :

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n] = [q_1 p_1, q_2 p_2, \dots, q_n p_n] \in \mathfrak{X} \text{ avec } \mathfrak{X} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{X}_i = \mathbb{R}_+^{2n}.$$

Il sera commode pour la suite d'envisager le $2n$ -tuple ordonné x sous forme d'un vecteur-colonne à $2n$ lignes. Nous poserons donc à partir de maintenant, en regroupant les quantités et les prix :

$$x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

q et p étant deux vecteurs-colonne à n lignes :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

et on aura encore $x \in \mathfrak{X} = \mathbb{R}_+^{2n}$.

Les hypothèses concernant les liaisons existantes entre les différents secteurs s'introduisent à l'aide des "coefficients techniques" a_{ij} définis pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, n$. Rappelons que a_{ij} représente la quantité de produit du secteur i nécessaire pour produire une unité du secteur j .

On pourra alors écrire la forme propositionnelle

$$P_i^1(x) = [q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j]$$

qui signifie que la quantité produite par le secteur i est supposée égale à la quantité nécessaire aux différents secteurs pour produire des quantités $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n$. Soulignons que a_{ij} n'est pas nécessairement nul, la production du secteur i pouvant nécessiter une certaine destruction ou utilisation de son produit.

En étendant ceci aux n secteurs on aura alors n formes propositionnelles $P_i^1(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Si on envisage les liaisons faisant intervenir les prix unitaires des différents secteurs on est aussi amené à introduire n formes propositionnelles :

$$P_j^2(x) = [p_j = \sum_{i=1}^n p_i a_{ij}], \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$P_j^2(x)$ pourra s'énoncer dans une autre terminologie en disant que "le prix unitaire de la production du secteur j est égal à son coût", ce coût étant évidemment égal à la somme des prix unitaires des produits des différents secteurs multipliés par la quantité intervenant dans la production d'une unité du secteur j .

Une remarque s'impose ici pour éviter une interprétation économique trop restrictive du modèle fermé de Leontief. On pourrait en effet s'étonner de ne pas voir apparaître explicitement dans le modèle le concept de consommation. Or, en général, un des n secteurs représentera le "secteur ménages" dont la "production" constitue le travail. La quantité de produits des différents secteurs nécessaire pour "produire" "le travail" représentera la consommation. Si on désigne par k le secteur ménages, comme nous l'avons déjà souligné, on voit qu'ici encore a_{kk} n'est pas nécessairement nul. En effet, en général, une partie du travail du secteur ménages sera affectée à la consommation.

Chacune des $2n$ formes propositionnelles que nous venons d'introduire peut être considérée comme définissant une hypothèse H_i^1 , $i = 1, 2, \dots, n$ ou H_j^2 , $j = 1, 2, \dots, n$ particulière ; la forme propositionnelle $\bigwedge_i P_i^1(x) \bigwedge_j P_j^2(x)$ définissant par contre dans \mathcal{X} une hypothèse composée. En désignant par :

$$A = [a_{ij}]_{n,n} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

la *matrice des coefficients techniques* et en introduisant la matrice

$$T = \begin{bmatrix} A & O_{n,n} \\ O_{n,n} & A' \end{bmatrix} = [t_{kk}]_{2n,2n},$$

où A' est la transposée de A et $O_{n,n}$ la matrice nulle carrée d'ordre n , on aura $H(x) = \bigwedge_i P_i^1(x) \bigwedge_j P_j^2(x) \iff x = Tx$.

Le modèle fermé de Leontief pourra ainsi s'écrire :

$$M_H = \{ x \in R_+^{2n} ; x = Tx \}.$$

Sans insister ici sur les généralités concernant la séparabilité d'un modèle, notion que nous introduirons au chapitre suivant, on

vérifie aisément que le modèle M_H se décompose en deux modèles indépendants(1) :

$$M_{H_1} = \{q \in R_+^n ; q = Aq\} \text{ et } M_{H_2} = \{p \in R_+^n ; p = Ap\},$$

M_{H_1} traduisant l'"aspect quantités" et M_{H_2} l'"aspect prix" du modèle fermé de Leontief.

Nous nous limiterons à discuter en détail le modèle M_{H_1} , M_{H_2} lui étant formellement identique. M_{H_1} peut aussi s'écrire, I désignant la matrice unité d'ordre n : $M_{H_1} = \{q \in R_+^n ; [I-A]q = Q_1\}$, O_n étant le vecteur-colonne nul à n lignes.

Soit $Q_{H_1} \subseteq R_+^n$ l'ensemble représentatif de l'hypothèse H_1

Si $|I - A| \neq 0$, $Q_{H_1} = \{O_n\}$; cette conclusion est manifestement sans intérêt ; il faudrait donc modifier le modèle.

Pour que $Q_{H_1} \neq \{O_n\}$ il faut que $|I - A| = 0$. Soit $r < n$ le rang de $[I - A]$. En écrivant A sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$A_1 = [a_{ij}]_{r,r} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, r \end{matrix}$$

$$A_2 = [a_{ij}]_{r, n-r} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r \\ j = (r+1) \dots n \end{matrix}$$

$$A_3 = [a_{ij}]_{n-r, r} \quad \begin{matrix} i = (r+1) \dots n \\ j = 1, 2, \dots, r \end{matrix}$$

$$A_4 = [a_{ij}]_{n-r, n-r} \quad \begin{matrix} i = (r+1) \dots n \\ j = (r+1) \dots n \end{matrix}$$

on aura alors :

$$[I - A]q = \begin{bmatrix} [I_r - A_1] & A_2 \\ A_3 & [I_{n-r} - A_4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = O_n \quad (1)$$

I_r et I_{n-r} étant les matrices unité d'ordre r et $n-r$;

$$q' = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q'' = \begin{bmatrix} q_{r+1} \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

(1) Ce cas est un cas particulier des modèles séparables que nous traiterons au chapitre III, section 1, § 2.

On pourra toujours s'arranger pour que $|I_r - A_1| \neq 0$, ce qui permet d'écrire 1) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [I_r - A_1] & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = O_r \quad (2)$$

r étant par hypothèse le rang de la matrice $[I - A]$. Ceci donne en définitive $q' = - [I_r - A_1]^{-1} A_2 q''$, $[I_r - A_1]^{-1}$ étant la matrice inverse de $[I_r - A_1]$. On aura ainsi :

$$M_c = \left\{ q \in Q_{n+1} \iff q' = Bq'', q \in R_+^n \right\}$$

où :

$$B = [b_{ij}]_{r, n-r} = - [I_r - A_1]^{-1} A_2.$$

Un cas particulier intéressant par la transposition en termes économiques des conclusions auxquelles il conduit est celui où $r = n - 1$. Le vecteur-colonne q'' se réduit alors à un seul élément $q'' = q_n$ et la matrice B prend la forme d'un vecteur-colonne b à $n - 1$ lignes : $b = [b_i]_{n-1}$. En supposant que $b \geq O_{n-1}$, on aura alors :

$$M_c = \left\{ q \in Q_{n+1} \iff q' = q_n b, \left(\bigvee_{Q_n} q_n = R_+ \right) \right\}$$

ou, si l'on préfère, en posant $b^* = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = [b_i^*]_n$:

$$M_c = \left\{ q \in Q_{n+1} \iff q = q_n b^*, \left(\bigvee_{Q_n} q_n = R_+ \right) \right\}$$

ou encore :

$$M_c = \left\{ q \in Q_{n+1} \iff \frac{q_i}{q_j} = \frac{b_i^*}{b_j^*} \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

En résumé, nous aurons donc dans ce cas particulier où $r = n - 1$:

$$M_{n+1} = \{ q \in Q = R_+^n ; [I - A] q = O_n \}$$

et

$$M_c = \left\{ q \in Q_{n+1} \subseteq R_+^n ; \frac{q_i}{q_j} = \frac{b_i^*}{b_j^*}, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

avec $M_{n+1} \iff M_c$.

Ceci peut se traduire en termes économiques en disant que la donnée de la matrice des coefficients techniques A dans le cadre du modèle équivaut à déterminer complètement la "structure" de la production de l'économie envisagée, c'est-à-dire les rapports des productions des différents secteurs considérés.

CHAPITRE III

CLASSES DE MODÈLES ÉCONOMIQUES

"Tous nos vrais besoins logiques convergent donc essentiellement vers cette commune destination : consolider, autant que possible, par nos spéculations systématiques, l'unité spontanée de notre entendement, en constituant la continuité et l'homogénéité de nos diverses conceptions, de manière à satisfaire également aux exigences simultanées de l'ordre et du progrès, en nous faisant retrouver la constance au milieu de la variété."

Auguste Comte⁽¹⁾

"A l'investigation (il incombe) de faire la matière sienne dans tous ses détails, d'en analyser les diverses formes de développement et de découvrir leur lien intime. Une fois cette tâche accomplie, mais seulement alors, le mouvement réel peut être exposé dans son ensemble. Si l'on y réussit, de sorte que la vie de la matière se réfléchisse dans sa reproduction idéale, ce mirage peut faire croire à une construction a priori."

Karl Marx⁽²⁾

(1) Auguste Comte, *Cours de philosophie positive*, op. cit. p. 257.

(2) Karl Marx, *Le capital*, traduction de Joseph Roy, Paris, Editions sociales, 1950, postface de la deuxième édition allemande.

SECTION 1

INTRODUCTION DE QUELQUES NOTIONS PARTICULIÈRES

§ 1 - CATEGORIES HABITUELLES DE VARIABLES ET D'HYPOTHESES -

1) Au chapitre précédent, nous avons été conduit à définir un modèle en nous inspirant des deux opérations essentielles qui président à sa construction, opérations que nous avons résumées en disant qu'elles se traduisent par la représentation du phénomène dans un cadre abstrait approprié et par la formulation d'hypothèses concernant les relations existantes entre les différentes composantes intervenant dans la représentation du phénomène que l'on a adoptée. Nous avons vu que cette première opération pouvait être ramenée à la définition d'un ensemble \mathfrak{X} muni d'une structure appropriée, et que la seconde opération revenait à définir dans \mathfrak{X} une propriété composée que nous avons désignée par H en lui conservant l'appellation habituelle d'hypothèse. Nous avons donc identifié le modèle au résultat de ces deux opérations. En vue toutefois de discuter d'un point de vue général les problèmes propres à la formulation et à l'utilisation théorique d'un modèle, nous avons distingué d'un même modèle deux aspects différents, se traduisant en général par une différence d'écriture, mais recouvrant deux aspects essentiels du raisonnement théorique. Nous avons ainsi désigné par M_H le modèle tel qu'il sera formulé à la suite des opérations de conceptualisation et par M_C le modèle présenté sous forme de conclusions théoriques, en soulignant qu'en général dans M_H les hypothèses se traduiront par des formes propositionnelles faisant intervenir la variable de l'ensemble considéré, tandis que dans le modèle M_C les hypothèses se traduiront par la désignation d'un sous-ensemble de \mathfrak{X} formé des seuls éléments qui les vérifient. Ainsi dans M_H les hypothèses apparaîtront dans un langage formel directement inspiré des connaissances ou théories qui les ont dictées, tandis que dans M_C cette désignation explicite des hypothèses sera remplacée par celle que l'on pourrait appeler leur projection sur \mathfrak{X} . Pour bien marquer cette différence, nous avons fait la distinction entre représentation

grammaticale et représentation ensembliste de l'hypothèse H intervenant dans le modèle, la première correspondant justement à l'écriture de H dans M_H et la seconde à l'écriture de H dans M_C . Comme nous l'avons déjà souligné, et comme nous le verrons mieux sur les exemples que nous traiterons dans ce chapitre, l'essentiel de la partie déductive de la discussion théorique d'un modèle, consiste justement dans le passage de M_H à M_C .

2) En vue d'alléger l'écriture, nous désignerons à partir de maintenant par H aussi bien l'hypothèse intervenant dans le modèle et considérée d'un point de vue abstrait, que la forme propositionnelle particulière qui la définit sous forme grammaticale⁽¹⁾. La forme propositionnelle $H(x)$ pourra alors désigner soit la phrase "x vérifie l'hypothèse H ", soit aussi une forme propositionnelle particulière -dont l'écriture relèvera de la formalisation adoptée- faisant intervenir x et pouvant être considérée comme une définition de H dans le cadre de M_H . Nous utiliserons toujours la notation H ou $H(x)$ quand il s'agira d'hypothèses intervenant dans M_H , c'est-à-dire d'hypothèses sous forme grammaticale, et la notation \mathfrak{X}_H quand on parlera de l'hypothèse H telle qu'elle apparaît dans M_C .

3) Avant d'aller plus loin dans cette étude, en vue d'explicitier quelques structures particulières des modèles tels que nous les avons définis, ce qui nous permettra de mettre en évidence des classes particulières de modèles, il convient maintenant de rappeler des notions qui sont couramment utilisées et de voir comment elles s'insèrent dans le cadre de nos définitions. Soulignons le tout de suite, ces notions, qui sont certainement très utiles en vue des applications et des problèmes pratiques qu'elles soulèvent, ne sont pas indispensables dans le cadre général qui nous sert de base ici et qui justement, s'il nous permet de retrouver des situations particulières, est toutefois conçu dans le but de retenir les seuls aspects logiques essentiels.

(1) Nous ne ferons donc plus la distinction d'écriture entre $H(x)$ et les formes propositionnelles équivalentes $P(x)$ qui la définissent sous forme grammaticale, distinction qui nous a été utile au chapitre précédent.

i) Variables endogènes et variables exogènes.(1)

Soit \mathcal{X} un ensemble déterminé utilisé dans la construction d'un modèle. Il arrivera pratiquement que \mathcal{X} puisse être considéré comme l'ensemble produit de deux ensembles facteurs \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 : $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$; c'est-à-dire comme l'ensemble de tous les couples ordonnés $x = (x_1, x_2)$ ou $x_1 \in \mathcal{X}_1$ et $x_2 \in \mathcal{X}_2$.

Soit H l'hypothèse définie dans \mathcal{X} et \mathcal{X}_H son ensemble représentatif. Soit $\mathcal{X}_{1H} = pr_1(\mathcal{X}_H)$ et $\mathcal{X}_{2H} = pr_2(\mathcal{X}_H)$ la première et la seconde projection de \mathcal{X}_H ; soit φ une application (univoque ou multivoque) de \mathcal{X}_{1H} sur \mathcal{X}_{2H} telle que :

$$\left(\begin{array}{c} \forall \\ \mathcal{X}_1 \end{array} x_1 \right) : x_2 \in \varphi(x_1) = \mathcal{X}_2(x_1) \iff x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_H.$$

Il sera donc équivalent de représenter les conclusions du modèle à l'aide de \mathcal{X}_H ou en se donnant le champ de la variable x_1 et l'application φ que nous venons de définir. \mathcal{X}_H peut d'ailleurs être considéré comme le graphe de l'application φ . Cette représentation peut être commode pratiquement en vue de délimiter le champ de x_2 en fonction de x_1 . On l'utilisera spécialement quand, pour des considérations extérieures au modèle, on peut être amené à donner à x_1 des valeurs particulières. On se sert d'une telle représentation notamment dans les cas où l'ensemble \mathcal{X}_H est tel que l'application φ est univoque. On dira alors que φ définit une fonction (univoque) de \mathcal{X}_{1H} sur \mathcal{X}_{2H} .

Dans la terminologie économique, on appelle x_1 la variable exogène et x_2 la variable endogène, dans la mesure où on peut attribuer à l'application φ une signification économique concrète. Le fait de désigner x_1 comme étant la variable exogène et x_2 comme étant la variable endogène, ne repose pas sur une dissymétrie formelle entre les deux variables. Le caractère pragmatique de cette distinction apparaît d'ailleurs clairement en pensant au fait que x_2 peut aussi bien être considérée comme la variable exogène au modèle dont la variable endogène serait x_1 . La distinction entre variable

(1) Cf. P. Maillet, "Introduction à l'étude des modèles économétriques", dans *Cahiers du Séminaire d'économétrie*, 3 (1955), pp. 7-30.
 R. Roy, *Éléments d'économétrie*, 1ère partie, Paris I.N.S.E.E., 1952-1953.
 E. Malinvaud, "L'agrégation dans les modèles économiques", op. cit.
 R. Barre, *Économie politique*, tome I, Paris, P.U.F., 1956, p. 203.
 A. Piatier, *Statistique et observation économique*, tome II, Paris, P.U.F., 1961, p. 483.

exogène et variable endogène dépend donc du problème concret que l'on est amené à traiter⁽¹⁾.

Au § 2 du chapitre précédent, en discutant du modèle fermé de Leontief, nous avons déjà été amené à utiliser une représentation de l'ensemble \mathfrak{X}_n à l'aide d'une décomposition de ce dernier en deux ensembles facteurs et d'une application φ . En effet, nous avons abouti à des conclusions de la forme :

$$q \in Q_n \iff q' = Bq'', \quad q \in R_+^n.$$

Le vecteur-colonne à $n-r$ lignes q'' peut donc être considéré comme la première coordonnée de q tandis que q' peut être considéré comme sa seconde coordonnée. Si pour des raisons d'ordre économique extérieures au modèle, nous pouvons attribuer à q'' une valeur particulière, on peut considérer que cette variable prend des valeurs qui sont déterminées par des "lois" économiques extérieures au modèle - dont toute la portée explicative est contenue dans Q_n - on dira que q'' est la variable exogène du modèle ainsi interprété, q' étant la variable endogène. Il convient ici de parler d'interprétation du modèle car, dans sa formulation initiale le modèle conduisait à expliciter une certaine liaison entre q' et q'' , qui pouvait s'écrire formellement par $q' = Bq''$, sans pour autant attribuer un sens déterminé au contenu économique de cette dernière. Considérer q'' comme exogène revient par contre à admettre que toujours q' est déterminé par la valeur prise par q'' . Cette distinction entre variable exogène et endogène nous apparaît donc comme étant de nature essentiellement pratique et introduite surtout en vue de l'interprétation concrète des conclusions théoriques.

ii) Catégories d'hypothèses.

Nous avons vu au chapitre précédent que l'hypothèse H intervenant dans le modèle devait être considérée en général comme une hypothèse composée, notion que nous avons définie à l'aide d'une classe d'hypothèses particulières $\{H_i\}_{i \in I}$ en posant :

(1) Dans les modèles de politique économique on appelle souvent "instruments" les variables exogènes et "objectifs" les variables endogènes.
Cf. J. Tinbergen, *Techniques modernes de la politique économique*, Paris, Dunod, 1961.

$$\left(\forall x \right) : H(x) \iff \bigwedge_{i \in I} H_i(x).$$

Or, pour des raisons pratiques, ayant trait à la construction, à la discussion et à l'interprétation du modèle en fonction de la science économique, on est souvent amené à classer ces hypothèses. Les critères utilisés pour une telle classification se basent en général sur la nature des connaissances dont on s'inspire pour formuler une hypothèse particulière. On distinguera ainsi des hypothèses traduisant des connaissances de nature technique, de nature institutionnelle ou encore des connaissances concernant le comportement de certains agents économiques, ou simplement traduisant des liaisons de nature comptable entre les différents concepts utilisés ou des liaisons résultant simplement de la définition de ces concepts⁽¹⁾. Ce que nous avons dit précédemment au sujet de la notion d'hypothèse suffit à nous faire comprendre qu'il ne sera pas toujours aisé de classer une hypothèse d'après ces catégories. En effet, des hypothèses particulières, dont la définition relève de la façon concrète dont elles sont introduites, peuvent elles aussi être de nature composite et relever en même temps de plusieurs de ces catégories. Il arrivera aussi que des théories économiques différentes pourront nous amener à attribuer à des catégories différentes une même hypothèse, c'est-à-dire une hypothèse d'écriture formelle déterminée. Il en est ainsi par exemple de l'égalité entre "épargne globale" et "investissement global" dans les modèles macro-économiques faisant intervenir ces deux concepts. Pour les économistes s'inspirant de la pensée des classiques, cette égalité résulte de la loi des débouchés, tandis que pour les Keynesiens, elle est simplement de nature comptable et est une conséquence de la définition de l'épargne globale et de l'investissement global.

Nous ne nous étendrons pas plus longtemps, pour le moment, sur ces notions auxquelles on aura l'occasion de revenir en étudiant des modèles particuliers.

§ 2 - MODELES SEPARABLES -

1) Nous allons introduire ici une notion nouvelle qui nous permettra de définir une classe particulière de modèles, que nous appellerons la classe des modèles séparables.

(1) Cf. J. Tinbergen, *Techniques modernes de la politique économique*, op. cit.

Nous avons vu précédemment que l'hypothèse H intervenant avec l'ensemble \mathcal{X} dans la définition d'un modèle, pouvait en général être considérée comme une hypothèse composée, intersection de plusieurs hypothèses particulières. Ces dernières étant définies dans le même ensemble \mathcal{X} on pourrait les considérer comme des hypothèses définissant avec \mathcal{X} des modèles particuliers. Cette remarque nous avait déjà amené à parler de la décomposition éventuelle d'un modèle en plusieurs modèles définis à l'aide d'hypothèses moins fortes (et du même ensemble \mathcal{X}) (1). La décomposition du modèle ainsi envisagée porte donc essentiellement sur la décomposition de l'hypothèse H en hypothèses particulières. Elle pourra se faire de plusieurs façons ; on s'inspirera en général de la façon par laquelle on a été amené à introduire concrètement l'hypothèse H dans le modèle. Ce qui caractérise cette façon de procéder, qui n'est en définitive qu'un procédé d'analyse du modèle, est donc le fait que l'ensemble \mathcal{X} , dans lequel sont définies toutes les hypothèses envisagées, aussi bien que H , reste le même. En d'autres mots, le phénomène envisagé est toujours le même, représenté par \mathcal{X} ; c'est l'hypothèse H définie dans \mathcal{X} que l'on décompose.

Nous dirons par contre qu'un modèle M est *séparable* et peut être représenté par deux modèles M_1 et M_2 si le phénomène lui-même peut être envisagé comme deux phénomènes différents justiciables d'hypothèses propres. En vue d'aboutir à une définition précise de ceci, considérons un ensemble \mathcal{X} pouvant être envisagé comme l'ensemble produit de deux ensembles facteurs \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 ; soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$. On a évidemment $pr_1(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_1$ et $pr_2(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_2$. Soit H_1 et H_2 deux hypothèses définies dans \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 respectivement. On peut alors définir une hypothèse H' dans \mathcal{X} en posant :

$$H'(x) \iff H_1(x_1) \text{ et } H_2(x_2) \text{ avec } x_1 \in \mathcal{X}_1 \text{ et } x_2 \in \mathcal{X}_2 ;$$

ou encore :

$$x \in \mathcal{X}_{H'} \iff x_1 \in \mathcal{X}_{1H_1} \text{ et } x_2 \in \mathcal{X}_{2H_2} ,$$

$\mathcal{X}_{H'}$, \mathcal{X}_{1H_1} et \mathcal{X}_{2H_2} étant les ensembles représentatifs des hypothèses H' , H_1 et H_2 définies dans \mathcal{X} , \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 .

On a évidemment :

(1) Voir chapitre II, § 2, point 7.

$$\mathfrak{X}_{H'} = \mathfrak{X}_{1H_1} \times \mathfrak{X}_{2H_2}.$$

Considérons maintenant une hypothèse H définie dans \mathfrak{X} , d'ensemble représentatif \mathfrak{X}_H , telle que $\text{pr}_1(\mathfrak{X}_H) = \mathfrak{X}_{1H_1}$ et $\text{pr}_2(\mathfrak{X}_H) = \mathfrak{X}_{2H_2}$. On a nécessairement :

$$\mathfrak{X}_H \subseteq \mathfrak{X}_{H'} \iff [H(x) \implies H'(x)],$$

car en effet :

$$x \in \mathfrak{X}_H \implies \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in \mathfrak{X}_{1H_1} \\ x_2 \in \mathfrak{X}_{2H_2} \end{array} \right\} \implies x \in \mathfrak{X}_{H'}$$

la réciproque n'étant vraie que si $\mathfrak{X}_{H'} \subseteq \mathfrak{X}_H$ c'est-à-dire si $\mathfrak{X}_{H'} = \mathfrak{X}_H$.

Sur la base de ceci, un modèle $M = (\mathfrak{X}, H)$ sera dit séparable et pourra être remplacé par deux modèles $M_1 = (\mathfrak{X}_1, H_1)$ et $M_2 = (\mathfrak{X}_2, H_2)$, si et seulement si $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ et $H'(x) \implies H(x)$ avec $H'(x) \iff H_1(x_1)$ et $H_2(x_2)$; ce qui conduit à la fois à $\mathfrak{X}_H \subseteq \mathfrak{X}_{H'}$ et à $\mathfrak{X}_{H'} \subseteq \mathfrak{X}_H$, que nous écrirons $\mathfrak{X}_H = \mathfrak{X}_{H'}$, avec $\mathfrak{X}_H = \text{pr}_1(\mathfrak{X}_H) \times \text{pr}_2(\mathfrak{X}_H)$. Si le modèle est séparable, on peut considérer H comme la propriété universelle définie dans $\mathfrak{X}_{H'}$.

Ces conditions étant remplies, nous pouvons donc écrire :

$$M = (\mathfrak{X}, H) \iff M_1 = (\mathfrak{X}_1, H_1) \quad \text{et} \quad M_2 = (\mathfrak{X}_2, H_2).$$

Le modèle M portant sur un phénomène d'extension \mathfrak{X} est donc équivalent à deux modèles distincts, mais considérés simultanément, portant chacun sur un phénomène déterminé d'extension \mathfrak{X}_1 et \mathfrak{X}_2 .

Cette notion se généralise aisément au cas de la décomposition de M en plusieurs modèles, ou même en une infinité non dénombrable de modèles, faisant intervenir chacun un phénomène déterminé.

On aura ainsi :

$$M \iff \{ M_i \}_{i \in I}$$

considérés simultanément, avec :

$$M = (\mathfrak{X}, H) \quad \text{et} \quad \left(\bigvee_i \right) : M_i = (\mathfrak{X}_i, H_i),$$

si et seulement si :

$$\mathcal{X} = \prod_{i \in I} \mathcal{X}_i$$

et

$$H'(x) \implies H(x) \text{ avec } H'(x) \iff \bigwedge_{i \in I} H_i(x_i),$$

ou encore :

$$\mathcal{X}_{H'} \subseteq \mathcal{X}_H \text{ avec } \mathcal{X}_{H'} = \prod_{i \in I} \text{pr}_i(\mathcal{X}_H).$$

2) Au § 2 du chapitre précédent, en traitant du modèle fermé de Leontief, nous avons déjà attiré l'attention du lecteur sur le fait que ce modèle était séparable en deux modèles dont un traduisait l'aspect quantité et l'autre l'aspect prix du phénomène économique étudié, ou si l'on veut, dont l'un s'inspirait d'un phénomène économique faisant intervenir les quantités seules, tandis que l'autre représentait d'une façon abstraite un phénomène économique ayant trait seulement aux prix.

En vue d'illustrer ce que nous venons de dire, revenons rapidement sur cette question. Le phénomène économique étudié dans le cadre du modèle fermé de Leontief était représenté par l'ensemble $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^{2n}$, la variable $x \in \mathcal{X}$ étant un vecteur-colonne de la forme $x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$, q et p étant les vecteurs-colonne prix et quantités, à n lignes chacun. L'ensemble $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^{2n}$ peut évidemment s'écrire $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$; on aura ainsi $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathbb{R}_+^n$.

Nous aurons aussi :

$$H(x) \iff x = Tx ; \text{ or } x = Tx \implies \begin{cases} q = Aq \\ p = A'p. \end{cases}$$

En posant $H_1(q) \iff q = Aq$ et $H_2(p) \iff p = A'p$, avec $q \in \mathbb{R}_+^n$ et $p \in \mathbb{R}_+^n$, on vérifie aisément que $[H'(x) \iff H_1(q) \wedge H_2(p)] \implies H(x)$.

En effet, supposons $H_1(q) \wedge H_2(p)$ et $x \neq Tx$ c'est-à-dire $\tilde{H}(x)$.

Alors

$$x \neq Tx \implies \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} A & O \\ O & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} q \neq Aq \\ p = A'p \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} q = Aq \\ p \neq A'p \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} q \neq Aq \\ p \neq A'p \end{array}$$

d'où la contradiction.

M est donc séparable et pourra s'écrire à l'aide des deux modèles $M_1 = \{q \in R_+^n ; H_1\}$ et $M_2 = \{p \in R_+^n ; H_2\}$, considérés simultanément.

3) On peut essayer d'interpréter la notion de modèle séparable que nous venons d'introduire à l'aide de la distinction que nous avons faite précédemment entre variables exogènes et endogènes, distinction qui, rappelons-le, s'inspire de l'utilisation pratique du modèle. Formellement toutefois, nous avons vu qu'elle supposait que \mathcal{X} puisse être défini par le produit de deux ensembles \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 , et nous avons désigné par le terme de variable exogène l'argument de \mathcal{X}_1 et par le terme de variable endogène l'argument de \mathcal{X}_2 . Cette condition préliminaire étant vérifiée, il sera nécessaire et suffisant, pour que le modèle soit séparable, que l'application φ soit de la forme :

$$\left(\begin{array}{c} \forall x_1 \\ \text{pr}_1(\mathcal{X}_H) \end{array} \right) : \varphi(x_1) = \text{pr}_2(\mathcal{X}_H).$$

Il s'ensuivra qu'inversément :

$$\left(\begin{array}{c} \forall x_2 \\ \text{pr}_2(\mathcal{X}_H) \end{array} \right) : \varphi^{-1}(x_2) = \text{pr}_1(\mathcal{X}_H).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait :

$$\left(\begin{array}{c} \exists x_2 \\ \text{pr}_2(\mathcal{X}_H) \end{array} \right) : \varphi^{-1}(x_2) \neq \text{pr}_1(\mathcal{X}_H),$$

d'où :

$$\varphi^{-1}(x_2) \subset \text{pr}_1(\mathcal{X}_H)$$

et :

$$\left(\begin{array}{c} \exists x_1^* \\ \text{pr}_1(\mathcal{X}_H) \end{array} \right) : \varphi(x_1^*) \subset \text{pr}_2(\mathcal{X}_H),$$

et il y aurait contradiction. Ceci nous permet donc de compléter l'interprétation de la notion de modèle séparable. La condition de séparabilité ainsi formulée nous montre que, si elle est vérifiée, la variable x_1 (exogène) n'apporte aucune connaissance supplémentaire dans le cadre du modèle, dont le champ se réduit à \mathcal{X}_2 . Réciproquement la variable x_2 peut être considérée comme exogène à un autre modèle de champ \mathcal{X}_1 sur lequel elle n'exerce aucune influence. Les deux modèles sont donc indépendants au sens courant de ce terme.

SECTION 2

MODÈLES DÉTERMINISTES ET MODÈLES STOCHASTIQUES

§ 1 - INTRODUCTION -

1) En définissant d'une façon générale un modèle, nous avons déjà été amené à souligner que la structure de l'ensemble intervenant dans cette définition, dépendait de la nature particulière du phénomène étudié. Dans cette section, et dans la suivante, nous proposons d'étudier quelques structures particulières de cet ensemble, en vue d'aboutir à une classification des modèles économiques, classification ne voulant pas nécessairement se différencier des classifications habituelles, mais dont le but essentiel est d'explicitier la définition de chaque classe de modèles envisagée, en fonction d'une classe particulière d'ensembles \mathcal{X} ; c'est-à-dire en fonction d'une classe particulière de phénomènes, ou d'une façon plus précise en fonction d'une classe particulière de représentations de phénomènes. Cette façon de procéder se justifie à notre sens par le rôle primordial que nous avons fait jouer à l'ensemble \mathcal{X} dans la définition des modèles que nous avons donnée précédemment. Elle nous permettra en outre, en nous débarassant de toute technicité, de mieux éclairer certaines notions relevant de la terminologie habituelle, et sur lesquelles d'ailleurs l'unanimité est loin souvent de s'être faite.

2) Au chapitre précédent, nous avons vu qu'un phénomène économique déterminé pouvait être envisagé en définitive comme un concept -généralement construit à l'aide d'autres concepts- défini d'une façon précise par la donnée d'un ensemble \mathcal{X} qui représente justement son extension. Chaque élément x de cet espace étant alors une spécification du concept d'extension \mathcal{X} ; on peut aussi envisager chaque élément $x \in \mathcal{X}$ comme un phénomène particulier d'une classe générale \mathcal{X} de phénomènes. Cette dernière terminologie aura souvent l'avantage de se traduire directement en termes réels en considérant $x \in \mathcal{X}$ comme un état particulier du phénomène abstrait et général défini par \mathcal{X} . On désignera ainsi par \mathcal{X} un phénomène s'il est envisagé au sens abstrait et général, tandis que $x \in \mathcal{X}$ désignera un phénomène particulier de la classe de phénomènes particuliers \mathcal{X} . Il va de soi qu'un phénomène particulier $x \in \mathcal{X}$ peut à son tour avoir une portée abstraite et générale dans la mesure où il peut être envisagé comme un ensemble d'éléments particuliers. Nous reviendrons sur cette question importante.

Comme nous l'avons déjà dit, en vue de définir des classes particulières de modèles, nous nous appuierons sur des différences de structure des ensembles \mathcal{X} intervenant dans la définition de chaque modèle. Les classes de modèles que nous envisagerons correspondront donc à des classes de phénomènes. Et on distinguera les phénomènes d'après certaines différences fondamentales dans la nature des éléments de leurs extensions respectives. Si on envisage chaque phénomène comme un ensemble \mathcal{X} de phénomènes particuliers, ceci revient à définir des classes d'ensembles de phénomènes particuliers de nature fondamentalement différente. Il va de soi que sur cette voie, on pourrait multiplier à loisir les distinctions. Nous ne retiendrons que quelques catégories fondamentales d'ensembles \mathcal{X} qui nous permettront de retrouver les principales classes de modèles économiques et d'étudier les liaisons existantes entre elles.

§ 2 - PHENOMENES CERTAINS OU DETERMINISTES, EXACTS ET APPROCHES -

1) Désignons par \mathcal{X} l'extension d'un phénomène générique⁽¹⁾. Pour simplifier le langage, nous appellerons ce phénomène, le phénomène \mathcal{X} , en le désignant par son extension. Comme nous l'avons

(1) Ce phénomène peut être considéré comme l'argument ou la variable d'un ensemble de phénomènes envisagés au sens abstrait et général.

vu $x \in \mathfrak{X}$ représente une spécification générique du phénomène \mathfrak{X} . Soit Ω un ensemble d'éléments arbitraires -pouvant d'ailleurs être des sous-ensembles d'un autre espace- et ω la variable de cet ensemble. Nous dirons qu'un phénomène \mathfrak{X} est certain ou déterministe exact par rapport à un ensemble de référence Ω déterminé, si Ω est un ensemble homomorphe⁽¹⁾ de \mathfrak{X} ; c'est-à-dire si Ω peut être considéré comme l'image de \mathfrak{X} dans une application univoque f déterminée de \mathfrak{X} sur Ω . A tout $x \in \mathfrak{X}$ correspondra donc un élément et un seul de Ω .

S'il existe donc un homomorphisme d'ensembles entre \mathfrak{X} et Ω , ou encore si \mathfrak{X} est déterministe exact par rapport à l'ensemble de référence Ω -image par f de \mathfrak{X} - nous écrirons : $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \Omega$. En particulier, si la correspondance entre éléments de \mathfrak{X} et de Ω est biunivoque, ce que nous désignerons par $\mathfrak{X} \longleftrightarrow \Omega$, \mathfrak{X} sera nécessairement déterministe exact par rapport à Ω . Il en est ainsi notamment de l'application identique de \mathfrak{X} sur \mathfrak{X} , ce qui entraîne qu'un phénomène est toujours certain exact s'il est considéré par rapport à son extension.

2) Les phénomènes que nous avons envisagés précédemment à titre d'exemples relèvent justement de la catégorie des phénomènes déterministes ou certains exacts. Ainsi, en ce qui concerne l'aspect quantité du modèle fermé de Leontief, nous avons été amené à considérer l'ensemble des n -tuples $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ et à définir chaque spécification du phénomène de production envisagé à l'aide d'un élément $q \in R_n^n$ et d'un seul. Pour simplifier, nous avons même identifié les spécifications du phénomène considéré avec les éléments $q \in R_n^n$, en posant $q = x$. Or il aurait été plus correct, et conforme aux notions introduites dans ce chapitre, de poser simplement $\mathfrak{X} \longleftrightarrow R_n^n$, et de considérer R_n^n comme l'ensemble de référence adopté pour le phénomène de production \mathfrak{X} . Ceci nous conduit donc à considérer le phénomène de production \mathfrak{X} envisagé, comme étant certain par rapport à l'ensemble de référence $\Omega = R_n^n$. Par la suite, nous verrons sur d'autres exemples comment, pratiquement, on sera amené à définir des ensembles de référence Ω .

3) Soit I un ensemble quelconque d'indices. En désignant par $\Omega_i \subseteq \Omega$ un sous-ensemble de Ω et par $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ une classe de sous-ensembles de Ω , indexée par $i \in I$ et telle que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = \Omega$ ⁽²⁾,

(1) Cf. P. Dubreil, *Algèbre*, tome I, op. cit., p. 23 et ss.

(2) La classe $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de Ω .

on dira que le phénomène \mathfrak{X} est un phénomène *certain* ou *déterministe approché par rapport* à l'ensemble de référence Ω , si on peut admettre un homomorphisme d'ensembles g entre \mathfrak{X} et $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ ou encore si Ω peut être considéré comme l'image de \mathfrak{X} dans une application multivoque g . On voit immédiatement que si \mathfrak{X} est certain approché par rapport à Ω , il est certain exact par rapport à I. Dans le cas particulier où $(\forall_i) : \Omega_i = \Omega$, le phénomène \mathfrak{X} sera dit *certain indéterminé par rapport* à Ω . On vérifie immédiatement que \mathfrak{X} est certain exact par rapport à Ω si et seulement si $(\forall_i) : \Omega_i = \{r_i\}$, $\{r_i\}$ étant un ensemble singulier.

4) En résumé on aura donc :

i) $[\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \Omega] \iff$ le phénomène \mathfrak{X} est certain exact par rapport à Ω .

ii) $\left. \begin{array}{l} \mathfrak{X} \xrightarrow{g} \{\Omega_i\}_{i \in I} \\ (\exists_i) : \Omega_i \text{ n'est pas} \\ \quad \quad \quad \text{singulier} \end{array} \right\} \iff$ le phénomène \mathfrak{X} est certain approché par rapport à Ω .

iii) $\left. \begin{array}{l} \mathfrak{X} \xrightarrow{g} \{\Omega_i\}_{i \in I} \\ (\forall_i) : \Omega_i = \Omega \end{array} \right\} \iff$ le phénomène \mathfrak{X} est certain indéterminé par rapport à Ω .

5) Nous avons vu au point 3 qu'un phénomène certain approché par rapport à Ω pouvait être considéré comme certain par rapport à I. Le caractère relatif des notions que nous venons de définir, qui nous a justement obligé à introduire un ensemble de référence, ressort aussi directement de la définition de cet ensemble. En effet, nous avons vu au point 1 que Ω était un ensemble d'éléments arbitraires. En particulier Ω pouvait être une classe de sous-ensembles d'un autre espace Λ , avec $\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega = \Lambda$. On vérifie aisément que si \mathfrak{X} est certain par rapport à Ω et si $(\exists_\omega) : \lambda \subset \omega$, avec $\lambda \in \Lambda$, alors \mathfrak{X} est certain approché par rapport à Λ .

Par la suite, en vue d'alléger le langage, nous dirons qu'un phénomène est certain par rapport à Ω s'il est certain exact, nous limitant ainsi à spécifier le caractère certain approché ou indéterminé d'un phénomène.

§ 3 - PHENOMENES ALEATOIRES OU STOCHASTIQUES⁽¹⁾ -

1) Soit I un ensemble quelconque d'indices $i \in I$ et K un ensemble d'indices $k \in K$ ayant au plus la puissance du dénombrable. Soit l'ensemble de référence $\Omega = \{\omega_k\}_{k \in K}$. Ω sera donc ici au plus dénombrable⁽²⁾. Soit $P_\Omega^i = \{P^i(\omega_k)\}_{k \in K}$ un ensemble de coefficients numériques $P^i(\omega_k)$ définis pour tout $k \in K$ et tels que :

$$\left(\begin{matrix} \forall \\ K \end{matrix} k \right) : P^i(\omega_k) \geq 0 \text{ avec } \sum_{k \in K} P^i(\omega_k) = 1 ; \text{ et on posera :}$$

$$\left(\begin{matrix} \forall \\ \subseteq \Omega' \end{matrix} \right) : P^i(\Omega') = \sum_{\omega_k \in \Omega'} P^i(\omega_k).$$

$P^i(\Omega')$ sera dite la mesure probabilitaire ou la probabilité de Ω' . L'ensemble de coefficients P_Ω^i définit donc une mesure probabilitaire ou une probabilisation de Ω . Nous dirons ici simplement que l'ensemble P_Ω^i est une probabilisation de Ω .

Considérons maintenant une famille $\mathfrak{P}_\Omega = \{P_\Omega^i\}_{i \in I}$ d'ensembles P_Ω^i . C'est un ensemble de probabilisations de Ω . On dira que deux probabilisations P_Ω^i et P_Ω^j de la famille \mathfrak{P}_Ω sont différentes, et on écrira : $P_\Omega^i \neq P_\Omega^j$, si et seulement si $\left(\begin{matrix} \exists \\ K \end{matrix} k \right) : P^i(\omega_k) \neq P^j(\omega_k)$.

2) Nous dirons qu'un phénomène \mathfrak{X} est *aléatoire par rapport à l'ensemble de référence* Ω si et seulement si \mathfrak{P}_Ω est un ensemble homomorphe de \mathfrak{X} , c'est-à-dire si \mathfrak{P}_Ω peut être considéré comme l'image de \mathfrak{X} dans une application univoque de \mathfrak{X} sur \mathfrak{P}_Ω . A tout $x \in \mathfrak{X}$ correspondra donc un élément et un seul de \mathfrak{P}_Ω , ou encore, à chaque spécification x du phénomène \mathfrak{X} correspondra une probabilisation de Ω -de la famille \mathfrak{P}_Ω - et une seule. On écrira alors :

$$\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{P}_\Omega.$$

3) Comme nous l'avons fait au point 5 du paragraphe précédent, à propos des notions de phénomène certain exact et approché,

(1) Dans ce paragraphe, nous adopterons une présentation élémentaire qui aura l'avantage, dans un cadre formel plus simple et mieux adapté à une interprétation intuitive, de nous éclairer sur les aspects essentiels des développements ultérieurs.

(2) Nous adopterons pour le moment cette hypothèse restrictive en vue d'éliminer certaines difficultés d'ordre mathématique qui seront discutées par la suite (voir § 5).

il convient ici encore d'attirer l'attention sur le caractère relatif des notions que nous venons d'introduire. En effet, pour définir les phénomènes certains ou déterministes et les phénomènes aléatoires ou stochastiques, nous avons dû envisager un ensemble de référence Ω , par rapport auquel seulement ces définitions peuvent être formulées d'une façon précise. Ces notions apparaissent donc comme étant de nature relative, liées au choix particulier de l'ensemble Ω . Nous verrons toutefois au § 4 comment, pratiquement, l'arbitraire apparent de ce choix peut en général être réduit.

En vue d'illustrer ce que nous venons de dire sur le caractère relatif des notions de phénomène certain ou aléatoire, on peut considérer comme ensemble de référence l'ensemble \mathfrak{F}_Ω défini ci-dessus. Par rapport à \mathfrak{F}_Ω un phénomène \mathfrak{X} tel que $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{F}_\Omega$ sera alors certain, tandis que \mathfrak{X} doit être envisagé comme aléatoire si on considère l'ensemble de référence Ω . Réciproquement, nous avons vu au point 1 du § 2 qu'un phénomène tel que $\mathfrak{X} \longrightarrow \Omega$ était certain par rapport à Ω . Nous avons précisé que les éléments de Ω pouvaient être quelconques. En particulier les $\omega \in \Omega$ pourront être des probablisations d'un même ensemble Λ . Par rapport à Λ , le phénomène \mathfrak{X} serait donc aléatoire. Il convient aussi de souligner qu'un phénomène \mathfrak{X} , certain par rapport à un ensemble de référence Ω , c'est-à-dire tel que $\mathfrak{X} \longrightarrow \Omega$, peut toujours être considéré comme aléatoire par rapport à Ω si on définit une famille particulière \mathfrak{F}_Ω^* de probablisations de Ω . Considérons l'ensemble $\Omega = \{\omega_k\}_{k \in K}$ K étant un ensemble quelconque d'indices⁽¹⁾.

Soit : $\mathfrak{F}_\Omega^* = \{P_k\}_{k \in K}$,

avec :

$$\left(\begin{array}{c} \forall k, k' \\ K \end{array} \right) : P^k(\omega_{k'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq k' \\ 1 & \text{si } k = k' \end{cases}$$

On a évidemment $\Omega \longleftrightarrow \mathfrak{F}_\Omega^*$. Or, par hypothèse $\mathfrak{X} \longrightarrow \Omega$, ce qui donne $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{F}_\Omega^*$. \mathfrak{X} peut donc être considéré comme aléatoire par rapport à Ω si on envisage la classe particulière de probablisations \mathfrak{F}_Ω^* .

(1) L'hypothèse sur la puissance de Ω au plus égale à celle du dénombrable, n'étant plus ici nécessaire pour définir les probablisations particulières de la classe \mathfrak{F}_Ω^* .

Il est toutefois peu intéressant pratiquement de considérer de telles classes de probabilisations. Pour éliminer de tels cas dégénérés, nous dirons donc d'une façon générale qu'un phénomène \mathcal{X} est aléatoire par rapport à un ensemble de référence Ω si $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}_\Omega$, \mathcal{F}_Ω étant une classe de probabilisations de Ω telle que :

$$\left(\begin{array}{c} \exists P_\Omega \\ \in \mathcal{F}_\Omega \end{array} \right) : \left(\begin{array}{c} \forall \omega \\ \Omega \end{array} \right) : P(\omega) < 1.$$

Remarquons toutefois qu'il peut exister des ensembles Ω et des familles de probabilisations de Ω , \mathcal{F}_Ω , non dégénérées, telles qu'un phénomène \mathcal{X} puisse être considéré comme certain ou comme aléatoire par rapport à Ω . On aura l'une ou l'autre de ces deux éventualités selon que l'on considère un homomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et Ω ou entre \mathcal{X} et \mathcal{F}_Ω ; c'est-à-dire, f et F étant deux homomorphismes d'ensembles entre \mathcal{X} et Ω et entre \mathcal{X} et \mathcal{F}_Ω , selon que l'on considère $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \Omega$ ou $\mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathcal{F}_\Omega$. Un cas particulier qui se présente souvent pratiquement est celui où l'on peut établir un

homomorphisme d'ensembles φ entre Ω et \mathcal{F}_Ω : $\Omega \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_\Omega$. La relation entre ensembles que nous désignons par $A \rightarrow B$ et qui est vraie si B est un ensemble homomorphe de A , étant une relation transitive, si $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \Omega$ on aura $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi(f)} \mathcal{F}_\Omega$ \mathcal{X} pourra donc être envisagé comme aléatoire par rapport à Ω si on envisage l'homomor-

phisme $\varphi(f)$. On sera toujours dans le cas $\Omega \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_\Omega$ quand on envisagera des variables aléatoires de champ Ω telles que leurs fonctions de fréquence dépendent d'un paramètre ayant pour champ le même ensemble Ω ⁽¹⁾. Il en est ainsi notamment dans le cas d'une variable aléatoire laplacienne de variance déterminée, où $\Omega = \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier l'application φ est d'ailleurs biunivoque. Pratiquement, on sera amené par exemple à considérer que chaque spécification de \mathcal{X} détermine d'une façon unique un paramètre $\omega \in \Omega$ et à utiliser cet ensemble de paramètres dans le cadre du modèle.

Ceci revient à envisager l'homomorphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \Omega$ et à considérer \mathcal{X} comme certain par rapport à cet ensemble de paramètres. Par contre, si on considère l'homomorphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi(f)} \mathcal{F}_\Omega$ ceci revient

(1) Nous verrons plus loin que dans le cas des variables aléatoires l'ensemble Ω est un ensemble numérique et qu'une fonction de fréquence peut être considérée comme une probabilisation de cet ensemble.

à envisager \mathfrak{X} comme aléatoire par rapport à Ω qui est ici le champ des variables aléatoires de la famille envisagée.

§ 4 - LE ROLE DES MODELES EXPERIMENTAUX DANS LA DEFINITION DU CARACTERE DETERMINISTE OU STOCHASTIQUE D'UN PHENOMENE -

1) Dans ce qui précède, en vue de définir des phénomènes certains et des phénomènes aléatoires, nous avons adopté un point de vue abstrait, nous plaçant ainsi dans le cadre de la conceptualisation théorique définie au chapitre I. Dans un tel cadre, en vue d'aboutir à des définitions de portée générale, il nous a suffi d'introduire un ensemble abstrait Ω dont il n'a pas été nécessaire de définir la nature concrète. Nous avons toutefois laissé entendre qu'une telle définition dépendait en général de la nature particulière du phénomène étudié et de la façon de l'envisager. D'une façon plus précise, pour définir concrètement un ensemble Ω lié à l'étude théorique d'un phénomène \mathfrak{X} déterminé, on s'inspirera en général de l'abstraction expérimentale dont nous avons évoqué les aspects essentiels au chapitre I.

Désignons par \mathfrak{g} un modèle ou schéma expérimental déterminé utilisé pour représenter expérimentalement le phénomène \mathfrak{X} . Nous avons vu qu'un tel modèle peut être envisagé comme un "instrument" complété d'un ensemble de règles d'utilisation, devant permettre d'obtenir des résultats ou conséquences observables liés au phénomène \mathfrak{X} , que représente justement le modèle expérimental envisagé. On appelle expérimentation ou expérience un ensemble d'opérations effectuées dans le cadre du modèle \mathfrak{g} , c'est-à-dire d'après l'abstraction expérimentale définie par \mathfrak{g} , et devant fournir un résultat observable que l'on appelle aussi une réalisation de l'expérimentation effectuée dans le cadre de \mathfrak{g} . Le modèle \mathfrak{g} définit donc une classe d'expériences ; réciproquement on pourra aussi considérer \mathfrak{g} comme une classe d'expériences liées au phénomène \mathfrak{X} .

Soit R l'ensemble des résultats possibles des expériences définies par \mathfrak{g} ; R est l'ensemble des réalisations ou résultats possibles des expériences de la classe \mathfrak{g} . On désignera par $r \in R$ l'élément générique de cet ensemble.

Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, c'est-à-dire pour tout phénomène particulier de la classe \mathfrak{X} , on peut aussi envisager l'ensemble $R(x) \subseteq R$ des réalisations possibles de la classe d'expériences \mathfrak{g} . $R(x)$ étant donc l'ensemble des résultats expérimentaux pouvant être obtenus dans le cadre du modèle expérimental \mathfrak{g} pour la spécification x du phé-

nomène envisagé. Il va de soi, comme nous l'avons déjà souligné, qu'une expérience effectuée dans le cadre de \mathcal{G} se traduira par un seul résultat $r \in R$. Si l'expérience envisagée porte sur un phénomène particulier x de la classe \mathcal{X} , le résultat r appartiendra par définition à $R(x)$. Désignons par $\mathcal{G}(x)$ les expériences de la classe \mathcal{G} portant sur la spécification x de \mathcal{X} , on aura donc :

$$\mathcal{G}(x) \implies r \in R(x) \text{ et } r \notin \bigcup_{R} R(x).$$

Si pour chaque spécification de \mathcal{X} on envisage dans R les sous-ensembles $R(x)$ que nous venons de définir, c'est-à-dire les ensembles $R(x)$ de résultats pouvant être obtenus dans le cadre de \mathcal{G} pour chaque spécification x , on peut considérer que le modèle \mathcal{G} , représentation expérimentale du phénomène \mathcal{X} , fait correspondre à chaque phénomène particulier x de la classe \mathcal{X} un ensemble de résultats $R(x)$. Désignons par \mathcal{R} la classe des $R(x)$ ainsi définis pour tout $x \in \mathcal{X}$. On a $\mathcal{R} = \{ R(x) \}_{x \in \mathcal{X}}$ avec évidemment $\bigcup_{x \in \mathcal{X}} R(x) = R$ ⁽¹⁾.

Un modèle expérimental \mathcal{G} peut donc être défini comme un homomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et \mathcal{R} : $\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{R}$.

2) Il est évident que la nature particulière de cet homomorphisme dépendra de la définition de l'ensemble \mathcal{X} aussi bien que de celle du modèle expérimental \mathcal{G} , qui sont l'aboutissement des opérations de conceptualisation théorique et d'abstraction expérimentale. Or, en vue notamment d'explicitier les conclusions concrètes auxquelles on pourra aboutir sur la base de \mathcal{X} et de \mathcal{G} , ce qui nous permettra d'ailleurs d'utiliser R comme ensemble de référence en vue de définir le caractère aléatoire ou certain de \mathcal{X} , il convient de distinguer les 3 cas suivants :

- i) $\left(\begin{smallmatrix} \forall R(x) \\ \in \mathcal{R} \end{smallmatrix} \right) : R(x) = \{r\};$ $R(x)$ est ici, pour tout $x \in \mathcal{X}$ un ensemble singulier.
- ii) $\left(\begin{smallmatrix} \exists R(x) \\ \in \mathcal{R} \end{smallmatrix} \right) : R(x)$ n'est pas singulier ; par définition de l'homomorphisme $\mathcal{G} :$
 $\left(\begin{smallmatrix} \forall R(x) \\ \in \mathcal{R} \end{smallmatrix} \right) : R(x) \neq \Phi.$

(1) \mathcal{R} n'est pas en général une partition de R , car en effet on peut très bien avoir $R(x) \cap R(x') \neq \Phi$ pour $x \neq x'$.

iii) $(\forall R(x) \in \mathcal{R}) : R(x) = R$; la classe \mathcal{R} est ici singulière, son élément unique étant R .

Dans le cas i), $\mathcal{R} = R$; l'homomorphisme \mathcal{g} entre \mathcal{X} et \mathcal{R} se réduit alors à un homomorphisme entre \mathcal{X} et $R : \mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{g}} R$. \mathcal{X} peut donc être considéré comme certain ou déterministe (exact) par rapport à l'ensemble de référence R , si on envisage l'homomorphisme \mathcal{g} . L'ensemble de référence $\mathcal{g}(\mathcal{X}) = R$ a ici un sens concret précis : c'est l'ensemble des résultats admissibles des expériences portant sur \mathcal{X} et effectuées dans le cadre du modèle expérimental \mathcal{g} . Chaque spécification de \mathcal{X} détermine donc une réalisation expérimentale et une seule parmi celles de R .

Le cas ii) n'est réellement distinct du cas iii) que si :

$$(\forall R(x) \in \mathcal{R}) : R(x) \subset R,$$

c'est-à-dire si pour tout $R(x) \in \mathcal{R}$, $R(x)$ est partie véritable de R . Pratiquement le cas ii) sera d'autant plus intéressant que les $R(x)$ comprendront peu d'éléments. De toute façon, dans ce cas intermédiaire entre i) et iii), \mathcal{g} ne pourra être considéré que comme un homomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et \mathcal{R} . \mathcal{X} peut donc être envisagé comme certain approché par rapport à $\mathcal{g}(\mathcal{X}) = R$.

Dans le cas iii) aussi bien que dans le cas ii), si les $R(x) \in \mathcal{R}$ sont trop étendus⁽¹⁾ on sera amené à remplacer l'homomorphisme \mathcal{g} par un homomorphisme F défini entre \mathcal{X} et $\mathfrak{P}_R = \{P^x\}_{x \in \mathcal{X}}$, \mathfrak{P}_R étant une famille de probabilisations P^x de R ⁽²⁾. Si on envisage l'homomorphisme $F : \mathcal{X} \xrightarrow{F} \mathfrak{P}_R$, \mathcal{X} sera dit aléatoire par rapport à R . Chaque spécification de \mathcal{X} détermine complètement une probabilisation et une seule de l'ensemble des résultats associé au modèle expérimental.

(1) Un jugement sur l'étendue de ces ensembles dépendra d'arguments s'inspirant des conclusions d'ordre pratique auxquelles on désire aboutir (voir § 7).

(2) Si on envisage un tel homomorphisme pour le cas ii), la famille \mathfrak{P}_R devrait être soumise à la condition restrictive suivante :

$$(\forall x \in \mathcal{X}) : P^x \left[\int_R R(x) \right] = 0.$$

3) Il convient maintenant, avant d'envisager les procédés par lesquels on est en général amené à formuler des conclusions pratiques (ce que nous ferons en détail au § 7), d'avancer quelques remarques.

L'ensemble R des résultats expérimentaux associé à un modèle expérimental, nous a permis ici de donner un sens concret intuitif à l'ensemble de référence Ω qui nous avait permis de définir le caractère aléatoire ou certain d'un phénomène \mathcal{X} . Or, en général, dans les études telles que celle-ci s'inspirant principalement de préoccupations théoriques, si on aura toujours à faire appel, pour étudier un phénomène \mathcal{X} , à un ensemble Ω formé d'éléments supposés observables, cet ensemble ne sera pas nécessairement envisagé explicitement comme un ensemble de résultats associé à un modèle expérimental \mathcal{E} . Si d'un point de vue abstrait on peut toujours considérer qu'il existe un modèle expérimental dont l'ensemble des réalisations est justement Ω , il pourra souvent se faire qu'un tel modèle soit pratiquement irréalisable, ce qui signifie que pratiquement les éléments de Ω ne sont pas observables dans le cadre d'un modèle expérimental. Ceci n'enlève toutefois pas tout intérêt à l'utilisation de Ω , car, comme nous le verrons par la suite, certaines conclusions théoriques peuvent très bien être établies -et avoir même des conséquences pratiques intéressantes- sur la base de Ω seul. Considérons, par exemple, un phénomène de décision dont les décisions particulières sont les éléments x d'un ensemble \mathcal{X} déterminé. D'un point de vue théorique, on pourra toujours définir un indicateur numérique de satisfaction $s(x)$ lié à

chaque décision $x \in \mathcal{X}$. On aurait alors $\mathcal{X} \xrightarrow{s} s(\mathcal{X}) = \Omega$, Ω étant ici l'ensemble des "mesures" de satisfaction liées aux décisions de la classe \mathcal{X} , et définies par l'indicateur s . Nous verrons qu'une telle représentation peut être utile dans le cadre d'un modèle théorique sans que l'on puisse pratiquement, dans l'état actuel de nos méthodes expérimentales tout au moins, envisager un modèle expérimental dont les $\{s(x)\}_{x \in \mathcal{X}}$ seraient les résultats. Cet exem-

ple nous permet aussi d'illustrer le caractère relatif des notions de phénomène certain et de phénomène aléatoire. En effet, tel que nous venons de l'envisager, le phénomène \mathcal{X} est certain par rapport à $\Omega = s(\mathcal{X})$, si on envisage l'homomorphisme s . Si par contre à chaque décision $x \in \mathcal{X}$ peut correspondre une valeur numérique s de l'indicateur S telle que $s \in S(x)$, $S(x)$ étant un sous-ensemble de $\Omega = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} S(x)$, on pourra envisager \mathcal{X} comme certain approché ou

indéterminé⁽¹⁾, ou recourir à des probabilisations de Ω , ce qui reviendrait à considérer l'ensemble des décisions $x \in \mathcal{X}$ comme aléatoire par rapport à Ω .

On pourrait aussi bien être amené à envisager l'application inverse $s^{-1}(\omega)$. Si s est un isomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et Ω , Ω sera alors certain par rapport à \mathcal{X} . Par contre en général $s^{-1}(\omega) \subseteq \mathcal{X}$; Ω devrait alors être envisagé comme certain approché ou indéterminé par rapport à \mathcal{X} , ou comme aléatoire si on fait intervenir des probabilisations de \mathcal{X} .

La dépendance étroite entre la définition théorique d'un phénomène par son extension \mathcal{X} , et la définition, que l'on admet souvent implicitement dans les études théoriques, d'un modèle expérimental associé à \mathcal{X} , peut encore être illustrée par l'exemple simple du modèle fermé de Leontief auquel nous avons déjà eu l'occasion de nous référer souvent. En définissant, au chapitre II, le phénomène \mathcal{X} , qui intervient dans ce modèle, par un isomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et Q , Q étant un ensemble de vecteurs-quantité, c'est-à-dire en posant $\mathcal{X} \longleftrightarrow Q$, nous avons considéré \mathcal{X} comme certain par rapport à Q , la réciproque étant d'ailleurs ici aussi vraie. L'ensemble Q peut être considéré comme un ensemble de résultats associé à un modèle expérimental déterminé, qui en l'occurrence sera plutôt un schéma d'observation. Admettre l'isomorphisme d'ensembles $\mathcal{X} \longleftrightarrow Q$ revient donc à considérer que chaque spécification $x \in \mathcal{X}$ détermine une observation et une seule dans le cadre du schéma d'observation adopté (la réciproque étant ici aussi vraie). Ceci revient donc à admettre implicitement l'existence d'un modèle expérimental (schéma d'observation) dont les résultats (observations) définissent un ensemble Q par rapport auquel \mathcal{X} est certain (et réciproquement).

A l'autre extrême, on aurait pu considérer une correspondance du type iii) envisagée au point 2 de ce paragraphe, en admettant que le schéma d'observation serait tel qu'à tout $x \in \mathcal{X}$ peuvent correspondre des observations $q \in Q$. \mathcal{X} serait alors indéterminé par rapport à Q , ou aléatoire si on peut envisager des probabilisations de cet ensemble d'observations.

 (1) Si $\left(\begin{smallmatrix} \forall x \\ \mathcal{X} \end{smallmatrix} \right) : S(x) = \Omega$.

§ 5 - NOTIONS DE MESURE ET DE PROBABILISATION D'UN ENSEMBLE ⁽¹⁾ ⁽²⁾

1) Soit Ω un ensemble d'éléments quelconques et ω l'élément générique de cet ensemble. Soit $\mathfrak{F} = \{ \mathcal{F} \}$ une classe de sous-ensembles de Ω , $[\mathcal{F} \subseteq \Omega]$. La classe \mathfrak{F} est dite un corps⁽³⁾ sur Ω ou une *classe additive* d'ensembles si :

a) $\Omega \in \mathfrak{F}$;

b) $\left(\bigvee_{\mathfrak{F}} \mathcal{F} \right) : \bigcup_{\Omega} \mathcal{F} \in \mathfrak{F}$;

c) $\left(\bigwedge_{\mathfrak{F}} \mathcal{F}_i \right) : \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \mathfrak{F} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \mathfrak{F}$;

I étant un ensemble d'indices *discret fini*. De cette définition il s'ensuit que si \mathfrak{F} est un corps, $\Phi \in \mathfrak{F}$ car en effet d'après a) et

b) $\bigcup_{\Omega} \Omega \in \mathfrak{F}$. Plus généralement on considère le cas où l'ensemble

(1) La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable à la compréhension de la plupart des développements ultérieurs.

(2) On pourra consulter :

R. Fortet, *Calcul des probabilités*, Paris, C.N.R.S., 1950.

A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, Masson & Cie., 1953.

H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, Princeton University Press, 1954.

G. Darmois, *Calcul des probabilités. Deuxième partie : Théorie générale des variables aléatoires quelconques*, Paris, Centre de documentation universitaire, 1954.

M. Loève, *Probability Theory ; Foundations. Random Sequences*, New York, D. van Nostrand Company, Inc., 1955.

D. Dugué, *Ensembles mesurables et probabilisables*, Paris, Dunod, 1958.

E. A. Robinson, *An Introduction to Infinitely Many Variates*, London, Charles Griffin & Co., Ltd., 1959.

M. Girault, *Calcul des probabilités en vue de ses applications*, Paris, Dunod, 1960.

S. S. Wilks, *Mathematical Statistics*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

(3) En anglais "field" d'où la lettre \mathfrak{F} que l'on utilise d'habitude pour désigner un corps.

d'indices I est discret infini. La classe $\tilde{\mathfrak{A}}$ possédant les trois propriétés a), b), c) est alors dite un σ -corps sur Ω ou un corps borélien de sous-ensembles de Ω . Nous désignerons ici par \mathfrak{A} les corps de Borel⁽¹⁾.

2) Une classe $\tilde{\mathfrak{A}}$ de sous-ensembles de Ω est dite fermée par rapport à une opération O portant sur les éléments de $\tilde{\mathfrak{A}}$ si les éléments obtenus en effectuant cette opération appartiennent à $\tilde{\mathfrak{A}}$. Les définitions que nous venons de donner peuvent donc s'énoncer :

i) une classe $\tilde{\mathfrak{A}}$ (de sous-ensembles de Ω) est un corps (sur Ω) si elle est fermée par rapport à toute répétition *finie* des opérations de réunion, intersection et complémentation ;

ii) une classe $\tilde{\mathfrak{A}}$ (de sous-ensembles de Ω) est un σ -corps si elle est fermée par rapport à toute répétition *dénombrable* des opérations de réunion, intersection et complémentation.

La notion de σ -corps est plus restreinte que celle de corps ; tout σ -corps est évidemment un corps.

Ces définitions, comme celles du point 1, spécifiques des classes d'ensembles, sont d'ailleurs surabondantes, car en effet, compte tenu des propriétés de dualité⁽²⁾, il suffirait d'énoncer i) et ii) en disant que $\tilde{\mathfrak{A}}$ est un corps (un σ -corps) :

- si elle est fermée par rapport à toute répétition finie (dénombrable) des opérations d'intersection et de complémentation, ou encore

- si elle est fermée par rapport à toute répétition finie (dénombrable) des opérations de réunion et de complémentation.

3) Si $\tilde{\mathfrak{A}}_1$ et $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ sont deux familles de sous-ensembles de Ω et si $\mathfrak{J} \in \tilde{\mathfrak{A}}_1 \implies \mathfrak{J} \in \tilde{\mathfrak{A}}_2$, c'est-à-dire si $\tilde{\mathfrak{A}}_1 \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}_2$ on dit que $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ est une extension de $\tilde{\mathfrak{A}}_1$. Si $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ est un corps de Borel, on dit que $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ est une *extension borélienne* de $\tilde{\mathfrak{A}}_1$.

(1) Emile Borel, mathématicien français (1871-1956).

(2) Par dualité on a : $\int_{\Omega} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{J}_i = \bigcap_{i \in I} \int_{\Omega} \mathfrak{J}_i$.

4) Soit \mathfrak{F}^* une famille quelconque de sous-ensembles de Ω . Soit $\{\mathfrak{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ la classe des extensions boréliennes de \mathfrak{F}^* . Soit $\mathfrak{B}_0 \in \{\mathfrak{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tel que $(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda) : \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}_\lambda$; \mathfrak{B}_0 est dit l'extension borélienne minimale de \mathfrak{F}^* .

Quel que soit \mathfrak{F}^* , \mathfrak{B}_0 existe (voir point 5) et est unique; \mathfrak{F}^* possède donc une et seulement une extension borélienne minimale⁽¹⁾.

\mathfrak{B}_0 est unique : en effet, soit $\mathfrak{B}'_0 \in \{\mathfrak{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tel que $(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda) : \mathfrak{B}'_0 \subseteq \mathfrak{B}_\lambda$; on a alors $\mathfrak{B}'_0 \subseteq \mathfrak{B}_0$, mais \mathfrak{B}_0 étant une extension borélienne minimale de \mathfrak{F}^* : $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}'_0$, ce qui donne en définitive $\mathfrak{B}'_0 = \mathfrak{B}_0$.

On a en particulier :

$$\mathfrak{B}_0 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda.$$

$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda$ est un σ -corps, en effet, soit I un ensemble d'indices discret infini. Si $(\bigvee_I i) : \mathfrak{F}_i \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda$, alors $(\bigvee_I i) (\bigvee_\Lambda \lambda) : \mathfrak{F}_i \in \mathfrak{B}_\lambda$, ce qui donne, les \mathfrak{B}_λ étant des σ -corps :

$$\begin{aligned} (\bigvee_\Lambda \lambda) : \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \mathfrak{B}_\lambda & \quad \text{ou encore} & \quad \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda \\ \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \mathfrak{B}_\lambda & & \quad \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda \end{aligned}$$

$$\left(\bigvee_I i \right) : \left[\mathfrak{F}_i \in \mathfrak{B}_\lambda \right]_{\Omega} \quad \left(\bigvee_I i \right) : \left[\mathfrak{F}_i \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda \right]_{\Omega}$$

Soit \mathfrak{B}_0 une extension borélienne de \mathfrak{F}^* , on a alors $\mathfrak{B}_0 \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda$. Si \mathfrak{B}_0 est l'extension borélienne minimale de \mathfrak{F}^* , par définition on aura :

$$\left(\bigvee_\Lambda \lambda \right) : \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{B}_0 \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda$$

d'où :

$$\mathfrak{B}_0 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda.$$

(1) Naturellement des classes différentes de sous-ensembles de Ω peuvent avoir même extension borélienne minimale.

5) Pratiquement, à partir d'une classe \mathfrak{B}^* de sous-ensembles de Ω , on pourra construire l'extension borélienne minimale \mathfrak{B}_0 de \mathfrak{B}^* en itérant, sur les éléments de \mathfrak{B}^* , les opérations de réunion, d'intersection et de complémentation, au plus une infinité dénombrable de fois.

En effet, soit \mathfrak{B}_0^* la classe des sous-ensembles de Ω ainsi obtenue à partir des éléments de \mathfrak{B}^* . \mathfrak{B}_0^* est un σ -corps car toute réunion ou intersection d'une infinité au plus dénombrable d'éléments de \mathfrak{B}_0^* et toute complémentation d'éléments de \mathfrak{B}_0^* peut s'obtenir à partir d'éléments de \mathfrak{B}^* en itérant au plus une infinité dénombrable de fois les opérations \cup, \cap, \complement . \mathfrak{B}_0^* étant un σ -corps :

$$\mathfrak{B}_0^* \in \{ \mathfrak{B}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$$

donc :

$$\mathfrak{B}_0^* \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda \quad (1).$$

Or, par définition de la classe $\{ \mathfrak{B}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$, $(\forall \lambda) : \mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{B}_\lambda$, et tout \mathfrak{B}_λ étant fermé par rapport à toute répétition dénombrable des opérations \cup, \cap, \complement , il doit donc contenir \mathfrak{B}_0^* . On a ainsi :

$$(\forall \lambda) : \mathfrak{B}_0^* \subseteq \mathfrak{B}_\lambda.$$

Ce qui donne $\mathfrak{B}_0^* \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda$ et, compte tenu de (1) ci-dessus : $\mathfrak{B}_0^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}_0$. La classe \mathfrak{B}_0^* est donc l'extension borélienne minimale de \mathfrak{B}^* . Elle existe toujours, car on peut toujours la construire à partir de \mathfrak{B}^* en itérant les opérations de \cup, \cap, \complement au plus une infinité dénombrable de fois.

6) Soit \mathfrak{F} une famille de sous-ensembles de Ω . On appelle fonction (réelle) d'ensemble définie sur \mathfrak{F} toute application univoque F de \mathfrak{F} dans \mathbb{R} , \mathbb{R} étant l'ensemble des nombres réels.

Si \mathfrak{F} est une classe de sous-ensembles de Ω et si $(\forall \mathfrak{G}' \mathfrak{G}'' \in \mathfrak{F})$ tel que $\mathfrak{G}' \cup \mathfrak{G}'' \in \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{G}'' = \emptyset$ on a $F(\mathfrak{G}' \cup \mathfrak{G}'') = F(\mathfrak{G}') + F(\mathfrak{G}'')$, la fonction d'ensemble F est dite additive. Si pour tout ensemble d'indices I au plus dénombrable tel que $(\forall i \in I) : \mathfrak{G}_i \in \mathfrak{F}$, avec :

$$\left(\bigvee_{i \neq j \in I} \mathcal{F}_{i,j} \right) : \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \Phi \text{ et } \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \tilde{\mathcal{F}},$$

on a :

$$F \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \right) = \sum_{i \in I} F(\mathcal{F}_i),$$

la fonction F est dite complètement additive. Une fonction d'ensemble F sera dite non négative si $\left(\bigvee_{\tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{F} \right) : F(\mathcal{F}) \geq 0$, c'est-à-dire si F est une application univoque de $\tilde{\mathcal{F}}$ dans R_+ . Elle sera dite bornée supérieurement si $\left(\bigvee_{\tilde{\mathcal{F}}} \mathcal{F} \right) : F(\mathcal{F}) < + \infty$.

7) On appelle *mesure* toute fonction d'ensemble non négative et complètement additive définie sur un σ -corps \mathfrak{B} . Soit π une telle fonction définie sur un σ -corps \mathfrak{B} . On dira que π définit une mesure sur \mathfrak{B} ; l'image par π dans R_+ de chaque élément de \mathfrak{B} sera dite la mesure de cet élément. Les éléments de \mathfrak{B} seront dits les sous-ensembles de Ω mesurables - π . On appelle ensemble ou espace mesurable le couple formé de Ω et de la classe \mathfrak{B} formée des sous-ensembles mesurables de Ω ; on le désigne par (Ω, \mathfrak{B}) . Un espace mesurable sur lequel on a défini une mesure π sera désigné par $(\Omega, \mathfrak{B}, \pi)$.

8) Il convient de souligner que si on a défini $(\Omega, \mathfrak{B}, \pi)$ on a :

$$\pi(\Phi) = 0,$$

car en effet :

$$\pi(\Omega \cup \Phi) = \pi(\Omega) = \pi(\Omega) + \pi(\Phi);$$

on aura aussi :

$$\left(\bigvee_{\mathfrak{B}} B_1, B_2 \right) : \pi(B_1 \cup B_2) = \pi(B_1) + \pi(B_2) - \pi(B_1 \cap B_2).$$

En effet, on vérifie aisément que les ensembles (qui appartiennent à \mathfrak{B}) $B_1 \cap \bigcup_{\Omega} B_2$, $\bigcup_{\Omega} B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap B_2$ forment une partition de $B_1 \cup B_2$.

Or, d'après l'additivité de π :

$$\begin{aligned} \pi(B_1 \cup B_2) &= \pi(B_1 \cap \bigcup_{\Omega} B_2) + \pi\left(\bigcup_{\Omega} B_1 \cap B_2\right) + \pi(B_1 \cap B_2) = \\ &= \pi(B_1 \cap \bigcup_{\Omega} B_2) + 2\pi(B_1 \cap B_2) + \pi\left(\bigcup_{\Omega} B_1 \cap B_2\right) - \\ &\quad - \pi(B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

et :

$$\pi(B_1 \cap \bigcup B_2) + \pi(B_1 \cap B_2) = \pi(B_1)$$

$$\pi(\bigcup B_1 \cap B_2) + \pi(B_1 \cap B_2) = \pi(B_2)$$

d'où :

$$\pi(B_1 \cup B_2) = \pi(B_1) + \pi(B_2) - \pi(B_1 \cap B_2).$$

9) Si une mesure P définie sur un σ -corps de sous-ensembles de Ω est telle que $P(\Omega) = 1$ on dira que c'est une mesure probabilitaire définie sur \mathfrak{B} ou encore que la mesure P définit une probabilisation de (Ω, \mathfrak{B}) . Les éléments de \mathfrak{B} seront dits mesurables - P , ou probabilisables, et $(\forall B \in \mathfrak{B})$, $P(B)$ sera la mesure - P ou la probabilité de B . On appelle ensemble ou espace probabilisable le couple (Ω, \mathfrak{B}) , et on désignera par $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ une probabilisation particulière de (Ω, \mathfrak{B}) .

10) La définition du σ -corps \mathfrak{B}_0 sur lequel on définit une mesure - P se fait d'habitude à partir d'une classe \mathfrak{B}^* de sous-ensembles de Ω ayant \mathfrak{B}_0 comme extension borélienne minimale.

Si $\Omega = \mathbb{R}$ on envisage généralement la classe \mathfrak{B}^* des intervalles fermés illimités à gauche de \mathbb{R} - $]-\infty, y]$, sur laquelle on définit, à l'aide d'une fonction de répartition $F(y)$, une fonction d'ensemble P^* en posant $P^*(]-\infty, y]) = F(y)$. On démontre alors que P^* permet de définir de façon unique une mesure - P sur l'extension borélienne minimale de $\mathfrak{B}^{*(1)}$, telle que :

$$(\forall B \in \mathfrak{B}^*) : P^*(B) = P(B).$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ on envisage généralement la classe \mathfrak{B}^* des intervalles généralisés de \mathbb{R}^n , fermés et illimités à gauche, sur laquelle on définit une fonction d'ensemble P^* à l'aide d'une fonction de répartition n -dimensionnelle. Et, comme ci-dessus, on démontre que P^* permet de définir de façon unique une mesure - P sur l'extension borélienne minimale de $\mathfrak{B}^{*(2)}$, telle que :

$$(\forall B \in \mathfrak{B}^*) : P^*(B) = P(B).$$

-
- (1) \mathfrak{B}_0 est ici l'extension borélienne minimale de la classe des intervalles -fermés, semi-fermés et ouverts- de \mathbb{R} .
- (2) \mathfrak{B}_0 est ici l'extension borélienne minimale de la classe des intervalles -fermés, semi-fermés et ouverts- de \mathbb{R}^n .

La classe \mathfrak{B}^* peut être envisagée comme une base pour la définition d'une mesure - P sur \mathfrak{B}_0 .

En général à partir des classes \mathfrak{B}^* que l'on utilise pratiquement, on peut atteindre et probabiliser des σ -corps qui contiennent pratiquement tous les éléments pour lesquels il peut être utile de définir une mesure - P. Nous verrons toutefois dans la section 3 un exemple dans lequel la classe \mathfrak{B}^* que l'on est naturellement amené à envisager conduit à un \mathfrak{B}_0 qui ne contient pas des sous-ensembles de Ω pour lesquels pratiquement il serait très utile de pouvoir définir une mesure - P.

11) Il convient maintenant de revenir aux notions introduites au § 3 pour compléter le point de vue élémentaire que nous avons adopté à ce moment. En effet, pour ne pas s'imposer de restrictions sur la structure de Ω , il faut parler d'espace probabilisable (Ω, \mathfrak{B}) , \mathfrak{B} étant un σ -corps de sous-ensembles de Ω . Une probabilisation particulière de cet espace sera donc représentée par $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$. Pour définir un phénomène aléatoire, nous pouvons garder la notation introduite au point 2 du § 3 : $X \rightarrow \mathfrak{P}_\Omega$. Il faudra pourtant se souvenir que \mathfrak{P}_Ω , qu'il serait plus correct de désigner par $\mathfrak{P}(\Omega, \mathfrak{B})$, est un ensemble de probabilisations particulières de (Ω, \mathfrak{B}) , ou si l'on préfère un ensemble de mesures - P particulières définies sur \mathfrak{B} .

Si $\mathbb{R}^{n-1} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ on appellera les probabilisations de (Ω, \mathfrak{B}) des variables aléatoires à n-dimensions de champ Ω . Chacune d'elles sera définie par la donnée de sa fonction de répartition.

12) Soit deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathfrak{B}_1)$ et $(\Omega_2, \mathfrak{B}_2)$. On appellera espace-produit mesurable, ou produit cartésien mesurable de ces deux espaces, le couples (Ω, \mathfrak{B}) ; $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ étant l'ensemble des couples $\{(\omega_1, \omega_2)\}$ $\omega_1 \in \Omega_1$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ étant

l'extension borélienne minimale sur la classe des "rectangles" $B_1 \times B_2$, définis $(\forall B_1)$ et $(\forall B_2)$.

Sur \mathfrak{B} on peut définir une mesure \mathfrak{N} . Si on définit une mesure \mathfrak{N}_1 sur \mathfrak{B}_1 et une mesure \mathfrak{N}_2 sur \mathfrak{B}_2 , et si $(\forall B_1 \times B_2)$: $\mathfrak{N}(B_1 \times B_2) = \mathfrak{N}_1(B_1) \times \mathfrak{N}_2(B_2)$, on dira que la mesure \mathfrak{N} est la mesure-produit, de \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 , définie sur \mathfrak{B} .

Ces notions se généralisent aisément au cas de plusieurs espaces.

Si une mesure \mathfrak{N}_1 définie sur \mathfrak{B}_1 est telle que :

$$\left(\forall B_1 \times \Omega_2 \right) : \mathfrak{N}(B_1 \times \Omega_2) = K \mathfrak{N}_1(B_1),$$

K , étant une constante positive et \mathfrak{N} une mesure définie sur \mathfrak{B} , nous dirons que la mesure \mathfrak{N}_1 définie sur \mathfrak{B}_1 est une projection de \mathfrak{N} sur \mathfrak{B}_1 (définie à K près). On vérifie immédiatement que si \mathfrak{N} est une mesure-produit de \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 , ces deux mesures, définies respectivement sur \mathfrak{B}_1 et sur \mathfrak{B}_2 , sont deux projections de \mathfrak{N} .

13) Il peut être souvent commode d'utiliser la notion de *transformation mesurable* d'un espace mesurable dans un autre espace mesurable. Soit (Ω, \mathfrak{B}) et (Ω', \mathfrak{B}') deux espaces mesurables ; nous dirons qu'une transformation T est une transformation mesurable de (Ω, \mathfrak{B}) en (Ω', \mathfrak{B}') si : T est une application univoque de Ω sur Ω' , avec $\omega' = T(\omega)$; et si $\left(\forall B' \right) : T^{-1}(B') \in \mathfrak{B}$.

Si une mesure \mathfrak{N}' définie sur \mathfrak{B}' est telle que :

$$\left(\forall B' \right) : \mathfrak{N}'(B') = \mathfrak{N}(T^{-1}(B')),$$

\mathfrak{N} étant une mesure définie sur \mathfrak{B} , on dira que \mathfrak{N}' est la mesure induite par \mathfrak{N} (définie sur \mathfrak{B}) sur \mathfrak{B}' , dans la transformation mesurable T .

On vérifie immédiatement qu'une mesure \mathfrak{N}_1 définie sur \mathfrak{B}_1 qui est une projection sur \mathfrak{B}_1 d'une mesure \mathfrak{N} définie sur \mathfrak{B} , est une mesure induite sur \mathfrak{B}_1 par \mathfrak{N} dans une transformation T telle que $\left(\forall B' \right) : T^{-1}(B') = B' \times \Omega_2$, Ω_2 étant tel que $\Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega$. On a en particulier :

$$\omega' = T(\omega) = T(\omega_1, \omega_2) = \omega_1.$$

14) Ces notions s'étendent immédiatement au cas des mesures -P. Une mesure P_1 définie sur \mathfrak{B}_1 qui est une projection d'une mesure P définie sur \mathfrak{B} sera dite aussi une probabilisation marginale de $(\Omega_1, \mathfrak{B}_1)$ tirée de la probabilisation P de (Ω, \mathfrak{B}) . Comme nous venons de le voir, une probabilisation marginale de la probabilisation P de (Ω, \mathfrak{B}) est donc une mesure P_1 induite sur \mathfrak{B}_1 par P définie sur \mathfrak{B} , dans la transformation mesurable T définie par

$$\omega_1 = T(\omega_1, \omega_2).$$

Si une mesure P définie sur \mathfrak{A} est une mesure-produit de P_1 et P_2 définies sur \mathfrak{A}_1 et \mathfrak{A}_2 , on aura évidemment :

$$\left(\forall B_1 \times \Omega_2 \right) : P(B_1 \times \Omega_2) = P_1(B_1) \times P_2(\Omega_2) = P(B_1),$$

car par définition $P_2(\Omega_2) = 1$.

Etant donné une probabilisation P d'un espace probabilisable (Ω, \mathfrak{A}) on dit que deux éléments $B, B' \in \mathfrak{A}$ sont indépendants en mesure - P ou en probabilité, si pour la mesure P envisagée on a :

$$P(B \cap B') = P(B) \cdot P(B')$$

$$P(\complement B \cap B') = P(\complement B) \cdot P(B')$$

$$P(B \cap \complement B') = P(B) \cdot P(\complement B')$$

$$P(\complement B \cap \complement B') = P(\complement B) \cdot P(\complement B').$$

Or, on vérifie aisément que si $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et si P définie sur \mathfrak{A} est le produit de deux mesures P_1 et P_2 définies sur \mathfrak{A}_1 et \mathfrak{A}_2 : les couples d'éléments $(B, B') = (B_1 \times \Omega_2, B_2 \times \Omega_1)$ sont indépendants $\left(\forall B_1 \right)_{\mathfrak{A}_1}$ et $\left(\forall B_2 \right)_{\mathfrak{A}_2}$.

En effet, en posant $B = B_1 \times \Omega_2$ et $B' = B_2 \times \Omega_1$, étant donné que :

$$B \cap B' = [B_1 \times \Omega_2] \cap [B_2 \times \Omega_1] = [B_1 \cap \Omega_1] \times [B_2 \cap \Omega_2] = B_1 \times B_2,$$

et que, par définition d'une mesure-produit P :

$$P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \times P_2(B_2)$$

$$P(B_1 \times \Omega_2) = P_1(B_1)$$

$$P(B_2 \times \Omega_1) = P_2(B_2),$$

on a :

$$P(B \cap B') = P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2) =$$

$$= P(B_1 \times \Omega_2) P(B_2 \times \Omega_1) = P(B) \cdot P(B').$$

Dans le cas d'une mesure P , produit de deux mesures P_1 et P_2 , on dit aussi, avec un certain abus de langage, que les couples d'éléments (B_1, B_2) , avec $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ et $B_2 \in \mathfrak{B}_2$, sont indépendants. D'une façon plus correcte, il faudrait dire que les couples (B_1, B_2) définissent des couples d'éléments de $\mathfrak{B} : (B_1 \times \Omega_2, B_2 \times \Omega_1)$, qui, $\left(\begin{matrix} \forall B_1 \\ \mathfrak{B}_1 \end{matrix} \right)$ et $\left(\begin{matrix} \forall B_2 \\ \mathfrak{B}_2 \end{matrix} \right)$, sont indépendants.

Ceci car la notion d'indépendance a été définie pour une probabilité P , entre éléments de la classe \mathfrak{B} sur laquelle P est définie.

15) Etant donné un espace probabilisable (Ω, \mathfrak{B}) et une probabilité particulière P de cet espace, on appelle *probabilité conditionnelle*, déduite de P , de (Ω, \mathfrak{B}) par rapport à $\Omega' \in \mathfrak{B}(1)$, une probabilité $P_{\Omega'}$, du même espace (Ω, \mathfrak{B}) telle que $\left(\begin{matrix} \forall B \\ \mathfrak{B} \end{matrix} \right)$, c'est-à-dire $\left(\begin{matrix} \forall B \cap \Omega' \\ \mathfrak{B} \end{matrix} \right)$, on ait :

$$P_{\Omega'}(B) = \frac{P(B \cap \Omega')}{P(\Omega')}.$$

On a en particulier $P_{\Omega'}(\Omega') = 1$.

16) Nous allons maintenant illustrer sur deux exemples simples certaines des notions que nous venons d'introduire.

- Soit \mathfrak{X} un phénomène de décision, dont les spécifications sont trois actions particulières x_1, x_2, x_3 . On a donc $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Le phénomène \mathfrak{X} sera envisagé ici comme aléatoire par rapport à un ensemble Ω qui peut être interprété concrètement par exemple comme un ensemble de résultats pouvant être associé à chaque action de \mathfrak{X} . D'après les définitions du § 2 et du point 11 de ce paragraphe, \mathfrak{X} est aléatoire par rapport à Ω parce qu'on envisage un homomorphisme entre \mathfrak{X} et un ensemble de probabilités de l'espace probabilisable (Ω, \mathfrak{B}) . Ici cet ensemble de probabilités contient au plus trois probabilités différentes de (Ω, \mathfrak{B}) . On

(1) Une probabilité conditionnelle ne sera définie que par rapport à un ensemble Ω' tel que $P(\Omega') \neq 0$.

aura en effet la correspondance :

$$x_1 \longrightarrow (\Omega, \mathfrak{B}, P_1)$$

$$x_2 \longrightarrow (\Omega, \mathfrak{B}, P_2)$$

$$x_3 \longrightarrow (\Omega, \mathfrak{B}, P_3).$$

Pour simplifier, considérons l'ensemble de résultats

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ formé de quatre résultats possibles. La classe \mathfrak{B} des sous-ensembles de Ω qui sont probabilisables est ici formée de : (1) $\{\Phi\}$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\{\omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\{\omega_1, \omega_3\}$, $\{\omega_1, \omega_4\}$, $\{\omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega_2, \omega_4\}$, $\{\omega_3, \omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \Omega$; \mathfrak{B} comprend donc 2^4 éléments.

Une mesure P particulière sera donc définie sur \mathfrak{B} si on définit une application P de \mathfrak{B} dans \mathbb{R} , additive et telle que $P(\Omega) = 1$.

Par additivité de P on aura par exemple :

$$P(\{\omega_1\}) = 1 - P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\})$$

ou encore :

$$P(\{\omega_1, \omega_3\}) + P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}).$$

En vue de définir une probabilisation de (Ω, \mathfrak{B}) on peut ici recourir à la classe $\mathfrak{B}^* = \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}$, qui coïncide ici avec Ω , sur laquelle on définit une fonction d'ensemble P^* non négative et telle que :

$$P^*(\{\omega_1\}) + P^*(\{\omega_2\}) + P^*(\{\omega_3\}) + P^*(\{\omega_4\}) = 1.$$

L'extension de cette fonction à la classe \mathfrak{B} définit une probabilisation de \mathfrak{B} . \mathfrak{B}^* est donc une base de probabilité pour \mathfrak{B} .

En posant $\Omega' = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \mathfrak{B}$, la probabilisation conditionnelle de (Ω, \mathfrak{B}) par rapport à Ω' déduite d'une probabilisation P définie sur \mathfrak{B} sera donnée par :

$$P_{\Omega'}(B) = \frac{P(B \cap \Omega')}{P(\Omega')}.$$

(1) Rappelons que les accolades désignent des ensembles. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ est l'ensemble dont les éléments sont $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

On aura ainsi par exemple :

pour

$$B = \{ \omega_1, \omega_4 \} : \quad P_{\Omega'}(B) = \frac{P(\{ \omega_1 \})}{P(\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \})}$$

pour

$$B = \{ \omega_4 \} : \quad P_{\Omega'}(B) = \frac{P(\{ \Phi \})}{P(\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \})} = 0$$

et pour

$$B = \{ \omega_1, \omega_3 \} : \quad P_{\Omega'}(B) = \frac{P(\{ \omega_1, \omega_3 \})}{P(\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \})}$$

- En vue d'illustrer d'autres notions introduites dans ce paragraphe, considérons maintenant le cas où Ω est de la forme $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ avec par exemple $\Omega_1 = \{ q_1, q_2 \}$ et $\Omega_2 = \{ p_1, p_2, p_3 \}$. Si on envisage des probabilisations de (Ω, \mathfrak{B}) , le phénomène de décision \mathfrak{X} que nous considérons ici sera donc aléatoire par rapport à Ω ; cet ensemble de référence pouvant être interprété comme un ensemble de couples (quantité, prix) se rapportant à une marchandise déterminée. Il pourra s'agir des couples (quantité, prix) pouvant résulter par exemple d'une transaction. Dans un tel modèle, chaque action particulière de la classe \mathfrak{X} détermine donc complètement une probabilisation d'un tel ensemble de résultats.

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ est ici l'ensemble des couples ordonnés

(q_i, p_j) , $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$;

$\mathfrak{B}_1 = \{ \Phi \}, \{ q_1 \}, \{ q_2 \}, \{ q_1, q_2 \}$;

$\mathfrak{B}_2 = \{ \Phi \}, \{ p_1 \}, \{ p_2 \}, \{ p_3 \}, \{ p_1, p_2 \}, \{ p_1, p_3 \}, \{ p_2, p_3 \}, \{ p_1, p_2, p_3 \}$.

Au point 12 nous avons défini la classe $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, des sous-ensembles probabilisables de Ω , comme étant l'extension borélienne

minimale sur la classe des rectangles $B_1 \times B_2$ définis $\left(\begin{smallmatrix} \forall B_1 \\ \mathfrak{B}_1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \forall B_2 \\ \mathfrak{B}_2 \end{smallmatrix} \right)$.
Les 2^6 éléments de \mathfrak{B} seront donc les sous-ensembles de Ω :

$$\begin{aligned} & \{ \bar{\Omega} \}, \{ (q_1, p_1) \}, \{ (q_2, p_1) \}, \{ (q_1, p_1) (q_2, p_1) \}, \{ (q_1, p_2) \}, \{ (q_2, p_2) \}, \\ & \{ (q_1, p_2) (q_2, p_2) \}, \{ (q_1, p_3) \}, \{ (q_2, p_3) \}, \{ (q_1, p_3) (q_2, p_3) \}, \\ & \{ (q_1, p_1) (q_1, p_2) \}, \{ (q_2, p_1) (q_2, p_2) \}, \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & \{ (q_1, p_1) (q_1, p_2) (q_1, p_3) (q_2, p_1) (q_2, p_2) (q_2, p_3) \} = \Omega \end{aligned}$$

Soit P une probabilisation définie sur \mathfrak{B} . Considérons maintenant la fonction T de Ω à Ω_2 définie par :

$$T(\{ (q_i, p_j) \}) = p_j \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix}$$

On aura en particulier :

$$\begin{aligned} T(\{\Omega\}) &= T[\{ (q_1, p_1) (q_1, p_2) (q_1, p_3) (q_2, p_1) (q_2, p_2) (q_2, p_3) \}] = \\ &= \{ p_1 \} \cup \{ p_2 \} \cup \{ p_3 \} = \{ p_1, p_2, p_3 \} = \Omega_2. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que T est une transformation mesurable de (Ω, \mathfrak{B}) en $(\Omega_2, \mathfrak{B}_2)$ car $(\forall B_2 \in \mathfrak{B}_2) : T^{-1}(B_2) \in \mathfrak{B}$.

Ainsi par exemple :

$$T^{-1}(\{ p_1 \}) = \{ (q_1, p_1) (q_2, p_1) \} \in \mathfrak{B};$$

ou encore :

$$T^{-1}(\{ p_1, p_2 \}) = \{ (q_1, p_1) (q_1, p_2) (q_2, p_1) (q_2, p_2) \} \in \mathfrak{B}.$$

La probabilisation marginale P_2 de $(\Omega_2, \mathfrak{B}_2)$ tirée de la probabilisation P de (Ω, \mathfrak{B}) sera alors définie $(\forall B_2 \in \mathfrak{B}_2)$ par :

$$P_2(B_2) = P(T^{-1}(B_2)).$$

Ainsi par exemple :

$$P_2(\{ p_1 \}) = P(\{ (q_1, p_1) (q_2, p_1) \}) = P(\{ (q_1, p_1) \}) + P(\{ (q_2, p_1) \}),$$

ou encore :

$$\begin{aligned} P_2(\{p_1, p_2\}) &= P(\{(q_1, p_1) (q_1, p_2) (q_2, p_1) (q_2, p_2)\}) = \\ &= P(\{(q_1, p_1) (q_2, p_1)\}) + P(\{(q_1, p_2) (q_2, p_2)\}) = \\ &= P_2(\{p_1\}) + P_2(\{p_2\}). \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que la classe \mathfrak{B}^* formée des sous-ensembles de Ω : $\{(q_i, p_j)\}$ $\begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$, qui coïncide ici avec Ω et qui n'est évidemment pas un corps, est une base de probabilité pour \mathfrak{B} .

En particulier la probabilisation P de (Ω, \mathfrak{B}) sera une mesure P produit de deux mesures P_1 et P_2 définies sur \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2 si $(\forall B_1 \times B_2) : P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2)$.

On aurait ainsi par exemple :

$$P(\{(q_1, p_1) (q_1, p_2) (q_2, p_1) (q_2, p_2)\}) = P_1(\{q_1, q_2\}) \cdot P_2(\{p_1, p_2\}).$$

Pour simplifier le langage, on dira que les éléments de \mathfrak{B}_1 et de \mathfrak{B}_2 sont indépendants ou encore que les classes \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2 sont indépendantes en probabilité (voir point 14).

- D'autres transformations mesurables pourraient être envisagées dans le cas d'un phénomène tel que celui qui nous occupe ici. Ainsi au lieu de considérer \mathfrak{X} par rapport à l'ensemble de référence $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, il pourrait être intéressant d'envisager la transformation T définie par :

$$T(q_i, p_j) = q_i \cdot p_j \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix} ;$$

ce qui revient à considérer le phénomène \mathfrak{X} par rapport à un ensemble Ω' pouvant être interprété comme un ensemble de dépenses possibles liées à la transaction envisagée. La transformation T que nous venons de définir est évidemment mesurable ; étant donné une probabilisation P de (Ω, \mathfrak{B}) nous pouvons déterminer la mesure P' induite par P sur (Ω', \mathfrak{B}') dans la transformation T .

§ 6 - RECAPITULATION ET EXEMPLES -

1) Au chapitre II, nous avons vu que les deux composantes essentielles d'un modèle théorique, sont un ensemble \mathfrak{X} , extension du phénomène considéré, et une hypothèse H -généralement composée- portant sur les éléments de \mathfrak{X} . Ainsi, un modèle M peut

être représenté par le couple (\mathcal{X}, H) , H pouvant être considérée comme une propriété définie dans \mathcal{X} . Le couple (\mathcal{X}, H) désigne donc un ensemble, structuré d'une façon particulièrement simple par l'hypothèse H .

2) Tout au long de cette deuxième partie du chapitre III, nous avons considéré \mathcal{X} seul, en vue d'explicitier des structures particulières d'un tel ensemble ; ceci nous a conduit notamment à définir, par rapport à l'ensemble de référence Ω , des phénomènes certains (exacts, approchés ou indéterminés) et aléatoires. A plusieurs reprises, nous avons souligné que nous allions fonder une classification des modèles sur la structure particulière de l'ensemble \mathcal{X} intervenant dans le modèle.

Ainsi, en désignant, comme nous venons de le faire au point 1, un modèle par un couple (\mathcal{X}, H) , une classification de ces couples sera basée sur une classification du premier élément, c'est-à-dire de \mathcal{X} .

Cette façon de procéder nous paraît essentielle, car toute classification fondamentale des modèles économiques, devrait, à notre sens, se baser sur la nature particulière du phénomène économique étudié dans la cadre du modèle (c'est-à-dire sur la structure particulière de \mathcal{X})⁽¹⁾.

On pourrait en effet envisager d'autres classifications des couples $M = (\mathcal{X}, H)$, basées par exemple sur une classification des hypothèses H . Une telle classification pourrait se déduire des remarques du § 1 de la section 1 de ce chapitre, ou s'inspirer de l'écriture particulière de H qui, comme nous l'avons vu au chapitre II, s'énonce sous forme grammaticale par une forme propositionnelle dont l'écriture relève de la formalisation adoptée⁽²⁾. De telles classifications, si elles peuvent avoir un intérêt certain d'un point de vue didactique ou pratiquement sur la voie qui conduit à la formulation d'un modèle -notamment en vue d'une discussion technique de ce dernier- ne nous paraissent toutefois pas s'inspirer de la structure fondamentale des modèles. Nous ne les retiendrons donc pas dans ce chapitre.

(1) Une classification dichotomique des couples $M = (\mathcal{X}, H)$ basée sur \mathcal{X} et H à la fois se déduit immédiatement de la notion de modèle séparable introduite au § 2 de la section 1 de ce chapitre.

(2) Ainsi par exemple dans le cadre d'une formalisation mathématique, on pourrait parler de modèles différentiels, de modèles récurrents, etc.

3) Nous dirons donc que, étant donné l'ensemble de référence Ω , un modèle $M = (\mathfrak{X}, H)$ est certain (exact, approché ou indéterminé) ou aléatoire si \mathfrak{X} est certain (exact, approché ou indéterminé) ou aléatoire par rapport à Ω .

L'hypothèse H , comme nous l'avons vu, peut être considérée comme une propriété définie dans \mathfrak{X} , d'ensemble représentatif \mathfrak{X}_H .

Si \mathfrak{X} est certain par rapport à Ω , c'est-à-dire si $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \Omega$, nous pouvons considérer dans Ω une hypothèse H' telle que $(\forall x \in \mathfrak{X}) : H(x) \Rightarrow H'(f(x))$ avec $\omega = f(x)$, d'ensemble représentatif $\Omega_{H'} = f(\mathfrak{X}_H)$. Soulignons toutefois que la réciproque $H'(f(x)) \Rightarrow H(x)$ n'est pas nécessairement vraie, car $f^{-1}(\Omega_{H'}) = f^{-1}(f(\mathfrak{X}_H)) \supseteq \mathfrak{X}_H$. On aura $H'(f(x)) \Rightarrow H(x)$ seulement si $f^{-1}(\Omega_{H'}) = \mathfrak{X}_H$. f peut être considéré comme un homomorphisme d'ensembles entre (\mathfrak{X}, H) et (Ω, H') c'est-à-dire entre \mathfrak{X} structuré par une hypothèse H et Ω structuré par une hypothèse $H'(1)$; on notera :

$$(\mathfrak{X}, H) \xrightarrow{f} (\Omega, H').$$

D'une façon analogue si \mathfrak{X} est aléatoire par rapport à Ω , c'est-à-dire si $\mathfrak{X} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{P}_\Omega$ nous aurons :

$$(\mathfrak{X}, H) \xrightarrow{\varphi} (\mathfrak{P}_\Omega, H'),$$

H' étant une hypothèse définie dans \mathfrak{P}_Ω et telle que :

$$(\forall x \in \mathfrak{X}) : H(x) \Rightarrow H'(P) \text{ avec } P = \varphi(x).$$

On étendra sans difficulté ces notions au cas particulier d'un phénomène certain approché.

Soulignons encore que, comme il ressort clairement de cette présentation, dans le cas d'un modèle aléatoire, à H définie dans

(1) Cette notion est plus forte que la notion d'homomorphisme entre \mathfrak{X} et Ω , car elle suppose que l'homomorphisme d'ensembles entre \mathfrak{X} et Ω établit une correspondance entre les structures de ces deux ensembles. On pourra notamment envisager des homomorphismes entre ensembles structurés par une opération \mathbf{T} ou par une relation \mathcal{R} .

\mathcal{X} correspond une hypothèse H' définie dans un ensemble de probabilités de Ω , c'est-à-dire une hypothèse portant sur des probabilités de (Ω, \mathcal{F}) .

4) Pratiquement, dans la construction théorique d'un modèle, on définit en général directement soit un couple (Ω, H') ⁽¹⁾ soit un couple (\mathcal{F}_Ω, H') en considérant d'une façon plus ou moins explicite un tel couple comme l'image par f ou φ de (\mathcal{X}, H) - dont la définition reste donc sous-entendue dans le cadre du modèle théorique envisagé⁽²⁾. Le modèle sera alors certain si on le définit par (Ω, H') ; aléatoire si on le définit par (\mathcal{F}_Ω, H') .

Cette façon de procéder, qui est évidemment commode et qu'on adoptera en général dans la mesure où elle ne prête pas à confusion, ne doit toutefois pas nous faire perdre de vue la correspondance existant entre (\mathcal{X}, H) et (Ω, H') ou (\mathcal{F}_Ω, H') . Ainsi, si on définit un modèle simplement par la donnée de (Ω, H') on sous-entend que le modèle représente un phénomène \mathcal{X} dont chaque spécification détermine un élément et un seul de Ω , H' étant l'image dans Ω de H définie dans \mathcal{X} . Si on définit le modèle par la donnée de (\mathcal{F}_Ω, H') on sous-entend que le modèle représente un phénomène \mathcal{X} dont chaque spécification détermine une probabilité et une seule de la classe de probabilités \mathcal{F}_Ω , H' étant l'image dans \mathcal{F}_Ω de H définie dans \mathcal{X} .

En général on ira même plus loin sur cette voie en considérant que chaque spécification de \mathcal{X} détermine d'une façon unique un élément et un seul de Ω ou de \mathcal{F}_Ω . Il est évidemment toujours possible de se ramener à un tel cas en considérant comme identiques les spécifications $x \in \mathcal{X}$ qui ont même image dans Ω ou dans \mathcal{F}_Ω , et qui sont donc à ce point de vue équivalentes.

Ceci revient donc à considérer f ou φ comme des isomorphismes entre (\mathcal{X}, H) et (Ω, H') ou (\mathcal{F}_Ω, H') . Pratiquement on définira alors

(1) Ω sera d'ailleurs en général un ensemble numérique.

(2) Ces notions pourraient être transposées dans le langage propre à la cybernétique, (\mathcal{X}, H) serait alors le *mécanisme original*, (Ω, H') ou (\mathcal{F}_Ω, H') des *modèles dialectiques* et le modèle expérimental \mathcal{E} , dont il a été question au § 4, un *modèle physique*. Cf. L. Couffignal, "La science économique traditionnelle et la cybernétique de l'économie", dans *Encyclopédie Française, L'univers économique et social*, tome 9, pp. 9.68-2/9.68-11.

un modèle par (Ω, H') ou $(\mathfrak{P}_\Omega, H')$ et on sous-entendra que le modèle ainsi défini représente un modèle (\mathfrak{X}, H) auquel il est isomorphe. En vue d'alléger le langage, dans la suite de cette étude, nous dirons donc simplement que le modèle théorique (\mathfrak{X}, H) est représenté par (Ω, H') ou par $(\mathfrak{P}_\Omega, H')$ si on peut admettre un isomorphisme f ou φ entre (\mathfrak{X}, H) et (Ω, H') ou $(\mathfrak{P}_\Omega, H')$, c'est-à-dire si :

$$(\mathfrak{X}, H) \xleftrightarrow{f} (\Omega, H') \text{ ou } (\mathfrak{X}, H) \xleftrightarrow{\varphi} (\mathfrak{P}_\Omega, H').$$

5) Nous allons maintenant envisager deux exemples⁽¹⁾ simples qui, sans avoir l'ambition de rendre justice à la complexité réelle des phénomènes économiques, nous permettront de concrétiser certaines des notions que nous venons d'introduire.

A - Considérons un phénomène de décision d'un agent économique déterminé sur un marché de type boursier. Nous envisagerons le cas d'un agent économique acheteur au comptant et dont les ordres sont formulés "à cours limité"⁽²⁾, c'est-à-dire en fixant le cours maximum auquel il est disposé à acheter une quantité déterminée. Le résultat de son ordre d'achat sera alors soit l'achat de la quantité qu'il a fixée, à un prix inférieur ou égal au cours maximum, soit l'achat au cours maximum d'une quantité inférieure, (en effet une quantité inférieure à la quantité demandée ne saurait être négociée à un cours inférieur au maximum, car dans ce cas l'acheteur pourrait se prévaloir du fait qu'il aurait été disposé à payer un prix supérieur pour s'assurer la quantité voulue), soit aucun achat si le cours est supérieur au cours maximum.

Soit \mathfrak{X} l'ensemble des "opérations" possibles x de l'agent économique considéré, et $\Omega = \{\omega\}$ l'ensemble des résultats des opérations particulières de la classe \mathfrak{X} . Nous envisagerons un ensemble Ω dont les éléments sont des couples numériques (q, p) ; q étant la quantité échangée et p le prix auquel s'effectue la transaction. Pour simplifier la présentation, nous supposerons que les éléments génériques q et p peuvent prendre toute valeur numérique non négative. On aura ainsi $\Omega = \{\omega\} = \{(q, p) \mid q \in Q = \mathbb{R}_+, \text{ ou encore } p \in P = \mathbb{R}_+\}$

$$\Omega = Q \times P = \mathbb{R}_+^2.$$

(1) D'autres exemples seront traités dans la section 3 en liaison avec l'étude des phénomènes à dépendance temporelle.

(2) Cf. G. Défossé, *La bourse des valeurs*, Paris, P.U.F., 1959.

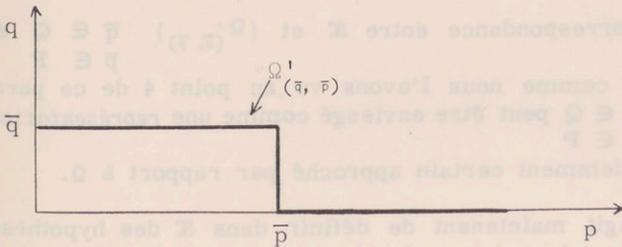
D'après ce que nous avons dit sur le comportement de l'agent économique envisagé, les opérations particulières $x \in \mathcal{X}$ de ce dernier se traduiront par des ordres d'achat de la forme : $x = \bar{x} \iff$ "acheter \bar{q} à un prix d'au plus \bar{p} " ; un tel ordre pouvant évidemment se traduire par une transaction représentée par un couple (q, p) tel que $q = \bar{q}$ et $p \leq \bar{p}$, ou $q < \bar{q}$ et $p = \bar{p}$ ou encore tel que $q = 0$ et $p > \bar{p}$.

Soit la classe de sous-ensembles de Ω : $\{\Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})}\}$ $\bar{q} \in Q$, $\bar{p} \in P$

indexée par (\bar{q}, \bar{p}) , avec

$$\begin{aligned}
 & q = \bar{q}, p \leq \bar{p} \text{ ou} \\
 (q, p) \in \Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})} & \iff q < \bar{q}, p = \bar{p} \text{ ou} \\
 & q = 0, p > \bar{p} .
 \end{aligned}$$

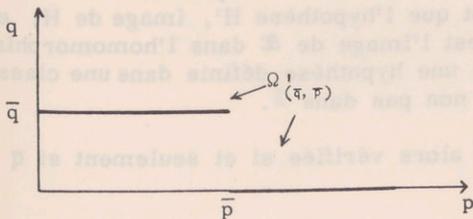
L'ensemble $\Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})} \subset \Omega$ peut être représenté graphiquement comme suit⁽¹⁾ :



(1) Si les ordres d'achat étaient formulés avec la mention "tout ou rien", les ensembles $\Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})}$ seraient de la forme :

$$(q, p) \in \Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})} \iff \begin{aligned} & q = \bar{q}, p \leq \bar{p} \text{ ou} \\ & q = 0, p > \bar{p} ; \end{aligned}$$

et pourraient être représentés graphiquement comme suit :



On vérifie immédiatement que $\bigcup_{\substack{\bar{q} \in Q \\ \bar{p} \in P}} \Omega'(\bar{q}, \bar{p}) = \Omega$, sans pour autant que $\Omega'(\bar{q}_0, \bar{p}_0) \cap \Omega'(\bar{q}_1, \bar{p}_1)$ soit vide.

Chaque opération $\bar{x} \in \mathcal{X}$, qui comme nous venons de le voir s'exprime par l'ordre d'acheter \bar{q} au plus au prix \bar{p} , se traduit donc par rapport à l'ensemble de résultats Ω par un sous-ensemble $\Omega'(\bar{q}, \bar{p})$ de la classe $\{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$. Ici d'ailleurs à chaque Ω' de la classe de sous-ensembles de Ω envisagée correspond une opération et une seule de la classe \mathcal{X} . La correspondance ainsi établie, par l'intermédiaire de (\bar{q}, \bar{p}) , entre \mathcal{X} et $\{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$ définit donc un isomorphisme g entre ces deux ensembles. Nous avons :

$$\mathcal{X} \xleftrightarrow{g} \{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$$

La correspondance entre \mathcal{X} et $\{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$ étant ici biunivoque, comme nous l'avons vu au point 4 de ce paragraphe, $\{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$ peut être envisagé comme une *représentation* de \mathcal{X} , qui est évidemment certain approché par rapport à Ω .

Il s'agit maintenant de définir dans \mathcal{X} des hypothèses et de voir quelle est leur image dans $\{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$. Considérons dans

\mathcal{X} l'hypothèse H_1 définie sous forme grammaticale par la forme propositionnelle : "l'opération x de l'agent économique considéré doit être compatible avec le revenu disponible r de ce dernier". H_1 revient donc à admettre que l'agent économique envisagé, disposant d'un revenu r , ne veut pas se trouver à découvert dans l'opération boursière considérée. A H_1 définie dans \mathcal{X} correspondra donc une hypothèse H'_1 définie dans $\{\Omega'(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q} \in Q, \bar{p} \in P\}$. Nous avons déjà sou-

ligné le fait important que l'hypothèse H' , image de H , est définie dans l'ensemble qui est l'image de \mathcal{X} dans l'homomorphisme envisagé. Ici H' est donc une hypothèse définie dans une classe de sous-ensembles de Ω - et non pas dans Ω .

L'hypothèse H'_1 sera alors vérifiée si et seulement si $\bar{q} \cdot \bar{p} \leq r$:

$$H_1' (\Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})}) \iff \bar{q} \cdot \bar{p} \leq r \quad (1)$$

L'application g étant biunivoque on aura alors :

$$\mathcal{X}_{H_1} = g^{-1}[\{\Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})}\}; \bar{q}, \bar{p} \leq r]$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre II⁽²⁾, le modèle (\mathcal{X}, H_1) admet plusieurs solutions (ou une solution indéterminée). Il existe donc plusieurs décisions $x \in \mathcal{X}_{H_1}$ telles que H_1 soit vérifiée.

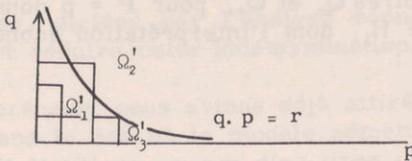
Cet exemple nous permet de bien expliciter la différence fondamentale existant entre le caractère approché ou indéterminé du phénomène et le caractère indéterminé de la solution du modèle. En effet, le caractère approché ou indéterminé de \mathcal{X} relève de la structure de cet ensemble par rapport à un ensemble de référence Ω , ou si l'on préfère de la façon d'envisager \mathcal{X} par rapport à Ω . Par contre, le caractère indéterminé de la solution du modèle relève du caractère plus ou moins fort de l'hypothèse H . Dans ce dernier cas, nous préférons d'ailleurs parler, dans la mesure du possible, de l'existence de plusieurs solutions satisfaisant H , ceci pour éviter toute ambiguïté avec le cas précédent.

Dans le cas du modèle que nous venons d'étudier, en vue notamment de restreindre l'étendue de l'ensemble \mathcal{X}_{H_1} des opérations satisfaisant H_1 , on pourrait introduire d'autres hypothèses. Ainsi par exemple, si on peut supposer que l'agent économique considéré ne veut pas acheter une quantité supérieure à q_0 , ni payer un prix unitaire supérieur à p_0 , on aura :

$$H_2' (\Omega'_{(\bar{q}, \bar{p})}) \iff \bar{q} \leq q_0, \bar{p} \leq p_0 ;$$

et on pourra considérer l'hypothèse composée $H_1 \wedge H_2$.

(1) Ainsi par exemple :



Ω_1' et Ω_3' satisfont H_1' , tandis que H_1' n'est pas vérifiée par Ω_2' .

(2) Cf. Chapitre II, § 2, point 7.

B - En vue de donner un exemple de modèle stochastique et de retrouver comme cas particulier de ce dernier un modèle certain, nous allons considérer un marché agricole simplifié.

Soit \mathcal{X} l'ensemble des états particuliers d'un tel marché. Nous supposons que chaque état particulier $x \in \mathcal{X}$ peut être représenté par une variable aléatoire à trois dimensions ou vecteur aléatoire : $[Q_o, Q_d, P]$ de champ R_+^3 .

Q_o désigne la composante "quantité offerte" du vecteur aléatoire considéré,

Q_d désigne la composante "quantité demandée" du vecteur aléatoire considéré, et

P désigne la composante "prix" du vecteur aléatoire considéré.

Admettre, comme nous venons de le faire, que chaque $x \in \mathcal{X}$ peut être représenté par un vecteur aléatoire $[Q_o, Q_d, P]$ revient à considérer le phénomène de marché \mathcal{X} comme aléatoire par rapport à R_+^3 -champ des vecteurs aléatoires de la classe considérée- ou encore à admettre qu'il existe un isomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et la classe des variables aléatoire considérée :

$$\mathcal{X} \longleftrightarrow [Q_o, Q_d, P].$$

Comme nous l'avons vu précédemment, chaque variable aléatoire $[Q_o, Q_d, P]$ sera définie par une fonction de répartition, ou si l'on préfère par une probabilisation de l'espace numérique probabilisable (R_+^3, \mathfrak{B}) .

Il s'agit maintenant d'introduire les hypothèses qui, rappelons-le encore une fois, porteront ici sur les éléments d'une classe de variables aléatoires, donc sur des variables aléatoires.

Soit $E(Q_o/p)$ et $E(Q_d/p)$ l'espérance mathématique conditionnelle des éléments aléatoires Q_o et Q_d , pour $P = p$ donné. Nous considérerons l'hypothèse H_1 , dont l'interprétation économique est immédiate⁽¹⁾, telle que :

(1) Cette hypothèse traduit une liaison entre Q_o , Q_d et P de même sens que celles que l'on admet en général dans les modèles certains.

$$E(Q_o/p) = \alpha p$$

$$E(Q_d/p) = \beta p + k;$$

on supposera en général $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, $k > 0$.

On pourra aussi être amené à introduire l'hypothèse H_2 :

$$F(q_o, q_d/p) = F(q_o/p) \cdot F(q_d/p)(1),$$

qui traduit l'indépendance stochastique, $P = p$ étant fixé, entre quantité offerte et quantité demandée.

On vérifie aisément que :

$$H_1 \implies E\{(Q_o - Q_d)/p\} = (\alpha - \beta)p - k$$

et que :

$$H_2 \implies F(q_o, q_d, p) = F(q_o/p) F(q_d/p) F(p)$$

car :

$$F(q_o, q_d, p) = F(q_o, q_d/p) \cdot F(p).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} H_1 \wedge H_2 &\implies E\{[Q_o, Q_d, P]\} = [E(Q_o), E(Q_d), E(P)] \\ &= [\alpha \bar{P}, \beta \bar{P} + K, \bar{P}] \quad \text{avec} \quad \bar{P} = E(P). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires satisfaisant l'hypothèse $H = H_1 \wedge H_2$ définissent, dans la classe des variables aléatoires envisagées, l'ensemble représentatif de H , qui n'est évidemment pas singulier. Le modèle ainsi défini admet plusieurs solutions : nous savons seulement qu'elles satisfont $H_1 \wedge H_2$ et que leurs espérances mathématiques s'expriment à l'aide de \bar{P} , comme l'indique la relation ci-dessus.

D'autres hypothèses, dictées par l'analyse économique du marché envisagé pourraient réduire cette indétermination.

Dans ce qui précède, nous avons déjà attiré l'attention sur le fait que, même dans le cas où le modèle admettrait plusieurs solutions, on pourrait l'utiliser en vue d'en tirer des conclusions in-

(1) On désigne par F les fonctions de répartition :

$$F(q_o, q_d, p) = \text{Pr. } [Q_o \leq q_o; Q_d \leq q_d; P \leq p].$$

téressantes. Dans le modèle que nous étudions ici, nous venons de voir que :

$$H_1 \implies E\{(Q_o - Q_d)/p\} = (\alpha - \beta)p - k,$$

d'où :

$$E\{E(Q_o - Q_d)/p\} = E\{Q_o - Q_d\} = (\alpha - \beta)\bar{P} - k.$$

Or, même sans imposer d'autres restrictions à la classe des variables aléatoires satisfaisant $H = H_1 \wedge H_2$, c'est-à-dire sans mieux délimiter la classe des variables aléatoires pouvant être retenues dans le cadre du modèle, nous pouvons interpréter cette propriété en termes économiques, en disant que si $(\alpha - \beta)\bar{P} - k \neq 0$, le marché considéré aura tendance -en espérance mathématique- à être en déséquilibre.

Il s'agit là d'une situation fréquente des marchés agricoles à offre et demande aléatoires.

La condition $E(Q_o - Q_d) \neq 0$ s'introduit donc comme une définition formelle de la notion de déséquilibre structurel sur un tel marché.

Si, pour des raisons relevant de l'analyse préalable du marché envisagé, on pouvait être amené à exclure l'existence d'un tel déséquilibre structurel, nous serions donc conduit à introduire une hypothèse H_3 :

$$H_3 ([Q_o, Q_d, P]) \iff E(Q_o - Q_d) = 0$$

ce qui donne $\bar{P} = \frac{k}{\alpha - \beta}$.

Compte tenu de H_3 et H_1 , nous voyons que si $p \neq \bar{P}$ il y aura encore déséquilibre possible du marché, sans pour autant qu'il y ait déséquilibre structurel. Ce fait paraît bien expliquer les déséquilibres fréquents des marchés agricoles, qui, même s'ils sont équilibrés structurellement, -c'est-à-dire en espérance mathématique- peuvent se trouver momentanément déséquilibrés de par le caractère aléatoire de Q_o et Q_d . Ici encore, nous voyons l'intérêt explicatif des conclusions auxquelles peut conduire un modèle, même si les hypothèses qu'il contient ne conduisent pas à une solution unique.

En vue de retrouver, comme cas particulier du modèle que nous venons d'étudier, un modèle certain, nous pouvons considérer la classe des variables aléatoires telles que :

$$F(q_o, q_d, p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } q_o \geq E(Q_o) = \bar{Q}_o \\ & q_d \geq E(Q_d) = \bar{Q}_d \\ & p \geq E(P) = \bar{P} \\ 0 & \text{Si une au moins de ces inégalités} \\ & \text{n'est pas vérifiée.} \end{cases}$$

On voit aisément que la classe ainsi définie se compose de variables aléatoires dégénérées, se réduisant à des vecteurs $[\bar{Q}_o, \bar{Q}_d, \bar{P}]$. \mathcal{X} peut donc être considéré comme certain par rapport à cette classe, c'est-à-dire par rapport à l'ensemble Ω^* des vecteurs $[\bar{Q}_o, \bar{Q}_d, \bar{P}]$.

D'après H_1 on aurait :

$$E(Q_o) = E\{E(Q_o/p)\} = \alpha \bar{P}$$

$$E(Q_d) = E\{E(Q_d/p)\} = \beta \bar{P} + k.$$

Or, dans Ω^* ceci conduit à :

$$H_1([\bar{Q}_o, \bar{Q}_d, \bar{P}]) \iff \begin{cases} \bar{Q}_o = \alpha \bar{P} \\ \bar{Q}_d = \beta \bar{P} + k, \end{cases}$$

relations qui expriment, dans le modèle certain, des lois linéaires simples d'offre et de demande.

H_2 , que l'on admet en général en négligeant de l'explicitier dans l'écriture du modèle, traduit ici l'équilibre de l'offre et de la demande.

§ 7 - SUR LA PORTEE DES CONCLUSIONS PRATIQUES AUXQUELLES PEUT CONDUIRE UN MODELE THEORIQUE -

1) Au chapitre II, nous avons vu que la recherche des conclusions théoriques les plus générales contenues dans un modèle $M = (\mathcal{X}, H)$ défini par un ensemble \mathcal{X} et par une hypothèse composée H , devait nous conduire à déterminer un ensemble $\mathcal{X}_H \subseteq \mathcal{X}$ tel que $H(x) \iff x \in \mathcal{X}_H$. Or, pratiquement, l'utilisation de ces conclusions théoriques ne saurait se limiter en général à la seule donnée de \mathcal{X}_H . En effet, dans la mesure tout au moins où la conceptualisation théorique se double d'une conceptualisation expérimentale dé-

terminée, l'interprétation pratique des conclusions théoriques devra permettre une "confrontation" des conclusions théoriques avec les réalisations des expériences de la classe envisagée. Cette confrontation ayant pour but soit de comparer la concordance des deux abstractions -ce qui relève de la théorie des critères statistiques- soit, dans la mesure où on peut admettre une telle concordance, de pouvoir formuler des conclusions -au sujet des réalisations expérimentales de la classe d'expériences envisagée- analogues à celles auxquelles on aboutirait par voie expérimentale. Ceci revient, en définitive, à remplacer les conclusions expérimentales par des conclusions analogues tirées du modèle théorique, ou encore à réaliser, grâce au modèle théorique, une économie d'expérimentations.

2) Comme nous l'avons vu, les conclusions théoriques du modèle s'énoncent, sous leur forme la plus générale, par l'affirmation :

$$x \in \mathfrak{X}_H \quad \text{et} \quad x \notin \bigcap_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}_H .$$

Ceci revient donc à expliciter, parmi les états particuliers du phénomène considéré, c'est-à-dire parmi les spécifications de la classe \mathfrak{X} , lesquels satisfont, lesquels sont compatibles avec les hypothèses H du modèle. D'un point de vue théorique, ayant trait à la discussion du modèle, on peut considérer que l'on a ainsi explicité les conclusions les plus générales en désignant les états particuliers du phénomène \mathfrak{X} qu'il convient de retenir dans le cadre du modèle envisagé. Toutefois, pratiquement, il s'agira d'"interpréter" ces états particuliers, d'en tirer des conclusions pratiquement utilisables. Ainsi, en définitive, de chaque état particulier, $x \in \mathfrak{X}_H$, il s'agira de tirer des conclusions qui soient, dans leur forme et dans leur contenu, adaptées aux besoins pratiques, c'est-à-dire adaptées à l'utilisation pratique que l'on envisage. Les raisonnements qui suivent essaient justement de formaliser ce processus déductif. Nous considérerons une spécification $x_0 \in \mathfrak{X}$ et nous essaierons d'expliciter le lien existant entre x_0 et les conclusions que l'on peut en tirer.

3) Désignons par C_0 la conclusion⁽¹⁾ la plus forte⁽²⁾ pouvant être tirée de x_0 . On aura : $x = x_0 \implies C_0$, et, C_0 étant la conclu-

(1) C_0 peut naturellement désigner un ensemble de conclusions. Pour simplifier nous parlerons de la conclusion C_0 .

(2) Cf. Chapitre II, § 1, point 5.

sion la plus forte pouvant être associée à x_0 , pour toute autre conclusion C telle que $x = x_0 \implies C$, on aura $C_0 \implies C$.

Soit \mathcal{C}^* une classe de conclusions telle que $C_0 \in \mathcal{C}^*$. Considérons la relation⁽¹⁾ d'implication, que l'on désignera par \longrightarrow , définie dans \mathcal{C}^* . Cette relation est transitive. Soulignons toutefois que les couples d'éléments de \mathcal{C}^* ne sont pas tous nécessairement comparables \longrightarrow .

On aura ainsi :

$$\begin{array}{l}
 (\forall C_1, C_2)_{\mathcal{C}^*} \quad : \text{ soit } C_1 \longrightarrow C_2 \quad \text{soit } C_1 \not\longrightarrow C_2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad C_2 \not\longrightarrow C_1 \quad \quad \quad C_2 \longrightarrow C_1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{soit } C_1 \longrightarrow C_2 \quad \text{soit } C_1 \not\longrightarrow C_2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad C_2 \longrightarrow C_1 \quad \quad \quad C_2 \not\longrightarrow C_1.
 \end{array}$$

Dans les 3 premiers cas C_1 et C_2 sont comparables \longrightarrow ; dans le quatrième, ils ne le sont pas⁽²⁾. La transitivité de la relation \longrightarrow nous assure que :

$$(\forall C_1, C_2, C_3)_{\mathcal{C}^*} : \left. \begin{array}{l} C_1 \longrightarrow C_2 \\ C_2 \longrightarrow C_3 \end{array} \right\} \implies C_1 \longrightarrow C_3.$$

En vue d'aboutir à une conclusion pratiquement utilisable et compatible avec C_0 , nous allons définir une sous-classe de \mathcal{C}^* : la classe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$ formée des conclusions compatibles avec C_0 . Pratiquement, on sera amené à utiliser une conclusion et une seule de la classe \mathcal{C} .

En vue de donner un sens précis à la notion de conclusion compatible avec C_0 , nous définirons la classe \mathcal{C} en astreignant chaque conclusion de la classe à être comparable à C_0 par la relation d'implication. On aura ainsi :

$$(\forall C)_{\mathcal{C}^*} : C \in \mathcal{C} \iff [C_0 \longrightarrow C] \vee [C \longrightarrow C_0].$$

(1) Cf. Chapitre IV, § 2.

(2) Cf. Chapitre IV, § 2.

Si on a $C_0 \rightarrow C$ on dira que C est une conclusion *subséquente* de C_0 ; si on a $C \rightarrow C_0$ on dira que C est une conclusion *antécédente* de C_0 et si les deux relations sont vérifiées en même temps, C sera dite *équivalente* à C_0 . On pourrait aussi envisager deux classes \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' formées respectivement des conclusions subséquentes et antécédentes à C_0 . \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' étant telles que $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'' = \mathcal{C}$, sans toutefois que leur intersection soit nécessairement vide(1).

La distinction entre la classe \mathcal{C}^* et la classe \mathcal{C} souligne ici une première étape des opérations par lesquelles on est généralement amené à formuler une conclusion pratiquement utilisable. En effet, pour des raisons pratiques, dépendant de l'utilisation concrète des conclusions que l'on a en vue, on peut être amené à envisager, à avoir besoin, d'une conclusion appartenant à une classe déterminée de conclusions \mathcal{C}^* . Or, dans la mesure où l'état particulier x_0 peut être retenu, il est naturel que la classe \mathcal{C}^* contienne la conclusion C_0 qui, comme nous l'avons vu, représente la conclusion la plus forte pouvant être tirée de x_0 . De plus, parmi les conclusions de \mathcal{C}^* on ne retiendra qu'une conclusion compatible - au sens que nous venons de définir - avec C_0 , c'est-à-dire une conclusion de $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$.

De la définition de \mathcal{C} que nous venons de donner, on tire notamment que : $(\forall C_1, C_2) \in \mathcal{C}$ tel que $C_1 \wedge C_2 \in \mathcal{C}^*$ et $C_1 \vee C_2 \in \mathcal{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} C_1 \wedge C_2 &\in \mathcal{C} \\ C_1 \vee C_2 &\in \mathcal{C} . \end{aligned}$$

En effet, en remarquant que $C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_1 \vee C_2$, et compte tenu de :

$$C \in \mathcal{C} \iff [C_0 \rightarrow C] \vee [C \rightarrow C_0] ,$$

$$\text{si } \begin{array}{l} C_0 \rightarrow C_1 \\ C_0 \rightarrow C_2 \end{array} \text{ on aura } C_0 \rightarrow C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_1 \vee C_2$$

$$\text{si } \begin{array}{l} C_1 \rightarrow C_0 \\ C_2 \rightarrow C_0 \end{array} \text{ on aura } C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_1 \vee C_2 \rightarrow C_0$$

(1) \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' ne forment donc pas nécessairement une partition de \mathcal{C} .

si $C_1 \rightarrow C_0$ on aura $C_1 \rightarrow C_2$ par transitivité de la relation \rightarrow définie dans \mathcal{C}^* . Or, $[C_1 \rightarrow C_2] \Rightarrow [C_1 \wedge C_2 \Rightarrow C_1]$ et $[C_1 \vee C_2 \Rightarrow C_2]$, ce qui donne $C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \vee C_2$;

si $C_0 \rightarrow C_1$ on aura d'une façon analogue : $C_1 \wedge C_2 \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \vee C_2$.

On remarquera les différentes façons par lesquelles les deux conclusions composées peuvent être ordonnées par implication par rapport à la conclusion C_0 .

4) Jusqu'ici, les conclusions de la classe \mathcal{C} pouvaient être des propositions quelconques. A partir de maintenant, en désignant par R l'ensemble des résultats possibles des expériences définies par un modèle expérimental \mathcal{G} ⁽¹⁾ associé au phénomène \mathcal{X} , nous allons considérer la classe \mathcal{C}^* des conclusions de la forme :

$$C_i = \{r \in R_i\} \quad \text{avec} \quad R_i \subseteq R.$$

La conclusion la plus forte pouvant être tirée de x_0 dans le cadre du modèle expérimental \mathcal{G} sera évidemment :

$$C(x_0) = C_0 = \{r \in R(x_0)\},$$

$R(x_0)$ - que nous noterons ici pour simplifier l'écriture R_0 - étant le sous-ensemble de R , image de x_0 dans l'homomorphisme $\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{R}$ défini par le modèle expérimental considéré ⁽²⁾.

(1) Cf. Section 2, § 4.

(2) En effet, pour la spécification x_0 de \mathcal{X} le modèle expérimental \mathcal{G} conduit à des résultats r tels que :

$$r \in R(x_0), \quad r \notin \bigcup_R R(x_0).$$

Or, $(\forall C_i)$, pour que $x_0 \Rightarrow C_i$ il faut et il suffit que :

$$R(x_0) \cap \bigcup_R R_i = \Phi \iff R(x_0) \subseteq R_i.$$

En effet, si $R(x_0) \cap \bigcup_R R_i \neq \Phi$, $(\exists r)_{R(x_0)} : \tilde{C}_i$, c'est-à-dire tel que la conclusion C_i soit fautive ; et si $R(x_0) \subseteq R_i$, $[C(x_0) = C_0] \Rightarrow C_i$ d'où $x_0 \Rightarrow C_i$, car $x_0 \Rightarrow C_0$.

Ainsi, $(\forall C_i)$ tel que $x_0 \Rightarrow C_i$, on a $C_0 \Rightarrow C_i$. $C_0 = C(x_0)$ est bien la conclusion la plus forte au sens défini au point 3 de ce paragraphe.

Les conclusions de la classe \mathcal{C}^* sont telles que, quel que soit l'ensemble d'indices I tel que $(\bigvee_I) : C_i \in \mathcal{C}^*$, on a nécessairement :

$$\bigwedge_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}^* \quad \text{et} \quad \bigvee_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}^*$$

car en effet :

$$\bigwedge_{i \in I} C_i \iff \{r \in \bigcap_{i \in I} R_i\} \iff \{r \in R^*\} \quad \text{avec} \quad R^* = \bigcap_{i \in I} R_i ;$$

et de même pour $\bigvee_{i \in I} C_i$.

Ceci ne serait pas nécessairement vrai si les R_i , intervenant dans la définition des conclusions C_i , étaient soumis à la condition supplémentaire d'être des intervalles, par exemple.

Remarquons aussi que :

$$(\forall C_1, C_2) : [C_1 \rightarrow C_2] \iff [R_1 \subseteq R_2].$$

5) En vue de préciser le lien existant entre les conclusions de la classe \mathcal{C} - parmi lesquelles, comme nous l'avons vu au point 3 une sera retenue - et la conclusion C_0 , - qui est ici, rappelons-le, la conclusion la plus forte pouvant être tirée de x_0 dans le cadre du modèle expérimental envisagé - nous allons définir une relation binaire⁽¹⁾ de l'ensemble singulier $\{C_0\}$ - formé de la seule conclusion C_0 - à l'ensemble \mathcal{C} formé des conclusions compatibles avec C_0 .

Nous dirons que le couple (C_0, C_i) , avec $C_i \in \mathcal{C}$, satisfait à la relation que nous désignerons par $\xrightarrow[A]$, avec $A \subseteq R$, et nous écrirons $C_0 \xrightarrow[A]{} C_i$ si et seulement si ;

$$\Phi \subseteq R_0 \cap \bigcap_R R_i \subseteq A.$$

(1) Cf. Chapitre IV, § 2.

Si $C_0 \xrightarrow{A} C_i$ nous dirons que la conclusion C_i peut être considérée comme une conclusion subséquente *approchée* de C_0 , ou encore comme une conclusion approchée tirée de la conclusion C_0 - l'approximation étant définie, par rapport à R , par l'ensemble $A \subseteq R$. On dira aussi que la relation \xrightarrow{A} peut être considérée comme une *implication au sens approché*. Il convient maintenant d'envisager quelques propriétés de la relation \xrightarrow{A} définie de $\{C_0\}$ à \mathcal{C} .

$$a) C_0 \xrightarrow{\Phi} C_i \iff C_0 \rightarrow C_i.$$

$$\text{En effet, } R_0 \cap \bigcup R_i = \Phi \iff R_0 \cup R_i = R_i \iff R_0 \subseteq R_i.$$

b) On vérifie immédiatement que :

$$\left. \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow{A} C_i \\ A \subseteq B \end{array} \right\} \implies C_0 \xrightarrow{B} C_i.$$

En particulier si $C_0 \rightarrow C_i$ on aura $C_0 \xrightarrow{A} C_i, (\forall A \subseteq R)$.

Compte tenu de la propriété b), si $C_0 \xrightarrow{A^*} C_i$

et si $(\forall A')$: $C_0 \xrightarrow{A'} C_i$ nous dirons que l'approximation définie par A^* est la plus *fine* parmi les approximations A que l'on peut envisager. On peut remarquer que, A^* désignant l'approximation la plus fine entre C_0 et $C_i \in \mathcal{C}$, $(\forall C_i) : [C_0 \xrightarrow{A^*} C_i] \iff [C_i \rightarrow C_0]$.

En effet : $A^* \neq \Phi \iff \Phi \subset R_0 \cap \bigcup R_i$; or, $(\forall C_i) : \text{soit } R_0 \subseteq R_i, \text{ soit } R_0 \supset R_i, \text{ et la condition } \Phi \subset R_0 \cap \bigcup R_i \text{ n'est compatible qu'avec } R_0 \supset R_i, \text{ car } \Phi \subset R_0 \cap \bigcup R_i \iff R_i \subset R_0 \cup R_i \text{ et si } R_0 \subseteq R_i \text{ on aurait } R_i \subset R_0 \cup R_i = R_i, \text{ relation absurde, } R_i \text{ ne pouvant pas être partie véritable de lui-même.}$

c) Si $C_0 \xrightarrow{A} C_1$ et $C_0 \xrightarrow{B} C_2$ on a :

$$C_0 \xrightarrow{A \cup B} C_1 \wedge C_2$$

$$C_0 \xrightarrow{A \cap B} C_1 \vee C_2.$$

En effet :

$$\left. \begin{array}{l} R_0 \cap \mathcal{C}_{R_1} \subseteq A \\ R_0 \cap \mathcal{C}_{R_2} \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow [R_0 \cap \mathcal{C}_{R_1}] \cap [R_0 \cap \mathcal{C}_{R_2}] \subseteq A \cap B ;$$

or,

$$R_0 \cap \mathcal{C}_{R_1} \cap R_0 \cap \mathcal{C}_{R_2} = R_0 \cap \mathcal{C}_{R_1} \cap \mathcal{C}_{R_2} = R_0 \cap \mathcal{C}_{[R_1 \cup R_2]},$$

$$\text{et } R_0 \cap \mathcal{C}_{[R_1 \cup R_2]} \subseteq A \cap B \iff C_0 \xrightarrow[A \cap B]{} C_1 \vee C_2.$$

De même :

$$\left. \begin{array}{l} R_0 \cap \left[R_1 \subseteq A \right] \\ R_0 \cap \left[R_2 \subseteq B \right] \end{array} \right\} \Rightarrow [R_0 \cap \mathcal{C}_{R_1}] \cup [R_0 \cap \mathcal{C}_{R_2}] \subseteq A \cup B,$$

$$\text{et } [R_0 \cap \mathcal{C}_{R_1}] \cup [R_0 \cap \mathcal{C}_{R_2}] = R_0 \cap [\mathcal{C}_{R_1} \cup \mathcal{C}_{R_2}] = R_0 \cap \mathcal{C}_{[R_1 \cap R_2]},$$

$$\text{ce qui donne } R_0 \cap \mathcal{C}_{[R_1 \cap R_2]} \subseteq A \cup B \iff C_0 \xrightarrow[A \cup B]{} C_1 \wedge C_2.$$

d) On peut envisager les deux cas particuliers suivants :

Si $A = B$:

$$\left. \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow[A]{} C_1 \\ C_0 \xrightarrow[A]{} C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow[A]{} C_1 \wedge C_2 \\ C_0 \xrightarrow[A]{} C_1 \vee C_2 \end{array} \right.$$

Si $A = \Phi$:

$$\left. \begin{array}{l} [C_0 \rightarrow C_1] \iff [C_0 \xrightarrow[\Phi]{} C_1] \\ C_0 \xrightarrow[B]{} C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow[B]{} C_1 \wedge C_2 \\ C_0 \xrightarrow[\Phi]{} C_1 \vee C_2 \end{array} \right.$$

$$\text{et } [C_0 \xrightarrow[\Phi]{} C_1 \vee C_2] \iff [C_0 \rightarrow C_1 \vee C_2].$$

Etant donné deux conclusions C_1 et C_2 de \mathcal{C} , telles que $C_0 \xrightarrow[A]{} C_1$ et $C_0 \xrightarrow[B]{} C_2$, pour que l'on puisse envisager les conclusions composées $C_1 \wedge C_2$ ou $C_1 \vee C_2$ avec une approximation au plus égale à D , il suffira d'après b) et c) :

soit que $D \supseteq A \cup B$,

soit que $D \supseteq A \cap B$.

6) Jusqu'ici, en définissant l'approximation d'une conclusion C_i par rapport à C_0 à l'aide d'un ensemble A , nous supposons que cet ensemble était complètement spécifié. Or, il pourrait se faire qu'ayant défini une mesure d'ensemble $\pi^{(1)}$ sur (R, \mathfrak{B}) , on se limite à définir l'approximation en imposant une borne supérieure à la mesure de l'ensemble définissant l'approximation. Au lieu de définir complètement A on posera donc simplement $\pi(A) = \pi^*$ - en supposant que $A \in \mathfrak{B}$ -, et on aura :

$$C_0 \xrightarrow{\pi^*} C_i \iff \left(\begin{matrix} \exists B \\ \mathfrak{B} \end{matrix} \right) : R_0 \cap \bigcup R_i \subseteq B \text{ et } \pi(B) \leq \pi(A) = \pi^*.$$

Si $C_0 \xrightarrow{\pi^*} C_i$ nous dirons que la conclusion C_i peut être considérée comme une conclusion subséquente approchée de C_0 , l'approximation étant définie par un sous-ensemble de R de mesure π^* .

On peut remarquer que :

$$[C_0 \xrightarrow{\pi^*} C_i] \implies 0 \leq \pi(B) \leq \pi^* \leq \pi(R).$$

Des propriétés analogues à celles que nous avons établies ci-dessus pour l'implication approchée $\xrightarrow[A]$ peuvent être établies pour l'implication approchée $\xrightarrow{\pi^*}$.

$$a') [C_0 \rightarrow C_i] \implies [C_0 \xrightarrow{\pi^* = 0} C_i] \text{ car :}$$

$$A = \emptyset \implies \pi(A) = \pi(\emptyset) = 0.$$

Toutefois, nous n'avons pas ici de réciproque, car :

$$\pi(A) = 0 \not\implies A = \emptyset.$$

Si nous avons $C_0 \xrightarrow{\pi^* = 0} C_i$ nous dirons que l'approximation est au plus définie par un ensemble de mesure nulle.

b') On vérifie aisément que :

$$C_0 \xrightarrow{\pi^*} C_i \left. \vphantom{C_0 \xrightarrow{\pi^*} C_i} \right\} \pi^* \leq \pi^{**} \implies [C_0 \xrightarrow{\pi^{**}} C_i].$$

(1) Cf. Section 2, § 5.

On peut remarquer que si $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}(A)$ et $\mathfrak{M}^{**} = \mathfrak{M}(B)$, avec $A, B \in \mathfrak{F}$, $A \subseteq B \implies \mathfrak{M}(A) \leq \mathfrak{M}(B)$.

c') Si $C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^1} C_1$ et $C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^2} C_2$ on a :

$$C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^2} C_1 \wedge C_2 \text{ et } C_0 \xrightarrow{\text{Min} [\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2]} C_1 \vee C_2.$$

Quels que soient A et B tels que $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}(A)$ et $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}(B)$, $\mathfrak{M}(A \cup B) \leq \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^2$ et $\mathfrak{M}(A \cap B) \leq \text{Min} [\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2]$, or, d'après c') et b')

$$\left. \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^1} C_1 \\ C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^2} C_2 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^2} C_1 \wedge C_2 \\ C_0 \xrightarrow{\text{Min} [\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2]} C_1 \vee C_2. \end{array} \right.$$

Si $C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^1} C_1$ et $C_0 \xrightarrow{\mathfrak{M}^2} C_2$ pour que l'on puisse formuler les conclusions composées $C_1 \wedge C_2$ et $C_1 \vee C_2$ avec une approximation au plus de mesure \mathfrak{M}^* il suffira que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^* &\geq \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^2 \\ \mathfrak{M}^* &\geq \text{Min.} [\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2]. \end{aligned}$$

d') On traitera sans difficulté le cas particulier où $\mathfrak{M}^1 = 0$ en tenant compte toutefois de a').

Un cas particulier important en vue des applications pratiques, est celui où la mesure \mathfrak{M} définie sur (R, \mathfrak{F}) est une mesure-P. En désignant par P une probabilisation déterminée de (R, \mathfrak{F}) nous aurons pour cette mesure particulière, en supposant $A \in \mathfrak{F}$:

$$C_0 \xrightarrow{P^*} C_i \iff \left(\sum_{\mathfrak{F}} B \right) : R_0 \cap \bigcap R_i \subseteq B \text{ et } P(B) \leq P(A) = P^*.$$

On a évidemment $P(\Phi) \leq P(A) \leq P(R) = 1$, où $P(\Phi) = 0$ par définition.

Si $C_0 \xrightarrow{P^*} C_i$ nous dirons que la conclusion C_i peut être considérée comme une conclusion subséquente approchée, ou comme une conséquence approchée de C_0 , l'approximation étant définie par un sous-ensemble de R de mesure-P ou de probabilité égale à P^* . On dira encore, qu'en énonçant une conclusion C_i dans le cas $C_0 \xrightarrow{P^*} C_i$, on

applique la convention terminale de Cournot (1) - avec un degré de probabilité P^* - pour tirer la conclusion C_i de la conclusion C_o . Le mot terminal souligne le fait qu'à partir de la conclusion C_i on ne saurait tirer d'autres conclusions en appliquant la relation $\xrightarrow{P^*}$, ce que nous avons d'ailleurs exclu depuis le début de ce paragraphe, en définissant des relations d'implication approchée seulement de l'ensemble singulier formé de la seule conclusion C_o , à l'ensemble \mathcal{C} des conclusions qui lui sont comparables.

Les propriétés a'), b'), c'), d'), restent évidemment valables pour cette mesure particulière. Il convient ici encore de souligner, comme nous l'avons fait pour la mesure \mathfrak{N} sous a'), que $A = \emptyset \implies P(A) = P(\emptyset) = 0$ mais que la réciproque n'est pas vraie.

Si donc nous avons $C_o \xrightarrow{P^*} C_i$, nous dirons que l'approximation est définie par un ensemble de mesure -P, ou de probabilité, nulle.

7) Dans ce qui précède, nous avons envisagé des conclusions approchées de C_o en supposant l'approximation donnée, définie soit par un ensemble $A \subseteq R$ déterminé, soit par une valeur particulière \mathfrak{N}^* ou P^* d'une mesure \mathfrak{N} ou d'une mesure P. On voit immédiatement que si on donne \mathfrak{N}^* (ou P^*) on ne détermine A qu'en mesure. Nous avons donc considéré les trois cas :

$$C_o \xrightarrow{A} C_i, \quad C_o \xrightarrow{\mathfrak{N}^*} C_i, \quad C_o \xrightarrow{P^*} C_i.$$

Or, pour le premier cas, en désignant par \mathcal{A} une classe d'ensembles A, telle que $C_o \xrightarrow{A} C_i \iff A \in \mathcal{A}$ on retiendra pratiquement l'approximation définie par $A' = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ qui peut être considérée comme la plus petite approximation de C_o par C_i . On énoncera donc :

$$C_o \xrightarrow{A'} C_i.$$

De même dans les deux autres cas envisagés, on énoncera :

(1) Cf. L. Féraud, "Le raisonnement fondé sur les probabilités", dans *Revue de métaphysique et de morale*, 53 (1948), pp. 113-138.

L. Féraud, "Sur les fondements de l'actuariat et plus généralement des applications des probabilités", dans *Bulletin de l'Association des actuaires suisses*, 60 (1960), pp. 69-99.

$$C_0 \xrightarrow{\mathfrak{N}^*} C_i \quad \text{ou} \quad C_0 \xrightarrow{P^*} C_i$$

\mathfrak{N}^* et P^* étant les plus petites valeurs des mesures \mathfrak{N} ou P , telles que :

$$\left(\exists B \right) : R_0 \cap \bigcup R_i \subseteq B \text{ et } \mathfrak{N}(B) = \mathfrak{N}^* \text{ ou } P(B) = P^* .$$

SECTION 3

MODÈLES A DÉPENDANCE TEMPORELLE, DÉTERMINISTES ET STOCHASTIQUES

§ 1 - PHENOMENES A DEPENDANCE TEMPORELLE, DETERMINISTES ET STOCHASTIQUES -

1) Dans la section précédente de ce chapitre, notamment aux § 2 et 3, nous avons défini d'une façon abstraite et générale les notions de phénomène déterministe et stochastique par rapport à un ensemble Ω , dit ensemble de référence. Et nous avons vu que la nature de cet ensemble, qui d'un point de vue purement conceptuel est arbitraire, dépendait du choix particulier afférent à l'étude d'un phénomène déterminé. Dans les illustrations que nous avons envisagées précédemment, nous avons d'ailleurs toujours été conduit à considérer comme ensemble de référence des ensembles simples dont les éléments étaient soit des nombres, soit des vecteurs. En vue de définir des phénomènes à dépendance temporelle, nous allons maintenant considérer comme ensemble de référence un ensemble \mathcal{V} de fonctions v d'une variable qui dans les applications représentera le temps⁽¹⁾.

(1) On considérera généralement le temps comme une interprétation particulière - pour les applications aux phénomènes dits temporels - d'une variable réelle.

D'une façon plus précise, ayant choisi un ensemble T pour représenter le temps, et un ensemble Y , on dira que v est une fonction du temps si v désigne une application univoque de T dans Y (1). \mathcal{V} sera alors une classe de fonctions v .

Les notions introduites et discutées dans la section 2 se transposent donc immédiatement au cas qui nous occupe ici, en posant simplement $\Omega = \mathcal{V}$.

En particulier un phénomène \mathcal{X} sera dit déterministe et à dépendance temporelle, par rapport à l'ensemble de référence \mathcal{V} , si \mathcal{V} est un ensemble homomorphe de \mathcal{X} . D'une façon analogue, étant donné une classe $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ de probabilisations de \mathcal{V} , nous dirons que \mathcal{X} est un phénomène stochastique à dépendance temporelle, par rapport à \mathcal{V} , si l'on peut admettre un homomorphisme d'ensembles entre \mathcal{X} et $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$.

2) Sans insister plus sur ces notions générales, qui, comme nous venons de le souligner, entrent dans le cadre des développements de la section 2, rappelons simplement qu'un modèle sera dit à dépendance temporelle si le phénomène étudié dans le cadre du modèle est envisagé par rapport à un ensemble de référence \mathcal{V} . On dira que le modèle est déterministe si \mathcal{X} est considéré comme déterministe par rapport à \mathcal{V} , qu'il est stochastique si \mathcal{X} est considéré comme stochastique par rapport à \mathcal{V} . Rappelons aussi que dans le cas d'un modèle déterministe à dépendance temporelle, les hypothèses H pourront être envisagées comme des propriétés définies dans \mathcal{V} , c'est-à-dire comme des propriétés portant sur des fonctions du temps. Par contre, dans le cas d'un modèle stochastique à dépendance temporelle, ces propriétés seront définies dans la classe $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ des probabilisations de \mathcal{V} envisagées; il s'agira donc de propriétés portant sur des probabilisations d'un ensemble de fonctions du temps.

3) D'un point de vue conceptuel, comme nous l'avons déjà souligné, les notions que nous venons de définir peuvent être considérées comme un cas particulier des notions introduites dans la section 2, cas particulier dans lequel on astreint l'ensemble de référence à être un ensemble de fonctions du temps. Par contre, par rapport aux exemples qui nous ont permis dans ce qui précède d'illustrer d'une façon simple les développements théoriques, la nature des éléments de l'ensemble de référence \mathcal{V} est ici plus com-

(1) Cf. § 2.

plexe. En effet, dans les illustrations qui précèdent, nous n'avons envisagé comme ensemble de référence que des ensembles numériques simples, tandis qu'ici nous sommes amené à envisager des ensembles de fonctions. Or, la nature plus complexe des éléments de ces ensembles nous conduira, dans la suite de cette section, à envisager de plus près quelques aspects techniques liés à la formulation et à l'étude des modèles à dépendance temporelle et plus particulièrement des modèles stochastiques⁽¹⁾. L'opportunité de cette façon de procéder nous paraît justifiée aussi par le fait qu'en économie pure les modèles stochastiques à dépendance temporelle ne sont encore qu'assez peu employés.

2 - PROBABILISATION D'UN ENSEMBLE DE FONCTIONS DU TEMPS⁽²⁾ -

1) Nous désignerons par T un ensemble dont l'élément générique t représente le temps. Soit Y un ensemble arbitraire. Une fonction du temps v sera alors une application univoque de T dans Y .

On désignera par $v(t) \in Y$ l'image de t dans l'application v et on aura $v(T) \subseteq Y$.

Etant donné une classe \mathcal{V} de fonctions du temps v on désignera par

-
- (1) Dans ce qui précède, nous avons essayé autant que possible d'éviter d'entrer dans des détails techniques, en vue de mettre l'accent sur les aspects logiques essentiels. Dans la discussion des exemples, nous avons d'ailleurs fait appel à des méthodes généralement bien connues.
- (2) P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, op. cit.
 H. Wold, *Demand Analysis*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1953.
 R. Fortet, *Calcul des probabilités*, op. cit.
 M. Fréchet, *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Paris, Gauthier-Villars, 1952.
 M. Girault, *Initiation aux processus aléatoires*, Paris, Dunod, 1959.
 A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, op. cit.
 D. Dugué, *Traité de statistique théorique et appliquée. I - Analyse aléatoire*. Paris, Masson & Cie, 1958.
 M. Loève, *Probability Theory*, op. cit.

Y_t l'ensemble des images d'un élément t déterminé dans toutes les applications de la classe \mathcal{V} , c'est-à-dire $Y_t = \{v(t)\}_{v \in \mathcal{V}}$, avec évidemment $Y_t \subseteq Y$. Il pourra être commode de représenter les applications $v \in \mathcal{V}$:

a) par leur graphe, c'est-à-dire par l'ensemble $\{(t, v(t))\}_{t \in T}$ des couples ordonnés $(t, v(t))$;

b) par un sous-ensemble d'un ensemble Ω_T défini par :

$$\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t \quad \text{avec} \quad \left(\bigvee_t \right) : Y_t \subseteq \Omega_t .$$

Soit ω_T l'élément générique de Ω_T et ω_t l'élément générique de Ω_t ; on aura alors $\omega_T = (\omega_t ; t \in T)$ ou encore $\left(\bigvee_t \right) : \text{pr } \omega_T = \omega_t$; ω_T est un point de Ω_T défini, $\left(\bigvee_t \right)$, par les "coordonnées" ω_t ; on peut le considérer comme une généralisation de la notion de n-tuple ordonné.

On vérifie aisément d'après la représentation introduite sous b), qu'aux $v \in \mathcal{V}$ correspondent dans Ω_T des éléments distincts, la classe \mathcal{V} pouvant ainsi être représentée de façon unique par un sous-ensemble de Ω_T . Il sera d'ailleurs souvent commode de considérer une classe \mathcal{V}' telle qu'à tout $\omega_T \in \Omega_T$ corresponde dans \mathcal{V}' une fonction v . Ce que nous supposerons en général dans la suite de ce paragraphe, en définissant des classes \mathcal{V} de fonctions par la donnée de Ω_T .

En résumé, nous désignerons donc par ω_T une fonction de $t \in T$ dans son ensemble $(v = \omega_T)$, tandis que $v(t)$ désignera l'image dans l'application v de la valeur particulière t . (1)

2) Soit \mathfrak{B} un σ -corps de sous-ensembles de Ω_T -c'est-à-dire une classe de sous-ensembles de l'ensemble de fonctions Ω_T , fermée par rapport à toute répétition dénombrable des opérations d'intersection et de complémentation(2)- et soit P une mesure probabili-

(1) Il convient de souligner qu'en analyse on désigne d'habitude par $v(t)$ soit la fonction dans son ensemble (ω_T) soit la valeur prise par la fonction pour la valeur particulière t , ce qui peut conduire à des difficultés de langage.

(2) Cf. Chapitre III, section 2, § 5, point 2.

taire $[P(\Omega_T) = 1]$ définie sur \mathfrak{B} (1). Conformément aux notations introduites au § 5 de la section 2, on désignera par (Ω_T, \mathfrak{B}) l'espace fonctionnel probabilisable envisagé et par $(\Omega_T, \mathfrak{B}, P)$ la probabilisation particulière P de cet espace.

i) Si T désigne simplement le champ d'une variable (ne représentant pas nécessairement le temps), on dira que $(\Omega_T, \mathfrak{B}, P)$ est une fonction aléatoire ou stochastique.

ii) Si, comme nous le supposerons dans la suite de ce chapitre, T désigne une représentation numérique du temps, on dira que $(\Omega_T, \mathfrak{B}, P)$ est un processus aléatoire ou stochastique.

3) En vue de montrer comment pratiquement on est en général amené à définir des probabilisations d'espaces (Ω_T, \mathfrak{B}) il convient maintenant de revenir brièvement sur certaines notions déjà introduites au § 5 de la section 2 de ce chapitre.

Nous avons vu qu'en général on partait d'une classe \mathfrak{B}^* de sous-ensembles de Ω_T (2) pour définir et probabiliser la classe \mathfrak{B}_0 qui en est l'extension borélienne minimale. Nous avons envisagé la classe \mathfrak{B}^* comme une base pour la définition d'une mesure μ sur \mathfrak{B}_0 . Pour le cas où l'ensemble sur lequel on définit \mathfrak{B}_0 est égal à \mathbb{R} ou à \mathbb{R}^n nous avons considéré les définitions habituelles des bases \mathfrak{B}^* (3).

(1) Cf. Chapitre III, section 2, § 5, point 9.

(2) Nous désignerons ici par Ω_T l'ensemble sur lequel on envisage des σ -corps, ensemble que nous désignons par Ω au § 5 de la section 2.

(3) Cf. Chapitre III, section 2, § 5, points 10 et 11.

4) Pour montrer comment pratiquement on étend ces notions au cas plus général qui nous occupe ici, nous allons considérer l'ensemble $\Omega_T = \prod_{t \in T} \Omega_t$ où T est un ensemble d'indices - ne désignant pas nécessairement le temps- et $(\forall t \in T)$, Ω_t est l'ensemble R des nombres réels. Soit N un ensemble d'indices discret fini et $T_N = \{t_i\}_{i \in N}$ un sous-ensemble de T indexé par N . Soit :

$$Y_{T_N} \subseteq \Omega_{T_N} \quad \text{avec} \quad \Omega_{T_N} = \prod_{t \in T_N} \Omega_t.$$

On appelle cylindre ou ensemble cylindrique de base Y_{T_N} le sous-ensemble de Ω_T défini par :

$$Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N} = Y_{T_N} \cdot \prod_{t \in T-T_N} \Omega_t, \quad \text{où } T-T_N = \bigcup_T T_N.$$

Si $Y_{T_N} = \prod_{t \in T_N} Y_t$ avec $Y_t \subseteq \Omega_t$, l'ensemble $Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}$ sera dit un cylindre produit de côtés Y_t , $t \in T_N$.

Nous allons maintenant considérer des cylindres produits $Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}$ dont les côtés $Y_t \subseteq \Omega_t = R$ sont des intervalles semi-fermés à droite de la forme $] -\infty, y_t]$. Les cylindres produits de cette forme peuvent être considérés comme des intervalles, fermés illimités à gauche, généralisés.

D'une façon analogue à ce que nous avons vu précédemment, la classe \mathfrak{H}^* que l'on envisage en général ici - comme base de probabilité en vue de définir une probabilisation sur la classe \mathfrak{H} de sous-ensembles de Ω_T , qui en est l'extension borélienne minimale- est la classe des cylindres produits $Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}$ définis pour tout N et pour tout $T_N \subseteq T$.

Il convient de souligner pour terminer que :

i) si T est un ensemble singulier nous aurons $\Omega_T = \Omega = R$, et nous retrouvons le cas envisagé à la section 2 d'une variable aléatoire à une dimension ;

ii) si T est un ensemble fini dénombrable, on retrouve le cas d'un vecteur aléatoire ;

iii) si T est infini dénombrable on aura une suite aléatoire, tandis que :

iv) si T a la puissance du continu on aura une fonction (numérique) aléatoire proprement dite.

Si T désigne explicitement le temps, dans le cas iv) aussi bien que dans le cas iii) on dira qu'il s'agit de processus stochastiques(1). Le cas iii) est aussi appelé une chaîne stochastique.

5) Sans entrer ici dans les problèmes théoriques, pour lesquels nous renvoyons aux ouvrages spécialisés, soulevés par l'extension à des σ -corps $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_0$ des mesures définies sur \mathfrak{B}_0 à partir de \mathfrak{B}^* , nous nous limiterons aux quelques remarques suivantes, de nature essentiellement pratique.

Comme nous venons de le voir, les probabilités définies à partir de la base \mathfrak{B}^* sur son extension borélienne minimale \mathfrak{B}_0 sont des probabilités définies sur l'extension borélienne minimale d'une classe d'intervalles ou d'intervalles généralisés, selon la nature de Ω_T .

Or, pour les cas i), ii), iii), cette façon de procéder nous permet en général de probabiliser tout sous-ensemble de Ω_T pratiquement intéressant, tandis que si T a la puissance du continu (cas iv) des sous-ensembles de Ω_T présentant un intérêt pratique évident ne seront pas probabilisables de la sorte(2). En effet, considérons à titre d'exemple le sous-ensemble de Ω_T défini par $v(t) \leq Y_t$, $\left(\bigvee_t \right)_T$. Ce sous-ensemble de Ω_T peut être représenté par $\bar{B} = \bigcap_{t \in T} Y_t \cdot \Omega_{T-t}$, et si T a la puissance du continu, \bar{B} s'obtient donc par l'intersection d'une infinité non dénombrable d'ensembles $B = Y_t \cdot \Omega_{T-t} \in \mathfrak{B}^*$.

(1) Cette distinction entre le cas iii) et le cas iv) permet une première classification des processus d'après la nature de T .

(2) J. L. Doob, "Probability in Function Space" dans *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53 (1947), pp. 15-30.

De par la définition de \mathfrak{B}_0 : $\bar{B} \notin \mathfrak{B}_0$.

On voit ainsi que si T a la puissance du continu, à partir de la seule base \mathfrak{B}^* on ne peut probabiliser des sous-ensembles de Ω_T pourtant pratiquement intéressants, tel par exemple celui que l'on obtient en posant $y_t = k$, $\left(\begin{matrix} v \\ T \end{matrix} \right)$, définissant le caractère borné de v .

On peut toutefois remarquer que les probabilisations de \mathfrak{B}_0 seront pratiquement suffisantes, dans la mesure où on envisage les fonctions du temps v comme des réalisations ou résultats pouvant être obtenus dans le cadre d'un modèle expérimental déterminé(1) et en admettant que les valeurs de v ne peuvent être observées que pour une suite discrète de valeurs du temps.

§ 3 - DEFINITIONS ET CLASSIFICATIONS DES PROCESSUS STOCHASTIQUES HABITUELS -

1) Une distinction introduite dans le paragraphe précédent permet une première classification des processus stochastiques d'après la nature de T .

On pourra ainsi distinguer les processus dans lesquels T est un ensemble discret, des processus dans lesquels T est un ensemble continu. La classe de fonctions du temps que l'on envisage dans le premier cas sera donc une classe de fonctions définies pour une suite discrète de valeur du temps ; tandis que la seconde sera une classe de fonctions définies pour un ensemble continu de valeur du temps. Nous nous limiterons par la suite à l'étude de cette deuxième catégorie de processus.

2) Une autre classification pourra être fondée sur la nature particulière de l'ensemble Y des images de $t \in T$ pour tout $v \in \mathfrak{V}$.

On distinguera le cas où Y est un ensemble discret du cas où il a la puissance du continu. On voit immédiatement que si Y est discret, les fonctions $v \in \mathfrak{V}$ définies pour tout $t \in T$ (continu) sont nécessairement des fonctions discontinues variant par sauts. Nous reviendrons sur cette question au § 4.

(1) Cf. Chapitre III, section 2, § 4.

3) Sans entrer ici dans les problèmes théoriques concernant la définition rigoureuse d'un processus, rappelons que d'habitude on est amené à introduire un processus en utilisant la notion de variable aléatoire à N dimensions. Ce sera à partir d'une famille de fonctions de répartition $F(t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_N)$, définies pour tout t_1, t_2, \dots, t_N et pour tout N discret fini, que l'on définira les probabilisations de \mathfrak{Y}_0 ; et on aura en particulier :

$$\left(\forall B \in \mathfrak{Y}_0 \right) : P(B) = P(Y_{T_N} \in \Omega_{T-T_N}) = F(t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (1),$$

avec $\left(\forall t_i \right) : Y_{t_i} = Y_i =]-\infty, y_i]$. On vérifie aisément que pour tout $M < N$ on doit avoir :

$$F(t_1, t_2, \dots, t_M; y_1, y_2, \dots, y_M) = F(t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_M, \underbrace{+\infty, \dots, +\infty}_{N-M \text{ fois}}),$$

car en effet :

$$P(Y_{T_M} \in \Omega_{T-T_M}) = P(Y_{T_N} \in \Omega_{T-T_N}) \text{ si } Y_t = \Omega_t = \Omega \left(\forall t \in T \right).$$

4) $\left(\forall B \in \mathfrak{Y}_0 \right)$ on dira que $P(B)$ définit la probabilité de B, ou mieux, la probabilité de la proposition $\omega_T \in B$.

Nous écrirons pour simplifier :

$$\text{Prob. } (\omega_T \in B) = P(B).$$

(1) On peut considérer que les fonctions de répartition F définissent $\forall T_N$ des probabilisations marginales de Ω_{T_N} .

Pour tout $B \in \mathfrak{B}_0$ de la forme $B = Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}$, donc pour tout $B \in \mathfrak{B}^*$, on aura :

$$\omega_T \in Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N} \Leftrightarrow \left(\bigvee_{t \in T_N} v(t) \leq y_t \right)$$

Y_{T_N} , rappelons-le, étant égal à $\prod_{t \in T_N} Y_t$, avec $Y_t =]-\infty, y_t]$. En posant $y_{t_i} = y_i$ on pourra alors remplacer la proposition $[\omega_T \in Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}]$ par la proposition $[v(t_1) \leq y_1, v(t_2) \leq y_2, \dots, v(t_N) \leq y_N]$, ce qui nous permet d'écrire,

$$\begin{aligned} P(B) &= \text{Prob.} [\omega_T \in Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}] = \\ &= \text{Prob.} [v(t_1) \leq y_1, v(t_2) \leq y_2, \dots, v(t_N) \leq y_N] = \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_N). \end{aligned}$$

5) La forme particulière des fonctions de répartition F -définissant des probabilisations particulières P - peut être retenue en vue de définir des classes de processus. Et on pourra distinguer :

i) des formes particulières des F , considérées comme fonctions de répartition par rapport à (y_1, y_2, \dots, y_N) , ce qui conduit à définir des propriétés d'indépendance des probabilisations P ;
ou

ii) des propriétés des fonctions F par rapport à t_1, t_2, \dots, t_N , c'est-à-dire des propriétés des fonctions de répartition F par rapport au temps dont elles dépendent.

A titre d'exemple, considérons deux cas particuliers importants, le premier relevant du cas i) et définissant l'indépendance stochastique la plus forte que l'on puisse envisager dans le cas d'un processus ; le second relevant du cas ii) et définissant la classe des processus stationnaires.

Pour le premier cas, on suppose que, pour tout t_1, t_2, \dots, t_N , les fonctions de répartition F sont de la forme :

$$F(t_1, t_2, \dots, t_N; y_1, y_2, \dots, y_N) = F(t_1; y_1) F(t_2; y_2) \dots F(t_N; y_N),$$

des

ce qui équivaut à définir une probabilisation P telle que :

$$(\forall T_N) : P(Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}) = \prod_{t \in T_N} P(Y_t \cdot \Omega_{T-t}) = \prod_{t \in T_N} P_t(Y_t) ;$$

P est donc une mesure produit des mesures P_t (1).

On dira qu'un processus est *stationnaire* si, quel que soit τ , et pour tout t_1, t_2, \dots, t_N on a :

$$F(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau ; y_1, y_2, \dots, y_N) = F(t_1, t_2, \dots, t_N ; y_1, y_2, \dots, y_N)$$

Les fonctions de répartition F ne sont donc pas modifiées par une translation par rapport au temps.

Cette propriété des F pourra aussi s'écrire :

$$(\forall T'_N) \text{ tel que } t'_i = t_i + \tau \left(\begin{matrix} \forall \\ N \end{matrix} i \right)$$

on a :

$$P(Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}) = P(Y_{T'_N} \cdot \Omega_{T-T'_N}).$$

En particulier pour $N = 1$ on aura :

$$F(t, y) = F(t + \tau ; y) = F(t - \tau ; y) = F(y).$$

Les fonctions de répartition unidimensionnelles de la classe envisagée ne dépendent donc pas de t .

Pour $N = 2$ on aura :

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2 ; y_1, y_2) &= F(t_1 + \tau, t_2 + \tau ; y_1, y_2) = \\ &= F(t_1 - \tau, t_2 - \tau ; y_1, y_2) = \\ &= F(t_2 - t_1 ; y_1, y_2) ; \end{aligned}$$

les fonctions de répartition à deux dimensions de la classe envisagée dépendent donc seulement de la différence $t_2 - t_1$.

(1) Cf. Section 2, § 5, points 12 et 14.

6) Dans ce qui précède, nous avons attiré l'attention sur le fait important, qu'en général on est amené à introduire un processus à l'aide de la famille de fonctions de répartition F dont la forme particulière permet aussi de définir des classes particulières de processus. Or, il sera souvent commode de définir les fonctions de répartition indirectement à l'aide de fonctions de répartition G recouvrant la notion intuitive de probabilité de transition(1) (2).

En posant $T_M = t_1, t_2, \dots, t_M$ et $T_N = t_1, t_2, \dots, t_N$, $M < N$, nous pouvons considérer les probabilisations conditionnelles(3) déduites de P , de la forme :

$$P_{Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}} (Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}) = \frac{P(Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N})}{P(Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M})};$$

avec évidemment $Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N} \subseteq Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}$.

Or, $P_{Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}} (Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N})$ définit la probabilité de la proposition $\omega_T \in Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}$ sachant que $\omega_T \in Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}$; ce que nous écrirons simplement :

$$\text{Prob. } [\omega_T \in Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N} / \omega_T \in Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}] =$$

$$\text{Prob. } [v(t_{M+1}) \leq y_{M+1}, \dots, v(t_N) \leq y_N / v(t_1) \leq y_1, \dots, v(t_M) \leq y_M].$$

Et, d'après ce que nous avons vu précédemment :

$$P_{Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}} (Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N}) = \text{Prob. } [\omega_T \in Y_{T_N} \cdot \Omega_{T-T_N} / \omega_T \in Y_{T_M} \cdot \Omega_{T-T_M}] =$$

$$= \text{Prob. } [v(t_{M+1}) \leq y_{M+1}, \dots, v(t_N) \leq y_N / v(t_1) \leq y_1, \dots, v(t_M) \leq y_M] =$$

$$= \frac{F(t_1, \dots, t_N; y_1, \dots, y_N)}{F(t_1, \dots, t_M; y_1, \dots, y_M)}.$$

(1) Pour une étude systématique de quelques classes de processus définis par l'intermédiaire des probabilités de transition, on pourra consulter : L. Féraud, L. Solari, *Sur les attentes à l'entrée de différents services*, Genève, Librairie de l'Université, 1959.

(2) G est une fonction de répartition de transition.

(3) Cf. Section 2, § 5, point 15.

Nous utiliserons par la suite des fonctions de répartition de transition G définies par :

$$G(t_1, t_2, \dots, t_M; y_1, y_2, \dots, y_M; t_{M+1}, \dots, t_N, y_{M+1}, \dots, y_N) = (1)$$

$$= \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ h_M \rightarrow 0}} \frac{F(t_1, t_2, \dots, t_M; y_1, y_2, \dots, y_M)}{F(t_1, t_2, \dots, t_M; y_1 + h_1, y_2 + h_2, \dots, y_M + h_M) - F(t_1, t_2, \dots, t_M; y_1, y_2, \dots, y_M)} =$$

$$= \text{Prob. } [v(t_{M+1}) \leq y_{M+1}, \dots, v(t_N) \leq y_N / v(t_1) = y_1, \dots, v(t_M) = y_M].$$

La forme particulière des fonctions G -définissant indirectement des formes particulières des fonctions F - peut ici encore être retenue en vue de définir des classes de processus. Nous retiendrons seulement la classe des processus de Markov, qui fera l'objet d'une étude plus approfondie au paragraphe suivant, et pour laquelle on a, pour tout $t_1 < t_2 < \dots < t_N$:

$$\text{Prob. } [v(t_N) \leq y_N / v(t_1) = y_1, v(t_2) = y_2, \dots, v(t_{N-1}) = y_{N-1}] =$$

$$= G(t_1, t_2, \dots, t_{N-1}; y_1, y_2, \dots, y_{N-1}; t_N, y_N) = G(t_{N-1}, y_{N-1}; t_N, y_N) =$$

$$= \text{Prob. } [v(t_N) \leq y_N / v(t_{N-1}) = y_{N-1}].$$

Les G ne dépendent donc que de la première valeur de v , antérieure à t_N , que l'on considère.

(1) On peut remarquer que, s'il y a densité de probabilité $\frac{\partial^{N-M} G}{\partial y_{M+1} \partial y_{M+2} \dots \partial y_N}$ est la probabilité de transition de (y_1, y_2, \dots, y_M) pour t_1, t_2, \dots, t_M , à (y_{M+1}, \dots, y_N) pour t_{M+1}, \dots, t_N .

§ 4 - LES PROCESSUS DE MARKOV. ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES⁽¹⁾ -

1) Comme nous venons de le voir, un processus de Markov est un processus tel que pour tout $t_1 < t_2 \dots < t_N$:

$$\begin{aligned} & \text{Prob. } [v(t_N) \leq y_N / v(t_1) = y_1, \dots, v(t_{N-1}) = y_{N-1}] = \\ & = \text{Prob. } [v(t_N) \leq y_N / v(t_{N-1}) = y_{N-1}] = G(t_{N-1}, y_{N-1} ; t_N, y_N). \end{aligned}$$

En posant $t_{N-1} = \tau$, $t_N = t$, $y_{N-1} = x$, $y_N = y$, nous écrivons plus simplement :

$$\text{Prob. } [v(t) \leq y / v(\tau) = x] = G(\tau, x ; t, y),$$

avec naturellement $\tau < t$.

Les fonctions de répartition F seront donc de la forme :

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, \dots, t_N ; y_1, y_2, \dots, y_N) &= F(t_1 ; y_1) \cdot G(t_1, y_1 ; t_2, y_2) \dots \\ &\dots G(t_{N-1}, y_{N-1} ; t_N, y_N). \end{aligned}$$

2) Il convient de souligner que les fonctions de répartition de transition G - qui, rappelons-le, sont des fonctions de répartition en y - doivent être telles que :

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} G(\tau, x ; t, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} G(\tau, x ; t, y) = 1,$$

et, en supposant qu'elles sont continues par rapport à τ et t on

(1) R. Fortet, *Calcul des probabilités*, op. cit.
 A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, op. cit.
 W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1957.
 W. Feller, "Zur Theorie der stochastischen Prozesse" dans *Mathematische Annalen*, 113 (1937), pp. 113-160.
 M. S. Bartlett, *Stochastic Processes*, Cambridge, University Press, 1956.
 H. Wold, *Demand Analysis*, op. cit.
 A. T. Bharucha-Reid, *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications*, New York, McGraw-Hill, 1960.

aura les relations évidentes :

$$\lim_{\tau \rightarrow t^-} G(\tau, x ; t, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x \\ 1 & \text{si } y \geq x \end{cases}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau^+} G(\tau, x ; t, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x \\ 1 & \text{si } y \geq x. \end{cases}$$

On établit aussi sans difficulté, pour $\tau < s < t$, l'équation fondamentale dite de Chapman-Kolmogorov :

$$G(\tau, x ; t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, z ; t, y) d_z G(\tau, x ; s, z) \quad (2.1)$$

qui, si les fonctions de répartition de transition G admettent une densité de probabilité $g(\tau, x ; t, y) = \frac{\partial G(\tau, x ; t, y)}{\partial y}$, s'écrit :

$$g(\tau, x ; t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, x ; s, z) f(s, z ; t, y) dz. \quad (2.2)$$

3) Un processus de Markov sera dit *homogène par rapport au temps*, ou simplement *homogène*, si les fonctions de répartition de transition sont de la forme :

$$G(\tau, x ; t, y) = G(t - \tau ; x, y),$$

c'est-à-dire si elles ne dépendent que de la différence $t - \tau$. L'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit alors :

$$G(t - \tau ; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - s ; z, y) d_z G(s - \tau ; x, z), \quad (3.1)$$

ou encore, en posant $t_1 = s - \tau$ et $t_2 = t - s$:

$$G(t_1 + t_2 ; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_2 ; z, y) d_z G(t_1 ; x, z). \quad (3.1 \text{ bis})$$

4) Un processus de Markov sera dit à *accroissements indépendants*⁽¹⁾ si, pour tout x_1, x_2 , les fonctions de répartition $G(\tau, x ; t, y)$ sont telles que :

$$G(\tau, x_1 ; t, x_1 + u) = G(\tau, x_2 ; t, x_2 + u) = H(\tau, t ; u),$$

(1) On pourrait dire aussi homogène par rapport aux variations des fonctions v .

$H(\tau, t ; u)$ étant une fonction de répartition par rapport à u .

Les fonctions de répartition de transition ne dépendent donc pas de la valeur prise par v à l'époque τ ; elles ne dépendent que de la variation $u = v(t) - v(\tau)$. On a ainsi, pour tout x :

$$\text{Prob. } [v(t) \leq y/v(\tau) = x] = \text{Prob. } [v(t) - v(\tau) \leq u = y - x].$$

5) Dans la suite de ce paragraphe, nous allons définir :

i) la classe des processus de Markov purement discontinus⁽¹⁾, c'est-à-dire la classe des processus de Markov faisant intervenir des fonctions du temps v presque certainement (avec probabilité égale à 1) discontinues et variant par sauts ;

ii) la classe des processus de Markov purement continus⁽²⁾, c'est-à-dire la classe des processus de Markov faisant intervenir des fonctions v presque certainement continues. Nous n'étudierons pas le cas mixte.

En vue de mettre en évidence quelques difficultés techniques propres à l'étude de tels processus, nous serons amené à étudier quelques exemples relevant de chacune de ces classes.

6) Pour rendre cet exposé plus intuitif, nous commencerons par l'étude du cas particulier des processus purement discontinus dénombrables⁽³⁾, c'est-à-dire des processus purement discontinus dans lesquels l'ensemble Y^* des images de $t \in T$ (par les fonctions $v \in \mathcal{V}$) est un ensemble dénombrable.

On aura ainsi : $Y^* = \{y_1, y_2, \dots, y_\infty\} \subset \mathbb{R}$. Les fonctions de répartition F et G introduites précédemment pourront alors être remplacées par des "probabilités ponctuelles" définies comme suit :

-
- (1) *Rein unstetige Markoffschen Prozesse* que l'on appelle aussi processus de Markov discontinus permanents (cf. Blanc-Lapierre et Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, op. cit.).
- (2) *Rein stetige Markoffschen Prozesse*, dit aussi processus de Markov continus permanents.
- (3) Processus que l'on appelle aussi dénombrables permanents.

$$\begin{aligned}
 P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(t_1, t_2, \dots, t_k) &= \\
 \text{Prob. } [v(t_1) = y_{i_1}, v(t_2) = y_{i_2}, \dots, v(t_k) = y_{i_k}] &, \\
 \mathfrak{G}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}; i_k}(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}; t_k) &= \\
 = \text{Prob. } [v(t_k) = y_{i_k} / v(t_1) = y_{i_1}, \dots, v(t_{k-1}) = y_{i_{k-1}}] & \quad (1).
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier des processus de Markov on aura naturellement :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}; i_k}(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}; t_k) &= \mathfrak{G}_{i_{k-1}; i_k}(t_{k-1}; t_k) = \\
 \mathfrak{G}_{i, j}(\tau, t) &= \text{Prob. } [v(t) = y_j / v(\tau) = y_i].
 \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'équation de Chapman-Kolmogorov (voir point 2) s'écrit alors, pour $\tau < t_1 < t$:

$$\mathfrak{G}_{i, j}(\tau, t) = \sum_k \mathfrak{G}_{i, k}(\tau, t_1) \mathfrak{G}_{k, j}(t_1, t). \quad (6.1)$$

7) Il convient de remarquer que si on se donne une "probabilisation initiale" $P_i(0)$ définie pour $t = 0$, les $\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)$ déterminent complètement les $P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(t_1, t_2, \dots, t_k)$ pour tout $0 < t_1 < \dots < t_k$.

En effet on aura :

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(t_1, t_2, \dots, t_k) = P_{i_1}(t_1) \mathfrak{G}_{i_1, i_2}(t_1, t_2) \dots \mathfrak{G}_{i_{k-1}, i_k}(t_{k-1}, t_k),$$

 (1) En posant $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$
 on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned}
 &F(t_1, t_2, \dots, t_k; y_1, y_2, \dots, y_k) = \\
 &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_k} P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(t_1, t_2, \dots, t_k) \delta(y_1 - y_{i_1}) \dots \delta(y_k - y_{i_k}),
 \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
 &G(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}; y_1, y_2, \dots, y_{k-1}; t_k, y_k) = \\
 &= \sum_{i_k} \mathfrak{G}_{i_1, i_2, \dots, i_k}(t_1, t_2, \dots, t_k) \delta(y - y_{i_k}).
 \end{aligned}$$

avec

$$P_{i_1}(t_1) = \sum_i P_i(0) \mathfrak{C}_{i, i_1}(0, t_1).$$

La donnée de $P_i(0)$ et des $\mathfrak{C}_{ij}(\tau, t)$ détermine donc complètement le processus de Markov.

Nous allons maintenant voir comment on est en général amené à introduire les $\mathfrak{C}_{ij}(\tau, t)$ dans le cas des processus de Markov dénombrables permanents.

8) Un processus de Markov dénombrable sera dit *permanent* ou *purement discontinu* si, étant donné deux familles de fonctions continues de t , $q_i(t)$ et $q_{ij}(t)$ telles que :

$$(\forall i, j) : 0 \leq q_i(t) \leq 1, 0 \leq q_{ij}(t) \leq 1, q_{ii}(t) = 0 \text{ et } \sum_j q_{ij}(t) = 1,$$

on a $\left(\frac{\forall t}{T} \right)$:

$$\mathfrak{C}_{ii}(t, t + \Delta t) = 1 - q_i(t) \Delta t + o(\Delta t) \tag{8.1}$$

$$\mathfrak{C}_{ij}(t, t + \Delta t) = q_{ij}(t) \Delta t + o(\Delta t), i \neq j. \tag{8.2}$$

On en déduit que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - \mathfrak{C}_{ii}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = q_i(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{C}_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = q_{ij}(t), i \neq j ;$$

d'où l'interprétation intuitive des fonctions $q_i(t)$, $q_{ij}(t)$ - que l'on appelle aussi *fonctions d'intensité* - pouvant être définies par :

$$q_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Prob. } [v(t + \Delta t) \neq y_i / v(t) = y_i],$$

et

$$q_{ij}(t) = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Prob. } [v(t + \Delta t) = y_j / v(t) = y_i]}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Prob. } [v(t + \Delta t) \neq y_i / v(t) = y_i]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Prob. } [v(t + \Delta t) = y_j / v(t) = y_i \text{ et } v(t + \Delta t) \neq y_i].$$

9) Si dans (6.1) écrite sous la forme :

$$\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t + \Delta t) = \sum_k \mathfrak{G}_{ik}(\tau, t) \mathfrak{G}_{kj}(t, t + \Delta t)$$

on remplace les $\mathfrak{G}_{kj}(t, t + \Delta t)$ par leur expression fournie par (8.1) et (8.2) on aura :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t + \Delta t) &= \sum_k \mathfrak{G}_{ik}(\tau, t) [q_k(t) q_{kj}(t) \Delta t + o(\Delta t)] + \\ &+ \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t) [1 - q_j(t) \Delta t + o(\Delta t)], \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t + \Delta t) - \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)}{\Delta t} = \\ &= -q_j(t) \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t) + \sum_k q_k(t) q_{kj}(t) \mathfrak{G}_{ik}(\tau, t). \end{aligned} \quad (9.1)$$

De même, en partant de :

$$\mathfrak{G}_{ij}(\tau - \Delta \tau, t) = \sum_k \mathfrak{G}_{ik}(\tau - \Delta \tau, \tau) \mathfrak{G}_{kj}(\tau, t)$$

on aboutit à :

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)}{\partial \tau} = q_i(\tau) [\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t) - \sum_k q_{ik}(\tau) \mathfrak{G}_{kj}(\tau, t)]. \quad (9.2)$$

Les systèmes d'équations différentielles (9.1) et (9.2), avec les conditions initiales⁽¹⁾ $\mathfrak{G}_{ij}(t, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$, sont des cas particuliers -valables ici pour les processus de Markov permanents dénombrables- des systèmes d'équations intégrodifférentielles dites de Feller, propres des processus de Markov purement discontinus.

(9.1) est dit le système prospectif⁽²⁾, (9.2) le système rétrospectif⁽³⁾.

(1) Cf. point 2.

(2) Forward system of differential equations.

(3) Backward system of differential equations.

En se donnant les $q_i(t)$ et les $q_{ij}(t)$, pratiquement les $\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)$ s'introduisent ainsi comme solution de ces systèmes⁽¹⁾.

10) Nous avons vu au point 7 que les $\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)$ et la donnée d'une "probabilisation initiale" $P_i(0)$, déterminent complètement les $P_{i_1, i_2, \dots, i_k}(t_1, t_2, \dots, t_k)$, et qu'en particulier :

$$P_j(t) = \sum_i P_i(0) \mathfrak{G}_{ij}(0, t).$$

Or, il arrive souvent que l'on soit amené à utiliser une probabilisation initiale de la forme :

$$P_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq a \\ 1 & \text{si } i = a \end{cases}$$

c'est-à-dire à admettre que :

$$\text{Prob. } [v(0) = y_a] = P_a(0) = 1.$$

On aura alors :

$$P_j(t) = P_a(0) \mathfrak{G}_{aj}(0, t) = \mathfrak{G}_{a,j}(0, t);$$

et, pour $i = a$ et $\tau = 0$ le système (9.1) peut s'écrire sous la forme particulière :

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -q_j(t)P_j(t) + \sum_k q_k(t)q_{kj}(t)P_k(t), \quad (10.1)$$

avec

$$P_j(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq a \\ 1 & \text{si } j = a, \end{cases}$$

(1) On démontre qu'il existe toujours une solution en $\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)$ satisfaisant l'équation (6.1) telle que :

$$\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t) \geq 0 \text{ et } \sum_j \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t) \leq 1.$$

Si $\sum_j \mathfrak{G}_{ij}(\tau, t) = 1$ cette solution est unique.

Cf. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, op. cit., pp. 423 ss.

permettant de déterminer directement les $P_j(t)$.

11) Si un processus de Markov dénombrable est homogène on aura :

$$\mathfrak{T}_{ij}(\tau, t) = \mathfrak{T}_{ij}(t - \tau) = \mathfrak{T}_{ij}(u) ;$$

et l'équation (6.1) s'écrira :

$$\mathfrak{T}_{ij}(u_1 + u_2) = \sum_k \mathfrak{T}_{ik}(u_1) \mathfrak{T}_{kj}(u_2) \quad (1).$$

Si de plus ce processus est permanent, on vérifie immédiatement que l'on aura : $q_i(t) = q_i$ et $q_{ij}(t) = q_{ij}$ (2). Ce qui conduit aux systèmes différentiels :

$$\frac{d\mathfrak{T}_{ij}(u)}{du} = -q_j \mathfrak{T}_{ij}(u) + \sum_k q_k q_{kj} \mathfrak{T}_{ik}(u) \quad (11.1)$$

$$\frac{d\mathfrak{T}_{ij}(u)}{du} = q_i \mathfrak{T}_{ij}(u) - \sum_k q_i q_{ik} \mathfrak{T}_{kj}(u) \quad (11.2)$$

avec

$$\mathfrak{T}_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

correspondant dans le cas homogène à (9.1) et (9.2).

Si, comme au point 10, on se donne une probabilisation initiale de la forme :

$$P_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq a \\ 1 & \text{si } i = a \end{cases}$$

on aura, pour $i = a$, le système

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -q_j P_j(t) + \sum_k q_k q_{kj} P_k(t) \quad (11.3)$$

avec

$$P_j(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq a \\ 1 & \text{si } j = a, \end{cases}$$

correspond, dans le cas homogène à (10.1).

(1) Cf. points 3 et 6.

(2) Cf. point 8.

12) Dans ce qui précède, nous avons vu qu'en général on est amené à introduire les $\mathfrak{G}_{ij}(\tau, t)$ intervenant dans la définition d'un processus de Markov permanent dénombrable, comme solution d'un système d'équations différentielles. La forme particulière d'un tel système, et donc du processus que l'on définit ainsi, dépend évidemment du choix des fonctions $q_i(t)$ et $q_{ij}(t)$.

Les processus les plus couramment utilisés et relevant de la classe étudiée ici peuvent donc être définis simplement par la forme particulière des fonctions $q_i(t)$ et $q_{ij}(t)$ intervenant dans le système différentiel de définition.

A titre d'exemple, on retrouvera comme cas particulier des systèmes (9.1) et (9.2) les systèmes différentiels prospectif et rétrospectif du processus de naissance et de mort ⁽¹⁾ le plus général, en posant :

$$q_j(t) = \lambda_j(t) + \mu_j(t) \quad j = 1, 2, \dots$$

$$q_0(t) = \lambda_0(t)$$

$$q_{kj}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |j-k| \geq 2 \\ \frac{\lambda_k(t)}{q_k(t)} & \text{si } j-k = 1 \\ 0 & \text{si } j-k = 0 \\ \frac{\mu_k(t)}{q_k(t)} & \text{si } j-k = -1. \end{cases}$$

D'autres processus, notamment ceux de Poisson, peuvent en être déduits comme cas particuliers⁽²⁾.

(1) Qui peut jouer un rôle important dans les problèmes démographiques, dans les problèmes économiques ayant trait à la gestion des stocks, dans la théorie des files d'attente, etc.

(2) On trouvera dans L. Féraud, L. Solari, *Sur les attentes à l'entrée de différents services*, op. cit., une liste de tels processus.

Nous nous limiterons à étudier ici dans le détail un processus particulier : le processus que l'on appelle d'habitude *processus de Polya*. (1)

Ce choix nous a été dicté par le fait que cet exemple nous permettra d'illustrer une méthode qui, sans être générale, permet souvent pratiquement de simplifier considérablement l'étude d'un processus. En effet, il arrivera dans certains cas (et nous en trouverons un autre exemple en étudiant les processus de Markov absolument continus) que l'on puisse définir un processus à l'aide d'un processus plus simple, qui en est un cas particulier(2). En ce qui concerne l'exemple du processus de Polya, nous verrons qu'on peut le définir à l'aide du processus plus simple dit processus de naissance homogène.

13) Nous commencerons donc par l'étude du *processus de naissance homogène*(3) défini en posant dans (11.1) et dans (11.2),

$$q_j = \lambda_j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$q_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq k + 1 \end{cases} \quad (4),$$

ce qui conduit au système différentiel :

(1) Ce processus intervient notamment dans les problèmes d'assurance, pour représenter le nombre de cas de maladie ou d'accident pouvant survenir pendant une période donnée.

(2) Il s'agit d'un procédé couramment utilisé dans l'étude des variables aléatoires.

(3) Cf. point 11.

(4) Dans le processus de naissance et de mort généralisé envisagé au point 12 -processus qui est évidemment non homogène- il suffirait de poser :

$$\lambda_j(t) = \lambda_j \quad \text{et} \quad \mu_j(t) = 0,$$

pour retrouver le processus que nous étudions ici.

$$\frac{d \mathfrak{C}_{ij}(u)}{du} = - \lambda_j \mathfrak{C}_{ij}(u) + \lambda_{j-1} \mathfrak{C}_{i,j-1}, j \geq 1$$

$$\frac{d \mathfrak{C}_{i0}(u)}{du} = - \lambda_0 \mathfrak{C}_{i0}(u)$$

avec
$$\mathfrak{C}_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

correspondant à (11.1).

En choisissant une origine sur l'axe des temps et en posant :

$$P_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ 1 & \text{si } i = 0, \end{cases}$$

on aura plus simplement le système en $P_j(t)$, $t \geq 0$ (1) :

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = - \lambda_j P_j(t) + \lambda_{j-1} P_{j-1}(t), j \geq 1 \tag{13.1}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = - \lambda_0 P_0(t),$$

avec
$$P_j(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ 1 & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

La solution générale de ce système peut être déterminée par induction à partir de $P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$.

Nous allons par contre la déterminer au point suivant à l'aide des

(1) Cf. point 10. On peut remarquer que l'on a ici :

$$P_j(t) = \mathfrak{C}_{0j}(0, t) = \mathfrak{C}_{0j}(t).$$

transformées de Laplace⁽¹⁾, ce qui nous permettra d'introduire cet instrument du calcul opérationnel qui se révèle souvent particulièrement utile et élégant.

14) Soit $\mathcal{L} \{ P_j(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} P_j(t) dt = P_j^*(s)$ la transformée de Laplace de $P_j(t)$, considérée comme fonction de t . Compte tenu des remarques de la note (1) le système (13, 1) peut alors s'écrire à l'aide des transformées de Laplace $P_j^*(s)$ des fonctions $P_j(t)$:

$$\begin{aligned} sP_j^*(s) - P_j(0) &= -\lambda_j P_j^*(s) + \lambda_{j-1} P_{j-1}^*(s), \quad j \geq 1 \\ sP_0^*(s) - P_0(0) &= -\lambda_0 P_0^*(s), \end{aligned} \quad (14.1)$$

et en tenant compte de la condition initiale

$$P_j(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases},$$

on aura

$$\begin{aligned} sP_j^*(s) &= -\lambda_j P_j^*(s) + \lambda_{j-1} P_{j-1}^*(s), \quad j \geq 1 \\ sP_0^*(s) &= 1 - \lambda_0 P_0^*(s), \end{aligned} \quad (14.2)$$

ou encore

 (1) On appelle transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, de la variable réelle $0 \leq t \leq \infty$, l'expression :

$$\mathcal{L} \{ f(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

si elle a un sens.

On vérifie immédiatement que :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = s \mathcal{L} \{ f(t) \} - f(0).$$

Cf. M. Janet, *Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel*, Paris, P. U. F., 1954.

$$P_j^*(s) = \frac{\lambda_{j-1}}{s + \lambda_j} P_{j-1}^*(s), \quad j \geq 1$$

$$P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_0},$$
(14.3)

d'où l'on tire immédiatement

$$P_j^*(s) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{(s + \lambda_0)(s + \lambda_1) \dots (s + \lambda_j)}, \quad j \geq 1$$

$$P_0^*(s) = \frac{1}{s + \lambda_0}.$$

On vérifie maintenant sans difficulté que :

$$\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{(s + \lambda_0)(s + \lambda_1) \dots (s + \lambda_j)} = \frac{A_0}{s + \lambda_0} + \frac{A_1}{s + \lambda_1} + \dots + \frac{A_j}{s + \lambda_j},$$

avec, pour $0 \leq i \leq j$,

$$A_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_1 - \lambda_i) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \dots (\lambda_j - \lambda_i)} =$$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^j (\lambda_k - \lambda_i)}.$$

Or, étant donné que :

$$\frac{1}{s + \lambda_i} = \int_0^\infty e^{-(s + \lambda_i)t} dt = \mathcal{L}\{e^{-\lambda_i t}\},$$

on a :

$$\mathcal{L}\{A_i e^{-\lambda_i t}\} = \frac{A_i}{s + \lambda_i},$$

et compte tenu de ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{L}\{P_j(t)\} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{(s + \lambda_0)(s + \lambda_1) \dots (s + \lambda_j)} = \sum_{i=0}^j \frac{A_i}{s + \lambda_i} = \sum_{i=0}^j \mathcal{L}\{A_i e^{-\lambda_i t}\},$$

d'où

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^j A_i e^{-\lambda_i t} = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1} \sum_{i=0}^j \frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^j (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad j \geq 1$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}. \quad (14.4)$$

On démontre que pour avoir $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) = 1, t \geq 0$, il faut et il suffit que $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j}$ diverge(1).

15) Le processus de Polya est un processus de Markov permanent et non homogène défini en posant dans (9.1)

$$q_j(t) = \frac{1 + j\gamma}{1 + t\gamma}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$q_{kj}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } j - k = 1 \\ 0 & \text{si } j - k \neq 1. \end{cases}$$

Si on suppose que :

$$P_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ 1 & \text{si } i = 0, \end{cases}$$

on aura alors le système différentiel :

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -\frac{1 + j\gamma}{1 + t\gamma} P_j(t) + \frac{1 + (j-1)\gamma}{1 + t\gamma} P_{j-1}(t), \quad j \geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\frac{1}{1 + t\gamma} P_0(t), \quad (15.1)$$

qui est un cas particulier de (10.1).

16) Le processus de Polya peut aussi être considéré comme un cas particulier du processus de naissance non homogène, qui se déduit du processus de naissance et de mort (voir point 12) en posant $\mu_j(t) = 0$, et dont le système différentiel s'écrit :

(1) Cf. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, op. cit., p. 406.

$$\begin{aligned} \frac{dP_j(t)}{dt} &= -\lambda_j(t)P_j(t) + \lambda_{j-1}(t)P_{j-1}(t), \quad j \geq 1 \\ \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0(t)P_0(t). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Lorsqu'il existe une transformation

$$t = h(\tau), \quad \tau = h^{-1}(t) \text{ avec } h(0) = 0,$$

telle que, en posant $\bar{P}_j(\tau) = P_j(h(\tau))$, le système (16.1) puisse s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}_j(\tau)}{d\tau} &= -\lambda_j \bar{P}_j(\tau) + \lambda_{j-1} \bar{P}_{j-1}(\tau), \quad j \geq 1 \\ \frac{d\bar{P}_0(\tau)}{d\tau} &= -\lambda_0 \bar{P}_0(\tau), \end{aligned} \tag{16.2}$$

où les λ_j sont des constantes par rapport à τ , le système (16.1) se ramène au système différentiel d'un processus de naissance homogène, dont nous avons déterminé la solution générale au point 14. La solution générale de (16.1) se déduira alors de celle-ci à l'aide de la transformation inverse $h^{-1}(t) = \tau$, et on aura : $P_j(t) = \bar{P}(h^{-1}(t))$. On vérifie sans difficulté que l'existence d'une transformation $t = h(\tau)$ dépend de la possibilité de trouver des λ_j satisfaisant $\forall_j \int \lambda_j(t)dt = \lambda_j d\tau$.

17) En particulier, dans le cas du processus de Polya la condition $\lambda_j(t)dt = \lambda_j d\tau$ s'écrit :

$$\frac{1 + j\gamma}{1 + t\gamma} dt = \lambda_j d\tau, \text{ et en prenant } \lambda_j = 1 + j\gamma, \quad \forall_j,$$

on arrive à :

$$t = \frac{He^{k\tau} - 1}{\gamma}.$$

Compte tenu de la condition $h(0) = 0$, on aura en définitive :

$$t = h(\tau) = \frac{e^{k\tau} - 1}{\gamma}.$$

La transformation ci-dessus permet d'écrire le système (15.1) sous la forme :

$$\frac{d\bar{P}_j(\tau)}{d\tau} = - (1 + j\gamma)\bar{P}_j(\tau) + [1 + (j-1)\gamma] \bar{P}_{j-1}(\tau), \quad j \geq 1$$

$$\frac{d\bar{P}_0(\tau)}{d\tau} = - \bar{P}_0(\tau),$$
(17.1)

c'est-à-dire sous forme du système différentiel d'un processus de naissance homogène où $\lambda_j = 1 + j\gamma$. La solution générale de (17.1) se déduit donc de celle de (13.1), que nous avons donnée au point 14, en posant dans (14.4) $\lambda_j = 1 + j\gamma$.

On aura ainsi :

$$\bar{P}_j(\tau) = (1 + \gamma) \dots [1 + (j-1)\gamma] \cdot \sum_{i=0}^j \frac{e^{-(1+i\gamma)\tau}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^j (k-i)\gamma}.$$

Or :

$$\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^j (k-i)\gamma = \gamma^j (-1)^i i! (j-i)!$$

et

$$\sum_{i=0}^j \frac{e^{-(1+i\gamma)\tau}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^j \gamma(k-i)} = \frac{\gamma^{-j} e^{-\tau}}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \int_j^i e^{-i\gamma\tau} = \frac{\gamma^{-j} e^{-\tau}}{j!} [1 - e^{-\gamma\tau}]^j,$$

d'où en définitive :

$$\bar{P}_j(\tau) = \frac{(1 + \gamma) \dots [1 + (j-1)\gamma] \gamma^{-j}}{j!} [1 - e^{-\gamma\tau}]^j e^{-\tau}, \quad j \geq 1^{(1)}$$

et

$$\bar{P}_0(\tau) = e^{-\tau}.$$

Compte tenu de ce que nous avons dit précédemment, la solution générale du système différentiel du processus de Polya (15.1) s'obtiendra donc simplement en posant :

 (1) On peut remarquer que pour $\gamma = 1$ les $P_j(t)$ sont les probabilités d'une distribution géométrique de paramètre $p = e^{-\tau}$

$$P_j(t) = \bar{P}_j(h^{-1}(t)),$$

où

$$h^{-1}(t) = \frac{\log(1 + t\gamma)}{\gamma}.$$

On aura ainsi :

$$P_j(t) = (1 + \gamma)(1 + 2\gamma) \dots [1 + (j - 1)\gamma] \left(\frac{t}{1 + t\gamma}\right)^j (1 + t\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}}, j \geq 1, \tag{17.2}$$

$$P_0(t) = (1 + t\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

18) Il convient de signaler que la désignation du processus que nous venons d'étudier sous le nom de processus de Polya provient du fait que ce processus peut être défini comme limite de la distribution bien connue dite de Polya⁽¹⁾.

Il s'agit là d'ailleurs d'un procédé qui, dans certain cas, permet d'introduire un processus -comme cas limite d'une distribution de probabilité- sans avoir recours aux équations différentielles de définition. Nous allons envisager ici, toujours dans le cas du processus de Polya, cette façon d'introduire un processus.

Soit la distribution de Polya d'ordre n :

$$p_j^{(n)} = \int_n^j \frac{p(p+a) \dots [p+(j-1)a] q(q+a) \dots [q+(n-j-1)a]}{1(1+a) \dots [1+(n-1)a]} =$$

$$= \int_n^j \frac{B\left(\frac{p}{a} + j, \frac{q}{a} + n - j\right)}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)},$$

avec $q, p > 0, p + q = 1, a > 0$; B étant l'intégrale eulérienne de première espèce.

(1) G. Polya, "Sur quelques points de la théorie des probabilités", dans *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1 (1931), pp. 117-161.

Sa fonction génératrice s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_n(s) &= \sum_{j=0}^n s^j p_j^{(n)} = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \sum_{j=0}^n s^j \int_0^1 x^{\frac{p}{a}+j-1} (1-x)^{\frac{q}{a}+n-j-1} dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \sum_{j=0}^n s^j \int_0^1 x^{\frac{p}{a}-1} (1-x)^{\frac{q}{a}-1} x^j (1-x)^{n-j} dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{a}-1} (1-x)^{\frac{q}{a}-1} \left\{ \sum_{j=0}^n \int_0^1 (xs)^j (1-x)^{n-j} \right\} dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{a}-1} (1-x)^{\frac{q}{a}-1} \{sx - (1-x)\}^n dx,
 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_n(s) &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{a}-1} (1-x)^{\frac{q}{a}-1} \{1 + (s-1)x\}^n dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{a}-1} (1-x)^{\frac{q}{a}-1} \left\{ \sum_{j=0}^n \int_0^1 (s-1)^j x^j \right\} dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)} \sum_{j=0}^n \int_0^1 (s-1)^j B\left(\frac{p}{a} + j, \frac{q}{a}\right) dx = \\
 &= \sum_{j=0}^n \int_0^1 (s-1)^j \frac{\frac{p}{a} \left(\frac{p}{a} + 1\right) \dots \left(\frac{p}{a} + j - 1\right)}{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{a} + j - 1\right)} dx.
 \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$\frac{\frac{p}{a} \left(\frac{p}{a} + 1 \right) \dots \left(\frac{p}{a} + j - 1 \right)}{j!} = (-1)^j \int_{-\frac{p}{a}}^j,$$

on aura :

$$\mathcal{G}_n(s) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_{-\frac{p}{a}}^j (s-1)^j \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)}{\frac{1}{na} \left(\frac{1}{na} + \frac{1}{n}\right) \dots \left(\frac{1}{na} + \frac{j-1}{na}\right)}.$$

Or, si on suppose que $\frac{p}{a} = \frac{1}{\gamma}$ et que, pour $n \rightarrow \infty$, $na \rightarrow t\gamma$ - ce qui entraîne $np = \frac{na}{\gamma} \rightarrow t$ - on pourra écrire :

$$\mathcal{G}_n(s) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \int_{-\frac{1}{\gamma}}^j (s-1)^j (t\gamma)^j \left[1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Soit :

$$\mathcal{G}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int_{-\frac{1}{\gamma}}^j (s-1)^j (t\gamma)^j = [1 - (s-1)t\gamma]^{-\frac{1}{\gamma}},$$

on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n(s) = \mathcal{G}(s).$$

On vérifie immédiatement que :

$$\frac{1}{j!} \left[\frac{\partial^j \mathcal{G}(s)}{\partial s^j} \right]_{s=0} = (1 + \gamma) \dots (1 + (j-1)\gamma) \left(\frac{t}{1 + t\gamma} \right)^j (1 + t\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}} =$$

$$= P_j(t) \text{ (cf. 17.2).}$$

$\mathcal{G}(s)$ est donc la fonction génératrice de la distribution

$$P_j(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Ainsi, dans le cadre des hypothèses envisagées, les $P_j(t)$ s'obtiennent comme limite des $p_j^{(n)}$, pour $n \rightarrow \infty$.

19) Dans ce qui précède, nous avons étudié une classe de processus dans laquelle les fonctions du temps sont des fonctions en escalier, variant donc par sauts. Pour de tels processus, dits discontinus, on peut alors s'intéresser aux instants particuliers auxquels ont lieu les variations des fonctions v - les "sauts" que l'on appelle aussi "changements d'état" - (1). De façon plus précise, à partir des probabilités définissant le processus, il s'agira de déduire, pour tout intervalle de temps, les probabilités qu'il convient d'associer aux nombres de variations - sauts, changements d'état - des fonctions v ; ou encore, pour tout intervalle de temps, il s'agira de déterminer la mesure $-P$ qu'il convient d'associer au sous-ensemble de \mathcal{V} formé des fonctions v qui, pendant l'intervalle considéré, subissent un même nombre de variations.

Pour un intervalle de temps arbitraire (τ, t) , soit $\mathcal{V}_{\tau, t}^{(k)} \subseteq \mathcal{V}$ le sous-ensemble de \mathcal{V} formé des v qui, dans l'intervalle (τ, t) subissent k variations. Il s'agit donc de déterminer :

$$P(\mathcal{V}_{\tau, t}^{(k)}) = \text{Prob.} [v \in \mathcal{V}_{\tau, t}^{(k)}].$$

20) Nous allons maintenant nous restreindre au cas des processus de Markov dénombrables permanents. Ici encore il sera commode de s'attaquer à ce problème par l'intermédiaire de probabilités conditionnelles.

On posera :

$$\varphi_i^{(k)}(\tau, t) = \text{Prob.} [v \in \mathcal{V}_{\tau, t}^{(k)} / v(\tau) = y_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

ou encore, en désignant par $\mathcal{V}_\tau(y_i)$ le sous-ensemble de \mathcal{V} formé des fonctions v telles que :

$$v \in \mathcal{V}_\tau(y_i) \iff v(\tau) = y_i,$$

on aura :

$$\varphi_i^{(k)}(\tau, t) = P_{\mathcal{V}_\tau(y_i)}(\mathcal{V}_{\tau, t}^{(k)} \cap \mathcal{V}_\tau(y_i)) = \frac{P(\mathcal{V}_{\tau, t}^{(k)} \cap \mathcal{V}_\tau(y_i))}{P(\mathcal{V}_\tau(y_i))}.$$

(1) Il s'agit naturellement d'un problème propre aux processus discontinus, car, par définition, dans le cas des processus continus, les fonctions v varient de façon continue par rapport au temps.

$\varphi_i^{(k)}(\tau, t)$ est donc la probabilité conditionnelle -déduite de P- associée aux fonctions $v \in \mathcal{V}_\tau(y_i)$ qui subissent k variations dans l'intervalle (τ, t) . On aura évidemment :

$$P_{\mathcal{V}_\tau(y_i)}(\mathcal{V}_\tau(y_i)) = \sum_k P_{\mathcal{V}_\tau(y_i)}(\mathcal{V}_{\tau,t}^{(k)} \cap \mathcal{V}_\tau(y_i)) = \sum_k \varphi_i^{(k)}(\tau, t) = 1,$$

et

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(\tau, t) &= \text{Prob.} [v \in \mathcal{V}_{\tau,t}^{(k)}] = \sum_i P[\mathcal{V}_{\tau,t}^{(k)} \cap \mathcal{V}_\tau(y_i)] = \\ &= \sum_i P_i(\tau) \varphi_i^{(k)}(\tau, t), \end{aligned}$$

où $P_i(\tau) = P(\mathcal{V}_\tau(y_i))$, conformément aux notations de ce paragraphe.

Remarquons aussi que les $\varphi_i^{(k)}(\tau, t)$ seront tels que :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \varphi_i^{(k)}(\tau, t) = \lim_{t \rightarrow \tau} \varphi_i^{(k)}(\tau, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

2) Dans le cas d'un processus de Markov dénombrable permanent on aura évidemment (cf. point 8) :

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(0)}(\tau, t + \Delta t) &= \varphi_i^{(0)}(\tau, t) \mathfrak{G}_{ii}(t, t + \Delta t) = \\ &= \varphi_i^{(0)}(\tau, t) [1 - q_i(t) \Delta t + o(\Delta t)], \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi_i^{(0)}(\tau, t + \Delta t) - \varphi_i^{(0)}(\tau, t)}{\Delta t \varphi_i^{(0)}(\tau, t)} = \frac{\partial \log \varphi_i^{(0)}(\tau, t)}{\partial t} = -q_i(t).$$

On aura alors :

$$\int_\tau^t \frac{\partial \log \varphi_i^{(0)}(\tau, u)}{\partial u} du = - \int_\tau^t q_i(u) du, \quad (21.1)$$

et en définitive :

$$\varphi_i^{(0)}(\tau, t) = e^{-\int_\tau^t q_i(u) du}.$$

On vérifie immédiatement que :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \varphi_i^{(0)}(\tau, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \varphi_i^{(0)}(\tau, t) = 1,$$

et que

$$\left(\tau \leq t_1 \leq t \right) : \varphi_i^{(0)}(\tau, t) = \varphi_i^{(0)}(\tau, t_1) \varphi_i^{(0)}(t_1, t).$$

A partir des $\varphi_i^{(0)}(\tau, t)$ on détermine par induction les $\varphi_i^{(k)}(\tau, t)$ à l'aide de la relation évidente :

$$\varphi_i^{(k+1)}(\tau, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\tau}^t \varphi_i^{(0)}(\tau, u) q_i(u) q_{ij}(u) \varphi_j^{(k)}(u, t) du ; \quad (21.2)$$

et comme nous l'avons vu, on aura :

$$\varphi^{(k)}(\tau, t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\tau) \varphi_i^{(k)}(\tau, t).$$

22) Dans le cas particulier des processus de naissance et de mort (cf. point 12), les formules (21.1) et (21.2) se simplifient considérablement.

Pour de tels processus on aura :

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(0)}(\tau, t) &= e^{-\int_{\tau}^t [\lambda_i(u) + \mu_i(u)] du}, \quad i \geq 1 \\ \varphi_0^{(0)}(\tau, t) &= e^{-\int_{\tau}^t \lambda_0(u) du}; \end{aligned} \quad (22.1)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(k+1)}(\tau, t) &= \int_{\tau}^t \varphi_i^{(0)}(\tau, u) \lambda_i(u) \varphi_{i+1}^{(k)}(u, t) du + \\ &+ \int_{\tau}^t \varphi_i^{(0)}(\tau, u) \mu_i(u) \varphi_i^{(k)}(u, t) du, \quad i \geq 1 \\ \varphi_0^{(k+1)}(\tau, t) &= \int_{\tau}^t \varphi_0^{(0)}(\tau, u) \lambda_0(u) \varphi_0^{(k)}(u, t) du. \end{aligned} \quad (22.2)$$

23) En vue d'illustrer ce que nous venons de dire, reprenons l'exemple du processus du Polya. Nous avons vu (cf. points 15 et 16) qu'un processus de Polya est un processus de naissance non

homogène dans la définition duquel on a $\lambda_j(t) = \frac{1 + j\gamma}{1 + t\gamma}$.

En remplaçant dans (22.1) et (22.2) $\lambda_j(t)$ par cette valeur et en posant $\mu_i(t) = 0$ on aura alors pour ce processus les relations :

$$\varphi_i^{(0)}(\tau, t) = e^{-\int_{\tau}^t \frac{1+i\gamma}{1+u\gamma} du} \quad i \geq 0$$

$$\varphi_i^{(k+1)}(\tau, t) = \int_{\tau}^t \varphi_i^{(0)}(\tau, u) \left[\frac{1+i\gamma}{1+u\gamma} \right] \varphi_{i+1}^{(k)}(u, t) du,$$

d'où

$$\varphi_i^{(0)}(\tau, t) = \left[\frac{1+\tau\gamma}{1+t\gamma} \right]^{\frac{1+i\gamma}{\gamma}} \quad (23.1)$$

$$\varphi_i^{(k)}(\tau, t) = \left[\frac{1+\tau\gamma}{1+t\gamma} \right]^{\frac{1+i\gamma}{\gamma}} \cdot \frac{(1+i\gamma)\dots(1+[i+k-1]\gamma)}{k!} \quad (23.2)$$

$$\cdot (t-\tau)^k (1+t\gamma)^{-k}.$$

On vérifie sans difficulté que : $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_i^{(k)}(\tau, t) = 1$ (1).

24) Avant de passer à l'étude des processus purement continus, rappelons que l'on généralise la notion de processus purement discontinu dénombrable en étendant la définition de tels processus au cas non dénombrable(2), c'est-à-dire au cas où l'ensemble des images de t par les fonctions de la classe \mathcal{V} n'est plus un ensemble dénombrable. Ici encore toutefois les fonctions v seront presque certainement des fonctions par sauts de t .

(1) En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_i^{(k)}(\tau, t) &= \left[\frac{1+\tau\gamma}{1+t\gamma} \right]^{\frac{1+i\gamma}{\gamma}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{-\frac{1+i\gamma}{\gamma}}^k \gamma^k (t-\tau)^k (1+t\gamma)^{-k} = \\ &= \left[\frac{1+\tau\gamma}{1+t\gamma} \right]^{\frac{1+i\gamma}{\gamma}} \left[1 - \frac{\gamma(t-\tau)}{1+t\gamma} \right]^{-\frac{1+i\gamma}{\gamma}} = 1 \end{aligned}$$

(2) Cf. W. Feller, "Zur Theorie der stochastischen Prozesse", op. cit.

Nous n'insisterons pas ici sur cette classe de processus car, pratiquement, il suffira en général d'avoir recours aux processus dénombrables dans le cas où on est amené à envisager un processus purement discontinu.

25) Nous allons maintenant envisager la classe des processus de Markov dit *purement continus* ou *continus permanents* (1).

On introduira ces processus par l'intermédiaire des fonctions de répartition de transition $G(\tau, x; t, y)$ définies au début de ce paragraphe(2).

Un processus de Markov sera dit continu permanent si, pour tout $t \in T$ et pour tout $\varepsilon > 0$, les fonctions $G(\tau, x; t, y)$ satisfont les conditions :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{|y-x| \geq \varepsilon} d_y G(t, x; t + \Delta t, y) = 0 \quad (25.1)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) d_y G(t, x; t + \Delta t, y) = m_1(t, x) \quad (25.2)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x)^2 d_y G(t, x; t + \Delta t, y) = m_2(t, x), \quad (25.3)$$

$m_1(t, x)$ et $m_2(t, x)$ étant des fonctions finies.

On peut tirer de ces conditions une interprétation concrète en remarquant que (25.1) peut s'écrire :

$$\text{Prob. } [|v(t + \Delta t) - v(t)| \geq \varepsilon / v(t) = x] = \Delta t o(\Delta t), \quad (25.1 \text{ bis})$$

et que, si on considère les "espérances mathématiques conditionnelles tronquées" E_ε définies par :

$$E_\varepsilon \{ [v(t + \Delta t) - v(t)] / v(t) = x \} = \frac{\int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) d_y G(t, x; t + \Delta t, y)}{\int_{|y-x| < \varepsilon} d_y G(t, x; t + \Delta t, y)},$$

(1) Cf. point 5.

(2) Cf. points 1 et 2.

et

$$E_{\epsilon} \{ [v(t + \Delta t) - v(t)]^2 / v(t) = x \} = \frac{\int_{|y-x| < \epsilon} (y-x)^2 d_y G(t, x; t + \Delta t, y)}{\int_{|y-x| < \epsilon} d_y G(t, x; t + \Delta t, y)},$$

on aurait d'après (25.1), (25.2) et (25.3) :

$$E_{\epsilon} \{ [v(t + \Delta t) - v(t)] / v(t) = x \} = \Delta t m_1(t, x) + o(\Delta t) \quad (25.2 \text{ bis})$$

$$E_{\epsilon} \{ [v(t + \Delta t) - v(t)]^2 / v(t) = x \} = \Delta t m_2(t, x) + o(\Delta t); \quad (25.3 \text{ bis})$$

$m_1(t, x)$ et $m_2(t, x)$, qui sont indépendants de ϵ , pourront donc être considérés -quel que soit $\epsilon > 0$ - comme les deux premiers moments conditionnels -pour $v(t) = x$ - de l'accroissement de $v(t)$ pour une variation infinitésimale de t .

26) Si les conditions (25.1), (25.2) et (25.3) sont satisfaites, on démontre que les fonctions $G(\tau, x; t, y)$ satisfont l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial G(\tau, x; t, y)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} m_2(\tau, x) \frac{\partial^2 G(\tau, x; t, y)}{\partial x^2} + m_1(\tau, x) \frac{\partial G(\tau, x; t, y)}{\partial x} = 0, \quad (26.1)$$

que l'on appelle *équation rétrospective de Kolmogorov*; elle correspond, dans le cas continu, au système (9.2). Si les fonctions de répartition $G(\tau, x; t, y)$ admettent une densité de probabilité $g(\tau, x; t, y)$ (1), on aura aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\tau, x; t, y)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} m_2(\tau, x) \frac{\partial^2 g(\tau, x; t, y)}{\partial x^2} + \\ + m_1(\tau, x) \frac{\partial g(\tau, x; t, y)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (26.1 \text{ bis})$$

De même, en supposant que les fonctions $G(\tau, x; t, y)$ admettent

(1) On a par définition : $g(\tau, x; t, y) = \frac{\partial G(\tau, x; t, y)}{\partial y}$.

des densités de probabilité $g(\tau, x; t, y)$ on démontre que ces dernières seulement satisfont l'équation :

$$\frac{\partial g(\tau, x; t, y)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [m_2(t, y)g(\tau, x; t, y)]}{\partial y^2} + \frac{\partial [m_1(t, y)g(\tau, x; t, y)]}{\partial y} = 0, \quad (26.2)$$

dite *équation prospective de Kolmogorov* ou *équation de Fokker-Planck* ; elle correspond, dans le cas continu, au système (9.1).

27) En vue d'illustrer ce que nous venons de dire, nous allons maintenant envisager le cas des processus purement continus à accroissements indépendants⁽¹⁾. Nous supposons aussi pour simplifier que les fonctions de répartition de transition admettent des densités de probabilité.

Compte tenu de ce que nous avons dit au point 4 les fonctions de répartition de transition et leurs densités s'écrivent alors :

$$H(\tau, t; u) = H(\tau, t; y - x) = G(\tau, x; t, y)$$

$$h(\tau, t; u) = h(\tau, t; y - x) = g(\tau, x; t, y).$$

On vérifie aussi sans difficulté que les conditions (25.2) et (25.3) ne dépendent plus de x ; on aura donc :

$$m_1(t, x) = m_1(t) \text{ et } m_2(t, x) = m_2(t).$$

Les équations (26.1 bis) et (26.2) deviennent alors :

$$\frac{\partial h(\tau, t; u)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} m_2(\tau) \frac{\partial^2 h(\tau, t, u)}{\partial u^2} - m_1(\tau) \frac{\partial h(\tau, t, u)}{\partial u} = 0, \quad (27.1)$$

$$\frac{\partial h(\tau, t; u)}{\partial t} - \frac{1}{2} m_2(t) \frac{\partial^2 h(\tau, t, u)}{\partial u^2} + m_1(t) \frac{\partial h(\tau, t, u)}{\partial u} = 0 ; \quad (27.2)$$

qui sont respectivement l'équation rétrospective et prospective du processus à accroissements indépendants envisagé.

(1) Cf. point 4.

28) Pour déterminer la solution de (27.2), ici encore, comme nous l'avions fait dans le cas du processus de Polya⁽¹⁾, on peut essayer de simplifier l'équation à l'aide d'un changement de variable. D'une façon plus précise, on essaiera de déterminer un changement de variable conduisant à une équation de même forme dans laquelle $m_1(t)$ et $m_2(t)$ ne dépendent pas de t (2).

Soit les transformations $t^* = \psi(t)$ et $z = u + \Phi(t)$, $\psi(t)$ et $\Phi(t)$ étant des fonctions monotones de t telles que $\psi(t = \tau) = \tau$ et $\Phi(t = \tau) = 0$.

On aura alors :

$$h(\tau, t ; u) = f(\tau, t^* ; z) \left| \frac{du}{dz} \right| = f(\tau, t^* ; z),$$

avec

$$h(\tau, \tau ; u) = f(\tau, \tau ; z) = 0.$$

Et, en substituant dans (27.2) $f(\tau, t^* ; z)$ à $h(\tau, t ; u)$ on a en définitive :

$$\frac{\partial f(\tau, t^* ; z)}{\partial t^*} = \left[\frac{1}{2} m_2(t) \frac{\partial^2 f(\tau, t^* ; z)}{\partial z^2} - \left\{ m_1(t) + \frac{\partial z}{\partial t} \right\} \frac{\partial f(\tau, t^* ; z)}{\partial z} \right] \frac{dt}{dt^*};$$

d'où les conditions :

$$m_2(t)dt = m_2 dt^* \tag{28.1}$$

$$\left\{ m_1(t) + \frac{\partial z}{\partial t} \right\} dt = m_1 dt^*. \tag{28.2}$$

On peut en particulier poser $m_2 = 1$ et $m_1 = 0$, d'où :

$$\int_{\tau}^t m_2(t)dt = t^* - \tau,$$

(1) Cf. points 16 et 17.

(2) On vérifie sans difficulté que l'on obtient ainsi les équations de définition d'un processus homogène.

et

$$\int_{\tau}^t m_1(t)dt + z(t, u) - z(\tau, u) = 0,$$

$$z - u = - \int_{\tau}^t m_1(t)dt.$$

Les transformations ainsi définies conduisent alors à l'équation :

$$\frac{\partial f(\tau, t^* ; z)}{\partial t^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\tau, t^* ; z)}{\partial z^2}, \quad (28.3)$$

cas particulier de l'équation de la chaleur⁽¹⁾. On appelle (28.3) l'équation de définition du mouvement brownien dit aussi processus de Wiener-Levy.

La solution générale de cette équation aux dérivées partielles de type parabolique est bien connue⁽²⁾.

(1) Qui s'écrit plus généralement :

$$\frac{\partial^2 \vartheta(t, x)}{\partial x^2} = K \frac{\partial \vartheta(t, x)}{\partial t}.$$

(2) Cf. par exemple : J. Legras, *Techniques de résolution des équations aux dérivées partielles*, Paris, Dunod, 1956.

Avec la condition initiale $f(\tau, \tau ; z) = 0$ et les conditions aux limites $f(\tau, t^* ; +\infty) = f(\tau, t^* ; -\infty) = 0$, on a :

$$f(\tau, t^* ; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t^* - \tau)}} e^{-\frac{z^2}{2(t^* - \tau)}} \quad (1)$$

(1) A titre d'exemple, nous allons déterminer cette solution à l'aide des transformées de Laplace (cf. note 1, p. 398), que nous avons déjà utilisées au point 14 pour établir la solution du système différentiel du processus de naissance homogène.

Pour simplifier, posons $t^* - \tau = w$ et $h(\tau, t^* ; z) = \varphi(\tau, w, z)$. On aura ainsi à résoudre l'équation :

$$\frac{\partial \varphi(\tau, w ; z)}{\partial w} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(\tau, w ; z)}{\partial z^2}, \quad (28.3.i)$$

avec la condition initiale $\varphi(\tau, 0 ; z) = 0$ et les conditions aux limites $\varphi(\tau, w ; +\infty) = \varphi(\tau, w ; -\infty) = 0$.

Si on considère la transformée de Laplace -par rapport à w - de $\varphi(\tau, w ; z)$:

$$\mathcal{L}\{\varphi(\tau, w ; z)\} = \int_0^\infty e^{-sw} \varphi(\tau, w ; z) dw = \varphi^*(\tau, s ; z),$$

compte tenu des remarques de la note (1), p. 398, l'équation (28.3.i) peut s'écrire :

$$s\varphi^*(\tau, s ; z) - \varphi(\tau, 0 ; z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^*(\tau, s ; z)}{\partial z^2},$$

et compte tenu de la condition initiale :

$$s\varphi^*(\tau, s ; z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^*(\tau, s ; z)}{\partial z^2}, \quad (28.3.ii)$$

qui est une équation différentielle ordinaire du second ordre, homogène et à coefficients constants.

Son équation caractéristique est : $\frac{1}{2} r^2 - s = 0$, d'où l'intégrale générale de (28.3.ii) :

$$\varphi^*(\tau, s ; z) = C_1(s) e^{+z\sqrt{2s}} + C_2(s) e^{-z\sqrt{2s}}.$$

La condition aux limites $\lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(\tau, w ; z) = 0$ entraîne $C_1(s) = 0$, d'où :

$$\varphi^*(\tau, s ; z) = C(s) e^{-z\sqrt{2s}}.$$

Or, compte tenu du fait que $\varphi(\tau, w ; z)$ est une densité de probabilité définie pour $-\infty \leq z \leq +\infty$, on aura :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\varphi^*(\tau, s ; z)\} = \varphi(\tau, w, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} e^{-\frac{z^2}{2w}},$$

d'où

$$h(\tau, t^* ; z) = \varphi(\tau, t^* - \tau ; z) \text{ avec } t^* > \tau.$$

A partir de la solution de (28.3) ainsi obtenue, on peut alors remonter à la solution de (27.2).

En posant :

$$M_1(\tau, t) = \int_{\tau}^t m_1(t) dt$$

$$M_2(\tau, t) = \int_{\tau}^t m_2(t) dt,$$

on aura ainsi :

$$h(\tau, t; u) = f(\tau, t^*(t); z(t, u)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M_2(\tau, t)}} e^{-\frac{[u - M_1(\tau, t)]^2}{2 M_2(\tau, t)}} \quad (28.4)$$

Et on constate que $h(\tau, t; u)$ est ici la densité de probabilité d'une variable aléatoire laplacienne de moyenne $M_1(\tau, t)$ et de variance $M_2(\tau, t)$ ⁽¹⁾ ; comme nous venons de le voir les moments $M_1(\tau, t)$ et $M_2(\tau, t)$ s'expriment en fonction de $m_1(t)$ et $m_2(t)$, qui peuvent être interprétés comme des "moments instantanés" (cf. point 25).

29) La solution du processus homogène le plus général, défini ici en posant dans (27.2) $m_1(t) = m_1$ et $m_2(t) = m_2$, se déduit immédiatement de (28.4).

Compte tenu du fait que :

$$M_1(\tau, t) = m_1(t - \tau)$$

$$M_2(\tau, t) = m_2(t - \tau),$$

(1) A l'aide de la fonction caractéristique :

$$\varphi_u(\lambda) = e^{-\frac{M_2(\tau, t)\lambda^2}{2} + \lambda M_1(\tau, t)}$$

de cette variable aléatoire, on vérifie immédiatement que si $t \rightarrow \tau$ elle tend vers une "variable certaine" égale à 0 -c'est-à-dire vers une variable aléatoire dégénérée dont la densité de probabilité est concentrée au point 0.

on aura alors :

$$h(\tau, t, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2(t-\tau)}} e^{-\frac{[u - m_1(t-\tau)]^2}{2m_2(t-\tau)}}.$$

On a bien ici $h(\tau, t; u) = h(t - \tau; u)$; les densités de probabilité de transition ne dépendent que de l'intervalle $(t - \tau)$ (cf. point 3).

§ 5 - APPLICATIONS -

1) Considérons un phénomène \mathfrak{X} pouvant être représenté par des fonctions du temps :

$$\mathfrak{X} \longleftrightarrow [\bar{I}(t), \bar{C}(t), \bar{Y}(t)] = v(t), \quad (1)$$

les fonctions numériques $\bar{I}(t), \bar{C}(t), \bar{Y}(t)$, supposées continues par rapport à t , désignant respectivement l'investissement global, la consommation globale et le revenu global à l'époque t (2).

Soit encore l'hypothèse composée :

$$H(v) \iff \begin{cases} 1) \bar{C}(t) = c\bar{Y}(t) & \text{relation de comportement} \\ 2) \bar{I}(t) = w \frac{d\bar{Y}(t)}{dt} & \text{principe d'accélération} \\ 3) \bar{I}(t) + \bar{C}(t) = \bar{Y}(t) & \text{relation comptable,} \end{cases}$$

c désignant la propension marginale à consommer et w le coefficient d'investissement.

On aura alors, en désignant par $s = 1 - c$ la propension marginale à épargner :

$$4) \frac{1}{\bar{Y}(t)} \cdot \frac{d\bar{Y}(t)}{dt} = \frac{s}{w} = \lambda,$$

(1) \mathfrak{X} est ici par rapport à \mathfrak{V} un phénomène certain à dépendance temporelle.
 (2) $v(t) \in \mathbb{R}_+^3$; la fonction v peut être considérée comme une fonction à trois dimensions.

d'où :

$$\bar{Y}(t) = \bar{Y}(\tau) e^{\lambda(t-\tau)}$$

et les valeurs correspondantes pour $\bar{C}(t)$ et $\bar{I}(t)$, ce qui détermine complètement le phénomène \mathfrak{X} .

2) Considérons maintenant le cas plus général d'une fonction aléatoire à trois dimensions :

$$[I(t), C(t), Y(t)] = V(t),$$

et posons comme ci-dessus :

$$\mathfrak{X} \longleftrightarrow [I(t), C(t), Y(t)] = V(t) \text{ (1)}.$$

Si nous supposons que $Y(t)$ est un processus de Markov purement continu à accroissements indépendants, on aura alors :

$$\begin{aligned} \text{Prob. } \{Y(t) - Y(\tau) \leq u / Y(\tau) = y\} &= \text{Prob. } \{Y(t) - Y(\tau) \leq u\} = \\ &= F(\tau, t, u), \end{aligned}$$

$F(\tau, t; u)$ étant la fonction de répartition -en u - d'une variable aléatoire laplacienne,

$$\text{de moyenne} \quad M_1(\tau, t) = \int_{\tau}^t m_1(t) dt$$

$$\text{et de variance} \quad M_2(\tau, t) = \int_{\tau}^t m_2(t) dt \text{ (2)}.$$

En posant $\text{Prob. } \{Y(\tau) = y_{\tau}\} = 1$ on aura :

$$\text{Prob. } \{Y(t) \leq y_{\tau} + u\} = \text{Prob. } \{Y(\tau) = y_{\tau}\} \cdot \text{Prob. } \{Y(t) - y_{\tau} \leq u\},$$

c'est-à-dire :

$$\text{Prob. } \{Y(t) \leq y_{\tau} + u\} = F(t; y_{\tau} + u) = F(\tau, t; u),$$

(1) \mathfrak{X} est ici, par rapport à \mathfrak{V} , un phénomène aléatoire à dépendance temporelle.

(2) Cf. § 4, points 27 et 28.

et
$$f(t, y_\tau + u) = f(\tau, t ; u),$$

$f(t, y_\tau + u)$ étant la densité de probabilité d'une variable aléatoire laplacienne de moyenne $M_1(\tau, t) + y_\tau$ et de variance $M_2(\tau, t)$.

Nous aurons donc :

$$E_t(Y(t)) = M_1(\tau, t) + y_\tau.$$

D'après les développements du paragraphe précédent on aura :

$$E_\epsilon [Y(t + \Delta t) - Y(t)] \simeq \Delta t m_1(t) + o(\Delta t) ;$$

ce qui peut nous amener à introduire une hypothèse analogue à celle définie au point 1 sous 4) - principe d'accélération-, hypothèse portant ici sur la limite de $\frac{E_\epsilon}{\Delta t}$, pour $\Delta t \rightarrow 0$.

Posons ainsi :

$$\frac{1}{E_t(Y(t))} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_\epsilon [Y(t + \Delta t) - Y(t)]}{\Delta t} = \frac{m_1(t)}{E_t(Y(t))} = \lambda,$$

d'où $m_1(t) = \lambda E_t(Y(t))$, et en supposant que :

$$E_t(Y(t)) = \bar{Y}(t) = y_\tau e^{\lambda(t-\tau)} ;$$

$$m_1(t) = \lambda \bar{Y}(t) = \lambda y_\tau e^{\lambda(t-\tau)}$$

et
$$M_1(\tau, t) = y_\tau [e^{\lambda(t-\tau)} - 1] .$$

L'évolution de $\bar{Y}(t)$ d'après le modèle certain du point 1 peut donc être considérée comme un cas particulier du processus $Y(t)$ envisagé ici, si on se rapporte à l'évolution de $E_t(Y(t))$.

Soit $y = u + v$ dans la dérivée de y par rapport à x une variable indépendante. On a donc $y' = u' + v'$. On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'(x) - y(x)}{x^2}$$

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'(x) - y(x)}{x^2}$$

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'(x) - y(x)}{x^2}$$

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'(x) - y(x)}{x^2}$$

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'(x) - y(x)}{x^2}$$

On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G . On suppose que u et v sont des fonctions de x et de constantes M, L, G et de variables M, L, G .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'(x) - y(x)}{x^2}$$

CHAPITRE IV

UNIVERS DES APPRÉCIATIONS ET DÉCISIONS

DEUXIÈME PARTIE

DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

1. LE CADRE CONCEPTUEL

1) Dans la première partie de cette étude, nous avons dû nous limiter à définir d'une façon générale la notion de décision, et à discuter de quelques problèmes généraux propres à leur construction et à leur analyse. Le souci de définir quelques grandes classes de modèles nous avait d'ailleurs conduit à appeler des attention sur les modèles, dans l'importance, du point de vue de l'économie pure, nous semblait mériter une discussion plus approfondie. Or, même sans les exemples qui nous servent d'exemple, nous n'avons pas vraiment fait allusion à cette partie importante de l'économie pure qui a trait à l'étude des décisions économiques. Nous l'avons bien mentionné à plusieurs reprises, il s'agit de deux décisions relatives

(1) La décision, Paris, Le Seuil et le Robert.

(2) Armand Dorjé, *Problèmes Économiques*, tome III, Paris, Les Éditions de l'Économiste, Paris, Flammarion, 1955, p. 1112.

DEUXIÈME PARTIE

DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

§
ar
cu
et
m
ti
no
da
re
qu
so

(1)
(2)

CHAPITRE IV

UNIVERS DES APPRÉCIATIONS ET DÉCISIONS

"Le trop d'expédients peut gâter une affaire :
On perd du temps au choix, on tente,
on veut tout faire.
N'en ayons qu'un, mais qu'il soit bon."

La Fontaine⁽¹⁾

"Toute connaissance humaine s'appuyant sur un raisonnement au moins, présuppose la notion d'ordre."

A. Denjoy⁽²⁾

§ 1 - LE CADRE CONCEPTUEL -

1) Dans la première partie de cette étude, nous avons été amené à définir d'une façon générale la notion de modèle, et à discuter de quelques problèmes généraux propres à leur construction et à leur analyse. Le souci de définir quelques grandes classes de modèles nous avait d'ailleurs conduit à spécifier des structures particulières, dont l'importance, du point de vue de l'économie pure, nous semblait postuler une discussion plus approfondie. Or, même dans les exemples que nous avons envisagés, nous n'avons que rarement fait allusion à cette partie importante de l'économie pure qui a trait à l'étude des décisions économiques. Nous l'avions bien souligné à plusieurs reprises, il s'agissait là d'une omission volon-

(1) La Fontaine, *Fables*, Le chat et le renard.

(2) Armand Denjoy, *L'énumération transfinie*, livre III, *Etudes complémentaires sur l'ordination*, Paris, Gauthier-Villars, 1954, p. 619.

taire. Nous souhaitons la combler en réservant à une telle étude cette deuxième partie dans laquelle nous nous proposons d'envisager les aspects essentiels liés à la représentation et à l'étude des "décisions" économiques. Le fait de consacrer cette deuxième partie à de tels problèmes, marque d'ailleurs l'intérêt particulier que nous croyons devoir leur porter ; intérêt justifié, nous semble-t-il, par le rôle considérable joué par les problèmes de "décisions" dans la plupart des situations économiques concrètes, ceci quel que soit le cadre socio-juridique. Une étude portant sur les fondements de l'économie pure -qui dans la conceptualisation adoptée doit rester le reflet du concret- ne saurait donc faire abstraction de tels problèmes.

2) Les notions essentielles que nous aurons à utiliser par la suite, sont les notions de "centre de décision", d'ensemble d'"actions" possibles ou admissibles et de "décision".

La notion de centre de décision⁽¹⁾, qui recouvre en partie la notion d'agent économique utilisée d'habitude dans la terminologie économique, désignera ici toute entité, tout organisme, tout individu pouvant prendre des décisions économiques. On pourra donc désigner par ce terme un gouvernement -dans la mesure où il est amené à prendre des décisions économiques- un organisme de planification à échelle nationale ou locale -commissariat au plan- un conseil d'administration, un directeur d'entreprise, aussi bien qu'un simple consommateur.

Une décision du centre considéré sera alors ramenée au choix d'une action⁽²⁾ particulière, parmi celles d'une classe d'actions orientées vers la réalisation d'un but, d'un objectif déterminé. Ainsi dans le cas par exemple où le centre de décision est un consommateur dont l'objectif est la satisfaction de ses besoins courants pendant une période déterminée, les actions possibles seront des achats

 (1) C. Gruson, "Les décisions économiques nationales" dans *La décision*, Paris, C.N.R.S., 1961, pp. 147-157.

Voir aussi la notion d'"unité économique" dans R. Frisch, "La théorie de l'avantage collectif et les régions de Pareto", dans *Economie appliquée*, 7 (1954), pp. 211-280.

(2) Cf. la notion de "paramètre d'action" dans R. Frisch, "La théorie de l'avantage collectif et les régions de Pareto", op. cit.

possibles, des "paniers de provisions" qu'il est à même d'envisager et qui, compte tenu des prix du marché, sont compatibles avec le revenu dont il dispose. Une décision du consommateur se traduira alors par le choix d'une action particulière, d'un "panier de provisions" ou "complexe de biens" particulier. De même si le centre de décision est un organisme de planification économique dont l'objectif est d'atteindre une situation dite de "rendement social"⁽¹⁾ ou d'"optimum de gestion"⁽²⁾, on pourra envisager l'ensemble des actions ou politiques qui y conduisent et qui se traduisent, par exemple, par des répartitions différentes du revenu national. Le choix d'une politique parmi l'ensemble envisagé sera ici une décision.

On pourrait encore imaginer le cas d'un entrepreneur, d'un conseil d'administration ou d'un directeur d'entreprise - qui serait ici le centre de décision - face à un ensemble de "politiques" d'investissement. Le choix d'une de ces politiques serait alors envisagé comme une décision du centre considéré.

La classe d'actions que nous venons d'introduire - actions que, selon la nature concrète du centre de décision envisagé, on appellera aussi des tactiques, des stratégies, des politiques, des opérations, des options⁽³⁾ etc. - définit ce que l'on pourrait appeler le "champ de choix"⁽⁴⁾ du centre de décision envisagé. Sa définition dépendra de l'objectif envisagé par le centre de décision, ainsi que des "contraintes" extérieures imposant des limites aux moyens pouvant être mis en oeuvre en vue de cet objectif. De telles limites pourront d'ailleurs, en général, être établies soit au moment de définir l'ensemble des actions possibles, soit après avoir défini un

(1) Cf. M. Allais, *Economie et intérêt*, op. cit.

(2) Cf. J. Lesourne, "Recherche d'un optimum de gestion dans la pensée économique", dans *Encyclopédie Française, L'univers économique et social*, tome 9, pp. 9.68-12/9.70-4.

(3) Cf. G. Th. Guilbaud, "La théorie des jeux", dans *Revue d'économie politique*, 65 (1955), pp. 153-188.

(4) Il s'agit là d'ailleurs du terme couramment utilisé dans la théorie des choix du consommateur.

ensemble d'actions dont de telles limites définissent un sous-ensemble -le sous-ensemble des actions possibles parmi celles d'une classe plus vaste d'actions qu'il peut être commode d'appréhender dans sa totalité.

Dans la discussion théorique qui va suivre, nous considérerons généralement un ensemble d'actions qui seront des actions possibles, le deuxième cas ci-dessus pouvant toujours se ramener au premier.

Il convient ici de souligner que l'objectif intervenant dans la définition de l'ensemble des actions n'est pas nécessairement fixé par le centre de décision qui aura à choisir une action particulière parmi celles de la classe envisagée. Un tel objectif pourra en effet souvent lui être imposé de l'extérieur, ce qui arrive d'ailleurs en général quand les actions sont de nature essentiellement technique. On pourra d'ailleurs toujours supposer cet objectif comme donné -ce que nous ferons dans la suite de cette étude- car le cas où l'on envisagerait plusieurs objectifs rentrerait dans le schéma retenu en assimilant chaque objectif à une action ; on parlerait ici plutôt d'options. En effet, on pourrait alors considérer un centre de décision dont le rôle serait de choisir un objectif parmi un ensemble d'objectifs. Comme nous venons de le dire, ce centre de décision pourra être distinct du centre de décision dont le rôle est de fixer une politique en vue de la réalisation d'un objectif déterminé. Pratiquement, il arrivera d'ailleurs souvent qu'un organisme soit chargé du choix de l'objectif, tandis qu'un ou plusieurs organismes distincts seront chargés, pour chaque objectif, du choix d'une action ; ce choix d'ailleurs intervient généralement parmi d'autres comme élément d'appréciation dans le choix de l'objectif par l'organisme compétent. Il en est ainsi notamment dans le cas des décisions de planification -à échelle nationale, locale ou d'une entreprise- où différents organismes sont chargés, pour différentes options (buts, objectifs) de décider des moyens ou actions pour les réaliser, la tâche de choisir une option parmi celles que l'on a envisagées revenant à un organisme indépendant de ceux qui ont décidé des moyens -gouvernement ou parlement dans le cas d'options de politique économique nationale, propriétaire, direction ou conseil d'entreprise dans le cas d'options à échelle d'une entreprise. Quoi qu'il en soit, malgré la complexité et la diversité des situations réelles et les cadres institutionnels différents, on pourra en général se ramener au schéma conceptuel simple que nous venons d'introduire -dans lequel l'objectif peut être considéré comme préfixé-, schéma dont nous préciserons par la suite la structure logique.

La notion d'action telle qu'elle vient d'être introduite évoque immédiatement celle de résultat. En effet, toute action, toute politique, etc., se traduira concrètement par des conséquences, dont la totalité peut être résumée par le terme de résultat⁽¹⁾. Or, si par la suite, nous aurons à faire la distinction entre action et résultat de cette action -ce qui nous permettra de revenir, au sujet des décisions, sur les notions générales de phénomène certain, approché et aléatoire, introduites précédemment- pour le moment, nous nous limiterons à considérer des ensembles d'actions possibles envisagées au moment où une décision doit être prise, en assimilant chaque action à son résultat, ou plutôt à l'idée que l'on se fait d'un tel résultat. Cela car, au moment où une décision est prise, ce qui importe, c'est l'ensemble des actions possibles, chaque action devant évidemment être assimilée à son résultat, ou plutôt à l'idée que le centre de décision se fait d'un tel résultat et qui peut évidemment différer du résultat que l'on observera réellement. Pour le moment chaque action pourra alors être assimilée à son "résultat escompté", car ce sont là les seules données sur lesquelles on peut se baser en vue d'aboutir à une décision.

Remarquons encore que chaque action, considérée comme élément d'un ensemble d'actions, ne sera souvent pas justiciable d'une représentation simple, à l'aide d'un nombre par exemple, comme dans le cas où une action peut être assimilée à une opération se traduisant par une somme monétaire, ou à l'aide d'un vecteur, comme dans le cas où les actions particulières d'un consommateur se traduisent par l'achat d'un panier de provisions. D'une façon générale, la description d'une action particulière fera intervenir des éléments de nature qualitative et des éléments de nature quantitative. La description d'une telle action ne sera donc possible qu'à l'aide d'un être dont la nature sera en général complexe.

3) Dans la suite de ce chapitre, nous concentrerons notre attention sur quelques aspects essentiels des mécanismes de prise de décision en vue notamment d'explicitier les problèmes fondamentaux propres à la construction et à l'analyse des modèles économiques dans lesquels interviennent les décisions de ceux que les économistes aiment appeler des agents économiques et que nous appellerons, d'après la terminologie introduite ici, des centres de

(1) Nous emploierons le mot résultat au singulier, pour désigner l'ensemble des conséquences d'une action.

décision. Nous serons amenés à distinguer les modèles à plusieurs centres de décision des modèles à un seul centre de décision, c'est-à-dire les modèles faisant intervenir les décisions de plusieurs centres, des modèles faisant intervenir les décisions d'un centre unique. Nous commencerons par l'étude des modèles à un seul centre de décision, qui formellement sont naturellement plus simples, mais qui ont aussi l'avantage de soulever la plupart des problèmes conceptuels fondamentaux que l'on rencontrera en étudiant des modèles plus complexes. Nous allons examiner en détail les modèles à un seul centre de décision. Les conclusions que nous obtiendrons s'étendront naturellement, au moins dans une certaine mesure, à la théorie des modèles à plusieurs centres de décision. Nous nous bornerons cependant à donner les grandes lignes de celle-ci dont une étude complète dépasserait le cadre de ce travail. Conformément au point de vue déjà adopté dans la première partie de cette étude, nous essaierons de réduire la technicité au minimum indispensable en essayant de concentrer nos efforts sur la logique des développements envisagés.

4) Depuis longtemps la science économique a eu recours, dans les problèmes touchant aux décisions, à la notion d'utilité à laquelle ont été attribuées des significations et des portées fort diverses⁽¹⁾. Tantôt elle intervient explicitement, tantôt implicitement, même chez des auteurs qui s'en défient. D'un côté on s'accordera en général pour ne lui attribuer qu'une portée "ordinaire", quitte par la suite à ne pas résister à la tentation d'appliquer à cette grandeur les propriétés et les opérations ayant un sens pour les nombres. D'un autre côté, pour qu'une partie au moins de ces propriétés et opérations puissent conserver un sens en termes d'utilité, on la voudrait de plus repérable, voire mesurable, et de là à chercher des conditions et à essayer de les fonder concrètement en vue de les rendre d'une portée générale⁽²⁾.

(1) G. J. Stigler, "The Development of Utility Theory", I, II, dans *The Journal of Political Economy*, 58 (1950), pp. 307-327 et 373-396.

T. Majumdar, *The Measurement of Utility*, London, Macmillan & Co., Ltd., 1958.

(2) H. Lebesgue, *Sur la mesure des grandeurs*, Monographies de l'enseignement mathématique, n° 1, Genève, A. Kundig.

C. H. Coombs, H. Raiffa, R. M. Thrall, "Some Views on Mathematical Models and Measurement Theory", op. cit.

C. H. Coombs, "La mesure dans les sciences sociales. Théorie et méthodes", dans *Les méthodes de recherche dans les sciences sociales*, tome II, Paris, P.U.F., 1959, pp. 538-611.

J. S. Coleman, E. W. Adams, H. Solomon, *Mathematical Thinking in the Measurement of Behavior*, Illinois, The Free Press of Glencoe, 1960.

Or, et la plupart des économistes aujourd'hui paraissent en convenir, beaucoup de problèmes économiques concrets peuvent en général être traités à l'aide de la notion simple de préférence, ce qui permet pratiquement de ne pas recourir à l'utilité et par là d'éviter toute querelle au sujet de sa portée générale. Par contre, et il faut bien en convenir, beaucoup de problèmes peuvent être formalisés et traités plus simplement si on a recours à la notion d'utilité.

Nous n'avons donc nullement l'intention d'essayer de débarrasser la science économique de cette notion commode, ni même de ne pas l'utiliser dans le cadre de ce travail, quitte toutefois à lui attribuer un sens, peut-être mineur, en l'envisageant, comme nous le ferons par la suite, comme un simple "indicateur numérique d'appréciation". Cela parce que même en ne lui attribuant, comme on le fait souvent, qu'un sens intuitif commode, équivalent en quelque sorte à la notion, aussi intuitive et vague, de satisfaction, on ne saurait généralement utiliser cette notion dans le cas de décisions émanant de centres de décision de nature particulièrement complexe - par rapport aux mécanismes de prise de décision et aux actions qu'ils ont à envisager. En effet, si pour un consommateur, par exemple, la notion d'utilité a un caractère intuitif évident, il n'en est plus de même si le centre de décision est un organisme complexe : par exemple un organisme de planification, une assemblée parlementaire, un conseil d'administration, etc.. Dans le cas d'un centre de décision complexe, ce ne sont pas les opinions individuelles - de ses membres - qui nous intéressent, ni les mécanismes par lesquels, d'une "confrontation" d'opinions individuelles de poids plus au moins différent quant à l'aboutissement final, sortira une décision. De tels problèmes, qui, selon la nature du centre de décision envisagé relèvent soit de la psychologie⁽¹⁾, de la science politique, voire de la sociologie, sont certes très importants, notamment lorsqu'il s'agira de donner à l'économie pure une base concrète.

Dans la présente étude, nous considérerons la décision comme un fait unique qui émane du centre, sans nous préoccuper des efforts qui ont été faits au sein de celui-ci pour y arriver. Nous concen-

(1) A. M. Weitzenhoffer, "Mathematical Structures and Psychological Measurements" dans *Psychometrika*, 16 (1951), pp. 387-406.
 R. D. Luce, *Individual Choice Behavior*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959.
 F. Restle, *Psychology of Judgment and Choice*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1961.

trerons notre attention sur les schémas logiques -que nous allons expliciter- qui permettent de choisir une action parmi d'autres, c'est-à-dire d'aboutir à une décision.

5) Ce que nous venons de dire nous conduit à introduire la notion "d'univers des appréciations", notion qui, pour le moment, restera en partie intuitive, avant que nous puissions en préciser la structure formelle. Nous considérerons que tout centre de décision, aussi primaire soit-il, dont la fonction est de choisir une action déterminée parmi celles d'un ensemble -qui pourra aussi être très simple- possède un univers des appréciations caractérisant sa façon d'apprécier, de juger, de réagir face aux différentes actions de la classe qu'il doit envisager. L'univers des appréciations sera un ensemble d'appréciations particulières qui pourront être exprimées, selon les circonstances, sous forme de rapports, de recommandations, de signes, de nombres, de phrases, voire de simples dénominations. Chaque élément de l'univers des appréciations traduira donc, sous une forme qui lui sera propre, une appréciation possible du centre de décision considéré.

La première opération qui s'impose à tout centre de décision, consiste à faire correspondre à une des actions possibles, un élément de son univers des appréciations. Cela sera possible soit pour chacune des actions, soit seulement pour certaines d'entre elles. Dans le cas où on ne saurait le faire pour aucune des actions, il n'y aura pas d'appréciations pour cette classe d'actions, et on pourra dire que le centre de décision est inapte à s'en occuper. En supposant que l'on sait attribuer à quelques éléments au moins de l'ensemble des actions des éléments de l'univers des appréciations, nous expliciterons au § 3 les "possibilités de raisonnement" du centre de décision, en précisant la structure logique de son univers des appréciations. Or, dès qu'il y a raisonnement -aussi incomplet et rudimentaire soit-il- en vue d'effectuer un choix, de marquer une préférence, on voit apparaître les notions de classement, d'ordre. Aux paragraphes suivants, nous reviendrons de manière systématique sur ces notions, et nous aurons à les débarrasser de leur caractère intuitif afin de les fonder logiquement.

§ 2 - RELATIONS BINAIRES, RELATIONS D'ORDRE, ELEMENTS EXTREMES ⁽¹⁾ -

(1) P. Dubreil, *Algèbre*, op. cit.

C. Berge, *Espaces topologiques*, Paris, Dunod, 1959.

M. Barbut, "Ensembles ordonnés" dans *Revue française de recherche opérationnelle*, 20 (1961), pp. 175-198.

1) Au § 1 du chapitre II, nous avons introduit la notion de propriété définie dans un ensemble, et nous avons fait la distinction entre deux représentations équivalentes d'une même propriété : sa représentation sous forme grammaticale et sa représentation sous forme d'ensemble. Soit un ensemble E , nous avons désigné par \mathcal{P} la forme grammaticale d'une propriété définie dans E , et par $E_{\mathcal{P}}$ l'ensemble représentatif de cette propriété, c'est-à-dire le sous-ensemble $E_{\mathcal{P}}$ de E formé des éléments de E qui vérifient la propriété, ou encore des éléments $x \in E$ pour lesquels la proposition $\mathcal{P}(x) = \text{"}x \text{ possède la propriété } \mathcal{P}\text{"}$ est vraie. Et nous avons :

$$\left(\forall_{x \in E} \right) : \mathcal{P}(x) \iff x \in E_{\mathcal{P}}.$$

2) Or, étant donné deux ensembles E et F , une propriété peut porter sur deux éléments $x \in E$ et $y \in F$ considérés simultanément et dans un ordre déterminé. Il s'agira alors d'une propriété portant sur les couples ordonnés (x, y) , éléments de l'ensemble produit $E \times F$. Soit \mathcal{R} une telle propriété, on aura alors :

$$\left(\forall_{(x, y) \in E \times F} \right) : \mathcal{R} [(x, y)] \iff (x, y) \in [E \times F]_{\mathcal{R}},$$

$[E \times F]_{\mathcal{R}} \subseteq E \times F$ étant l'ensemble représentatif de la propriété \mathcal{R} définie dans $E \times F$.

3) On convient généralement, ce qui est souvent commode, de considérer une telle propriété \mathcal{R} définie dans $E \times F$ comme une *relation binaire* \mathcal{R} de l'ensemble E à l'ensemble F . Si F coïncide avec E on dit que \mathcal{R} est une relation binaire *dans* l'ensemble E .

Dans ce qui va suivre, nous aurons besoin de comparer deux à deux -d'après une certaine propriété- les éléments d'un même ensemble E . Nous considérerons donc en général ici des relations binaires dans E . Comme précédemment pour les propriétés, \mathcal{R} pourra être considérée comme la représentation grammaticale de la relation. \mathcal{R} sera donc une phrase faisant intervenir x et y dans un ordre déterminé ; et cette phrase pourra, pour deux éléments x et y déterminés, être vraie ou fausse. Si elle est vraie, nous écrivons :

$$x \mathcal{R} y.$$

La représentation sous forme d'ensemble de la relation \mathcal{R} se fera aussi à l'aide de l'ensemble représentatif $S_{\mathcal{R}}$. $S_{\mathcal{R}}$, qui est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$, que nous désignerons par S , sera formé des couples $(x, y) \in E \times E = S$ pour lesquels on a $x \mathcal{R} y$ c'est-à-dire des couples qui satisfont la relation \mathcal{R} . On a alors :

$$x \mathcal{R} y \iff (x, y) \in S_{\mathcal{R}}.$$

Ici aussi il pourra être commode de représenter une relation, tantôt sous forme grammaticale, tantôt sous forme d'ensemble.

4) Une relation sera dite vide si $S_{\mathcal{R}} = \Phi$; elle sera dite universelle si $S_{\mathcal{R}} = S$. La relation $\bar{\mathcal{R}}$, négation de \mathcal{R} est telle que : $S_{\bar{\mathcal{R}}} = \bar{S}_{\mathcal{R}}$; on l'appellera *relation complémentaire* de \mathcal{R} . On appellera *relation inverse* ou *réciproque* de \mathcal{R} la relation \mathcal{R}^{-1} telle que

$$y \mathcal{R}^{-1} x \iff x \mathcal{R} y,$$

ou encore telle que :

$$(y, x) \in S_{\mathcal{R}^{-1}} \iff (x, y) \in S_{\mathcal{R}}.$$

La *relation d'égalité*, que nous désignerons par E , est telle qu'elle n'est vérifiée que si x et y sont un seul et même élément de E . Son ensemble représentatif est l'ensemble $S_E = \{(x, x) \mid x \in E\}$. On aura ainsi :

$$x E y \iff (x, y) \in S_E.$$

5) Nous dirons qu'une relation dans E est *composée* quand elle est définie à partir d'au moins deux relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 définies dans E .

On pourra avoir : $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2$ ou $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2$. On a évidemment :

$$x \mathcal{R}' y = x(\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2) y \iff (x, y) \in S_{\mathcal{R}'} = S_{\mathcal{R}_1} \cap S_{\mathcal{R}_2},$$

et

$$x \mathcal{R}'' y = x(\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) y \iff (x, y) \in S_{\mathcal{R}''} = S_{\mathcal{R}_1} \cup S_{\mathcal{R}_2}.$$

6) On vérifie aisément que, \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 étant deux relations dans E :

$$x \mathcal{R}_1 y \implies x \mathcal{R}_2 y \iff S_{\mathcal{R}_1} \subseteq S_{\mathcal{R}_2},$$

ou, ce qui est équivalent :

$$y \mathcal{R}_1^{-1}x \Rightarrow y \mathcal{R}_2^{-1}x \iff S_{\mathcal{R}_1^{-1}} \subseteq S_{\mathcal{R}_2^{-1}},$$

car :

$$x \mathcal{R}_1 y \iff y \mathcal{R}_1^{-1}x \text{ et } x \mathcal{R}_2 y \iff y \mathcal{R}_2^{-1}x.$$

Dans un pareil cas, on dira que la relation \mathcal{R}_1 est plus forte que la relation \mathcal{R}_2 . On vérifie immédiatement que la relation \mathcal{R}' du point 5 est plus forte que la relation \mathcal{R}'' , car en effet $S_{\mathcal{R}'} \subseteq S_{\mathcal{R}''}$. Deux relations seront dites *incompatibles* si la relation $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2$ est une relation vide, c'est-à-dire si $S_{\mathcal{R}'} = S_{\mathcal{R}_1} \cap S_{\mathcal{R}_2} = \Phi$. Deux relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 seront dites équivalentes si et seulement si $S_{\mathcal{R}_1} = S_{\mathcal{R}_2}$.

7) Une relation \mathcal{R} est dite *réflexive*⁽¹⁾ si $\left(\begin{smallmatrix} \forall x \\ E \end{smallmatrix} \right) : x \mathcal{R} x$ c'est-à-dire si $S_E \subseteq S_{\mathcal{R}}$.

Une relation \mathcal{R} est dite *symétrique*⁽²⁾ (ou *réciproque*) si $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ c'est-à-dire si $S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\mathcal{R}^{-1}}$, car $y \mathcal{R} x \iff x \mathcal{R}^{-1} y$.

Étant donné que $x \mathcal{R} y \iff y \mathcal{R}^{-1} x$, si la relation est symétrique on aura aussi $y \mathcal{R}^{-1} x \Rightarrow y \mathcal{R} x$ c'est-à-dire $S_{\mathcal{R}^{-1}} \subseteq S_{\mathcal{R}}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x \iff S_{\mathcal{R}} = S_{\mathcal{R}^{-1}}.$$

Une relation \mathcal{R} dans E est dite *antisymétrique*⁽³⁾ (ou *propre*) si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$, ou encore, étant donné que $y \mathcal{R} x \Rightarrow x \mathcal{R}^{-1} y$:

$$x(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}^{-1})y \Rightarrow x = y \text{ c'est-à-dire } S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}} \subseteq S_E.$$

Une relation \mathcal{R} dans E est dite *transitive*⁽⁴⁾ si :

$$x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z.$$

(1) Au § 4, à titre d'exemples, nous représentons graphiquement quelques relations ; pour la réflexivité, voir figure 3.

(2) Voir § 4, figure 5.

(3) Voir § 4, figures 6 et 7.

(4) Voir § 4, figure 8.

Une relation \mathcal{R} est dite *circulaire* si :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies z\mathcal{R}x.$$

Il convient de souligner que la transitivité aussi bien que le caractère circulaire d'une relation, ne se prêtent pas à une définition directe à l'aide de l'ensemble représentatif de la relation.

On vérifie sans difficulté que si une relation \mathcal{R} possède une des propriétés envisagées dans ce point, la relation réciproque \mathcal{R}^{-1} la possède aussi ; si toutes les relations d'une famille de relations possèdent l'une quelconque des propriétés ci-dessus, leur intersection la possède aussi.

8) Une relation \mathcal{R} est dite *tripartitive* si elle est non réflexive et non symétrique :

non réflexive : $(\forall x \in E) : x\tilde{\mathcal{R}}x$ c'est-à-dire $S_E \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}}$, ou si l'on préfère $S_E \cap S_{\mathcal{R}} = \Phi$;

non symétrique : $x\mathcal{R}y \implies y\tilde{\mathcal{R}}x$ c'est-à-dire $y\mathcal{R}^{-1}x \implies y\tilde{\mathcal{R}}x$, ou $S_{\mathcal{R}^{-1}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}} = \bigcup S_{\mathcal{R}}$, donc $S_{\mathcal{R}^{-1}} \cap S_{\mathcal{R}} = \Phi$.

9) *Relations d'équivalence.* (1) Une relation qui est à la fois symétrique, réflexive et transitive est une relation d'équivalence. Soit \mathcal{E} une relation dans E . \mathcal{E} sera donc une relation d'équivalence si on a :

$$x\mathcal{E}y \implies y\mathcal{E}x \text{ c'est-à-dire } S_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{E}^{-1}} \quad \text{symétrie}$$

$$(\forall x \in E) : x\mathcal{E}x \text{ c'est-à-dire } S_E \subseteq S_{\mathcal{E}} \quad \text{réflexivité}$$

$$x\mathcal{E}y \text{ et } y\mathcal{E}z \implies x\mathcal{E}z \text{ (v. point 7)} \quad \text{transitivité.}$$

Remarquons que pour toute partition \mathcal{A} de E on peut définir dans E une relation d'équivalence \mathcal{E} telle que $x\mathcal{E}y \iff x$ et y appartiennent au même ensemble de la classe \mathcal{A} . Les éléments de la classe \mathcal{A} , sous-ensembles de E , seront dits des *classes d'équivalence*. Réciproquement, à toute relation \mathcal{E} d'équivalence dans E on peut faire correspondre une partition de E .

(1) Voir § 4, figures 17, 18, 19 et 24.

On appelle *ensemble quotient* de E par \mathcal{E} -et on le note E/\mathcal{E} - l'ensemble des classes d'équivalence déterminé sur E par la relation \mathcal{E} . D'après ce que nous venons de dire, en désignant par \mathcal{E} une relation d'équivalence dans E et par $\mathcal{L} = E/\mathcal{E} = \{L\}$ l'ensemble quotient de E par \mathcal{E} , on aura évidemment, $E_{\mathcal{L}}$ étant la relation d'égalité dans \mathcal{L} :

$$\left(\begin{matrix} \forall L, L' \\ \in \mathcal{L} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \forall x \\ L \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \forall y \\ L' \end{matrix} \right) : x \mathcal{E} y \iff L E_{\mathcal{L}} L'.$$

On voit ainsi qu'une relation d'équivalence dans E équivaut à une relation d'égalité dans \mathcal{L} . La classe \mathcal{L} étant une partition de E on a évidemment :

$$\bigcup_{L \in \mathcal{L}} L = E \text{ et } L \cap L' = \emptyset, \left(\begin{matrix} \forall L, L' \\ \in \mathcal{L} \end{matrix} \right) \text{ tels que } L \tilde{E}_{\mathcal{L}} L'.$$

L'ensemble représentatif de la relation \mathcal{E} s'écrira aussi $S_{\mathcal{E}} = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L \times L$, $L \times L$ étant le produit de $L \subseteq E$ par lui-même.

On vérifie sans difficulté qu'une relation réflexive et circulaire est une relation d'équivalence.

10) *Comparabilité*⁽¹⁾. Deux éléments $x, y \in E$ seront dits comparables par la relation \mathcal{R} -ou plus simplement comparables- \mathcal{R} -, si on a :

soit $x \mathcal{R} y$, soit $y \mathcal{R} x$, soit les deux ; c'est-à-dire, étant donné que $y \mathcal{R} x \iff x \mathcal{R}^{-1} y$, si on a :

$$x (\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}) y \text{ ou encore } (x, y) \in S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}.$$

Tous les éléments de E seront deux à deux comparables par la relation \mathcal{R} si :

$$\left(\begin{matrix} \forall x, y \\ \in E \end{matrix} \right) : x (\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}) y \text{ c'est-à-dire si } S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} = S.$$

(1) Voir § 4, figure 14.

Le sous-ensemble de $E \times E = S$ formé des couples d'éléments de E comparables - \mathcal{R} est évidemment égal à $S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}$; et l'on vérifie immédiatement que la comparabilité - \mathcal{R} , aussi bien que la non comparabilité - \mathcal{R} , sont deux relations définies dans E , symétriques et dont les ensembles représentatifs sont respectivement $S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}$ et

$$C[S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] = C S_{\mathcal{R}} \cap C S_{\mathcal{R}^{-1}}.$$

11) *Relations d'ordre*. Parmi les différentes relations binaires que l'on peut envisager, les relations d'ordre retiendront plus particulièrement notre attention ici, en vue des développements ultérieurs. D'après les propriétés qui les définissent, on distinguera des relations d'ordre strict, des relations d'ordre large (ou non strict) et des relations de préordre ou quasi-ordre.

Une relation binaire dans E sera dite :

- i) une relation d'ordre strict, si elle est tripartitive et transitive⁽¹⁾;
- ii) une relation d'ordre large (ou non strict), si elle est transitive, réflexive et antisymétrique ;
- iii) une relation de préordre ou quasi-ordre, si elle est transitive et réflexive.

On peut remarquer que les trois relations d'ordre que nous venons de définir ont toutes en commun la propriété de transitivité.

Si on a défini dans E une de ces relations d'ordre, on dira que E est muni de la structure d'ordre correspondante - d'ordre strict, large, ou de préordre. Si \mathcal{R} désigne cette relation d'ordre définie dans E il sera commode d'utiliser la notation (E, \mathcal{R}) pour désigner l'ensemble E muni de la structure d'ordre définie par \mathcal{R} . S'il existe des couples d'éléments de E qui ne sont pas comparables par la relation d'ordre envisagée⁽²⁾, on dira que la structure d'ordre ainsi définie est une structure d'ordre partiel.

-
- (1) La transitivité et la non réflexivité suffiraient pour définir cette relation, car ces deux propriétés entraînent la non symétrie.
 - (2) Si la relation est une relation d'ordre strict, il faut toutefois exclure les couples (x, x) , car dans ce cas un élément de E n'est jamais comparable à lui-même par la relation envisagée qui, par définition, est non réflexive.

D'après les définitions que nous venons de donner, en désignant par \mathcal{R} une relation binaire définie dans E :

i) \mathcal{R} est une relation d'ordre strict, si

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \quad \text{transitivité}$$

$$\left(\forall_E x \right) : x \tilde{\mathcal{R}} x \text{ c'est-à-dire } S_E \cap S_{\mathcal{R}} = \emptyset \quad \text{non réflexivité.}$$

$$\text{ou } S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{E}}$$

Ces deux propriétés suffisent pour que la relation soit non symétrique ; en effet si \mathcal{R} était symétrique, on aurait $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$, d'où par transitivité $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \implies x\mathcal{R}x$, ce qui est impossible à cause de la non réflexivité.

ii) \mathcal{R} est une relation d'ordre large⁽¹⁾ si :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \quad \text{transitivité}$$

$$\left(\forall_E x \right) : x\mathcal{R}x \quad \text{c'est-à-dire } S_E \subseteq S_{\mathcal{R}} \quad \text{réflexivité}$$

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x E y \text{ c'est-à-dire } S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}} \subseteq S_E \quad \text{antisymétrie.}$$

iii) \mathcal{R} est une relation de préordre⁽²⁾ si :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \quad \text{transitivité}$$

$$\left(\forall_E x \right) : x\mathcal{R}x \quad \text{c'est-à-dire } S_E \subseteq S_{\mathcal{R}} \quad \text{réflexivité.}$$

On voit immédiatement qu'une relation d'ordre large peut être considérée comme une relation de préordre. Nous dirons donc qu'une relation de préordre est une relation de *préordre véritable* si elle n'est pas relation d'ordre large, c'est-à-dire si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \not\Rightarrow x E y$ ou encore si $S_E \subset S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}}$.

(1) Voir § 4, figures 12, 13 et 22.

(2) Voir § 4, figures 21 et 25.

12) Les relations d'ordre que nous venons d'envisager seront dites d'ordre strict total, d'ordre large total ou de préordre total, si tous les couples d'éléments distincts de E sont comparables par la relation correspondante, c'est-à-dire si :

$$\left(\begin{array}{l} \forall (x, y) \\ \in S \\ \notin S_E \end{array} \right) : x(\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1})y$$

ou encore si :

$$S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} \cup S_E = S.$$

Si la relation \mathcal{R} est une relation d'ordre large ou une relation de préordre, on a par définition $S_E \subseteq S_{\mathcal{R}}$ (réflexivité) ; chaque élément de E est donc nécessairement comparable - \mathcal{R} à lui-même. Par contre si \mathcal{R} est une relation d'ordre strict, $S_{\mathcal{R}} \subseteq S_E = \complement S_{\mathcal{R}^{-1}}$ (non réflexivité) ; chaque élément de E est nécessairement non comparable - \mathcal{R} à lui-même.

Compte tenu de cela, une relation d'ordre sera dite d'ordre strict partiel, d'ordre large partiel ou de préordre partiel si

$$S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} \cup S_E \subset S.$$

L'ensemble des couples d'éléments de E non comparable par la relation \mathcal{R} est :

$$\complement [S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}].$$

D'après ce que nous venons de dire, si \mathcal{R} est une relation d'ordre strict, $S_E \subseteq \complement [S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}]$, tandis que si \mathcal{R} est une relation d'ordre large ou de préordre, on aura toujours :

$$S_E \cap \complement [S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] = \emptyset.$$

13) Si \mathcal{R} est une relation d'ordre strict et si pour $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$, on dira souvent que x précède strictement y ou est strictement antérieur à y . On dira encore que y suit strictement x ou est strictement postérieur (ultérieur) à x . Si \mathcal{R} est une relation d'ordre large et si on a $x\mathcal{R}y$, on dira que x précède y , x est antérieur à y , ou que y suit x , est postérieur (ultérieur) à x .

14) Tout ensemble partiellement ordonné - strictement ou non - ou partiellement préordonné, contient des parties totalement ordonnées - strictement ou non - ou totalement préordonnées. On appelle de tels sous-ensembles de E des chaînes de E par rapport à l'ordre considéré. Une chaîne sera dite maximale si elle n'est partie véritable d'aucune autre chaîne de E.

15) Remarques. a) Soit \mathcal{R} une relation d'ordre large définie dans E. La relation composée $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}^{-1}$ est la relation d'égalité. En effet, \mathcal{R} étant réflexive, \mathcal{R}^{-1} l'est aussi, d'où :

$$\left. \begin{array}{l} S_E \subseteq S_{\mathcal{R}} \\ S_E \subseteq S_{\mathcal{R}^{-1}} \end{array} \right\} \Rightarrow S_E \subseteq S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}} = S_{\mathcal{R}^*} ;$$

or, \mathcal{R} étant propre, on aura aussi :

$$S_{\mathcal{R}^*} = S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}} \subseteq S_E,$$

d'où $S_{\mathcal{R}^*} = S_E$.

b) Soit \mathcal{R} une relation de préordre définie dans E. La relation composée $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}^{-1}$ est une relation d'équivalence.

En effet, elle est transitive et réflexive, car \mathcal{R} l'étant, \mathcal{R}^{-1} l'est aussi, ainsi que $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \wedge \mathcal{R}^{-1}$; elle est aussi symétrique car $S_{\mathcal{R}^*} = S_{\mathcal{R}^{-1}} \cap S_{\mathcal{R}}$, d'où $S_{\mathcal{R}^*} = S_{\mathcal{R}^*}$. Si \mathcal{R} est une relation de préordre véritable on aura $S_{\mathcal{R}^*} \supseteq S_E$; \mathcal{R}^* sera donc une relation d'équivalence proprement dite. Si par contre $S_{\mathcal{R}^*} = S_E$, nous sommes ramenés au cas précédent ; le préordre défini par \mathcal{R} devient un ordre large et la relation d'équivalence \mathcal{R}^* se réduit à la relation d'égalité.

c) Considérons une relation d'ordre strict \mathcal{R} . Soit la relation dégalité E ; elle est

réflexive, car $S_E \subseteq S_E$,

propre, car $S_E \cap S_{E^{-1}} \subseteq S_E$,

symétrique, car $S_E = S_{E^{-1}}$.

Formons la relation composée $\mathcal{R}^* = E \vee \mathcal{R}$. La relation \mathcal{R}^* est une relation d'ordre large. En effet, elle est :

transitive, car

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}^*z$$

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{E}z \implies x\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}^*z$$

$$x\mathcal{E}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}^*z$$

$$x\mathcal{E}y \text{ et } y\mathcal{E}z \implies x\mathcal{E}z \implies x\mathcal{R}^*z,$$

réflexive, car

$$S_{\mathcal{R}^*} = S_{\mathcal{E}} \cup S_{\mathcal{R}} \supseteq S_{\mathcal{E}},$$

propre, car

$$S_{\mathcal{R}^*} \cap S_{\mathcal{R}^*-1} = [S_{\mathcal{E}} \cup S_{\mathcal{R}}] \cap [S_{\mathcal{E}^{-1}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] = S_{\mathcal{E}} \cup [S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}}] \subseteq S_{\mathcal{E}}.$$

Compte tenu de ce qui précède, la relation \mathcal{R}^* sera une relation d'ordre large total si et seulement si \mathcal{R} est une relation d'ordre strict total. En effet on aura :

$$S_{\mathcal{R}^*} \cup S_{\mathcal{R}^*-1} = [S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] \cup S_{\mathcal{E}}.$$

Les couples d'éléments de E non comparables - \mathcal{R}^* seront donc les mêmes que les couples d'éléments non comparables - \mathcal{R} .

d) Inversement, étant donné une relation \mathcal{R}^* d'ordre large, la relation composée $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* \wedge \tilde{\mathcal{E}}$ est une relation d'ordre strict.

En effet, la relation \mathcal{R} est :

non réflexive, car

$$S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{E}}},$$

non symétrique, car \mathcal{R}^* étant propre, on a :

$$S_{\mathcal{R}^*} \cap S_{\mathcal{R}^*-1} \subseteq S_{\mathcal{E}},$$

d'où :

$$S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}} = [S_{\mathcal{R}^*} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}}] \cap [S_{\mathcal{R}^*-1} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}}] = S_{\mathcal{R}^*} \cap S_{\mathcal{R}^*-1} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}} = \Phi;$$

transitive ; en effet :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}^*y \text{ et } y\mathcal{R}^*z \implies x\mathcal{R}^*z,$$

or, $z \mathcal{R}^* x$ est impossible car $z \mathcal{R}^* x$ et $x \mathcal{R}^* y \implies z \mathcal{R}^* y$, $z \mathcal{R}^* y$ et $y \mathcal{R}^* z \implies y \mathcal{E} z$ (antisymétrie), et $y \mathcal{R} z \implies y \tilde{\mathcal{E}} z$, d'où la contradiction. Ici encore \mathcal{R} sera une relation d'ordre strict total si et seulement si \mathcal{R}^* est une relation d'ordre large total. On a en effet :

$$S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} = [S_{\mathcal{R}^*} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}}] \cup [S_{\mathcal{R}^{*-1}} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}}] = S_{\tilde{\mathcal{E}}} \cap [S_{\mathcal{R}^*} \cup S_{\mathcal{R}^{*-1}}],$$

d'où :

$$S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} \cup S_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{R}^*} \cup S_{\mathcal{R}^{*-1}}.$$

Les couples d'éléments de E non comparables - \mathcal{R} seront encore les mêmes que les couples d'éléments non comparables - \mathcal{R}^* , au sous-ensemble de $E \times E = S$ près formé des couples d'éléments x, y vérifiant la relation \mathcal{E} , éléments qui sont comparables - \mathcal{R}^* et qui par définition ne sont pas comparables - \mathcal{R} .

e) Soit \mathcal{R}^{**} une relation de préordre définie dans E . Nous avons vu sous b) que la relation composée $\mathcal{E} = \mathcal{R}^{**} \wedge \mathcal{R}^{**^{-1}}$ est une relation d'équivalence. Considérons maintenant la relation composée $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{**} \wedge \tilde{\mathcal{E}}$. La relation \mathcal{R} est une relation d'ordre strict partiel définie dans E .

En effet, elle est :

non réflexive : $S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{E}}} \subseteq S_{\mathcal{E}}$ car $S_{\mathcal{E}} \subseteq S_{\mathcal{E}}$ (réflexivité de la relation d'équivalence \mathcal{E}) ;

non symétrique : $S_{\mathcal{R}} \cap S_{\mathcal{R}^{-1}} = [S_{\mathcal{R}^{**}} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}}] \cap [S_{\mathcal{R}^{**^{-1}}} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}}] = S_{\mathcal{R}^{**}} \cap S_{\mathcal{R}^{**^{-1}}} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}} = S_{\mathcal{E}} \cap S_{\tilde{\mathcal{E}}} = \Phi$;

transitive ; en effet :

$$x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R}^{**} y \text{ et } y \mathcal{R}^{**} z \implies x \mathcal{R}^{**} z ;$$

or $z \mathcal{R}^{**} x$, c'est-à-dire $(x, z) \in S_{\mathcal{E}}$ est impossible car :

$$z \mathcal{R}^{**} x \text{ et } x \mathcal{R}^{**} y \implies z \mathcal{R}^{**} y,$$

$$z \mathcal{R}^{**} y \text{ et } y \mathcal{R}^{**} z \implies y \mathcal{E} z,$$

et $y \mathcal{R} z \implies y \tilde{\mathcal{E}} z$, d'où la contradiction.

La relation \mathcal{R} est nécessairement une relation d'ordre strict partiel ; en effet on a :

$$S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} = [S_{\mathcal{R}^{**}} \cap S_{\mathcal{E}}] \cup [S_{\mathcal{R}^{**,-1}} \cap S_{\mathcal{E}}] = S_{\mathcal{E}} \cap [S_{\mathcal{R}^{**}} \cup S_{\mathcal{R}^{**,-1}}]$$

ou encore :

$$\mathcal{C}[S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] = S_{\mathcal{E}} \cup \mathcal{C}[S_{\mathcal{R}^{**}} \cup S_{\mathcal{R}^{**,-1}}] ;$$

or, le premier terme de cette égalité est le sous-ensemble de S formé des couples d'éléments de E non comparables - \mathcal{R} , tandis que $\mathcal{C}[S_{\mathcal{R}^{**}} \cup S_{\mathcal{R}^{**,-1}}]$ est le sous-ensemble de S formé des couples d'éléments de E non comparables - \mathcal{R}^{**} . Si \mathcal{R}^{**} est une relation de préordre total on aura :

$$\mathcal{C}[S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] = S_{\mathcal{E}}.$$

f) Si, étant donné une relation d'ordre strict \mathcal{R} , on peut trouver une relation d'équivalence \mathcal{E} telle que $S_{\mathcal{E}} = \mathcal{C}[S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}]$, alors la relation composée $\mathcal{R}^{**} = \mathcal{R} \vee \mathcal{E}$ sera une relation de préordre total.

En effet, \mathcal{R}^{**} est réflexive car $S_{\mathcal{E}} \subseteq S_{\mathcal{R}^{**}}$; elle est transitive car, étant donné que $[S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}}] \cap S_{\mathcal{E}} = \Phi$, on aura :

$$x \mathcal{R}^{**} y \text{ et } y \mathcal{R}^{**} z \iff \begin{cases} 1) & x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \text{ ou} \\ 2) & x \mathcal{E} y \text{ et } y \mathcal{R} z \text{ ou} \\ 3) & x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{E} z \text{ ou} \\ 4) & x \mathcal{E} y \text{ et } y \mathcal{E} z. \end{cases}$$

La transitivité de \mathcal{R} et \mathcal{E} donne immédiatement pour 1) $x \mathcal{R} z$ et pour 4) $x \mathcal{E} z$; d'où, dans les deux cas, $x \mathcal{R}^{**} z$.

Pour 2) et 3) on aura nécessairement $x \mathcal{R}^{**} z$. En effet $x \mathcal{R}^{-1} z$ est impossible, car $x \mathcal{R}^{-1} z \implies z \mathcal{R} x$ et on aurait alors :

pour 2) $y \mathcal{R} z$ et $z \mathcal{R} x \implies y \mathcal{R} x$, d'où la contradiction ;

pour 3) $z \mathcal{R} x$ et $x \mathcal{R} y \implies z \mathcal{R} y$, d'où la contradiction.

On vérifie d'ailleurs que $x \mathcal{E} z$ est aussi impossible.

Le préordre \mathcal{R}^{**} est évidemment total car $S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}-1} = S$.

Il convient ici de remarquer que la relation composée définie à l'aide d'une relation d'ordre strict partiel \mathcal{R}

$$\text{en posant } \mathcal{R}_1 = \widetilde{\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}} = \tilde{\mathcal{R}} \wedge \tilde{\mathcal{R}}^{-1},$$

est évidemment symétrique, et réflexive car :

$$S_{\mathcal{R}_1} = \bigcap [S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}-1}] = S_{\tilde{\mathcal{R}}} \cap S_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}},$$

et, \mathcal{R} étant non réflexive :

$$S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}} \Rightarrow S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}}, \quad S_{\mathcal{R}-1} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}} \Rightarrow S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}},$$

d'où

$$S_{\mathcal{R}} \subseteq S_{\tilde{\mathcal{R}}} \cap S_{\tilde{\mathcal{R}}^{-1}}.$$

La relation \mathcal{R}_1 peut être considérée comme la relation définissant dans E la non comparabilité - \mathcal{R} . Si \mathcal{R}_1 est transitive, elle sera une relation d'équivalence. Compte tenu de ce que nous avons dit ci-dessus, la relation composée $\mathcal{R} \vee \mathcal{R}_1$ sera alors une relation de préordre total si et seulement si \mathcal{R}_1 est transitive.

Les développements de ce point nous ont montré comment et sous quelles conditions on peut transformer les différentes relations d'ordre envisagées. Nous reviendrons sur ces questions importantes au § 3 en vue notamment de relier les différentes structures que nous serons amené à envisager pour caractériser l'univers des appréciations.

16) *Eléments extrêmes.* Nous ne considérerons ici que des relations \mathcal{R} d'ordre large.

i) Soit A une partie non vide de E - $A \subseteq E$, $A \neq \Phi$ -, et \mathcal{R} une relation d'ordre large, total ou partiel. On appelle d'habitude : *premier élément, plus petit élément* ou *élément minimum* de A - ordonné \mathcal{R} - et on le désignera par $\min A = \underline{x}_A$, un élément $\underline{x}_A \in A$ tel que l'on ait :

$$\left(\begin{array}{c} \forall x \\ A \end{array} \right) : \underline{x}_A \mathcal{R} x.$$

Si \underline{x}_A existe, il est unique. En effet si \underline{x}_A et \underline{x}'_A sont deux éléments minimums, on aura alors :

$$\underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}'_A \quad \text{et} \quad \underline{x}'_A \mathcal{R} \underline{x}_A, \quad \text{d'où} \quad \underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}'_A,$$

\mathcal{R} étant propre.

D'une façon analogue, on appelle *dernier élément*, *plus grand élément*, ou *élément maximum* de A , et on le désignera ici par $\max A = \bar{x}_A$, un élément $\bar{x}_A \in A$ tel que :

$$\left(\forall x \right) : x \mathcal{R} \bar{x}_A ;$$

naturellement si \bar{x}_A existe, il est unique. On peut remarquer que, s'il existe, l'élément minimum (maximum) de A ordonné \mathcal{R} , peut être considéré comme l'élément maximum (minimum) de A ordonné \mathcal{R}^{-1} . Le premier et le dernier élément de E lui-même, s'ils existent, sont appelés souvent élément nul et élément universel.

Nous les désignerons simplement par :

$$\min E = \underline{x} \quad \text{et} \quad \max E = \bar{x}.$$

ii) On appelle d'habitude *élément minimal* de $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$, un élément \underline{x}_A tel que :

$$\left(\forall x \right) : x \mathcal{R} \underline{x}_A \Rightarrow \underline{x}_A \mathcal{R} x$$

ou encore, \mathcal{R} étant propre, tel que :

$$\left(\forall x \right) : x \mathcal{R} \underline{x}_A \Rightarrow x \mathcal{E} \underline{x}_A.$$

On pourrait aussi dire que \underline{x}_A est minimal s'il n'existe aucun élément x tel que l'on ait en même temps $x \mathcal{R} \underline{x}_A$ et $\underline{x}_A \mathcal{R} x$ ou encore, \mathcal{R} étant propre, tel que l'on ait en même temps $x \mathcal{R} \underline{x}_A$ et $x \mathcal{E} \underline{x}_A$.

De même un *élément maximal* de A est un élément $\tilde{x}_A \in A$ tel que :

$$\left(\forall x \right) : \tilde{x}_A \mathcal{R} x \Rightarrow x \mathcal{R} \tilde{x}_A,$$

c'est-à-dire tel que :

$$\left(\forall x \right) : \tilde{x}_A \mathcal{R} x \Rightarrow x \mathcal{E} \tilde{x}_A.$$

S'il existe un élément minimum \underline{x}_A , il y a un seul élément minimal $\underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}_A$. En effet, soit \underline{x}'_A et \underline{x}_A deux éléments minimaux de A . On a alors, \underline{x}_A étant minimum :

$$\underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}_A \quad \text{et} \quad \underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}'_A,$$

ce qui entraîne, \underline{x}_A et \underline{x}'_A étant minimaux :

$$\underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}_A \quad \text{et} \quad \underline{x}'_A \mathcal{R} \underline{x}_A.$$

D'où, \mathcal{R} étant propre,

$$\underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}_A \quad \text{et} \quad \underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}_A \implies \underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}_A$$

$$\underline{x}_A \mathcal{R} \underline{x}'_A \quad \text{et} \quad \underline{x}'_A \mathcal{R} \underline{x}_A \implies \underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}'_A,$$

et, la relation \mathcal{E} étant symétrique et transitive :

$$\underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}_A \quad \text{et} \quad \underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}'_A \implies \underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}'_A.$$

S'il existe plusieurs éléments minimaux, ils sont non comparables - \mathcal{R} . En effet, soit \underline{x}_A et \underline{x}'_A deux éléments minimaux tels que :

$$\underline{x}_A \not\mathcal{E} \underline{x}'_A.$$

S'ils sont comparables - \mathcal{R} on aura par exemple $\underline{x}'_A \mathcal{R} \underline{x}_A$, ce qui implique, \underline{x}_A étant minimal, $\underline{x}'_A \mathcal{R} \underline{x}'_A$, d'où $\underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}'_A$, et la contradiction.

Si la relation \mathcal{R} définit dans A un ordre large total, on peut aussi énoncer :

a) si \underline{x}_A existe, il est unique ;

b) s'il existe dans A un élément minimal \underline{x}_A , il est minimum : $\underline{x}_A \mathcal{E} \underline{x}_A$. En effet, $\left(\begin{smallmatrix} \forall x \\ A \end{smallmatrix} \right)$:

$$\text{soit } \underline{x}_A \mathcal{R} x, \quad \text{soit } x \mathcal{R} \underline{x}_A.$$

Or, \underline{x}_A étant minimal, $x \mathcal{R} \underline{x}_A \implies \underline{x}_A \mathcal{R} x$; ce qui permet d'écrire :

$$\left(\begin{smallmatrix} \forall x \\ A \end{smallmatrix} \right) : \underline{x}_A \mathcal{R} x,$$

\underline{x}_A est donc élément minimum.

L'unicité de \underline{x}_A découle évidemment du fait qu'il est aussi élément minimum.

Si la relation \mathcal{R} définit dans A un ordre large partiel les propriétés a) et b) n'ont plus lieu. En particulier on pourra avoir un ensemble $\underline{X}_A \subseteq A$ d'éléments minimaux de A , qui sont deux à deux non comparables - \mathcal{R} . Si \underline{X}_A est un ensemble singulier - $\underline{X}_A = \{\underline{x}_A\}$ - ceci n'entraîne pas l'existence d'un élément minimum. En effet, \mathcal{R} étant une relation d'ordre partiel, si :

$$\left(\exists x \atop A \right) : (x, \underline{x}_A) \in \left[S_{\mathcal{R}} \cup S_{\mathcal{R}^{-1}} \right],$$

c'est-à-dire s'il existe un élément $x \in A$ non comparable à \underline{x}_A par la relation \mathcal{R} , alors l'élément minimal unique \underline{x}_A n'est pas élément minimum.

En résumé, on pourra avoir les situations suivantes :

- | | | | | |
|-------------------------------|---|---|----|---|
| ordre large
<i>total</i> | } | 1) pas d'élément minimum | et | pas d'élément minimal |
| | | 2) un élément minimum unique | | qui est en même temps élément minimal unique ; |
| | | la distinction entre élément minimum et élément minimal disparaît donc ici. | | |
| ordre large
<i>partiel</i> | } | 3) pas d'élément minimum | et | pas d'élément minimal |
| | | 4) pas d'élément minimum | et | un ou plusieurs éléments minimaux - \underline{X}_A - deux à deux non comparables - \mathcal{R} |
| | | 5) un élément minimum unique | | qui est en même temps élément minimal unique . |

Ce que nous venons de dire s'étend sans difficulté aux éléments maximums et maximaux.

Au paragraphe suivant, nous verrons comment ces notions peuvent être utilisées dans le cas d'une relation de préordre.

§ 3 - STRUCTURE FAIBLE DE L'UNIVERS DES APPRÉCIATIONS -

1) La notion d'univers des appréciations nous fournira ici le cadre le plus général délimitant et définissant les "facultés de raisonnement" d'un centre de décision déterminé. En nous plaçant à un point de vue formel, nous ne nous préoccupons pas pour le moment de caractériser les éléments de l'univers des appréciations.

Soit \mathcal{A} l'univers des appréciations d'un centre de décision, \mathcal{A} étant un ensemble dont les éléments sont des appréciations particulières.

Nous avons vu au § 1 que la première opération sur la voie devant conduire à une décision -au sens que nous lui attribuons ici- revient à faire correspondre une appréciation particulière et une seule à chaque action de l'ensemble des actions possibles⁽¹⁾.

Soit \mathcal{X} l'ensemble des actions particulières envisagées ; il s'agira donc d'associer à chaque $x \in \mathcal{X}$ une appréciation et une seule de \mathcal{A} . Il s'agit donc d'établir une application univoque φ de \mathcal{X} dans \mathcal{A} . Soit $\varphi(\mathcal{X}) = A \subseteq \mathcal{A}$; l'application univoque de \mathcal{X} sur A sera dite aussi une transformation de \mathcal{X} en A . Il s'agit donc ici d'une application qui transforme chaque action particulière en une appréciation ; nous l'appellerons la *transformation d'appréciation* de \mathcal{X} en A . Cette transformation d'appréciation correspond, dans le cadre formel envisagé, à l'opération concrète qui consiste à "apprécier" chaque action de la classe envisagée. Elle comporte évidemment le choix de $A \subseteq \mathcal{A}$, c'est-à-dire le choix parmi les appréciations particulières de l'univers des appréciations \mathcal{A} de celles qui "conviennent" aux actions $x \in \mathcal{X}$. Ce choix dépendra naturellement du but qui inspire la décision du centre considéré, but qui, comme nous l'avons vu au § 1 peut être fixé par ce dernier ou lui être imposé par un autre organisme. Il va de soi que si on modifiait le but, ou si on changeait l'ensemble \mathcal{X} , on serait conduit à une autre transformation d'appréciation φ' ayant comme image un sous-ensemble A' de

(1) Les actions auxquelles on ne sait pas faire correspondre une appréciation particulière, ne sauraient intervenir dans le choix d'une action, c'est-à-dire dans une prise de décision. Nous pouvons donc nous restreindre au cas où à toutes les actions de la classe envisagée on peut faire correspondre une appréciation, car on pourra toujours se ramener à un tel cas après avoir éliminé toutes les actions qui ne peuvent pas être "appréciées".

l'univers des appréciations \mathcal{A} , qui caractérise au sens le plus général le centre de décision envisagé. Et A' pourra être disjoint ou partiellement confondu avec A .

Ainsi, un centre de décision se trouvera en général devant d'une part un ensemble \mathcal{X} d'actions et d'autre part un but, qu'il a lui-même arrêté ou qui lui a été imposé : il devra donc considérer des appréciations appartenant à un ensemble $A \subseteq \mathcal{A}$ déterminé. Le plus souvent, le centre de décision donnera à chaque appréciation $a \in A$ le sens d'un *degré d'adéquation*, c'est-à-dire d'une indication sur la plus ou moins grande capacité de l'action associée à a , en vue du but à obtenir. Bien entendu, nous ne voulons pas dire que cette indication peut être exprimée par un nombre, et il est essentiel de remarquer que nous n'attacherons aucun caractère numérique aux degrés d'adéquation que nous considérerons constamment par la suite. C'est précisément parce que ces degrés d'adéquation ne peuvent pas être exprimés par des nombres qu'il est nécessaire de recourir à des ensembles A possédant une structure plus faible que la structure numérique. C'est la raison pour laquelle nous avons, dans le paragraphe précédent, étudié des structures de ce genre, que nous allons maintenant utiliser pour traiter du choix d'un élément dans l'ensemble A .

2) Comme nous venons de le voir, chaque degré d'adéquation doit fournir une indication sur le caractère plus ou moins satisfaisant, eu égard au but envisagé, de l'action à laquelle il est associé. On pourrait dire aussi que chaque $a \in A$ exprime une appréciation quant à l'adéquation d'un $x \in \mathcal{X}$, relativement au but envisagé.

Or, eu égard à ce but, il faudra que l'on puisse comparer deux à deux une partie au moins des éléments de A . En effet, pour deux actions particulières de la classe \mathcal{X} , la notion intuitive d'adéquation s'explique et se précise si on peut, parmi les deux actions, en désigner une comme mieux adaptée au but envisagé. Cette comparaison porte évidemment sur les degrés d'adéquation associés à chaque action du couple envisagé, les éléments de \mathcal{X} n'ayant, comme nous l'avons vu, qu'une portée descriptive.

Soit \mathcal{R}_A une phrase pouvant servir à énoncer le résultat ou la conclusion de cette comparaison ; phrase qui, pour fixer les idées, pourra être formulée comme suit : "le degré d'adéquation... est inférieur ou équivalent au degré d'adéquation..." ou encore : "...exprime un degré d'adéquation inférieur ou équivalent à celui qu'exprime...". Si pour deux degrés d'adéquation particuliers a_1 et a_2 ,

le résultat de leur comparaison peut s'énoncer sous forme d'une proposition vraie à l'aide de phrases équivalentes à celles que l'on vient d'envisager, et si par exemple a_1 occupe la première place et a_2 la seconde, nous écrirons $a_1 \mathcal{R}_A a_2$. $a_1 \mathcal{R}_A a_2$ équivaut donc par exemple à la proposition vraie : "le degré d'adéquation a_1 est inférieur ou équivalent au degré d'adéquation a_2 ".

Compte tenu des développements du § 2, et en étendant cela à tous les couples d'éléments de A , on voit immédiatement que l'on doit considérer \mathcal{R}_A comme définissant dans A une relation binaire. Soit $S_{\mathcal{R}_A} \subseteq S = A \times A$ l'ensemble représentatif de cette relation : l'ensemble des couples d'éléments de A comparables - \mathcal{R}_A , que nous supposerons non vide, sera alors : $S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}}$, $S_{\mathcal{R}_A^{-1}}$ étant l'ensemble représentatif de la relation \mathcal{R}_A^{-1} (1), réciproque de \mathcal{R}_A .

Il nous faut maintenant supposer que le centre de décision respecte quelques "conditions de cohérence". Ce que nous ferons en supposant que A est tel que la relation \mathcal{R}_A définie dans A possède certaines propriétés, ou, ce qui revient au même, en astreignant la relation \mathcal{R}_A définie dans A à satisfaire à ces propriétés.

Nous avons déjà supposé que l'ensemble des couples d'éléments de A comparables - \mathcal{R}_A n'était pas vide. Nous supposerons donc de plus que la relation \mathcal{R}_A est transitive et réflexive, conditions de cohérence indispensables si on songe à la définition concrète de \mathcal{R}_A . Il suffit d'ailleurs d'admettre que le centre de décision raisonne suivant la logique élémentaire habituelle - raisonnement déductif - pour en tirer la conséquence qu'il ne se servira que de relations \mathcal{R}_A qui seront réflexives et transitives. Nous pouvons donc admettre que A est muni par \mathcal{R}_A d'une structure de préordre, total ou partiel.

On pourrait évidemment munir d'emblée A de la structure plus forte d'ordre large. Cette condition, qui d'un point de vue concret est assez restrictive, n'est pas nécessaire, comme nous allons le voir au point suivant. Par contre, nous excluerons pour A des structures d'ordre strict, car on ne saurait admettre concrètement, qu'un centre de décision ne soit pas capable de comparer à lui-même un degré d'adéquation déterminé (non réflexivité).

(1) Relation qui peut s'exprimer par la phrase : "le degré d'adéquation... est supérieur ou équivalent au degré d'adéquation...".

3) Ayant défini dans A une relation \mathcal{R}_A de préordre, total ou partiel, nous pouvons considérer la relation composée $\mathcal{E}_A = \mathcal{R}_A \wedge \mathcal{R}_A^{-1}$ qui, comme nous l'avons vu au point 15 du § 2, est une relation d'équivalence. Cette relation d'équivalence définie dans A pourra être représentée sous forme grammaticale par une phrase telle que : "le degré d'adéquation... est équivalent au degré d'adéquation..."

On peut maintenant envisager l'ensemble quotient de A par \mathcal{E}_A , c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{L} = A/\mathcal{E}_A = \{L\}$ des classes d'équivalence L , déterminé sur A par la relation \mathcal{E}_A ; chaque classe d'équivalence, que l'on appelle aussi souvent en économie une région d'indifférence, comprend évidemment des degrés d'adéquation équivalents, et qui, pour cette raison, peuvent être considérés comme indifférents.

Comme nous l'avons vu on aura alors :

$$\left(\begin{array}{c} \forall L, L' \\ \in \mathcal{L} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a_1 \\ L \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a_2 \\ L' \end{array} \right) : a_1 \mathcal{E}_A a_2 \iff L \mathcal{E}_{\mathcal{L}} L',$$

$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ étant la relation d'égalité définie dans \mathcal{L} . En vue de nous ramener aux notions introduites au § 2, on peut maintenant considérer dans \mathcal{L} la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, définie comme suit :

$$L \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L' \iff \left(\begin{array}{c} \exists a_1 \\ L \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \exists a_2 \\ L' \end{array} \right) : a_1 \mathcal{R}_A a_2.$$

Compte tenu de la définition de \mathcal{L} , si $\left(\begin{array}{c} \exists a_1 \\ L \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c} \exists a_2 \\ L' \end{array} \right)$ tels que $a_1 \mathcal{R}_A a_2$, on aura aussi :

$$a \mathcal{R}_A a', \quad \left(\begin{array}{c} \forall a \\ L \end{array} \right) \text{ et } \left(\begin{array}{c} \forall a' \\ L' \end{array} \right),$$

car

$$a_1 \in L \text{ et } a \in L \implies a \mathcal{R}_A a_1,$$

$$a_2 \in L' \text{ et } a' \in L' \implies a_2 \mathcal{R}_A a',$$

d'où par transitivité de la relation \mathcal{R}_A :

$$a \mathcal{R}_A a_1 \text{ et } a_1 \mathcal{R}_A a_2 \implies a \mathcal{R}_A a_2,$$

et

$$a \mathcal{R}_A a_2 \text{ et } a_2 \mathcal{R}_A a' \implies a \mathcal{R}_A a'.$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$L \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L' \iff \left(\begin{array}{c} \forall a \\ L \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a' \\ L' \end{array} \right) : a \mathcal{R}_A a'.$$

On vérifie sans difficulté que la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ que nous venons de définir dans \mathcal{L} à partir de la relation \mathcal{R}_A définie dans A , est une relation d'ordre large, total ou partiel. En effet :

elle est transitive, car

$$L_1 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_2 \implies \left(\begin{array}{c} \forall a_1 \\ L_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a_2 \\ L_2 \end{array} \right) : a_1 \mathcal{R}_A a_2,$$

$$L_2 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_3 \implies \left(\begin{array}{c} \forall a_2 \\ L_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a_3 \\ L_3 \end{array} \right) : a_2 \mathcal{R}_A a_3,$$

d'où par transitivité de \mathcal{R}_A :

$$L_1 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_2 \text{ et } L_2 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_3 \implies L_1 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_3 ;$$

elle est réflexive, car

$$a \mathcal{R}_A a \implies L \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L ;$$

et propre, car en effet

$$\left. \begin{array}{l} L_1 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_2 \implies \left(\begin{array}{c} \forall a_1 \\ L_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a_2 \\ L_2 \end{array} \right) a_1 \mathcal{R}_A a_2 \\ L_2 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_1 \implies \left(\begin{array}{c} \forall a_1 \\ L_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall a_2 \\ L_2 \end{array} \right) a_2 \mathcal{R}_A a_1 \end{array} \right\} \implies a_1 \mathcal{E}_A a_2 \implies L_1 \mathcal{E}_{\mathcal{L}} L_2.$$

Si la relation \mathcal{R}_A est une relation de préordre *partiel*, $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ sera alors une relation d'ordre large *partiel*. En effet supposons que a_1 et a_2 ne sont pas comparables - \mathcal{R}_A et que pour $a_1 \in L_1$ et $a_2 \in L_2$ on ait par exemple $L_1 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_2$. Or,

$$L_1 \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L_2 \implies \left(\begin{array}{c} \exists a'_1 \\ L_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \exists a'_2 \\ L_2 \end{array} \right) : a'_1 \mathcal{R}_A a'_2,$$

et

$$\left. \begin{array}{l} a_1 \in L_1 \\ a'_1 \in L_1 \end{array} \right\} \implies a_1 \mathcal{R}_A a'_1, \quad \left. \begin{array}{l} a_2 \in L_2 \\ a'_2 \in L_2 \end{array} \right\} \implies a_2 \mathcal{R}_A a'_2,$$

d'où par transitivité

$$a_1 \mathcal{R}_A a'_1 \text{ et } a'_1 \mathcal{R}_A a'_2 \implies a_1 \mathcal{R}_A a'_2,$$

$$a_1 \mathcal{R}_A a'_2 \text{ et } a'_2 \mathcal{R}_A a_2 \implies a_1 \mathcal{R}_A a_2, \quad \text{et la contradiction.}$$

De même si L_1 et L_2 sont non comparables - \mathcal{R}_R , $(\forall a_1)_{L_1}$ et $(\forall a_2)_{L_2}$,

a_1 et a_2 sont non comparables - \mathcal{R}_A , car si $(\exists a_1)_{L_1}$ et $(\exists a_2)_{L_2}$ tels que par exemple $a_1 \mathcal{R}_A a_2$, alors on aurait $L_1 \mathcal{R}_R L_2$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé donnée la relation de préordre \mathcal{R}_A définie dans A . A l'aide de celle-ci, nous avons défini une relation d'équivalence dans A , qui nous a permis de construire une famille de classes d'équivalence, classes que, toujours à l'aide de la relation \mathcal{R}_A , nous avons pu munir d'une structure d'ordre large. Inversement on pourrait aussi envisager le cas où on se donne en premier lieu une relation d'équivalence dans A , permettant de définir une famille \mathcal{L} de classes d'équivalence, et ensuite une relation d'ordre large dans \mathcal{L} , ce qui conduirait alors à définir une relation de préordre dans A . D'un point de vue concret, cette deuxième façon de procéder peut expliciter les étapes logiques essentielles par lesquelles un centre de décision déterminé peut être amené à munir A d'une structure de préordre. En effet il pourra commencer par réunir en classes les degrés d'adéquation qu'il considère comme équivalents, pour essayer ensuite d'ordonner les classes ainsi formées. Quels que soient toutefois les mécanismes réels par lesquels un centre de décision peut être amené à définir dans A une relation de préordre, comme nous l'avons montré ci-dessus, on pourra toujours se ramener au cas d'une relation d'ordre large définie dans un ensemble de classes d'équivalence.

4) Ayant, comme nous venons de le faire, muni A de la structure d'ordre la plus faible, c'est-à-dire ayant imposé à A de vérifier les conditions d'ordre les moins astreignantes pouvant permettre d'aboutir à une décision raisonnée - conditions qui, d'un point de vue concret, sont donc les plus générales - il s'agit maintenant de préciser la notion intuitive de décision optimum.

Pour simplifier, considérons tout d'abord le cas où l'ensemble A des degrés d'adéquation associés par le centre de décision aux actions de la classe envisagée est muni par \mathcal{R}_A d'une structure d'ordre large. Au point 2 de ce paragraphe, nous avons vu que la relation \mathcal{R}_A , sous forme grammaticale, pouvait être considérée comme une phrase permettant d'énoncer le résultat de la comparaison de

deux degrés d'adéquation. Or, si, comme nous le supposons ici, \mathcal{R}_A désigne une phrase équivalente à celles envisagées au point 2, -ainsi par exemple la phrase : "le degré d'adéquation... est inférieur ou équivalent au degré d'adéquation..."- chaque fois que pour deux degrés d'adéquation a_1, a_2 on aura par exemple $a_1 \mathcal{R}_A a_2$, cela signifiera que a_1 exprime un degré de perfection, relativement à l'objectif envisagé, inférieur (ou égal, si on a aussi $a_2 \mathcal{R}_A a_1$) au degré de perfection exprimé par a_2 . Là où les actions auxquelles on associe a_1 sont donc "moins bonnes" (ou équivalentes) relativement au but envisagé, que la ou les actions auxquelles on associe a_2 . Compte tenu toujours de l'objectif envisagé, le choix d'une action pouvant être considérée comme étant la "meilleure" nécessitera donc que l'on sache déterminer parmi les degrés d'adéquation de A le ou lesquels peuvent être considérés comme traduisant un degré de perfection (relativement au but envisagé) supérieur à ceux qu'expriment les autres éléments de A.

D'une façon plus précise, compte tenu des développements du point 16 du § 2, ceci nous conduit alors à envisager les éléments extrêmes de A. Nous dirons donc qu'un degré d'adéquation \bar{a} est maximum, si \bar{a} est élément maximum de A, ordonné \mathcal{R}_A , c'est-à-dire si :

$$\left(\begin{matrix} \forall a \\ A \end{matrix} \right) : a \mathcal{R}_A \bar{a} ;$$

et qu'un degré d'adéquation \tilde{a} est maximal, si \tilde{a} est élément maximal de A ordonné \mathcal{R}_A , c'est-à-dire si :

$$\left(\begin{matrix} \forall a \\ A \end{matrix} \right) : \tilde{a} \mathcal{R}_A a \implies a \mathcal{R}_A \tilde{a}.$$

Compte tenu de ce que nous avons dit sur les éléments extrêmes, nous n'envisagerons pas les cas où il n'y aurait dans A ni élément maximum ni élément maximal. D'un point de vue concret, de tels cas pourraient être considérés comme indéterminés ; car, en effet, quel que soit le degré d'adéquation que l'on envisage -et la ou les actions qui lui correspondent- on trouverait toujours dans A d'autres degrés d'adéquation -donc d'autres actions- traduisant une perfection plus grande quant à l'objectif envisagé. On verrait mal alors comment, sans enlever cette indétermination, on pourrait aboutir à une décision.

Compte tenu de cette hypothèse sur l'existence d'un élément maximal au moins, on pourra donc avoir les situations suivantes :

i) \mathcal{R}_A munit A d'une structure d'ordre large, *total* ou *partiel*

un degré d'adéquation maximum $\bar{\alpha}$ qui est en même temps degré d'adéquation maximal unique.

ii) \mathcal{R}_A munit A d'une structure d'ordre large *partiel*

pas de degré d'adéquation maximum, et un ensemble $\tilde{A} \subseteq A$, non vide, singulier ou non, de degrés d'adéquation maximaux (deux à deux non comparables - \mathcal{R}_A).

Dans le cas i) nous dirons simplement qu'il existe un degré d'adéquation maximum. On voit bien que dans ce cas, le caractère total ou partiel de la relation d'ordre large \mathcal{R}_A ne joue aucun rôle du point de vue de la mise en évidence du degré d'adéquation maximum. Tous les éléments de A sont comparables - \mathcal{R}_A au degré d'adéquation maximum. Si \mathcal{R}_A est une relation d'ordre large partiel il y aura naturellement des couples d'éléments de A - tous différents du degré d'adéquation maximum- non comparables - \mathcal{R}_A . Dans le cas ii), qui peut se présenter seulement si \mathcal{R}_A est une relation d'ordre large partiel, on aura un ensemble non vide, singulier ou non $\tilde{A} \subseteq A$ de degrés d'adéquation maximaux, tous deux à deux non comparables - \mathcal{R}_A . Chaque degré d'adéquation maximal $\tilde{\alpha} \in \tilde{A}$ peut être considéré comme un degré d'adéquation maximum parmi les éléments de A qui lui sont comparables - \mathcal{R}_A .

En vue de préciser la notion de décision optimum, il convient maintenant de revenir à la notion de transformation d'appréciation introduite au point 1 de ce paragraphe. Nous avons vu que la transformation d'appréciation φ était une application univoque de l'ensemble \mathcal{X} des actions envisagées dans l'univers des appréciations \mathcal{A} du centre de décision considéré. L'ensemble des appréciations particulières associées aux actions de la classe \mathcal{X} étant comme nous l'avons vu : $\varphi(\mathcal{X}) = A \subseteq \mathcal{A}$. Concrètement, on peut considérer que, parmi les éléments de \mathcal{A} , le centre de décision commence par en choisir une certaine classe pour former A , ensemble des degrés d'adéquation qu'il va associer aux actions particulières de la classe \mathcal{X} . A chaque action particulière $x \in \mathcal{X}$ il associera alors une appréciation et une seule, choisie parmi celles qui constituent l'ensemble A , ensemble qui sera utilisé en entier dans cette opération. Naturellement, si à chaque action particulière $x \in \mathcal{X}$ on fait correspondre un élément et un seul de A , à plusieurs

actions particulières x , qui d'un point de vue descriptif sont ainsi différentes, on pourra faire correspondre un même degré d'adéquation. Tout ceci se résume donc en considérant φ comme une application univoque de \mathcal{X} sur A .

Une action $x \in \mathcal{X}$ sera alors dite *optimum* si \bar{a} est le degré d'adéquation maximum et si $x \in \varphi^{-1}(\bar{a})$.

Une action $x \in \mathcal{X}$ sera dite *optimale* si a est un degré d'adéquation maximal et si $x \in \varphi^{-1}(\tilde{a})$.

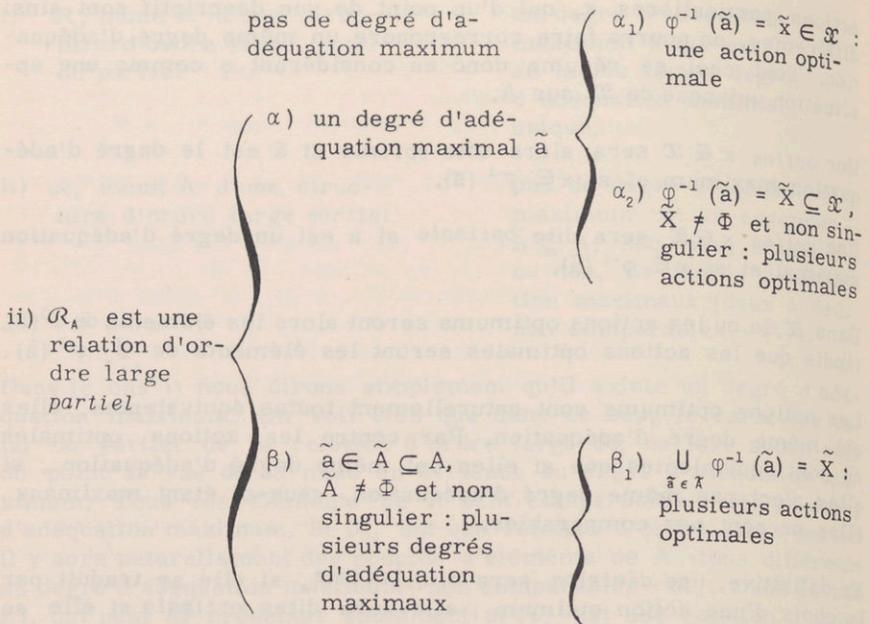
Dans \mathcal{X} , la ou les actions optimums seront alors les éléments de $\varphi^{-1}(\bar{a})$, tandis que les actions optimales seront les éléments de $\bigcup_{\tilde{a} \in \tilde{A}} \varphi^{-1}(\tilde{a})$.

Les actions optimums sont naturellement toutes équivalentes, elles ont même degré d'adéquation. Par contre les actions optimales ne sont équivalentes que si elles ont même degré d'adéquation ; si elles n'ont pas même degré d'adéquation, ceux-ci étant maximaux, elles ne sont pas comparables.

En définitive, une *décision* sera dite *optimum*, si elle se traduit par le choix d'une action optimum ; elle sera dite *optimale* si elle se traduit par le choix d'une action optimale.

Compte tenu des cas i) et ii) envisagés ci-dessus, selon la nature de la transformation φ et la structure d'ordre de l'ensemble A on aura alors :

$$\begin{array}{l}
 \text{i) } \mathcal{R}_A \text{ est une relation d'ordre large total ou partiel} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \alpha) \text{ un degré d'adéquation maximum } \bar{a} \\
 \alpha_2) \varphi^{-1}(\bar{a}) = \bar{X} \subseteq \mathcal{X}, \\
 \bar{X} \neq \Phi \text{ et non singulier : plusieurs actions optimums}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \alpha_1) \varphi^{-1}(\bar{a}) = \bar{x} \in \mathcal{X} : \\
 \text{une action optimum}
 \end{array}
 \end{array}$$



On vérifie immédiatement que si la transformation d'appréciation φ est biunivoque les cas i, α_2) et ii, α_2) disparaissent, $\varphi^{-1}(a)$ étant $\left(\begin{array}{c} \forall a \\ A \end{array} \right)$ un sous-ensemble singulier de \mathfrak{X} .

5) Nous pouvons maintenant considérer le cas, qui d'un point de vue concret est le plus général, où l'ensemble A est muni par \mathcal{R}_A d'une structure de préordre, total ou partiel. Nous avons vu au point 3 de ce paragraphe qu'une relation \mathcal{R}_A de préordre total ou partiel définie dans A pouvait être ramenée à une relation \mathcal{E}_A d'équivalence dans A et à une relation $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ d'ordre large (total ou partiel) dans l'ensemble quotient $\mathcal{L} = A/\mathcal{E}_A = \{L\}$, c'est-à-dire dans l'ensemble des classes d'équivalence de A défini par la relation \mathcal{E}_A .

Or, ce que nous avons dit au point 4 s'étend immédiatement au cas de l'ensemble \mathcal{L} muni par $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ d'une structure d'ordre large. Nous aurons donc :

- | | |
|--|--|
| i) $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ munit \mathcal{L} d'une structure d'ordre large, <i>total</i> ou <i>partiel</i> | une classe maximum \bar{L} qui est en même temps classe maximale unique. |
|--|--|

ii) \mathcal{R}_L munit L d'une structure d'ordre large *partiel*

pas de classe maximum et un sous-ensemble $\tilde{L} \subseteq L$ non vide, singulier ou non, de classes maximales (deux à deux non comparables - \mathcal{R}_L).

Compte tenu de la liaison existante entre la relation de préordre \mathcal{R}_A définie dans A et la relation d'ordre large définie dans L , on aura alors :

i) \mathcal{R}_A munit A d'une structure de *pré-ordre total* ou *partiel*

$\alpha)$ $\bar{L} = \{\bar{a}\}$ singulier : un degré d'adéquation maximum unique qui est en même temps maximal.

$\beta)$ $\bar{L} \neq \Phi$ et non singulier : plusieurs degrés d'adéquation maximums, $\bar{a} \in \bar{L}$, tous équivalents.

pas de degré d'adéquation maximum

$\alpha)$ $\tilde{L} = \{\tilde{a}\}$, une classe maximale singulière unique : un degré d'adéquation maximal \tilde{a} .

$\beta)$ \tilde{L} , une classe maximale unique, non vide et non singulière : plusieurs degrés d'adéquation maximums $\tilde{a} \in \tilde{L}$, tous équivalents.

$\gamma)$ $\tilde{L} \subseteq L$, un sous-ensemble non vide et non singulier de L de classes maximales (deux à deux non comparables - \mathcal{R}_L) : plusieurs degrés d'adéquation maximums $\tilde{a} \in \bigcup_{\tilde{l} \in \tilde{L}} \tilde{l}$, équivalents s'ils appartiennent à la même classe d'équivalence, non comparables - \mathcal{R}_A s'ils appartiennent à des classes différentes.

ii) \mathcal{R}_A munit A d'une structure de *pré-ordre partiel*

Si maintenant on tient compte de la transformation d'appréciation φ on aura en définitive les cas suivants :

i)	}	α)	{	$\alpha_1) \varphi^{-1}(\bar{a}) = \bar{x} \in \mathfrak{X}$	une action optimum
				$\alpha_2) \varphi^{-1}(\bar{a}) = \bar{X} \subseteq \mathfrak{X},$	plusieurs actions optimums
				$\bar{X} \neq \Phi$ et non singulier	
		β)	{	$\bigcup_{\bar{a} \in \bar{L}} \varphi^{-1}(\bar{a}) = \bar{X}$	plusieurs actions optimums
ii)	}	α)	{	$\alpha_1) \varphi^{-1}(\tilde{a}) = \tilde{x} \in \mathfrak{X}$	une action optimale
				$\alpha_2) \varphi^{-1}(\tilde{a}) = \tilde{X} \subseteq \mathfrak{X},$	plusieurs actions optimales
				$\tilde{X} \neq \Phi$ et non singulier	
				β)	{
		γ)	{	$\bigcup_{\substack{\tilde{a} \in \tilde{U} \\ \tilde{\gamma} \in \tilde{\mathfrak{L}}} \varphi^{-1}(\tilde{a}) = \tilde{X}$	plusieurs actions optimales

On vérifie immédiatement que si φ est une application biunivoque de \mathfrak{X} sur A les cas i, α_2) et ii, α_2) disparaissent. Si \mathcal{R}_A est une relation d'ordre large, la relation $\mathcal{G}_A = \mathcal{R}_A \wedge \mathcal{R}_A^{-1}$ se réduit à la relation d'égalité dans A . Les classes d'équivalence $L \in \mathcal{L}$ deviennent donc singulières ; les cas i, β) et ii, β) disparaissent. Nous sommes alors ramenés au schéma du point 4.

§ 4 - REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE QUELQUES-UNES DES NOTIONS PRECEDENTES -

1) Une relation binaire définie dans un ensemble A peut être représentée de façon commode par l'intermédiaire de son ensemble représentatif. Il s'agira donc de désigner, parmi les couples d'éléments de A , ceux qui vérifient la relation \mathcal{R}_A . Or, la représentation des éléments de l'ensemble $A \times A$ peut en général se faire par des points du plan cartésien, de la façon indiquée par la figure 1 ci-dessous :

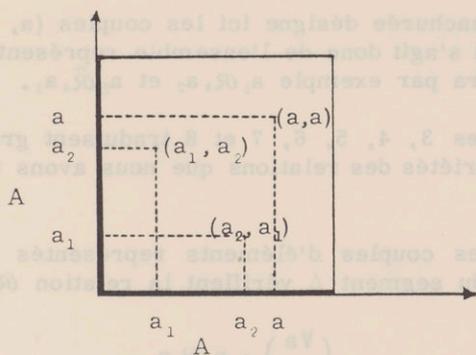


Figure 1

On convient d'habitude de disposer les éléments de A sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical, dans le même ordre. Les éléments de A étant en général non numériques, aucune notion de distance n'intervient ici ; toutefois, pour des raisons de symétrie, on conviendra de représenter un même élément $a \in A$ sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical à une même distance de l'intersection de ces deux axes.

Une relation \mathcal{R}_A définie dans A pourra alors être représentée en indiquant dans la représentation de $A \times A$ les couples d'éléments de A qui, dans l'ordre considéré, satisfont la relation \mathcal{R}_A . Ainsi par exemple, dans la figure 2, la région hachurée de $A \times A$ désigne les couples d'éléments ordonnés de A qui vérifient \mathcal{R}_A ⁽¹⁾.

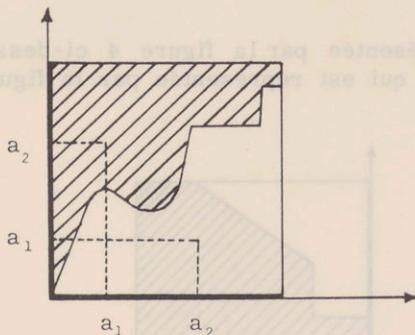


Figure 2

(1) On conviendra ici que les points appartenant à la ligne qui délimite l'ensemble représentatif de \mathcal{R}_A , vérifient aussi la relation.

La région non hachurée désigne ici les couples (a, b) qui ne vérifient pas \mathcal{R}_A ; il s'agit donc de l'ensemble représentatif de la relation $\widetilde{\mathcal{R}}_A$. On aura par exemple $a_1 \mathcal{R}_A a_2$ et $a_2 \widetilde{\mathcal{R}}_A a_1$.

Les figures 3, 4, 5, 6, 7 et 8 traduisent graphiquement les principales propriétés des relations que nous avons utilisées précédemment.

Réflexivité - Les couples d'éléments représentés sur la figure 3 par les points du segment Δ vérifient la relation \mathcal{R}_A :

$$\left(\begin{array}{c} \forall a \\ A \end{array} \right) : a \mathcal{R}_A a.$$

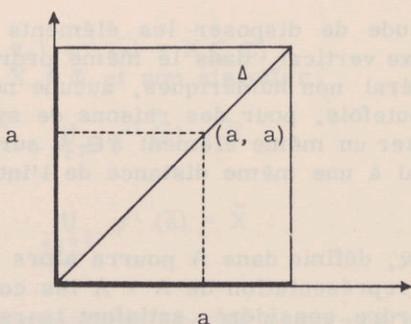


Figure 3

La relation représentée par la figure 4 ci-dessous est réflexive, par contre celle qui est représentée par la figure 2 ne l'est pas.

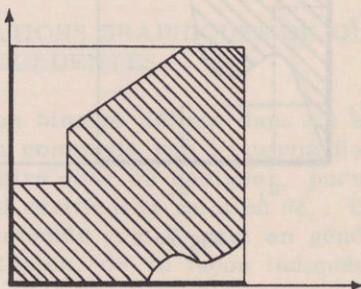


Figure 4

En désignant par une croix un couple d'éléments de A vérifiant la relation \mathcal{R}_A , et par un point un couple qui ne la vérifie pas, on aura :

Symétrie - figure 5.

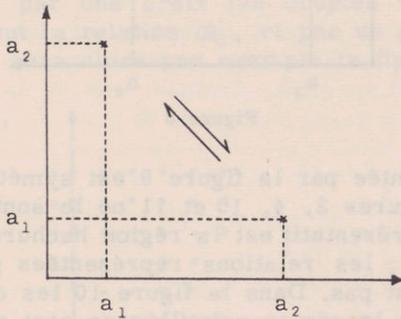


Figure 5

Antisymétrie - figure 6 ; si tous les couples d'éléments de A sont comparables - \mathcal{R}_A , on aura la figure 7.

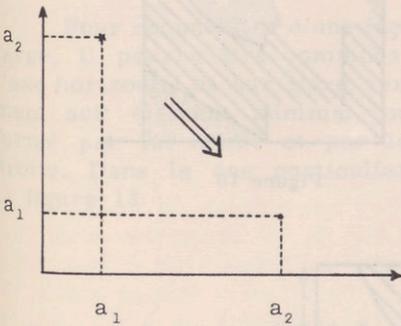


Figure 6

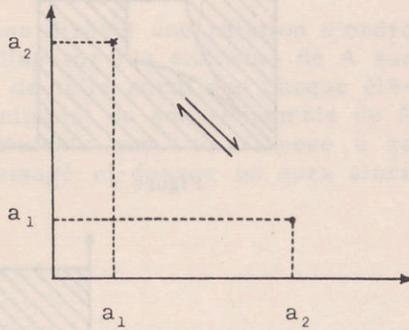


Figure 7

Transitivité - figure 8.

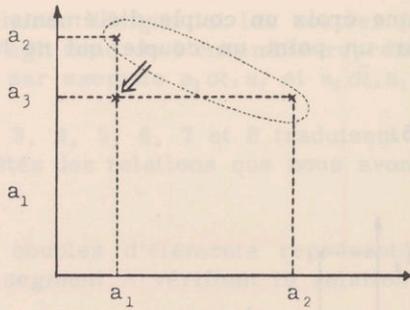


Figure 8

La relation représentée par la figure 9 est symétrique ; celles que représentent les figures 2, 4, 10 et 11 ne le sont pas. La relation dont l'ensemble représentatif est la région hachurée de la figure 10 est antisymétrique ; les relations représentées par les figures 2, 4, 9 et 11 ne le sont pas. Dans la figure 10 les couples d'éléments de A appartenant à la région pointillée ne sont pas comparables - \mathcal{R}_A . Enfin, la figure 11 donne un exemple de relation transitive. On vérifie sans difficulté que les relations représentées par les figures 2, 4, 9 et 10 ne sont pas transitives.

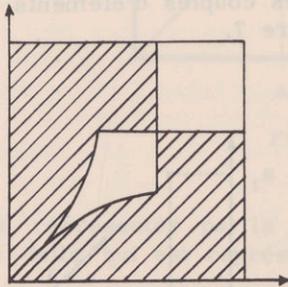


Figure 9

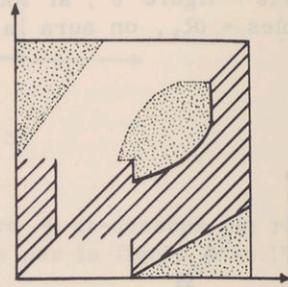


Figure 10

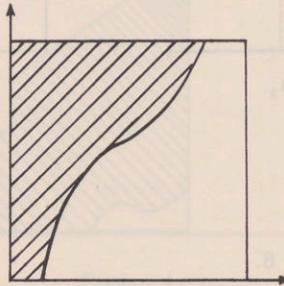


Figure 11

En vue de donner une représentation graphique des relations d'ordre, considérons tout d'abord une relation \mathcal{R}_A d'ordre large, et pour simplifier supposons que l'ensemble A , dans lequel elle est définie, est discret fini :

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Nous désignerons par une croix les couples d'éléments ordonnés de A , qui satisfont la relation \mathcal{R}_A , et par un point ceux qui ne la vérifient pas. On aura alors par exemple la figure 12 :

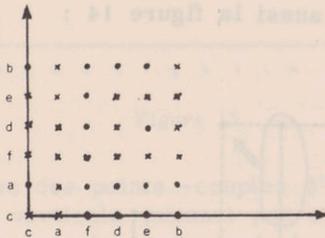


Figure 12

et on vérifie sans difficulté que \mathcal{R}_A est transitive, réflexive et propre, et que tous les couples d'éléments de A sont comparables - \mathcal{R}_A . \mathcal{R}_A est donc une relation d'ordre large total.

Pour reconnaître d'une façon plus directe une relation d'ordre large, il pourra être commode de disposer les éléments de A sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical de telle sorte que chaque élément soit élément minimal (ou minimum) du sous-ensemble de A formé par lui-même et par les éléments que l'on dispose à sa droite. Dans le cas particulier envisagé ci-dessus on aura alors la figure 13 :

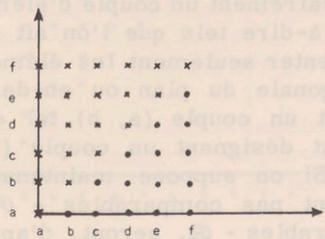


Figure 13

La figure 13 fait apparaître d'une façon plus immédiate les propriétés de définition d'une relation d'ordre large. On vérifie aussi immédiatement que a est l'élément minimum de A , que f est l'élément maximum, et que la disposition des éléments de A sur l'axe horizontal (et vertical) est telle que chaque élément est élément minimum du sous-ensemble de A qu'il forme avec les éléments qui sont à sa droite.

Deux éléments a, c de A ne seront pas comparables - \mathcal{R}_A si et seulement si le couple (a, c) , aussi bien que le couple (c, a) , sont représentés par un point. Compte tenu de la transitivité de la relation \mathcal{R}_A , on aura aussi la figure 14 :

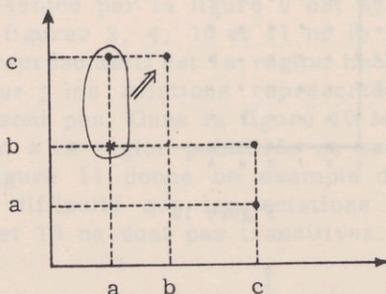


Figure 14

car $a \mathcal{R}_A b$ et $b \mathcal{R}_A c \implies a \mathcal{R}_A c$.

Soit l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$, et soit \mathcal{R}_A une relation d'ordre large telle, par exemple, qu'en disposant les éléments de A sur l'axe horizontal (et vertical) dans leur ordre alphabétique, chaque élément soit élément minimal du sous-ensemble de A formé par les éléments disposés à sa droite et par lui-même. On aura alors une représentation analogue à celle de la figure 13, c'est-à-dire on n'aura que des "points" en-dessous de la première diagonale du plan. Un point en-dessous de la première diagonale désignera alors nécessairement un couple d'éléments de A non comparables - \mathcal{R}_A , c'est-à-dire tels que l'on ait ni $a \mathcal{R}_A b$ ni $b \mathcal{R}_A a$. Il suffira donc de représenter seulement les éléments de $A \times A$ situés sur la première diagonale du plan ou en-dessus, une croix dans cette région désignant un couple (a, b) tel que l'on ait $a \mathcal{R}_A b$ et donc $b \mathcal{R}_A a$, un point désignant un couple (a, b) d'éléments non comparables - \mathcal{R}_A . Si on suppose maintenant que les éléments d, e, i, l, m , ne sont pas comparables - \mathcal{R}_A à a , les couples d'éléments non comparables - \mathcal{R}_A seront, d'après la condition illustrée par la figure 14, au moins ceux désignés par un point sur la figure 15.

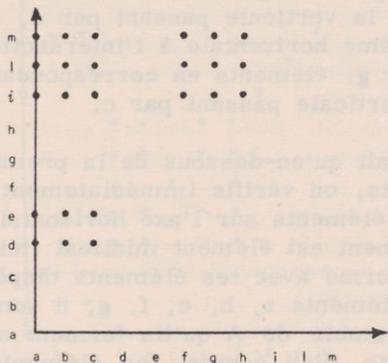


Figure 15

Ainsi, si on suppose des points -couples d'éléments non comparables - \mathcal{R}_A - sur la verticale passant par a en correspondance des lignes horizontales passant par d, e, i, l, m, on devra nécessairement avoir des points à l'intersection de ces mêmes lignes horizontales avec les verticales passant par a, b, c, f, g, h, éléments en correspondance desquels on a des croix sur la première verticale.

Si de plus nous supposons que b et h ne sont pas comparables - \mathcal{R}_A à c on aura alors la relation d'ordre large partiel représentée par la figure 16.

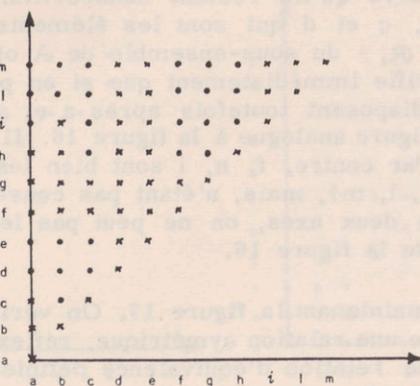


Figure 16

Ici encore, ayant imposé un point à l'intersection de l'horizontale passant par h et de la verticale passant par c , il faut qu'il y ait des points sur la même horizontale à l'intersection des verticales passant par f et par g , éléments en correspondance desquels il y a des croix sur la verticale passant par c .

En tenant compte du fait qu'en-dessous de la première diagonale on n'aurait que des points, on vérifie immédiatement sur la figure 16 que la disposition des éléments sur l'axe horizontal (et vertical) est telle que chaque élément est élément minimal (minimum) du sous-ensemble de A qu'il forme avec les éléments disposés à sa droite. En particulier, les éléments a, b, c, f, g, h sont chacun élément minimal du sous-ensemble de A qu'ils forment avec les éléments disposés à leur droite. Par contre, les éléments d, e, i, l, m , sont chacun élément minimum du sous-ensemble qu'ils forment avec les éléments disposés à leur droite. La figure 16 montre aussi que A admet deux éléments minimaux a et d - a serait élément minimum unique de A si sur la verticale passant par a il n'y avait que des croix. a et d sont éléments minimaux de A car en effet sur les horizontales passant par a et d il n'y a que des points, sauf naturellement sur la première diagonale du plan. De même, du fait que sur les verticales passant par g et h il n'y a que des points -sauf sur la première diagonale- g et h sont les éléments maximaux de A .

On peut encore remarquer que, si d'après la disposition des éléments de A sur les deux axes, deux ou plusieurs éléments consécutifs sont éléments minimaux du sous-ensemble de A qu'ils forment avec les éléments disposés à leur droite, la façon de les ranger est arbitraire, pourvu qu'ils restent consécutifs. Il en est ainsi par exemple de b, c et d qui sont les éléments minimaux -donc non comparables - \mathcal{R}_A - du sous-ensemble de A obtenu en enlevant l'élément a . On vérifie immédiatement que si on permute ces trois éléments, en les disposant toutefois après a et avant e, f, \dots on obtient encore une figure analogue à la figure 16. Il en sera de même pour g, h, i . Par contre, f, h, i sont bien les éléments minimaux de $\{f, g, h, i, l, m\}$, mais, n'étant pas consécutifs dans leur disposition sur les deux axes, on ne peut pas les permuer sans changer la forme de la figure 16.

Considérons maintenant la figure 17. On vérifie sans difficulté qu'elle représente une relation symétrique, réflexive et transitive. Il s'agit donc d'une relation d'équivalence définie dans l'ensemble $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$.

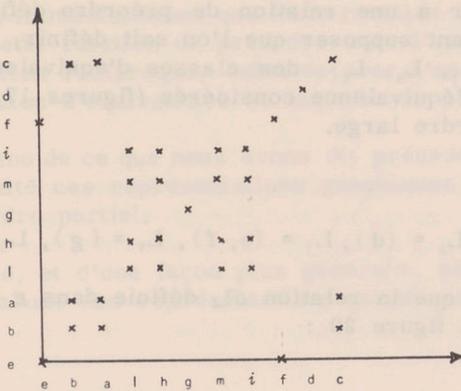


Figure 17

En vue de faire ressortir graphiquement, de façon plus immédiate, la relation d'équivalence représentée par la figure 17, il conviendra de disposer de façon consécutive sur les deux axes les éléments qui sont équivalents. Or, ces éléments, qui forment évidemment les classes d'équivalence définies sur A par la relation d'équivalence considérée, se déduisent immédiatement de la figure 17 en considérant sur l'axe horizontal (vertical) la projection des croix situées sur une même ligne horizontale (verticale). On aura ainsi par exemple les figures 18 et 19. Remarquons que la disposition des éléments d'une même classe d'équivalence est arbitraire, aussi bien que la disposition des classes d'équivalence.

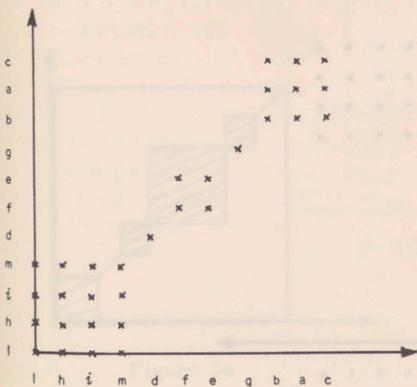


Figure 18

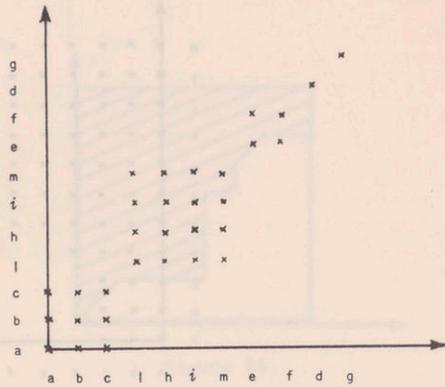


Figure 19

En vue d'aboutir à une relation de préordre définie dans A nous pouvons maintenant supposer que l'on sait définir, dans l'ensemble $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$ des classes d'équivalence défini sur A par la relation d'équivalence considérée (figures 17, 18 et 19), une relation \mathcal{R}_A d'ordre large.

En posant :

$$L_1 = \{a, b, c\}, L_2 = \{d\}, L_3 = \{e, f\}, L_4 = \{g\}, L_5 = \{h, i, l, m\},$$

et en supposant que la relation \mathcal{R}_A définie dans \mathcal{L} puisse être représentée par la figure 20 :

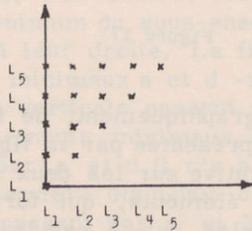


Figure 20

on aura alors dans A la relation de préordre total représentée par la figure 21 :

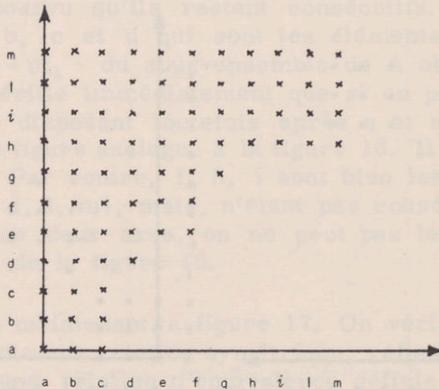


Figure 21

On vérifie immédiatement que l'intersection de l'ensemble représentatif de cette relation de préordre avec l'ensemble représentatif de la relation réciproque, coïncide avec l'ensemble représentatif de la relation d'équivalence de laquelle on est parti.

Compte tenu de ce que nous avons dit précédemment, on étendra sans difficulté ces représentations graphiques au cas d'une relation de préordre partiel.

En résumé, et d'une façon plus générale, nous pourrions donc nous ramener à une des représentations graphiques suivantes :

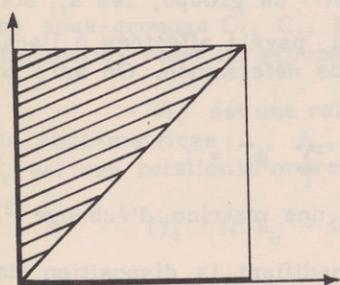


Figure 22

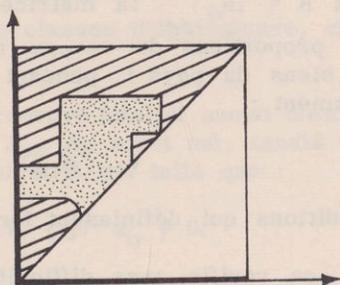


Figure 23

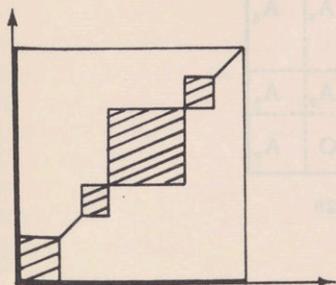


Figure 24

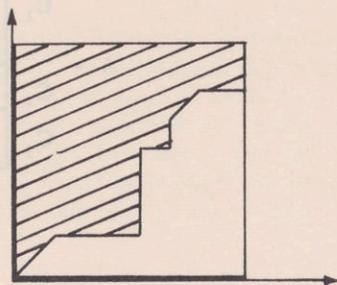


Figure 25

La figure 22 représentant une relation d'ordre large total (définie dans A), la figure 23 une relation d'ordre large partiel (couples d'éléments non comparables - \mathcal{R}_A = région en pointillé), la figure 24 une relation d'équivalence et la figure 25 une relation de préordre total.

2) A titre d'exemple signalons ici que la structure des "matrices d'échange" se prête en général à des représentations graphiques semblables à celles que nous venons d'envisager.

En effet, soit n pays - c_1, c_2, \dots, c_n - en relation d'échange et formant un groupe fermé, c'est-à-dire tel qu'il n'y ait pas d'échange entre les pays du groupe et des pays extérieurs.

Soit $A = [a_{ij}]_{n,n}$ la matrice d'échange⁽¹⁾ du groupe, les a_{ij} étant les proportions du revenu national du pays j affectées à l'achat de biens du pays i , pendant une période déterminée. On aura notamment :

$$\forall_{ij} \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i a_{ij} = 1$$

conditions qui définissent formellement une matrice d'échange (2).

Or, on vérifie sans difficulté qu'en modifiant la disposition des lignes et des colonnes de la matrice A , celle-ci se présentera en général comme l'indique la figure 26.

	C_1	C_2	C_3
C_1	A_1	A_4	A_6
C_2	O	A_2	A_5
C_3	O	O	A_3

Figure 26

(1) Cf. Chapitre II, § 2, point 8, la définition de la "matrice des coefficients techniques".

(2) Cf. D. Gale, *The Theory of Linear Economic Models*, op. cit.

Considérons maintenant dans l'ensemble C formé de ces n pays la relation \mathcal{R}_c définie sous forme grammaticale par la phrase : "le pays... achète au pays...".

On aura alors :

- \mathcal{R}_c est une relation réflexive si aucun élément diagonal de A n'est nul [$\forall_i : a_{ii} \neq 0$], c'est-à-dire si tous les pays de C affectent une partie de leur revenu à l'achat de biens nationaux.

- \mathcal{R}_c est une relation d'équivalence si tous les éléments des sous-matrices A_4, A_5, A_6 sont nuls et aucun élément des sous-matrices A_1, A_2, A_3 ne l'est.

Les sous-groupes C_1, C_2, C_3 sont des classes d'équivalence, chacune d'elles étant un groupe fermé.

- \mathcal{R}_c est une relation de préordre total si aucun élément des sous-matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ n'est nul, tandis que \mathcal{R}_c est une relation d'ordre large total si A est telle que :

$$(\forall_i > j): a_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad (\forall_i \leq j): a_{ij} \neq 0.$$

On considère maintenant les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 . On suppose que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre m . On suppose également que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies.

On suppose que les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies. On suppose également que les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies.

On suppose que les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies. On suppose également que les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies.

On suppose que les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies. On suppose également que les matrices A_1, A_2, A_3 et les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices carrées d'ordre n et que les matrices A_1, A_2, A_3 sont des matrices symétriques et que les matrices C_1, C_2, C_3 sont des matrices positives définies.



Figure 10

(1) Cf. Cournot, *Leçons d'économie politique*, t. 1, p. 100.

(2) Cf. B. Gale, *The Theory of Linear Economic Models*, op. cit.

CHAPITRE V

STRUCTURES PLUS FORTES DE L'UNIVERS DES APPRÉCIATIONS

§ 1 - INTRODUCTION. COUPLES D'ACTIONS POSSIBLES -

1) Au chapitre précédent nous avons envisagé la structure plus faible qu'il faut accorder à l'univers des appréciations pour que le centre de décision puisse en tirer le choix d'une action x parmi un ensemble \mathcal{X} d'actions. Nous avons vu, en particulier, qu'ayant associé aux actions de \mathcal{X} les degrés d'adéquation a , éléments d'un ensemble A qui appartient à l'univers des appréciations α propre au centre de décision considéré, il suffisait, pour aboutir à une décision, que A soit muni d'une structure de préordre.

En vue d'arriver à des représentations numériques de A il est indispensable d'attribuer à l'univers des appréciations des structures logiques plus fortes que la structure de préordre. Celle-ci peut en effet être considérée comme la structure logique la plus faible devant être reconnue au sous-ensemble A de l'univers des appréciations, pour qu'il puisse y avoir décision raisonnée. Nous supposons donc toujours A muni d'une structure de préordre.

2) En vue de définir des structures plus fortes, nous envisagerons dans ce chapitre les couples d'actions de la classe \mathcal{X} , c'est-à-dire les éléments de l'ensemble produit $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. La décision que nous avons en vue d'atteindre restera le choix d'une seule action et non le choix d'un couple d'actions. On peut en effet ramener ce dernier choix à celui d'une seule action (en considérant le couple comme une seule action) et on est alors remené au cas traité au chapitre précédent.

Ceci dit, rien ne nous empêche de considérer des couples d'actions dans une étape intermédiaire qui nous conduira à l'une ou à l'autre de deux structures plus fortes que le préordre. De celles-ci nous tirerons des indicateurs numériques permettant de représenter d'une manière plus précise l'ensemble des degrés d'adéqua-

tion, notamment par des modèles, et ces indicateurs faciliteront la recherche de l'action optimum ou optimale.

En résumé, nous supposons donc :

i) que le centre de décision sait comparer les éléments de \mathfrak{X} , c'est-à-dire qu'il sait leur associer les éléments d'un ensemble A muni au moins d'une structure de préordre ;

ii) de plus, en vue d'explicitier dans l'univers des appréciations \mathfrak{X} des structures plus fortes, nous envisagerons différentes façons de comparer les couples d'actions du même ensemble \mathfrak{X} .

§ 2 - LOIS DE COMPOSITION⁽¹⁾, DISTANCE⁽²⁾ -

1) On appelle *loi de composition interne*, *opération abstraite* ou simplement *opération*, définie dans un ensemble E non vide, toute loi associant à certains couples ordonnés (a, b) d'éléments de E -termes de l'opération- un élément bien déterminé de E -résultat de l'opération. Il s'agit donc d'une fonction définie dans $E \times E$ et qui prend ses valeurs dans E . Si la loi est telle qu'à tout élément de $E \times E$ on peut associer un élément de E on dira qu'elle est *partout définie*.

Un ensemble dans lequel est définie une loi de composition prend le nom de *système* ou de *groupoïde*.

Soit \mathbf{T} une opération définie dans E . On écrira alors :

$$c = a \mathbf{T} b$$

a et b étant les termes de l'opération, c le résultat. Une opération \mathbf{T} est dite :

commutative, si

$$\left(\begin{array}{l} \forall a, b \\ \in E \end{array} \right) : a \mathbf{T} b = b \mathbf{T} a ;$$

(1) Cf. P. Dubreil, *Algèbre*, op. cit.

(2) Cf. C. Berge, *Espaces topologiques*, op. cit.

associative, si $(\forall a, b, c) \in E$ avec $a \mathbf{T} b = d$ et $b \mathbf{T} c = e$
 on a :

$$d \mathbf{T} c = a \mathbf{T} e,$$

ce que l'on écrit plus simplement :

$$(\forall a, b, c,) \in E : (a \mathbf{T} b) \mathbf{T} c = a \mathbf{T} (b \mathbf{T} c).$$

Une opération \mathbf{T} possède un élément neutre o si :

$$(\exists o \in E) : (\forall a \in E) : o \mathbf{T} a = a \mathbf{T} o = a ;$$

et on vérifie immédiatement que si o existe, il est unique.

On dira que $a \in E$ possède un élément inverse - réciproque ou opposé - a' , dans l'opération \mathbf{T} , si

$$a' \mathbf{T} a = a \mathbf{T} a' = o.$$

Si :

$$a \mathbf{T} c = a \mathbf{T} b \implies c = b,$$

a sera dit régulier, simplifiable ou cancellable à gauche ; si :

$$c \mathbf{T} a = b \mathbf{T} a \implies c = b,$$

a sera dit régulier, simplifiable ou cancellable à droite ; et on dira simplement que a est régulier, simplifiable ou cancellable s'il l'est à gauche et à droite.

On dira qu'une loi de composition \mathbf{T} définie dans E est stable par rapport à une relation \mathcal{R} définie dans E si :

$$\left. \begin{array}{l} a \mathcal{R} b \\ a \mathcal{R} b' \end{array} \right\} \implies (a \mathbf{T} a') \mathcal{R} (b \mathbf{T} b').$$

2) Etant donné un ensemble E , on appellera distance ou métrique une fonction numérique $d(a, b)$ définie sur $E \times E$, telle que :

- 1) $d(a, b) \geq 0$
- 2) $d(a, b) = 0 \iff a = b$
- 3) $d(a, b) = d(b, a)$
- 4) $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$.

Une distance sur E est définie par une application (univoque), de $E \times E$ dans R_+ , satisfaisant les axiomes ci-dessus.

§ 3 - QUASI-DISTANCE D'APPRECIATION -

1) Dans ce qui suit, nous supposerons que l'ensemble A des degrés d'adéquation associés aux actions de \mathcal{X} , est muni au moins d'une structure de préordre. Et, comme nous l'avons vu, on pourra supposer, sans perte de généralité, qu'il s'agit d'un préordre total.

Considérons maintenant un sous-ensemble \mathcal{O} de l'univers des appréciations \mathcal{A} . Nous supposerons que l'on sait définir dans \mathcal{O} une loi de composition interne \mathbf{T} , commutative, associative et admettant un élément neutre d_0 . De plus, on supposera qu'il existe dans \mathcal{O} une relation $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ d'ordre large total admettant d_0 comme élément minimum, relation par rapport à laquelle la loi de composition \mathbf{T} est supposée stable.

On aura alors en particulier :

$$\left(\begin{array}{l} \forall d_1, d_2 \\ \in \mathcal{O} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} (d_1 \mathbf{T} d_2) \\ d_1 \mathcal{R}_\mathcal{O} (d_1 \mathbf{T} d_2) \\ d_2 \mathcal{R}_\mathcal{O} (d_1 \mathbf{T} d_2) \end{array} \right\}$$

car d_0 étant élément minimum - $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ de \mathcal{O} , on a :

$$\left(\begin{array}{l} \forall d \\ \in \mathcal{O} \end{array} \right) : \left. \begin{array}{l} d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} d \\ d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} d_1 \\ d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} d_2 \end{array} \right\} \implies d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} (d_1 \mathbf{T} d_2),$$

l'opération \mathbf{T} étant stable par rapport à $\mathcal{R}_\mathcal{O}$; de même $\mathcal{R}_\mathcal{O}$ étant réflexive :

$$\left. \begin{array}{l} d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} d_2 \\ d_1 \mathcal{R}_\mathcal{O} d_1 \end{array} \right\} \implies d_1 \mathcal{R}_\mathcal{O} (d_1 \mathbf{T} d_2) \text{ et } \left. \begin{array}{l} d_0 \mathcal{R}_\mathcal{O} d_1 \\ d_2 \mathcal{R}_\mathcal{O} d_2 \end{array} \right\} \implies d_2 \mathcal{R}_\mathcal{O} (d_1 \mathbf{T} d_2).$$

2) Considérons maintenant une application univoque δ de $A \times A$ dans \mathcal{O} , et soit $\delta(A \times A) = \Delta \subseteq \mathcal{O}$. L'application δ est évidemment telle que :

$$i) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2 \\ \in A \end{matrix} \right) : d_0 \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \delta(a_1, a_2).$$

Supposons de plus que :

$$ii) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2 \\ \in A \end{matrix} \right) : \left. \begin{matrix} \delta(a_1, a_2) \mathcal{R}_{\mathcal{O}} d_0 \\ d_0 \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \delta(a_1, a_2) \end{matrix} \right\} \iff \left\{ \begin{matrix} a_1 \mathcal{R}_A a_2 \\ a_2 \mathcal{R}_A a_1 \end{matrix} \right.$$

$$iii) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2 \\ \in A \end{matrix} \right) : \delta(a_1, a_2) \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \delta(a_2, a_1) \text{ et } \delta(a_2, a_1) \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \delta(a_1, a_2)$$

$$iv) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ \in A \end{matrix} \right) : \delta(a_1, a_3) \mathcal{R}_{\mathcal{O}} [\delta(a_1, a_2) \mathbf{T} \delta(a_2, a_3)].$$

Compte tenu du fait que la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ définie dans \mathcal{O} est une relation d'ordre large, et que la relation \mathcal{R}_A définie dans A est une relation de préordre, et en désignant par $E_{\mathcal{O}}$ la relation d'égalité contenue dans $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ et par \mathcal{E}_A la relation d'équivalence contenue dans \mathcal{R}_A , on pourra écrire ces conditions plus simplement :

$$i) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2 \\ \in A \end{matrix} \right) : d_0 \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \delta(a_1, a_2)$$

$$ii) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2 \\ \in A \end{matrix} \right) : \delta(a_1, a_2) E_{\mathcal{O}} d_0 \iff a_1 \mathcal{E}_A a_2$$

$$iii) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2 \\ \in A \end{matrix} \right) : \delta(a_1, a_2) E_{\mathcal{O}} \delta(a_2, a_1)$$

$$iv) \quad \left(\forall \begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ \in A \end{matrix} \right) : \delta(a_1, a_3) \mathcal{R}_{\mathcal{O}} [\delta(a_1, a_2) \mathbf{T} \delta(a_2, a_3)].$$

avec, rappelons-le $E_{\mathcal{O}} = \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \wedge \mathcal{R}_{\mathcal{O}}^{-1}$ et $\mathcal{E}_A = \mathcal{R}_A \wedge \mathcal{R}_A^{-1}$.

Les relations $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ et \mathcal{R}_A ne sont pas en général indépendantes. Pour des raisons qui se transposent immédiatement en termes concrets, on aura :

$$a_1 \mathcal{R}_A a_2 \text{ et } a_2 \mathcal{R}_A a_3 \implies [\delta(a_1, a_2) \mathbf{T} \delta(a_2, a_3)] \mathcal{R}_{\mathcal{O}} \delta(a_1, a_3),$$

d'où, compte tenu de la condition iv) ci-dessus,

$$a_1 \mathcal{R}_A a_2 \text{ et } a_2 \mathcal{R}_A a_3 \implies \delta(a_1, a_3) \in_{\infty} [\delta(a_1, a_2) \mathbf{T} \delta(a_2, a_3)],$$

condition qui évoque la notion intuitive d'"alignement".

3) Par analogie avec la définition d'une distance, nous dirons que l'application univoque δ de $A \times A$ dans \mathcal{O} définit une *quasi-distance d'appréciation* sur A . Concrètement, l'application δ associe aux couples d'appréciations de A , c'est-à-dire en définitive aux couples d'actions de \mathfrak{X} , des appréciations relevant d'un sous-ensemble Δ de l'ensemble $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$, que nous avons muni d'une structure plus forte que celle attribuée à A , en vue de pouvoir définir, pour l'application δ , des propriétés analogues à celles qui interviennent dans la définition d'une distance.

Ici encore, comme dans le cas de la transformation d'appréciation φ qui nous a permis d'associer aux actions $x \in \mathfrak{X}$ des appréciations $a \in A$, éléments d'un sous-ensemble de l'univers des appréciations, on peut considérer que l'application δ associe aux couples d'appréciations de A une appréciation et une seule, d'une classe d'appréciations déterminée \mathcal{O} . Les éléments de \mathcal{O} ordonné $-\mathcal{R}$, sont évidemment des appréciations, relevant de l'univers des appréciations \mathcal{A} . Il s'agira donc en général, comme nous l'avons vu, d'être de nature complexe.

D'un point de vue concret, il convient de distinguer deux situations fondamentalement différentes. D'un côté, on peut en effet considérer le cas où les appréciations de $\Delta \subseteq \mathcal{O}$ sont de nature différente de celles de la classe A , ce qui revient à admettre que $A \cap \Delta = \Phi$.

Par contre, dans la mesure où un couple d'actions de \mathfrak{X} au moins peut être apprécié à l'aide d'un élément ayant servi à apprécier individuellement les actions $x \in \mathfrak{X}$, c'est-à-dire dans la mesure où l'application δ fait correspondre à un couple d'éléments de A au moins, un élément du même ensemble A , nous serons amené à envisager le cas où $\Delta \cap A \neq \Phi$.

Si l'application δ est telle que $\Delta \cap A = \Phi$, nous dirons que δ définit sur A une quasi-distance d'appréciation du type i), tandis que si $A \cap \Delta \neq \Phi$ on dira que δ définit sur A une quasi-distance d'appréciation du type ii).

Naturellement, si $A \cap \Delta = B \neq \Phi$, nous supposons que les relations \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_ω , définies dans A et ω , sont telles que :

$$\left(\begin{array}{l} \forall a_1, a_2 \\ \in B \end{array} \right) : a_1 \mathcal{R}_A a_2 \iff a_1 \mathcal{R}_\omega a_2.$$

4) En résumé, dans ce qui précède, nous avons été amené à envisager les trois cas fondamentaux suivants, pouvant caractériser la structure logique d'un centre de décision -dont l'univers des appréciations est α - face à un ensemble d'actions \mathcal{X} .

- | | | |
|------|--|---|
| I) | Le centre de décision sait établir une correspondance d'appréciation $\varphi(\mathcal{X}) = A \subseteq \alpha$, A étant muni d'une structure de préordre par une relation \mathcal{R}_A . Ceci entraîne, en excluant les cas indéterminés, la possibilité d'une décision optimum ou optimale. | |
| II) | Idem | Le centre de décision sait définir sur A une quasi-distance d'appréciation du type i). |
| III) | Idem | Le centre de décision sait définir sur A une quasi-distance d'appréciation du type ii). |

D'un point de vue concret, ce qui distingue ces trois situations -qui toutes peuvent conduire à une décision qui sera au moins optimale- est le caractère plus ou moins élaboré des "comparaisons", portant sur les actions de \mathcal{X} , qu'elles explicitent. En effet, compte tenu toujours de l'objectif envisagé, dans le cas I) le centre de décision sera, au plus, capable d'apprécier si une action x_1 est "préférable" à une action x_2 . Dans le cas II), il pourra aussi apprécier si une action x_1 est préférée à une action x_2 plus qu'une action x_3 à une action x_4 . Et finalement dans le cas III), pour deux actions x et x' au moins, il saura caractériser l'"écart" qui sépare les appréciations qu'il leur associe, par l'appréciation associée à une

troisième action x'' . (1)

5) Pour illustrer les trois situations fondamentales envisagées ci-dessus, considérons le cas d'un ensemble :

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$$

muni d'une structure de préordre total par la relation \mathcal{R}_A , dont l'ensemble représentatif est donné par la figure 21 du § 4 du chapitre précédent.

La classe d'équivalence $\mathbb{L}_5 = \{h, i, l, m\}$ est élément maximum de l'ensemble \mathcal{L} des classes d'équivalence défini sur A par la relation $\mathcal{R}_A \wedge \mathcal{R}_A^{-1}$. Les éléments h, i, l, m , sont donc tous degrés d'adéquation maximums (équivalents) de A , préordonné par \mathcal{R}_A . Dans les cas I), II) et III), en supposant A muni de la structure de préordre définie par \mathcal{R}_A , on aura alors la possibilité de prendre une décision optimum ; décision qui consiste à choisir une action $x \in \mathcal{X}$ à laquelle est associé un de ces degrés d'adéquation maximums.

Etant donné un ensemble \mathcal{O} muni de la structure introduite au point 1 du § 3, on pourra avoir par exemple, pour les cas II) et III) les applications δ et δ' définies par les figures 1 et 2 ci-après ; figures qui montrent la correspondance existant entre les couples d'éléments de A et les éléments de $\Delta \subseteq \mathcal{O}$.

Pour l'application δ (figure 1) on aura alors :

$$\delta(A \times A) = \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8\} = \Delta,$$

et $A \cap \Delta = \Phi$; tandis que l'application δ' (figure 2) est telle par exemple que :

$$\delta'(A \times A) = \{d_0, d_1, d_2, d_3, e, d_5, g, d_7, d_8\} = \Delta',$$

avec

$$A \cap \Delta' = [e, g] \neq \Phi.$$

 (1) D'une façon simple on pourrait illustrer ces trois situations par le cas d'un examinateur devant juger des élèves x d'une classe \mathcal{X} , sans toutefois avoir recours à des notes numériques. Dans le cas I) l'examinateur saurait simplement ordonner les élèves ; dans le cas II) il saurait aussi ordonner les écarts entre élèves, tandis que dans le cas III) pour deux élèves au moins, il saurait caractériser leur écart par un troisième élève.

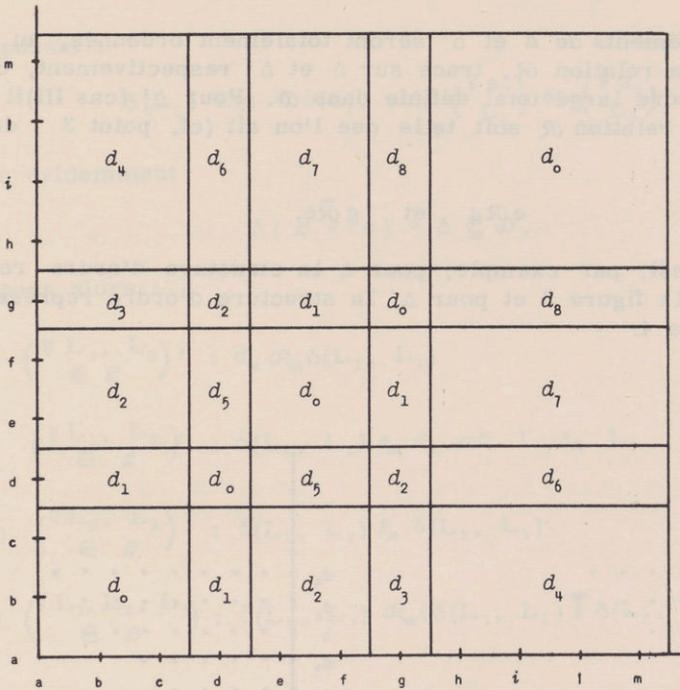


Figure 1

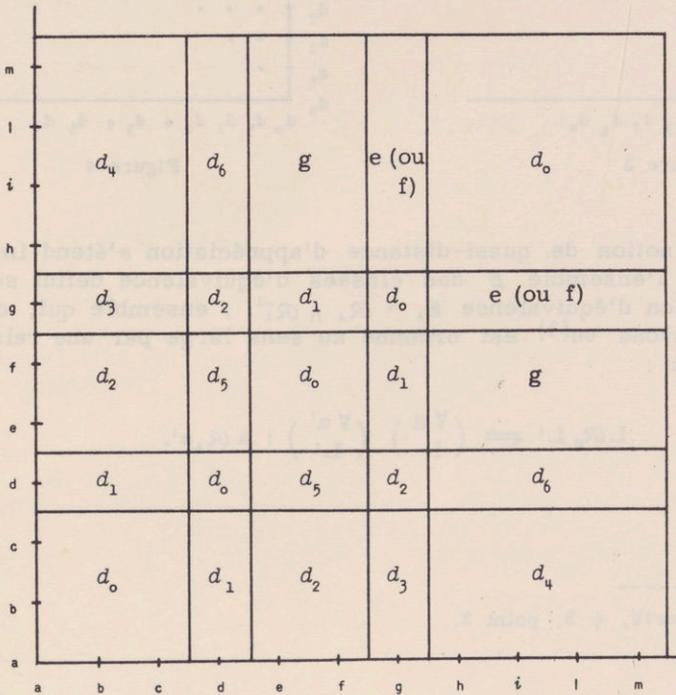


Figure 2

Les éléments de Δ et Δ' seront totalement ordonnés, au sens large, par la relation \mathcal{R} , trace sur Δ et Δ' respectivement, de la relation d'ordre large total définie dans \mathcal{O} . Pour Δ' (cas III) il faudra que la relation \mathcal{R} soit telle que l'on ait (cf. point 3 de ce paragraphe) :

$$e \mathcal{R} g \quad \text{et} \quad g \tilde{\mathcal{R}} e.$$

On aura ainsi, par exemple, pour Δ la structure d'ordre représentée par la figure 3 et pour Δ' la structure d'ordre représentée par la figure 4.

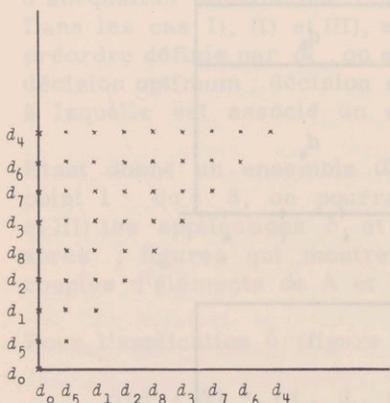


Figure 3

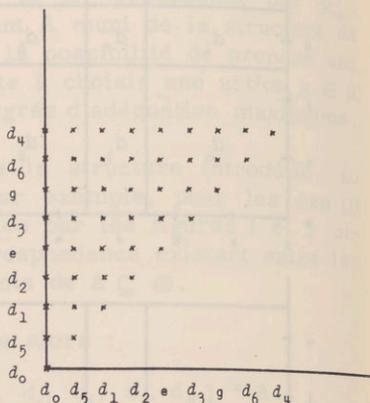


Figure 4

6) La notion de quasi-distance d'appréciation s'étend immédiatement à l'ensemble \mathcal{L} des classes d'équivalence défini sur A par la relation d'équivalence $\mathcal{E}_A = \mathcal{R}_A \wedge \mathcal{R}_A^{-1}$; ensemble qui, comme nous l'avons vu⁽¹⁾ est ordonné au sens large par une relation $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ telle que :

$$L \mathcal{R}_{\mathcal{L}} L' \iff \left(\begin{matrix} \forall a \\ L \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \forall a' \\ L' \end{matrix} \right) : a \mathcal{R}_A a'.$$

(1) Cf. Chapitre IV, § 3, point 3.

En posant :

$$\delta(L_1, L_2) = \delta(a_1, a_2), \left(\forall_{L_1} a_1 \right) \text{ et } \left(\forall_{L_2} a_2 \right),$$

avec évidemment

$$\delta(L \times L) = \Delta \subseteq \Omega,$$

on aura alors :

i') $\left(\forall_{L} L_1, L_2 \right) : d_o \mathcal{R}_n \delta(L_1, L_2)$

ii') $\left(\forall_{L} L_1, L_2 \right) : \delta(L_1, L_2) E_n d_o \iff L_1 E_L L_2$

iii') $\left(\forall_{L} L_1, L_2 \right) : \delta(L_1, L_2) E_n \delta(L_2, L_1)$

iv') $\left(\forall_{L} L_1, L_2, L_3 \right) : \delta(L_1, L_3) \mathcal{R}_n [\delta(L_1, L_2) \mathbf{T} \delta(L_2, L_3)] .$

§ 1 - HOMOMORPHISME

1) Soit les ensembles A et B et les relations binaires R₁ et R₂ définies respectivement dans A et B, et vérifiant les mêmes axiomes. Il existe une application biunivoque f de A sur B, et si les relations R₁ et R₂ sont telles que

$$\left(\forall_{A} x, x' \right) : x R_1 x' \iff f(x) R_2 f(x')$$

$$\left(\forall_{B} y, y' \right) : y R_2 y' \iff f^{-1}(y) R_1 f^{-1}(y')$$

Les éléments de L et L' seront notés respectivement l_1, l_2, \dots, l_n et l'_1, l'_2, \dots, l'_n . On aura ainsi, par exemple, pour la structure S représentée par la figure 1 et pour la structure S' représentée par la figure 2 :

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_4 & l_5 & l_6 \\ l_7 & l_8 & l_9 \end{pmatrix} \quad (1)$$

On aura aussi, par exemple, pour la structure S représentée par la figure 3 et pour la structure S' représentée par la figure 4 :

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_4 & l_5 & l_6 \\ l_7 & l_8 & l_9 \end{pmatrix} \quad (2)$$

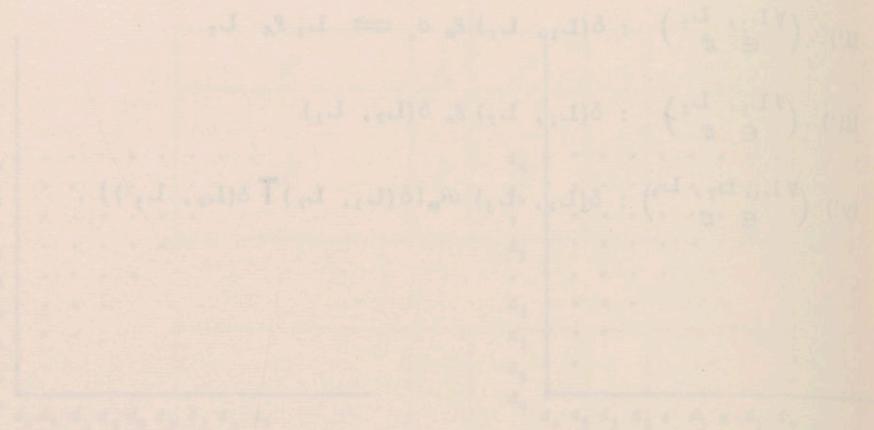


Figure 1

Figure 2

Si la relation de dominance est notée \succ , on aura, par exemple, pour la structure S représentée par la figure 1, la relation \succ telle que :

$$L \succ L' = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_4 & l_5 & l_6 \\ l_7 & l_8 & l_9 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(1) Cf. GILBERT, 1963, page 1.

CHAPITRE VI

INDICATEURS NUMÉRIQUES D'APPRÉCIATION ET INDICATEURS NUMÉRIQUES D'UTILITÉ

Jusqu'ici, nous n'avons pas eu besoin d'explicitier la nature particulière des éléments de l'univers des appréciations d'un centre de décision déterminé, éléments qui, comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, ont en général une nature prénumérique. Dans ce qui précède, nous avons introduit trois structures de l'univers des appréciations, structures qui peuvent être interprétées simplement en termes concrets, et qui ont à notre sens l'avantage de recouvrir des situations réelles fréquentes. Nous nous proposons maintenant de montrer comment ces structures peuvent être transposées dans des ensembles numériques, dont le rôle sera de rendre possible une représentation numérique simple - à l'aide d'un nombre de degrés d'adéquation qui forment l'ensemble A . Il s'agira donc de représenter par un nombre chaque degré d'adéquation de A , en respectant les conditions qui définissent la structure de cet ensemble.

§ 1 - ISOMORPHISME -

1) Soit les ensembles A et B et les relations binaires \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B définies respectivement dans A et B , et vérifiant les mêmes axiomes. S'il existe une application biunivoque f de A sur B , et si les relations \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B sont telles que :

$$\left(\begin{array}{l} \forall a, a' \\ \in A \end{array} \right) : a \mathcal{R}_A a' \implies f(a) \mathcal{R}_B f(a')$$

et

$$\left(\begin{array}{l} \forall b, b' \\ \in B \end{array} \right) : b \mathcal{R}_B b' \implies f^{-1}(b) \mathcal{R}_A f^{-1}(b'),$$

on dira que les ensembles A et B sont *isomorphes* ou *semblables* par rapport aux relations \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B (1), et on notera :

$$(A, \mathcal{R}_A) \simeq (B, \mathcal{R}_B).$$

On dira aussi que f établit un isomorphisme de (A, \mathcal{R}_A) sur (B, \mathcal{R}_B) , que f est un isomorphisme ou une "application préservante" de (A, \mathcal{R}_A) sur (B, \mathcal{R}_B) , ou encore que (A, \mathcal{R}_A) et (B, \mathcal{R}_B) sont semblables par f , ce que l'on notera :

$$(A, \mathcal{R}_A) \stackrel{f}{\simeq} (B, \mathcal{R}_B).$$

Considérons les ensembles cartésiens de A et B , c'est-à-dire les ensembles $S = A \times A$ et $T = B \times B$. L'application φ de S sur T définie par :

$$(b, b') = \varphi[(a, a')] = (f(a), f(a')),$$

est évidemment biunivoque.

La condition :

$$\left(\begin{array}{c} \forall a, a' \\ \in A \end{array} \right) : a \mathcal{R}_A a' \implies b \mathcal{R}_B b'$$

peut s'écrire :

$$\left(\begin{array}{c} \forall a, a' \\ \in A \end{array} \right) : (a, a') \in S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}} \implies (b, b') \in T_{\mathcal{R}_B} \cup T_{\mathcal{R}_B^{-1}},$$

c'est-à-dire :

$$\varphi(S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}}) \subseteq T_{\mathcal{R}_B} \cup T_{\mathcal{R}_B^{-1}}.$$

De même la condition :

$$\left(\begin{array}{c} \forall b, b' \\ \in B \end{array} \right) : b \mathcal{R}_B b' \implies a \mathcal{R}_A a'$$

 (1) Rappelons que deux ensembles A et B sont dits isomorphes par rapport à deux lois de composition \mathbf{T} et \mathbf{I} définies dans A et B respectivement, et vérifiant les mêmes propriétés, s'il existe une application biunivoque f de A sur B telle que :

$$a \mathbf{T} a' = a'' \iff f(a) \mathbf{I} f(a') = f(a'')$$

équivalent à :

$$\varphi^{-1}(T_{\mathcal{R}_B} \cup T_{\mathcal{R}_B^{-1}}) \subseteq S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}}.$$

L'application φ étant biunivoque, on aura :

$$\varphi(S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}}) = T_{\mathcal{R}_B} \cup T_{\mathcal{R}_B^{-1}},$$

et
$$\varphi^{-1}(T_{\mathcal{R}_B} \cup T_{\mathcal{R}_B^{-1}}) = S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}}.$$

Si tous les éléments de A sont comparables - \mathcal{R}_A , c'est-à-dire si

$$S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}} = S,$$

on aura aussi :

$$\varphi(S_{\mathcal{R}_A} \cup S_{\mathcal{R}_A^{-1}}) = \varphi(S) = T_{\mathcal{R}_B} \cup T_{\mathcal{R}_B^{-1}} = T.$$

2) Soit les ensembles A, B, C, et les relations binaires \mathcal{R}_A , \mathcal{R}_B , \mathcal{R}_C , définies dans ces ensembles. Soit f un isomorphisme de A sur B par rapport aux relations \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B , et g un isomorphisme de B sur C par rapport aux relations \mathcal{R}_B et \mathcal{R}_C .

La fonction h = g(f) est une application biunivoque de A sur C qui établit donc l'isomorphisme de A et C par rapport aux relations binaires \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_C .

Nous aurons donc :

$$(A, \mathcal{R}_A) \stackrel{f}{\simeq} (B, \mathcal{R}_B) \text{ et } (B, \mathcal{R}_B) \stackrel{g}{\simeq} (C, \mathcal{R}_C) \implies (A, \mathcal{R}_A) \stackrel{g(f)}{\simeq} (C, \mathcal{R}_C).$$

On aura aussi $(A, \mathcal{R}_A) \stackrel{i}{\simeq} (A, \mathcal{R}_A)$, i étant l'application identique de A sur A, et

$$(A, \mathcal{R}_A) \stackrel{f}{\simeq} (B, \mathcal{R}_B) \implies (B, \mathcal{R}_B) \stackrel{f^{-1}}{\simeq} (A, \mathcal{R}_A).$$

La relation \simeq (semblable, isomorphe) définie dans une classe d'ensembles est donc transitive, réflexive et symétrique ; c'est une relation d'équivalence.

3) Ce que nous venons de dire s'applique évidemment aux relations d'ordre. Soulignons encore que les relations par rapport auxquelles on établit l'isomorphisme de deux ensembles doivent vé-

rifier les mêmes axiomes. S'agissant de relations d'ordre, l'isomorphisme de deux ensembles établit donc l'égalité de leurs structures d'ordre, ce qui permet de définir les ensembles ordonnés à un isomorphisme près. A partir de maintenant nous n'envisagerons que des ensembles isomorphes par rapport à des relations d'ordre.

4) Pratiquement, le problème de la mise en évidence d'un isomorphisme se posera en général de la façon suivante : étant donné les ensembles A et B ordonnés respectivement par \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B , existe-t-il un isomorphisme de A sur B ? Ce problème, s'il peut avoir plusieurs solutions, voire une infinité, n'en a pas nécessairement toujours. Ainsi, par exemple, soit $A = \mathbb{R}^m$, $B = \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n étant les espaces euclidiens à m et à n dimensions. Considérons les deux relations d'ordre alphabétique (ou lexicographique) \mathcal{R}_A et \mathcal{R}_B définies dans A et B respectivement.

Ces deux relations sont telles que pour $a = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in A$ et $b = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in B$ on aura :

$$a \mathcal{R}_A a' \iff \begin{matrix} x_i = x'_i \\ x_k < x'_k \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} \forall i \\ (= 1, 2, \dots, k-1) \end{matrix} \right)$$

$$b \mathcal{R}_B b' \iff \begin{matrix} y_j = y'_j \\ y_h < y'_h \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} \forall j \\ (= 1, 2, \dots, h-1) \end{matrix} \right).$$

On démontre alors que si $m \neq n$ il n'existe pas d'isomorphisme entre (A, \mathcal{R}_A) et (B, \mathcal{R}_B) (1).

§ 2 - INDICATEURS NUMERIQUES D'APPRECIATION -

Nous avons distingué au chapitre V trois situations, en résumé :

- I) il n'existe pas de quasi-distance d'appréciation
- II) il existe une quasi-distance d'appréciation du type i)
- III) il existe une quasi-distance d'appréciation du type ii).

(1) Cf. A. Denjoy, *L'énumération transfinitie*, livre I, *La notion de rang*, Paris, Gauthier-Villars, 1946, p. 13.

Pour le cas particulier où $m = 1$ et $n = 2$ voir aussi

C. Berge, *Espaces topologiques*, op. cit. p. 40.

G. Debreu, *Theory of Value*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959, p. 72.

Nous allons dans chacun de ces cas définir des indicateurs numériques d'appréciation.

1) *Indicateurs numériques du type I.* Le rôle essentiel d'un indicateur numérique d'appréciation est de représenter numériquement les éléments de A en conservant la structure d'ordre de cet ensemble. Or, si comme nous l'avons supposé, A est muni par une relation \mathcal{R}_A d'une structure de préordre total, il s'agira de faire correspondre aux éléments d'une même classe d'équivalence un élément numérique unique. Ce qui nous ramène alors à représenter numériquement l'ensemble \mathcal{L} des classes d'équivalence défini sur A par la relation $\mathcal{R}_A \wedge \mathcal{R}_A^{-1}$, ensemble qui, comme nous l'avons vu, sera ordonné au sens large par la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$.

Soit \mathcal{U}_I la classe des indicateurs numériques d'appréciation pour A. On aura alors :

$$u \in \mathcal{U}_I \iff (\mathcal{L}, \mathcal{R}_{\mathcal{L}}) \stackrel{u}{\simeq} (R_u, \leq),$$

avec

$$u(\mathcal{L}) = R_u \subseteq R.$$

Nous avons vu ci-dessus que la classe \mathcal{U}_I peut être vide ; d'un point de vue concret toutefois, on pourra en général admettre que la structure de A est telle qu'il existe pour A des indicateurs numériques d'appréciation⁽¹⁾.

Il convient de souligner que :

$$u_1, u_2 \in \mathcal{U}_I \implies (R_{u_1}, \leq) \stackrel{g}{\simeq} (R_{u_2}, \leq),$$

avec

$$g = u_2(u_1^{-1}).$$

(1) Pour des ensembles A munis de structures sensiblement plus fortes que celles que nous envisageons ici, on trouvera dans les publications suivantes l'étude des conditions d'existence d'une classe \mathcal{U}_I non vide :
 G. Debreu, "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", dans *Decision Processes*, op. cit., pp. 159-165.
 G. Debreu, *Theory of Value*, op. cit.
 J. S. Chipman, "The Foundations of Utility", dans *Econometrica*, 28 (1960), pp. 193-224.

En effet :

$$u_1, u_2 \in \mathcal{U}_I \implies (\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{R}}) \stackrel{u_1}{\sim} (R_{u_1}, \leq) \text{ et } (\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{R}}) \stackrel{u_2}{\sim} (R_{u_2}, \leq);$$

or,

$$(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{R}}) \stackrel{u_1}{\sim} (R_{u_1}, \leq) \implies (R_{u_1}, \leq) \stackrel{u_2^{-1}}{\sim} (\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{R}}),$$

d'où par transitivité de la relation \sim :

$$(R_{u_1}, \leq) \stackrel{u_2(u_1^{-1})}{\sim} (R_{u_2}, \leq).$$

De même,

$$\left(\begin{matrix} \exists u_1 \\ \mathcal{U}_I \end{matrix} \right) : (R_{u_1}, \leq) \stackrel{f}{\sim} (R_u, \leq) \implies f(u_1) = u \in \mathcal{U}_I.$$

En effet,

$$u_1 \in \mathcal{U}_I \implies (\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{R}}) \stackrel{u_1}{\sim} (R_{u_1}, \leq),$$

d'où par transitivité :

$$(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{R}}) \stackrel{f(u_1)}{\sim} (R_u, \leq) \implies f(u_1) = u \in \mathcal{U}_I.$$

2) *Indicateurs numériques du type II.* Dans le cas II) envisagé au chapitre précédent, nous avons supposé que le centre de décision sait définir sur A - muni d'une structure de préordre - une quasi-distance d'appréciation du type i), et nous avons montré que nous pouvions considérer cette quasi-distance comme étant définie sur l'ensemble \mathcal{R} des classes d'équivalence⁽¹⁾.

Ici, à la notion de quasi-distance nous ferons correspondre dans R la notion habituelle de distance euclidienne :

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Soit \mathcal{U}_{II} la classe des indicateurs numériques d'appréciation du type II. Dans le cas II), A étant muni par \mathcal{R}_A d'une structure de préordre, il faudra évidemment que :

$$u \in \mathcal{U}_{II} \implies u \in \mathcal{U}_I,$$

(1) Cf. Chapitre V, § 3, point 6.

c'est-à-dire que :

$$\mathcal{U}_{II} \subseteq \mathcal{U}_I.$$

Soit l'indicateur numérique du type I, $u \in \mathcal{U}_I$. On aura alors :

$$(\mathcal{L}, \mathcal{R}_{\mathcal{L}}) \stackrel{u}{\sim} (R_u, \leq).$$

A l'application $\delta(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) = \Delta \subseteq \mathcal{O}$ correspondra alors l'application :

$$d(R_u \times R_u) = R_u^d \subseteq R_+,$$

avec

$$d(u(L_1), u(L_2)) = |u(L_1) - u(L_2)|.$$

Or, pour un indicateur u déterminé, les applications δ et d définissent entre Δ et R_u^d une correspondance :

$$\Delta \xrightarrow{\Gamma_u} R_u^d$$

telle que :

$$\Gamma_u(\delta^*) = \{d(u(L_1), u(L_2))\} \quad (L_1, L_2) \in \delta^{-1}(\delta^*);$$

correspondance qui, bien entendu, pourra être multivoque, univoque ou biunivoque. Nous dirons alors que u est un indicateur numérique du type II si et seulement si :

$$(\Delta, \mathcal{R}_{\Delta}) \stackrel{\Gamma_u}{\sim} (R_u^d, \leq).$$

En résumé, étant donné (A, \mathcal{R}_A) et la quasi-distance d d'appréciation δ -application de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ sur $(\Delta, \mathcal{R}_{\Delta})$, la classe \mathcal{U}_{II} des indicateurs d'appréciation du type II sera telle que :

$$u \in \mathcal{U}_{II} \iff \begin{cases} u \in \mathcal{U}_I & \text{et} \\ (\Delta, \mathcal{R}_{\Delta}) \stackrel{\Gamma_u}{\sim} (R_u^d, \leq). \end{cases}$$

Etant donné $u_0 \in \mathcal{U}_{II}$, on vérifie immédiatement que pour $\alpha > 0$:

$$u = \alpha u_0 + \beta = g(u_0) \in \mathcal{U}_{II}.$$

En effet, pour α quelconque, on a :

$$d(u(L_1), u(L_2)) = |\alpha| d(u_o(L_1), u_o(L_2)),$$

d'où :

$$(R_{u_o}^d, \leq) \simeq (R_u^d, \leq),$$

ce qui entraîne :

$$(\Delta, \mathcal{R}_\emptyset) \stackrel{\Gamma_u}{\simeq} (R_u^d, \leq),$$

avec :

$$\Gamma_u = |\alpha| \Gamma_{u_o}.$$

Or, pour que $u \in \mathcal{U}_I$ il faudra encore que $\alpha > 0$.

3) *Indicateurs numériques du type III.* Dans le cas III) envisagé au chapitre précédent, nous avons supposé aussi que $A \cap \Delta \neq \Phi$, ou encore que $\mathcal{L} \cap \Delta \neq \Phi$; cela nous conduit à définir la classe \mathcal{U}_{III} des indicateurs numériques du type III, telle que :

$$u \in \mathcal{U}_{III} \iff \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{U}_{II} \subseteq \mathcal{U}_I \\ (\forall L_1, L_2, L_3) : \delta(L_1, L_2) = L_3 \implies d(u(L_1), u(L_2)) = u(L_3). \end{array} \right.$$

Etant donné $u_o \in \mathcal{U}_{III}$ on vérifie sans difficulté que pour $\alpha > 0$:

$$u = \alpha u_o = g(u_o) \in \mathcal{U}_{III}.$$

En effet, d'après ce qui précède, $g(u_o) \in \mathcal{U}_{II}$.

Or :

$$d(u(L_1), u(L_2)) = |\alpha| d(u_o(L_1), u_o(L_2)),$$

et, étant donné que $u_o \in \mathcal{U}_{III}$, $(\forall L_1, L_2, L_3) \in \mathcal{L}$ tels que $\delta(L_1, L_2) = L_3$, on aura :

$$d(u_o(L_1), u_o(L_2)) = u_o(L_3),$$

d'où :

$$d(u(L_1), u(L_2)) = u(L_3).$$

4) Dans ce qui précède, nous avons défini trois classes d'indicateurs numériques d'appréciation, qui transposent, dans des ensembles numériques, les structures envisagées pour l'univers des appréciations.

Ces indicateurs jouent ici le rôle que jouent d'habitude ceux qu'on appelle, dans la terminologie économique, des indicateurs d'utilité ou de satisfaction. Toutefois, nous avons cru devoir les désigner par le terme d'indicateurs numériques d'appréciation pour -en les détachant du contenu intuitif généralement attribué à la notion d'utilité- mieux caractériser leur nature véritable qui est celle d'un instrument commode devant servir à représenter des appréciations. A plus forte raison cette distinction de terminologie nous a paru nécessaire car, tandis qu'en général la notion d'utilité s'applique, dans les modèles, à des "situations" assez délimitées -consommateur, entrepreneur, etc.- les appréciations que nous avons considérées peuvent être l'émanation de centres de décision de nature très différente et fort complexe.

Si on envisage les trois classes d'indicateurs définies ci-dessus, on s'aperçoit immédiatement qu'en complétant -par des hypothèses de continuité par exemple⁽¹⁾- les hypothèses de structure que nous avons retenues pour l'univers des appréciations, les catégories d'indicateurs d'utilité couramment utilisées en économie, relèvent de l'une ou l'autre de ces classes. En effet, les indicateurs d'utilité que l'on emploie en économie sont soit des indicateurs dits "ordinaux" -définis à une transformation croissante près-, soit des indicateurs dits "cardinaux" -définis à une transformation linéaire croissante près, soit enfin des indicateurs mesurables-définis à une constante multiplicative (positive) près. Ces indicateurs d'utilité ont été l'objet, particulièrement dans ces dernières années, de nombreux et importants travaux que l'on peut rattacher à l'un ou à l'autre de deux grands courants de pensée :

le premier s'inspirant de la théorie des choix du consommateur,

(1) Cf. O. Lange, "The Determinateness of the Utility Function", dans *Review of Economic Studies*, 2 (1934), pp. 218-225.

P. A. Samuelson, "The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility", dans *Review of Economic Studies*, 6 (1938-1939), pp. 65-70.

qui sous sa forme actuelle la plus élaborée(1) conduit en général à des indicateurs ordinaux et, dans le cas particulier des complexes de biens indépendants, à des indicateurs cardinaux ;

le second, de la théorie du comportement face à l'incertitude ou au risque qui conduit à des indicateurs d'utilité cardinaux ou même mesurables(2).

Les axiomes à la base de ces deux théories se traduiraient, dans la terminologie utilisée ici, par des structures de l'univers des appréciations plus fortes que celles que nous avons envisagées. En effet, si un indicateur d'utilité ordinal correspond bien à la classe \mathcal{U}_I , la classe \mathcal{U}_{II} est telle que si $u \in \mathcal{U}_{II}$, toute transformation linéaire croissante de u appartient à la classe, sans pour autant que tous les indicateurs de la classe puissent ainsi nécessairement être atteints à partir de u ; il en sera de même pour la classe \mathcal{U}_{III} : les indicateurs définis à une constante multiplicative (positive) près à partir de $u \in \mathcal{U}_{III}$, n'épuisent pas nécessairement la classe \mathcal{U}_{III} . Les classes que nous avons définies contiennent les catégories usuelles d'indicateurs, mais sont en général plus larges (il n'y a coïncidence que pour la classe \mathcal{U}_I) ; dans les situations couramment envisagées en économie pure, elles permettront de retrouver les indicateurs habituels en introduisant des hypothèses de structure plus fortes.

La plus grande généralité des classes que nous avons obtenues tient à ce que nous n'avons introduit au point de départ qu'un petit nombre d'hypothèses, prises aussi intuitivement acceptables que possible, ce qui nous a permis de recouvrir à peu près toutes les situations que l'on peut avoir à envisager en économie pure.

 (1) Cf. J. R. Hicks, *La valeur*, Paris, Hermann & Cie., 1937.

R. Roy, *De l'utilité. Contribution à la théorie des choix*, Paris, Hermann, 1942.

R. Roy, *Analyse de la demande*, Lisboa, Centro de estudos de estatística economica, 1961.

H. Wold, "A Synthesis of Pure Demand Analysis", dans *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 26 (1943), pp. 85-118, pp. 220-263 ; 27(1944) pp. 69-120.

H. Wold, *Demand Analysis*, op. cit.

(2) Cf. J. v. Neumann, O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1953.

Colloques Internationaux du C.N.R.S., *XL - Économétrie*, Paris, C.N.R.S., 1953.

L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954.

BIBLIOGRAPHIE

- ALLAIS, M. - *Cours d'économie générale de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 1951.
- *Economie et intérêt*, Paris, Imprimerie Nationale, 1947.
- ALLEN, R. G. D. - *Mathematical Economics*, London, Macmillan & Co., Ltd., 1956.
- ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES - Princeton, New Jersey, Princeton University Press : *Contributions to the Theory of Games*, vol. I-IV.
- BARBUT, M. - "Ensembles ordonnés" dans *Revue française de recherche opérationnelle*, 20 (1961), pp. 175-198.
- BARRE, R. - *Economie politique*, tome I, Paris, P.U.F., 1956.
- BARTLETT, M. S. - *Stochastic Processes*, Cambridge, University Press, 1956.
- BERGE, C. - *Espaces topologiques*, Paris, Dunod, 1959.
- BHARUCHA-REID, A. T. - *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications*, New York, McGraw-Hill, 1960.
- BLANC-LAPIERRE, A., FORTET, R. - *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, Masson & Cie., 1953.
- BOURBAKI, N. - *I Eléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. Théorie des ensembles. Fascicule de résultats*, Paris, Hermann, 1958.
- CHAMBERLIN, E. H. - *La théorie de la concurrence monopolistique*, Paris, P.U.F., 1953.
- CHIPMAN, J. S. - "The Foundations of Utility" dans *Econometrica*, 28 (1960), pp. 193-224.
- COLEMAN, J. S., ADAMS, E. W., SOLOMON, H. - *Mathematical Thinking in the Measurement of Behavior*, Illinois, The Free Press of Glencoe, 1960.

- COLLOQUES INTERNATIONAUX DU C.N.R.S. - *XL - Économétrie*, Paris, C.N.R.S., 1953.
- CONFERENCE ON RESEARCH IN INCOME AND WEALTH - *Input-Output Analysis : an Appraisal*. Studies in Income and Wealth, vol. XVIII, Princeton, Princeton University Press, 1955.
- COOMBS, C. H. - "La mesure dans les sciences sociales. Théorie et méthodes", dans *Les méthodes de recherche dans les sciences sociales*, tome II, Paris, P.U.F., 1959.
- COOMBS, C. H., RAIFFA, H., THRALL, R. M. - "Some Views on Mathematical Models and Measurement Theory" dans *Decision Processes*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954, pp. 19-37.
- COUFFIGNAL, L. - "La science économique traditionnelle et la cybernétique de l'économie" dans *Encyclopédie Française, L'univers économique et social*, tome 9, pp. 9.68-2/9.68-11.
- COX, D. L. - *Planning of Experiments*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- CRAMER, H. - *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, Princeton University Press, 1954.
- DARMOIS, G. - *Calcul des probabilités. Deuxième partie : Théorie générale des variables aléatoires quelconques*, Paris, Centre de documentation universitaire, 1954.
- DEBREU, G. - *Theory of Value*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", dans *Decision Processes*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954, pp. 159-165.
- DEFOSSE, G. - *La bourse des valeurs*, Paris, P.U.F., 1959.
- DEHEM, R. - *Traité d'analyse économique*, Paris, Dunod, 1958.
- DEMARIA, G. - *Logica della produzione e della occupazione*, Milano, R. Malfasi, 1950.
- DENJOY, A. - *L'énumération transfinie* :
 livre I : *La notion de rang*.
 livre III : *Études complémentaires sur l'ordination*.
 Paris, Gauthier-Villars, 1946 et 1954.
- DIRAN BODENHORN - *Intermediate Price Theory*, New York, McGraw-Hill, 1961.
- DOOB, J. L. - "Probability in Function Space", dans *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53 (1947), pp. 15-30.

- DORFMAN, R., SAMUELSON, P. A., SOLOW, R. M. - *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1958.
- DUBARLE, D., - "Logique", dans *Revue française de recherche opérationnelle*, 24 (1962), pp. 217-241.
- DUBREIL, P. - *Algèbre*, tome I, 2e éd., Paris, Gauthier - Villars, 1954.
- DUGUE, D. - *Ensembles mesurables et probabilisables*, Paris, Dunod, 1958.
- *Traité de statistique théorique et appliquée. I - Analyse aléatoire*, Paris, Masson & Cie., 1958.
- DUGUE, D., GIRAULT, M. - *Analyse de variance et plans d'expérience*, Paris, Dunod, 1959.
- DUNLOP, D. N. - *Wage Determination under Trade Unions*, New York, A. M. Kelley Inc., 1950.
- FELLER, W. - *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1957.
- "Zur Theorie der stochastischen Prozesse", dans *Mathematische Annalen*, 113 (1937), pp. 113-160.
- FELLNER, W. - *Competition among the Few*, New York, Knopf, 1949.
- *Emergence and Content of Modern Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1960.
- FERAUD, L. - "Le raisonnement fondé sur les probabilités" dans *Revue de métaphysique et de morale*, 53 (1948), pp. 113-138.
- "Les statistiques et la statistique dans les sciences économiques et sociales" dans *Revue économique et sociale*, 4 (1961), pp. 315-334.
- "Sur les fondements de l'actuariat et plus généralement des applications des probabilités", dans *Bulletin de l'Association des actuaires suisses*, 60 (1960), pp. 69-99.
- "Sur les fondements des critères statistiques" dans *publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, 10 (1961), pp. 155-183.
- FERAUD, L., SOLARI, L. - *Sur les attentes à l'entrée de différents services*, Genève, Librairie de l'Université, 1959.
- FISHER, R. A. - *The Design of Experiments*, Edinburgh, Oliver and Boyd, 1935.
- FORTET, R. - *Calcul des probabilités*, Paris, C.N.R.S., 1950.

- FRECHET, M. - *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Paris, Gauthier-Villars, 1952.
- FRISCH, R. - "La théorie de l'avantage collectif et les régions de Pareto", dans *Economie appliquée*, 7 (1954), pp. 211-280.
- GALE, D. - *The Theory of Linear Economic Models*, New York, McGraw-Hill, 1960.
- GIRAULT, M. - *Calcul des probabilités en vue de ses applications*, Paris, Dunod, 1960.
- *Initiation aux processus aléatoires*, Paris, Dunod, 1959.
- GREENWOOD, T. - *Les fondements de la logique symbolique*, Paris, Hermann & Cie., 1938.
- GRUSON, C. - "Les décisions économiques nationales", dans *La décision*, Paris, C.N.R.S., 1961, pp. 147-157.
- GUILBAUD, G. TH. - "La théorie des jeux", dans *Revue d'économie politique*, 65 (1955), pp. 153-188.
- HENDERSON, J. M., QUANDT, R. E. - *Microeconomic Theory, a Mathematical Approach*, New York, McGraw-Hill, 1958.
- HICKS, J. R. - *La valeur*, Paris, Hermann & Cie., 1937.
- *Value and Capital*, Oxford, Clarendon Press, 1946.
- JANNACONE, P. - *Prezzi e mercati*, Torino, Einaudi, 1951.
- JANET, M. - *Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel*, Paris, P.U.F., 1954.
- KARLIN, S. - *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, vol. I, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.
- KEMENY, J. G., SNELL, J. L., THOMPSON, G. L. - *Algèbre moderne et activités humaines*, Paris, Dunod, 1960.
- KEYNES, J. M. - *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie*, Paris, Payot, 1949.
- KLEIN, L. R. - *Econometrics*, White Plains, New York, Row, Peterson & Co., 1953.
- LALANDE, A. - *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Paris, P.U.F., 1960.
- LANGE, O. - "The Determinateness of the Utility Function", dans *Review of Economic Studies*, 2 (1934), pp. 218-225.
- LEBESGUE, H. - *Sur la mesure des grandeurs*, Monographies de l'enseignement mathématique, N° 1, Genève, A. Kundig.

- LEGRAS, J. - *Techniques de résolution des équations aux dérivées partielles*, Paris, Dunod, 1956.
- LEHMANN, E. L. - *Testing Statistical Hypotheses*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- LENTIN, A., RIVAUD, J. - *Eléments d'algèbre moderne*, Paris, Vuibert, 1956.
- LEONTIEF, W. W. - *La structure de l'économie américaine 1919-1939*, Paris, Ed. Génin, 1958.
- LESOURNE, J., - "Recherche d'un optimum de gestion dans la pensée économique", dans *Encyclopédie Française, L'univers économique et social*, tome 9, pp. 9.68-12/9.70-4.
- *Technique économique et gestion industrielle*, Paris, Dunod, 1960.
- LOEVE, M. - *Probability Theory : Foundations. Random Sequences*, New York, D. van Nostrand Company, Inc., 1955.
- LUCE, R. D. - *Individual Choice Behavior*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1959.
- MAILLET, P. - "Introduction à l'étude des modèles économétriques" dans *Cahiers du Séminaire d'économétrie*, 3 (1955), pp. 7-30.
- MAJUMDAR, T. - *The Measurement of Utility*, London, Macmillan & Co., Ltd., 1958.
- MALINVAUD, E. - *Initiation à la comptabilité nationale*, Paris, Imprimerie Nationale, 1957.
- "L'agrégation dans les modèles économiques", dans *Cahiers du Séminaire d'économétrie*, 4 (1956), pp. 69-146.
- MARCHAL, J. - *Le mécanisme des prix*, Paris, Librairie de Médicis, 1951.
- MASSE, P. - *Le choix des investissements*, Paris, Dunod, 1959.
- MEADE, J. E. - *A Geometry of International Trade*, London, 1952.
- *The Theory of International Economic Policy*, Oxford University Press, 1950-1955.
- MONJALLON, A. - *Introduction aux mathématiques modernes*, Paris, Vuibert, 1960.
- v. NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. - *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1953.
- PERROUX, F. - "Le passage à la conceptualisation" : Introduction au tome 9 (*L'univers économique et social*) de l'*Encyclopédie Française*, pp. 9.04-1/9.06-10.

- PIATIER, A. - *Statistique et observation économique*, tome II, Paris, P. U. F., 1961.
- POLYA, G. - "Sur quelques points de la théorie des probabilités" dans *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1 (1931), pp. 117-161.
- REICHENBACH, H. - *Introduction à la logistiqu*e, Paris, Hermann & Cie., 1939.
- RESTLE, F. - *Psychology of Judgement and Choice*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1961.
- ROBINSON, E. A. - *An Introduction to Infinitely Many Variates*, London, Charles Griffin & Co., Ltd., 1959.
- ROBINSON, J. - *The Economics of Imperfect Competition*, London, Macmillan, 1950.
- ROY, R. - *Analyse de la demande*, Lisboa, Centro de estudos de estatística económica, 1961.
- *De l'utilité. Contribution à la théorie des choix*, Paris, Hermann & Cie., 1942.
 - "Du rôle de la statistique dans l'élaboration des concepts", dans *Journal de la Société de statistique de Paris*, 7/8/9 (1961), pp. 212-220.
 - *Éléments d'économétrie*, Paris, I. N. S. E. E., 1952-53.
 - "La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus" dans *Econometrica*, 1 (1933), pp. 265-273.
 - "La distribution du revenu entre les divers biens", dans *Econometrica*, 15 (1947), pp. 205-225.
 - "La hiérarchie des besoins et la notion de groupes dans l'économie de choix", dans *Econometrica*, 2 (1943), pp. 13-24.
 - "Les élasticités de la demande relatives aux biens de consommation et aux groupes de biens", dans *Econometrica*, 20 (1952), pp. 391-405.
- SAMUELSON, P. A. - *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Harvard University Press, 1955.
- "The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility", dans *Review of Economic Studies*, 6, (1938-1939), pp. 65-70.
- SAVAGE, L. J. - *The Foundations of Statistics*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1954.

- STIGLER, G. J. - "The Development of Utility Theory", I, II, dans *The Journal of Political Economy*, 58 (1950), pp. 307-327, 373-396.
- TINBERGEN, J. - *Techniques modernes de la politique économique*, Paris, Dunod, 1961.
- TRIFFIN, R. - *Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory*, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1940.
- WEITZENHOFFER, A. M. - "Mathematical Structures and Psychological Measurements", dans *Psychometrika*, 16 (1951).
- WILKS, S. S. - *Mathematical Statistics*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- WOLD, H. - "A Synthesis of Pure Demand Analysis", dans *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 26 (1943), pp. 85-118, pp. 220-263; 27 (1944), pp. 69-120.
- *Demand Analysis*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1953.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
AVANT-PROPOS.....	277
PREMIERE PARTIE - MODELES ECONOMIQUES	281
CHAPITRE I - Modèles et science économique.....	283
§ 1. La notion de modèle.....	284
§ 2. Economie générale et économie pure.....	288
CHAPITRE II - Introduction à l'étude des modèles économiques.....	295
§ 1. Préliminaires.....	295
§ 2. Structure logique des modèles économiques.....	304
CHAPITRE III - Classes de modèles économiques.....	317
Section 1. Introduction de quelques notions particulières.....	318
§ 1. Catégories habituelles de variables et d'hypothèses.....	318
§ 2. Modèles séparables.....	322
Section 2. Modèles déterministes et modèles stochastiques.....	327
§ 1. Introduction.....	327
§ 2. Phénomènes certains ou déterministes, exacts et approchés.....	328
§ 3. Phénomènes aléatoires ou stochastiques.....	331
§ 4. Le rôle des modèles expérimentaux dans la définition du caractère déterministe ou stochastique d'un phénomène.....	334

	Pages
§ 5. Notions de mesure et de probabilisation d'un ensemble	339
§ 6. Récapitulation et exemples.....	352
§ 7. Sur la portée des conclusions pratiques auxquelles peut conduire un modèle théorique.....	363
Section 3. Modèles à dépendance temporelle, déterministes et stochastiques.....	374
§ 1. Phénomènes à dépendance temporelle, déterministes et stochastiques.....	374
§ 2. Probabilisation d'un ensemble de fonctions du temps.....	376
§ 3. Définitions et classifications des processus stochastiques habituels.....	381
§ 4. Les processus de Markov. Etude de quelques exemples.....	387
§ 5. Applications.....	417
DEUXIEME PARTIE - DECISIONS ECONOMIQUES	421
CHAPITRE IV - Univers des appréciations et décisions....	423
§ 1. Le cadre conceptuel.....	423
§ 2. Relations binaires, relations d'ordre, éléments extrêmes.....	430
§ 3. Structure faible de l'univers des appréciations.	447
§ 4. Représentations graphiques de quelques-unes des notions précédentes.....	458
CHAPITRE V - Structures plus fortes de l'univers des appréciations.....	473
§ 1. Introduction. Couples d'actions possibles.....	473
§ 2. Lois de composition, distance.....	474
§ 3. Quasi-distance d'appréciation.....	476

	Pages
CHAPITRE VI - Indicateurs numériques d'appréciation et indicateurs numériques d'utilité.....	485
§ 1. Isomorphisme.....	485
§ 2. Indicateurs numériques d'appréciation.....	488
BIBLIOGRAPHIE.....	495
TABLE DES MATIERES.....	503

