



HAL
open science

Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Cas de l'espace à trois dimensions

R. Féron

► **To cite this version:**

R. Féron. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Cas de l'espace à trois dimensions. Annales de l'ISUP, 1956, V (1), pp.3-12. hal-04095296

HAL Id: hal-04095296

<https://hal.science/hal-04095296>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SUR LES TABLEAUX DE CORRÉLATION DONT LES MARGES SONT DONNÉES

CAS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS⁽¹⁾

par
R. FÉRON

Considérons l'ensemble E des fonctions de répartition à n dimensions $F(x)$ et convenons d'écrire :

$$F(x) < G(x) \quad (\text{relation } \mathcal{O}) \quad (1)$$

si pour tout vecteur $\vec{x} \in R^n$

$$F(\vec{x}) \leq G(\vec{x}) \quad (2)$$

Il est connu que la relation (1) est une relation d'ordre partiel car elle est :

Réflexive : on a pour tout \vec{x} $F(\vec{x}) \leq F(\vec{x})$

Antisymétrique : Si on a pour tout \vec{x} :

$$F(\vec{x}) < G(\vec{x}) \quad \text{et} \quad F(\vec{x}) > G(\vec{x})$$

alors : $F(\vec{x}) \equiv G(\vec{x})$

Transitive : Si on a pour tout \vec{x}

$$F(\vec{x}) < G(\vec{x}) \quad \text{et} \quad G(\vec{x}) < H(\vec{x}) \quad \text{alors} \quad F(\vec{x}) < H(\vec{x})$$

Ceci posé Birkhoff a montré que :

Théorème de Birkhoff

Si x est à une seule dimension, alors l'ensemble E des fonctions de répartition constitue un treillis :

En effet, quels que soient $F(x)$ et $G(x)$ ces éléments ont une borne supérieure qui n'est autre que

$$\text{Max} \{ F(x), G(x) \} = F^{(1)}(x)$$

(1) Nous tenons ici à exprimer notre reconnaissance à M. J. Bass qui nous a donné l'idée d'étudier le cas tridimensionnel.

et une borne inférieure qui n'est autre que :

$$\text{Min} \{ F(x), G(x) \} = F^{(2)}(x)$$

$F^{(1)}$ est bien une fonction de répartition car :

$$F^{(1)}(-\infty) = 0 \qquad F^{(1)}(+\infty) = 1$$

$$F^{(1)}(x + \Delta x) = \text{Max} [F(x + \Delta x), G(x + \Delta x)] \geq \text{Max} [F(x), G(x)] = F^{(1)}(x)$$

Par contre dans le cas où x est à 2 dimensions ou plus l'ensemble E n'est plus un treillis ni même un demi treillis, car :

1°) Il existe des fonctions de répartition égales à :

$$\text{Max} \{ F(x, y), G(x, y) \} \quad \text{en } x_0 y_0$$

et supérieures (ou égales) à cette quantité en tout autre point, par exemple :

$$F^{(2)}(x, y) = \begin{cases} \text{a) } 1 \text{ pour } x > x_0 \text{ et } y > y_0 \\ \text{b) } \text{Max} \{ F(x_0, y_0), G(x_0, y_0) \} \text{ pour } x_0 > x > x_1 \text{ et } y > y_1 \\ \qquad \qquad \qquad \text{ou } x > x_1 \text{ et } y_0 > y > y_1 \\ \qquad \qquad \qquad \text{où } x_1, y_1 \text{ est un nombre tel que l'on ait simultanément :} \\ \qquad \qquad \qquad F(x_1, \infty), G(x_1, \infty), F(\infty, y_1), G(\infty, y_1) \\ \qquad \qquad \qquad \text{inférieurs à } \text{Max} [F(x_0, y_0), G(x_0, y_0)] \\ \text{c) } \text{Min} \{ \text{Max} [F(x, \infty), G(x, \infty)], \text{Max} [F(\infty, y), G(\infty, y)] \} \\ \qquad \qquad \qquad \text{pour } x < x_1 \text{ ou } y < y_1 \end{cases}$$

Donc s'il existe une borne supérieure, ce sera nécessairement la fonction :

$$H(x, y) = \text{Max} \{ F(x, y), G(x, y) \}$$

2°) Montrons que H n'est pas nécessairement une fonction de répartition. En effet pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que pour tout couple F et G , la quantité

$$= H(x + \Delta x, y + \Delta y) - H(x + \Delta x, y) - H(x, y + \Delta y) + H(x, y)$$

soit nécessairement positive ou nulle.

Or, si :

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y) > G(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

bien que :

$$G(x, y + \Delta y) > F(x, y + \Delta y) \quad \text{et} \quad G(x, y + \Delta y) > G(x, y)$$

alors on a

$$J^{(2)} = -G(x, y + \Delta y) + \text{Max} [F(x, y), G(x, y)] \geq 0 \qquad (3)$$

Donc H n'est pas une fonction de répartition et par conséquent, il n'existe pas de borne supérieure. Deux éléments quelconques n'ayant pas

nécessairement de borne supérieure, l'ensemble E n'est pas un treillis. On démontrerait de même que 2 éléments quelconques de E n'ont pas nécessairement de borne inférieure et par conséquent que E n'est pas nécessairement un demi-treillis.

Or, le théorème de Birkhoff nous est apparu comme lié au théorème suivant dû à Fréchet (1).

Théorème de Fréchet. - L'ensemble E (ordonné par \emptyset) des fonctions de répartition $F(x,y)$ de R_2 ayant des marges données : $A(x) = F(x, \infty)$, $B(y) = F(\infty, y)$, a un élément maximum $F^{(1)}(x,y)$ et un élément minimum $F^{(2)}(x,y)$.

Or, nous venons de montrer que si $F(x,y) \in E$ l'ensemble E ordonné \emptyset n'est pas un treillis. Il y a donc lieu de penser que le théorème de Fréchet ne se généralise pas aux espaces Euclidiens à plus de deux dimensions.

Examinons donc ce qui se passe dans l'espace à 3 dimensions. Ici 2 cas sont à considérer :

TABLEAUX DE CORRÉLATION OU LES MARGES ($F(x, \infty, \infty)$, $F(\infty, y, \infty)$, $F(\infty, \infty, z)$) SONT DONNÉES

a) méthode brutale

Considérons maintenant l'ensemble E'_3 des fonctions de répartition $F(x,y,z)$ ayant des marges données $A(x) = F(x, \infty, \infty)$, $B(y) = F(\infty, y, \infty)$, $C(z) = F(\infty, \infty, z)$ et supposons E'_3 ordonné.

Montrons que cet ensemble a un élément maximum et en général pas d'élément minimum.

1. IL Y A UN ÉLÉMENT MAXIMUM

On aura évidemment

$$F(x, y, z) \leq \phi(x, y, z)$$

en posant :

$$\phi(x, y, z) = \text{Min} [A(x), B(y), C(z)]$$

Il est clair que si nous parvenons à montrer que ϕ est une fonction de répartition, ce sera un élément maximum. Or, il en est bien ainsi, en effet :

$$1^\circ) \quad \phi(-\infty, y, z) \leq A(-\infty)$$

donc :

$$0 \leq \phi(-\infty, y, z) \leq 0 \quad \text{et} \quad \phi(-\infty, y, z) = 0$$

(1) Fréchet. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Ann. Univ. Lyon, 9, 1951, p. 53-77.

Il en est de même de

$$2^{\circ}) \quad \phi(+\infty, +\infty, +\infty) = \text{Min} \{ A(+\infty), B(+\infty), C(+\infty) \} = 1$$

3°) Quels que soient $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ positifs ou nuls, on a :

$$\begin{aligned} I^{(3)} &= \phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x+\Delta x, y, z+\Delta z) \\ &\quad - \phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + \phi(x+\Delta x, y, z) + \phi(x, y, \Delta y, z) + \phi(x, y, z+\Delta z) - \phi(x, y, z) \\ &= I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z, \Delta z) - I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z) \end{aligned}$$

en posant

$$I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z) = \phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - \phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y+\Delta y, z) + \phi(x, y, z)$$

De même, on a :

$$I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z) = I^{(1)}(x, \Delta x, y+\Delta y, z) - I^{(1)}(x, \Delta x, y, z)$$

en posant :

$$I^{(1)}(x, \Delta x, y, z) = \phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer qu'au point x, y, z on a :

$$A(x) \leq B(y) \leq C(z)$$

On aura alors

$$I^{(1)}(x, \Delta x, y, z) = \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y)] - A(x)$$

$$\begin{aligned} I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z) &= I^{(1)}(x, \Delta x, y+\Delta y, z) - I^{(1)}(x, \Delta x, y, z) \\ &= \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y+\Delta y), C(z)] - A(x) - \{ \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y)] - A(x) \} \\ &= \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y+\Delta y), C(z)] - \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{(3)} &= I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z+\Delta z) - I^{(2)}(x, \Delta x, y, \Delta y, z) \\ &= \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y+\Delta y), C(z+\Delta z)] - \text{Min} [A(x+\Delta x), B(y+\Delta y), C(z)] \geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

quantité évidemment positive ou nulle. Donc $\phi(x, y, z)$ est bien une fonction de répartition et est par conséquent un élément maximum.

2. IL N'Y A PAS EN GÉNÉRAL D'ÉLÉMENT MINIMUM

En effet, on a :

$$1 - F(x, y, z) \leq \text{Min} [(1-A(x) + 1 - B(y) + 1 - C(z)), 1] \quad (5)$$

et on peut avoir l'égalité pour $F(x, y, z)$ convenablement choisi pour un x_0, y_0, z_0 donné mais à part cela arbitraire. (On voit en effet que l'égalité

aura lieu si on a simultanément $\Pr(X > x_0, Y > y_0) = 0$, $\Pr(Y > y_0, Z > z_0) = 0$,
 $\Pr(Z > z_0, X > x_0) = 0$

Or, de (5), on tire :

$$F(x, y, z) \geq \text{Max} [A(x) + B(y) + C(z) - 2, 0] \quad (6)$$

cette borne inférieure pouvant effectivement être atteinte pour certains éléments $F(x, y, z)$. Donc s'il existe un élément minimum ce ne pourra être que :

$$\psi(x, y, z) + \text{Max} \{A(x) + B(y) + C(z) - 2, 0\} \quad (7)$$

Nous allons montrer que $\psi(x, y, z)$ n'est pas nécessairement une fonction de répartition parce que la qualité $I^{(3)}$ relative à ψ n'est pas nécessairement positive.

En effet, nous avons

$$I^{(3)} = \psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - \psi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) \\ - \psi(x+\Delta x, y, z+\Delta z)$$

$$+ \psi(x+\Delta x, y, z) + \psi(x, y+\Delta y, z) + \psi(x, y, z+\Delta z) - \psi(x, y, z)$$

Supposons que $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ aient été choisis tels que :

$$\psi(x+\Delta x, y, z) = \psi(x, y+\Delta y, z) = \psi(x, y, z+\Delta z) = 0 \quad (8)$$

alors que :

$$\psi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) > 0 \quad \psi(x, y+\Delta y, z+\Delta z) > 0 \quad \psi(x+\Delta x, y, z+\Delta z) > 0$$

on aura alors

$$I^{(3)} = A(x+\Delta x) + B(y+\Delta y) + C(z+\Delta z) - 2 - \{A(x+\Delta x) + B(y+\Delta y) + C(z) - 2 + A(x+\Delta x) \\ + B(y) + C(z+\Delta z) - 2 + A(x) + B(y+\Delta y) + C(z+\Delta z) - 2\} \\ = - [A(x+\Delta x) + B(y+\Delta y) + C(z) - 2] - [A(x) + B(y) + C(z+\Delta z) - 2] \quad (9)$$

La première parenthèse est positive d'après les hypothèses faites. Si donc on a choisi Δz de manière que la seconde soit nulle, ce qui est compatible avec (8) et toujours possible dans le cas continu, alors $I^{(3)}$ est négative, ce qui montre que ψ n'est pas une fonction de répartition en général.

Autre méthode : valable seulement dans le cas continu

Sur $F(x, y, z)$ faisons le changement de variables $\xi = A(x)$, $\eta = B(y)$, $\zeta = C(z)$. Il est connu que dans ces conditions la fonction de répartition $F(x, y, z)$ se transforme en une fonction de répartition $G(\xi, \eta, \zeta)$ telle que $G(\xi, \infty, \infty) = \xi$ pour $0 \leq \xi \leq 1$, $G(\infty, \eta, \infty) = \eta$ ($0 \leq \eta \leq 1$), $G(\infty, \infty, \zeta) = \zeta$ ($0 \leq \zeta \leq 1$). Etendant légèrement une dénomination de Georges Darmon, on peut appeler $G(\xi, \eta, \zeta)$ la carte de $F(x, y, z)$ sur le cube unité.

De plus, on voit immédiatement que la transformation considérée conserve l'ordre θ défini par (2). Autrement dit, étant données 2 fonctions de répartition $F^{(1)}(x, y, z)$ et $F^{(2)}(x, y, z)$ ayant des marges données $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$, la relation $F^{(1)}(x, y, z) \leq F^{(2)}(x, y, z)$ pour tout point x, y, z entraîne la relation similaire sur les transformées $G^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$ et $G^{(2)}(\xi, \eta, \zeta)$ de $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$, soit $G^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) \leq G^{(2)}(\xi, \eta, \zeta)$ pour tout point ξ, η, ζ . La réciproque est d'ailleurs exacte. On a donc en définitive :

$$F^{(1)}(x, y, z) < F^{(2)}(x, y, z) \iff G^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) < G^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (10)$$

La recherche des éléments maximaux et minimaux sur les fonctions de répartition $F(x, y, z)$ ayant des marges données est donc complètement équivalente à la recherche des mêmes éléments maximaux et minimaux lorsque les variables marginales sont réparties uniformément sur les segments 0, 1 des divers axes. Donc, si nous arrivons à montrer que les fonctions G admettent un élément maximum et plusieurs éléments minimaux, il en sera nécessairement de même des fonctions $F(x, y, z)$ ayant des marges données.

1° - LES $G(\xi, \eta, \zeta)$ ONT UN ÉLÉMENT MAXIMUM

En effet, on a évidemment : $G(\xi, \eta, \zeta) \leq \text{Min}[\xi, \eta, \zeta]$ et $H(\xi, \eta, \zeta) = \text{Min}[\xi, \eta, \zeta]$ est bien une fonction de répartition car :

- 1) $H(-\infty, \eta, \zeta) = H(\xi, -\infty, \zeta) = H(-\infty, \eta, \zeta) = 0$
- 2) $H(+\infty, +\infty, +\infty) = 1$
- 3) $I^{(3)} = H(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta) - H(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta) - H(\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta) + H(\xi + \Delta\xi, \eta, \zeta) + H(\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta) + H(\xi, \eta, \zeta + \Delta\zeta) - H(\xi, \eta, \zeta)$

est facile à évaluer si nous supposons par exemple $\xi < \eta < \zeta$. On peut alors répéter mot pour mot la démonstration de la page 4 avec les nouvelles notations (c'est-à-dire en remplaçant $A(x)$ par ξ , $B(y)$ par η , $C(z)$ par ζ et on a $I^{(3)} \geq 0$.

Support de l'élément maximum

Il est intéressant de caractériser cette distribution au moyen de la densité généralisée $\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}$ qui se définit exactement comme pour 2 dimensions (4)

On a :

$$\left\langle \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}, \varphi \right\rangle = - \left\langle H, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} \right\rangle = \iiint \varphi dH(x, y, z) \quad (11)$$

(1) Voir Féron. Sur les distributions de probabilité de Laurent Schwartz et certaines de leurs applications au calcul des probabilités.

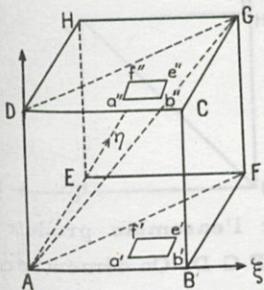
Montrons que :

Théorème = Le support de $\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}$ est la droite AG.

Nous donnerons 3 démonstrations différentes de ce théorème.

1/ Démonstration géométrique

Il suffit, somme toute de montrer que sur tout parallélépipède ne rencontrant pas AG, $I^{(3)} = \iiint dH(x,y,z) = 0$. Donc en définitive que le $I^{(3)}$



relatif à H est nul sur tout tel parallélépipède a b c d e f g h qui ne coupe pas AG. Ceci peut se traduire en disant qu'au moins une des projections du parallélépipède sur les plans $\xi A \eta$, $\xi A \zeta$, $\eta A \zeta$ ne rencontre pas la première bissectrice correspondante. Supposons par exemple que a b e f se projette en a'b'e'f' et que a'b'e'f' ne rencontre pas AF. Alors si a''b''e''f'' sont les projections des mêmes points sur le plan CDH, il est clair que l'intégrale I étendue à a b c d e f g h est inférieure à la même intégrale étendue à a'b'e'f'a''b''e''f''. On est donc ramené à un problème à deux

dimensions dans le plan des $\xi \eta$. La fonction de répartition étant $\text{Min}(\xi, \eta) = H^{(1)}(\xi, \eta)$ quelle est la probabilité pour que le point M se trouve dans le rectangle a'b'e'f'? Cette probabilité étant nulle, comme nous l'avons montré dans l'article cité précédemment, il en résulte que $I^{(3)} = 0$, donc que AG est le support de $\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}$

2/ Démonstration algébrique

Il suffit somme toute de traduire en langage algébrique la démonstration précédente. Considérons le parallélépipède a b c d e f g h comme défini par les 2 points $a(\xi, \eta, \zeta)$ et $g(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, \zeta + \Delta\zeta)$. Le fait que a b c d e f g h ne coupe pas AG se traduit par le fait qu'on ne peut trouver λ tel que $0 < \lambda < 1$ et que $\xi + \lambda \Delta\xi = \eta + \lambda \Delta\eta = \zeta + \lambda \Delta\zeta$. Supposons par exemple que c'est la première de ces inégalités $\xi + \lambda \Delta\xi = \eta + \lambda \Delta\eta$ qui ne

peut être vérifiée, $\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}$ étant positive, on aura :

$$0 \leq I^{(3)} \leq \int_{\xi}^{\xi + \Delta\xi} \int_{\eta}^{\eta + \Delta\eta} \int_0^1 dH(x,y,z) = I'^{(3)}$$

Or :

$$I'^{(3)} = \text{Min}(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, 1) - \text{Min}(\xi, \eta + \Delta\eta, 1) - \text{Min}(\xi + \Delta\xi, \eta, 1) + \text{Min}(\xi, \eta, 1)$$

$$\begin{aligned}
 & - \{ \text{Min} (\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta, 0) - \text{Min} (\xi, \eta + \Delta\eta, 0) - \text{Min} (\xi + \Delta\xi, \eta, 0) + \text{Min} (\xi, \eta, 0) \} \\
 & = \text{Min} (\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) - \text{Min} (\xi, \eta + \Delta\eta) - \text{Min} (\xi + \Delta\xi, \eta) + \text{Min} (\xi, \eta) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

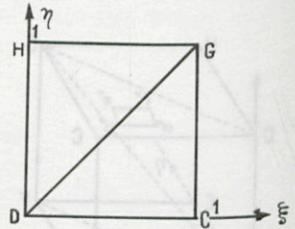
3/ Autre démonstration

On a :

$$\left\langle \frac{\partial^3 G(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}, 1_{0,1}^{(z)} \right\rangle = \frac{\partial G(x, y, \infty)}{\partial x \partial y} \tag{12}$$

en appelant $1_{0,1}^{(z)}$ la fonction $\varphi(z)$ égale à 1 sur l'intervalle 0 1 à 0 ailleurs. (fonction caractéristique de l'intervalle 0 1).

Il en résulte que le support $\frac{\partial^3 G(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}$ devra nécessairement être contenu dans le produit de l'ensemble support de $\frac{\partial^2 G(x, y, \infty)}{\partial x \partial y}$ et de l'intervalle 0, 1 porté par Oz. Dans le cas particulier de $H(x, y, z)$, le support de $\frac{\partial^2 H(x, y, \infty)}{\partial x \partial y}$ est le segment de droite DG et l'ensemble produit de ce



support par le segment DA est le rectangle A F G D. On démontrerait de même que le support de $\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}$ doit être contenu dans le rectangle A C G E et dans le rectangle A B G H. Ce support devra donc être tout entier contenu sur le segment de droite AG. Pour montrer que ce support est le segment AG lui-même, il suffit d'appliquer l'opérateur $\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}$ à une fonction $\varphi(x, y, z)$ égale à 1 si $0 < \xi < x < \xi + \Delta\xi < 1$ à 0 ailleurs et de montrer que $\left\langle \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y \partial z}, \varphi \right\rangle$ est différent de zéro et ceci quels que soient ξ et $\Delta\xi$. En effet, pour une telle fonction φ , on a toujours quel que soit G, telle que $G(\xi, \infty, \infty) = \xi$

$$\left\langle \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y \partial z}, \varphi \right\rangle = \int_{\xi}^{\xi + \Delta\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dG = \Delta\xi \tag{13}$$

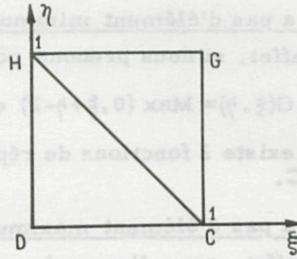
2°/ IL N'Y A PAS D'ÉLÉMENT MINIMUM

1ère démonstration

En effet, supposons qu'il existe un élément minimum $K(\xi, \eta, \zeta) \in E'_3$, c'est-à-dire un élément tel que $K(\xi, \eta, \zeta) \leq G(\xi, \eta, \zeta)$ pour tout $G \in E'_3$ et quels que soient ξ, η, ζ ; en particulier, on devra avoir :

$$K(\xi, \eta, \infty) \leq G(\xi, \eta, \infty)$$

pour tout $G \in E'_3$ et quels que soient ξ et η . C'est dire que dans l'espace 2 dimensions $K(\xi, \eta, \infty)$ devra être l'élément minimum des fonctions de répartition $\varphi(\xi, \eta)$ telles que $\varphi(\xi, \infty) = \xi$ et $\varphi(\infty, \eta) = \eta$. Cet élément est bien connu. On a $K(\xi, \eta, \infty) = \text{Max}(0, \xi + \eta - 1)$ et nous avons montré dans l'article cité que le support de la distribution $\frac{\partial^2 K(\xi, \eta, \infty)}{\partial \xi \partial \eta}$ est le segment de droite



HC. Et comme précédemment on voit d'après (12) que le support de K devrait être contenu dans le plan HCEB.

En raisonnant de même sur $K(\infty, \eta, \zeta)$ et $K(\xi, \infty, \zeta)$ on verrait que le support doit être tout entier contenu dans les rectangles DEFC et DBFH. Il en résulte que le support de K devrait nécessairement se trouver à l'intersection de ces 3 plans, c'est-à-dire se réduire au seul point O centre du cube. Mais d'après (13) le support de tout G doit nécessairement couper le plan $\xi = \xi_0$ pour tout $\xi_0 (0 < \xi_0 < 1)$. On aboutit donc à une impossibilité. Ce qui prouve que notre hypothèse initiale est fautive. Autrement dit, il n'existe pas d'élément minimum.

Autre démonstration

Pour montrer qu'il n'existe pas d'élément minimum, il suffit de montrer qu'il existe au moins 2 éléments minimaux distincts. Or, il est clair que si nous avons pour un certain $K^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$, $K^{(1)}(\xi, \eta, \infty) = \text{Max}(0, \xi + \eta - 1)$, on devra avoir la même relation pour tout $\varphi(\xi, \eta, \zeta) < K^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$. Il en résulte que le support de tout élément inférieur à $K^{(1)}$ doit être contenu dans le plan CHEB. Si nous imposons de plus à $K^{(1)}(\infty, \eta, \zeta)$ d'être minimum, c'est-à-dire que $K^{(1)}(\infty, \eta, \zeta) = \text{Max}(0, \eta + \zeta - 1)$, alors le support de tout élément φ inférieur à $K^{(1)}$ devra être tout entier contenu sur l'intersection des plans DECF et CHEB, c'est-à-dire sur la droite EC. Mais en vertu de 13, il n'y a qu'une seule distribution $K^{(1)}$ ayant pour support la droite EC. C'est la distribution telle que $P(S) = \frac{\text{longueur de la portion de EC CS}}{\text{longueur du segment EC}}$ donc il n'existe pas de fonction de répartition φ inférieure à $K^{(1)}$ et par conséquent $K^{(1)}$ est bien une fonction de répartition minimale. On démontrerait de même que les fonctions de répartition $K^{(2)}$ et $K^{(3)}$ ayant pour support les droites DF et HB sont aussi minimales. Il en résulte directement qu'il n'existe pas d'élément minimum.

Remarque : Comme dans le cas bidimensionnel, toute fonction de répartition $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ qui vérifie en tous points les inégalités :

$$\text{Max}[0, \xi + \eta + \zeta - 2] \leq \varphi(\xi, \eta, \zeta) \leq \text{Min}(\xi, \eta, \zeta)$$

à les marges voulues. La seule différence avec le cas bidimensionnel est que dans l'espace à 4 dimensions la surface séparatrice inférieure n'est plus une fonction de répartition.

II. CAS OU ON CONNAIT $F(x, y, \infty)$ et $F(\infty, \infty, z)$

Pour montrer qu'il n'y a en général ni élément minimum ni élément maximum, il nous suffira de donner deux contre-exemples sur le cube.

a) Il n'y a pas d'élément minimum en général

En effet, si nous prenons pour $F(x,y,\infty)$ la fonction

$$G(\xi, \eta) = \text{Max}(0, \xi + \eta - 1) \text{ et } F(\infty, \infty, \xi) = \xi \quad \text{pour } 0 \leq \xi \leq 1$$

alors il existe 2 fonctions de répartition minimales dont les supports sont HB et EC.

b) Il n'y a pas d'élément maximum en général

En effet, avec l'exemple précédent, les 2 fonctions de répartition considérées sont aussi maximales.