



HAL
open science

De l'inversion des matrices

J. A. Ville

► **To cite this version:**

| J. A. Ville. De l'inversion des matrices. Annales de l'ISUP, 1962, XI (3), pp.[267]-272. hal-04095280

HAL Id: hal-04095280

<https://hal.science/hal-04095280v1>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DE L'INVERSION DES MATRICES

J. A. VILLE

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

L'étude des phénomènes naturels à l'aide des matrices montre que dans une classe étendue de problèmes interviennent, à côté d'une matrice A , les matrices A^* , AA^* et A^*A . Ces quatre catégories de matrices correspondent à des transformations de nature différente, ce qui apparaît avec une clarté particulière lorsque A est rectangulaire. Si les dimensions de A sont m et n , ce que nous écrirons sous la forme :

$$\text{Dim } \{A\} = (m, n)$$

nous savons que

$$\text{Dim } \{A^*\} = (n, m)$$

$$\text{Dim } \{AA^*\} = (m, m)$$

$$\text{Dim } \{A^*A\} = (n, n)$$

Les transformations considérées sont bien de nature différente ; elles peuvent se combiner d'après certaines règles attachées à leurs dimensions. Par exemple AA^* peut se multiplier à droite par A et à gauche par A^* .

Si nous nous attachons à des matrices A rectangulaires, il nous faut renoncer à la notion classique d'inverse. Mais nous pouvons chercher à conserver le plus possible des propriétés de l'inverse.

Nous savons que si A est régulière, il existe une matrice $I(A)$ telle que

$$I(A) A = AI(A) = E$$

E étant la matrice unité. Ceci signifie que les produits $I(A)A$ et $AI(A)$ peuvent être supprimés dans tout produit où ils interviennent comme facteurs. Donc, quel que soit M

$$MI(A)A = MAI(A) = I(A)AM = AI(A)M \quad (1)$$

Nous pouvons donc nous proposer de chercher $I(A)$ telle que les produits $AI(A)$ et $I(A)A$ puissent être supprimés dans les produits de la forme (1), mais en restreignant le champ des matrices M. Le minimum auquel nous puissions songer pour le champ⁽¹⁾ des matrices M est que M appartienne à la liste :

$$A, A^*, I(A), AA^*, A^*A. \quad (2)$$

Il est évident qu'il suffit de considérer les trois premiers termes de cette suite, AA^* et A^*A contenant déjà les facteurs A^* et A .

$I(A)$ devant pouvoir être multipliée par A a mêmes dimensions que A^* . Nous obtenons alors les conditions

$$\begin{cases} AI(A)A = A \\ I(A)AI(A) = I(A) \\ A^*AI(A) = A^* \\ I(A)AA^* = A^* \end{cases} \quad (3)$$

L'étude du système (3) montre que, quelle que soit A , ce système admet toujours une solution $I(A)$ et que cette solution est unique.

Cette inverse $I(A)$ jouit de plus des propriétés

$$I(A^*) = [I(A)]^*$$

ce que nous notons

$$I^*(A) = I(A^*) \quad (4)$$

et

$$I(AA^*) = I(A^*)I(A). \quad (5)$$

 (1) Le mot "champ" est employé ici au sens vulgaire d'ensemble, et non au sens algébrique.

Elle ne satisfait pas en général

$$I (AB) = I (B) I (A)$$

Le fait que cette dernière égalité n'a pas lieu ne peut être considéré comme un défaut de la définition de $I(A)$. On constate en effet dans l'étude des phénomènes naturels que si un vecteur X est transformé successivement par B , puis par A , ce qui donne lieu à l'apparition de ABX , et que l'on cherche à reconstituer X à partir de ABX par une opération linéaire K , qui conduit à $KABX$, la procédure optimum de reconstitution ne consiste pas, sauf dans des cas qui ne se présentent jamais dans la réalité, à appliquer successivement la reconstitution optimum de BX à partir de ABX , puis de X à partir de la reconstitution de BX .

L'étude du système (3) peut se faire en suivant la voie esquissée ci-dessous :

1 - Toute matrice A peut se mettre sous la forme⁽¹⁾

$$A = P \begin{bmatrix} E & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = P F Q \quad (P \text{ et } Q \text{ régulières})$$

Associons lui la matrice

$$J(A) = Q^{-1} F^* P^{-1}$$

Les matrices F et F^* satisfont

$$F F^* F = F$$

$$F^* F F^* = F^*$$

On en déduit que

$$\begin{cases} A J(A) A = A \\ J(A) A J(A) = J(A) \end{cases} \quad (6)$$

Toute matrice $J(A)$ satisfaisant (1) sera dite inverse relative au sens large de A .

(1) La matrice F peut se réduire, dans des cas particuliers, à $\begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix}$, $[E, O]$, ou E .

Toute inverse relative au sens large satisfaisant de plus

$$\begin{cases} A^* A J(A) = A^* \\ J(A) A A^* = A^* \end{cases} \quad (7)$$

sera dite inverse relative stricte, et notée $I(A)$.

On peut alors énoncer les théorèmes :

II - La solution générale du système

$$\begin{cases} A X A = A \\ X A X = X \end{cases} \quad (8)$$

est de la forme

$$\begin{cases} X = Y A Y \\ Y = J(A) + T - J(A) A T A J(A) \end{cases} \quad (9)$$

où T est une matrice arbitraire, et $J(A)$ une inverse relative au sens large, quelconque, de A .

Ceci se démontre en portant d'une part la solution (9) dans (8), qui se trouve alors identiquement vérifiée tenu compte de (6), et d'autre part en remarquant que si \bar{X} satisfait (8), en faisant $T = \bar{X}$ dans (9) on obtient $X = \bar{X}$.

III - Toute matrice symétrique S admet une inverse relative au sens large. $I(S)$ symétrique, avec laquelle elle commute, et qui par conséquent est une inverse relative stricte.

La proposition est évidente si S est diagonale et si on choisit $J(S)$ diagonale. On l'étend à toute matrice symétrique, par diagonalisation.

IV - La matrice inverse relative stricte symétrique d'une matrice symétrique, laquelle existe toujours d'après (III) est unique.

Tout revient à montrer qu'une seule inverse symétrique commute. Soit Σ une inverse de S commutant avec S , et par conséquent telle que :

$$S^2 \Sigma = S \quad \Sigma^2 S = \Sigma \quad \Sigma S = S \Sigma$$

La solution générale, en matrices symétriques, de

$$S X S = S, \quad X S X = X$$

est

$$\begin{cases} X = Y S Y \\ Y = \Sigma + T - \Sigma S T S \Sigma \end{cases} \quad (10)$$

où T est symétrique. Ceci est un cas particulier de (II). La condition de commutativité

$$S X = S Y S Y = Y S Y S = X S$$

s'exprime, pour T, par

$$(\Sigma + T - \Sigma S T) S = S (\Sigma + T - T S \Sigma)$$

c'est-à-dire

$$T S - \Sigma S T S = S T - S T S \Sigma$$

Nous en déduisons en multipliant à gauche par Σ que

$$\Sigma S T = \Sigma S T S \Sigma$$

ce qui nous montre que dans (10), Y a la forme

$$Y = \Sigma + T - \Sigma S T$$

et que par conséquent

$$X = \Sigma$$

V - On obtient une matrice inverse relative stricte d'une matrice quelconque A en formant le produit

$$I(A) = I(A^* A) A^* \quad (11)$$

où $I(A^* A)$ est l'inverse relative stricte symétrique (que nous savons unique) de $A^* A$.

Nous avons donné une manière, unique, d'associer $I(A)$ à A . Cela n'entraîne pas en soi que $I(A)$ est unique. Mais si on écrit la solution générale de (8) sous la forme

$$X = Y A Y$$

$$Y = I(A) + T - I(A) A T A I(A)$$

$I(A)$ étant une inverse stricte de A , on obtient, comme conséquence de (7) que $X = I(A)$. Ceci règle la question de l'unicité.

Les propriétés (4) et (5) sont des conséquences immédiates de (3).

Le 19 juillet 1962

J.A. VILLE

