



HAL
open science

Les fonctions caractéristiques et leurs transformations

Maurice Girault

► **To cite this version:**

Maurice Girault. Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Annales de l'ISUP, 1955, IV (4), pp.221-299. hal-04095258

HAL Id: hal-04095258

<https://hal.science/hal-04095258>

Submitted on 11 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

**PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

MÉMOIRES ET CONFÉRENCES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS.
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Comité de Direction : E. BOREL, A. BARRIOL, H. BUNLE, L.-F. CLOSON, J. COMPEYROT,
G. DARMOIS, F. DIVISIA, E. MORICE, J. RUEFF.

Rédaction : M. FRÉCHET, G. DARMOIS, M. ALLAIS, R. ROY, R. RIVET

Secrétaire de la Rédaction : D. DUGUÉ

Maurice GIRAULT

**LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES
ET
LEURS TRANSFORMATIONS**

VOL. IV - FASCICULE 4 - 1955



PARIS

11, Rue Pierre Curie

OL - 31 12 1957 - 15325

8° V
64396
(4, IV)

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MÉMOIRES ET CONTRIBUTIONS SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS
LA STATISTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, L'ÉCONOMÉTRIE

Directeurs : E. BOREL, A. BAERJOU, H. BUILLE, J.-E. CLOSON, J. COMBÉTOU,
G. DARMOIS, F. DIVIOLA, E. MORICE, J. RUFFI

Rédaction : M. TRICHT, G. DARMOIS, M. ALLAIS, K. KOY, R. RUFFI

Secrétaire de la Rédaction : D. DUBOIS

MARCEAU GIRARD

LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES
ET
LEURS TRANSFORMATIONS

VOL IV FASCICULE 4 - 1955

PARIS

11, rue Pierre Curie

0-21-2121-1233

INTRODUCTION

Laplace en étudiant les lois de probabilité discontinues définies par l'ensemble des p_x (probabilité positive finie d'avoir $X = x$ entier positif) a introduit la "fonction génératrice des p_x " (1) Laplace (1), Livre I, chapitre premier, p.7).

$$G(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n + \dots$$

c'est-à-dire l'espérance mathématique de (z^x) . Le titre très significatif indique une propriété essentielle de $G(z)$ relativement à l'ensemble des p_x .

Il a également donné à cette fonction la forme moderne plus souple en prenant pour variable $t = \frac{1}{i} \text{Log } z$ soit $z = e^{it}$.

Il donne (p. 83, ouvrage cité) le couple de formules :

$$F(t) = \int_0^{\infty} p_x e^{itx} \quad p_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(t) e^{-itx} dt$$

Cette notion est également utilisée par Poisson (1. chap. IV, p.246...) et par Cauchy (voir 1. page 87).

Augustin Cauchy pour étudier la loi des erreurs, avait considéré la fonction caractéristique de variables aléatoires quelconques comme en témoigne une brève note aux Comptes-rendus du 8 Août 1853. L'illustre mathématicien donne les formules de réciprocity. Cette communication n'avait pas attiré l'attention et resta dans l'oubli jusqu'à une époque très récente.

C'est à Poincaré que l'on doit la dénomination actuelle (Poincaré-1, chap. XI, p.206) et la première démonstration explicite de la propriété fondamentale touchant la somme de variables indépendantes. Précisons que Poincaré utilisa la fonction caractéristique sous la forme $E(e^{-tx})$ et qu'il ignora certainement la note de Cauchy sur ce sujet.

L'emploi des fonctions caractéristiques est devenu systématique dans les recherches modernes ; spécialement pour l'étude des sommes de variables aléatoires indépendantes, des lois limites et dans le problème inverse : la décomposition d'une loi de probabilité. Toutes ces questions visent à édifier une théorie de l'arithmétique des lois de probabilité.

C'est tout d'abord M. Paul Lévy qui utilisa systématiquement et dans

(1) Se référer à la bibliographie en dernières pages.

cet esprit la fonction caractéristique dans son cours à l'Ecole Polytechnique en 1920. Ses principaux résultats font l'objet d'une note aux Comptes rendus en 1922 : "Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques". L'auteur apprit un peu plus tard que ces résultats avaient déjà été présentés à l'Académie par Cauchy en 1853. Cette fois, les mathématiciens saisissent toute l'importance de cette notion et son utilisation devient courante.

L'intérêt de la fonction caractéristique réside d'une part dans l'équivalence des données, y compris l'équivalence des limites sous des conditions très générales ; et d'autre part dans la traduction simple de la composition des lois de probabilité. Il convient de préciser que la dépendance des variables que l'on additionne entraîne des complications telles qu'en fait les fonctions caractéristiques ne sont utilisables que pour des variables aléatoires indépendantes.

Signalons les applications suivantes :

L'étude de la loi des erreurs par P. Lévy et sa théorie des lois infiniment divisibles.

La démonstration du théorème de Lévy-Cramer par H. Cramer tout d'abord en 1936, puis par Marcienkiewicz et D. Dugué d'une manière à la fois plus simple et plus étendue.

Les travaux de M. G. Darmois (voir bibliographie) et de son école : Melles E. Mourier et C. Rotschild, C-R Ac. Sc. 10 Déc. 1947 - Féron et Fourgeaud - Publication I.S.U.P. Paris 1952 vol. I, fasc. II, à la fois sur l'analyse factorielle linéaire et sur les propriétés caractéristiques des lois de Laplace-Gauss.

Dans une autre voie, les travaux de Mathias (1923) puis de S. Bochner ont dégagé une classe de fonctions, dites définies positives très voisine de celle des fonctions caractéristiques et réalisant les inégalités qui servent de définition :

$$\sum_i \sum_j f(u_i - u_j) a_i \bar{a}_j \text{ réel positif}$$

S. Bochner a démontré en 1932 l'identité entre les fonctions continues définies positives égales à 1 à l'origine et les fonctions caractéristiques, ce qui permettrait d'étudier les fonctions caractéristiques d'une autre manière.

Le moment était donc venu de présenter une synthèse des propriétés des fonctions caractéristiques. Une première mise au point a été faite en 1937 par M. Geza Kunetz dans sa thèse de doctorat de l'Université de Paris. L'auteur s'est proposé de "donner un aperçu systématique des conditions auxquelles doit satisfaire une fonction donnée pour pouvoir être considérée comme la caractéristique d'une loi de probabilité". Depuis, une importante contribution a été apportée à cette question par M. D. Dugué qui a montré comment certaines propriétés des fonctions caractéristiques se rattachent à des théorèmes généraux de la théorie des fonctions analytiques et en particulier au résultat de M. Hadamard connu sous le nom de "théorème des trois cercles". D. Dugué a de plus publié de nombreux résultats sur le difficile problème de l'Arithmétique des lois de probabilité et ceci à l'aide des fonctions caractéristiques (voir bibliographie). Les premières communications soulignent bien la difficulté du problème. Une synthèse de ces travaux doit paraître prochainement au Mémorial des Sciences Mathématiques.

Parallèlement aux études précédentes, les fonctions définies positives se sont introduites dans la théorie des fonctions aléatoires du second ordre. Cette théorie commencée par A. Khintchine en 1934 a pris depuis un développement considérable avec Slutsky (1937), Kolmogorov (1941), H. Cramer (1941), M. Loève, A. Blanc-Lapierre, R. Fortet pour ne citer que les principaux auteurs. C'est dire que l'instrument mathématique a sous cet aspect été beaucoup plus étudié ; il n'en sera pas question ici sauf une courte allusion (chapitre VI).

Le présent travail vise d'une part à préciser les propriétés descriptives des fonctions caractéristiques ; en particulier à indiquer ce qui distingue les fonctions caractéristiques qui correspondent aux trois types de répartitions simples possibles (chap. I et II) ; d'autre part à étudier des transformations fermées sur la classe des fonctions caractéristiques. Cela permet de transformer des fonctions caractéristiques en sachant le comportement correspondant des distributions ; de pouvoir fabriquer des fonctions caractéristiques sans partir des distributions de probabilité qu'elles représentent et enfin de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit la caractéristique d'une distribution de probabilité. Ces transformations s'appliquent à des catégories plus larges que les fonctions caractéristiques : fonctions définies positives (chap.V) ; fonctions et distributions de type non négatif (chap.VI).

Quatre transformations sont étudiées ici et qui (sous certaines hypothèses d'existence) sont fermées sur les classes précédentes donc en particulier sur les fonctions caractéristiques ; elles permettent aussi de transformer en fonctions caractéristiques des fonctions ou des distributions de type non négatif.

De plus, ces transformations sont deux à deux homologues par la transformation de Laplace, ce sont :

- d'une part : le produit de composition et le produit multiplicatif (chap. IV et VI) ;
- d'autre part : les transformations \mathcal{K} et H (chap. III et VI).

Le produit de composition et la transformation \mathcal{K} s'appliquent normalement à des distributions et leurs fonctions caractéristiques subissent les transformations homologues ; mais on peut avec quelques précautions appliquer ces opérations à certaines catégories de fonctions. La notion de mesure d'une distribution par une fonction met beaucoup d'unité dans ces questions.

Le dernier chapitre traite des fonctions caractéristiques convexes en partant de la définition de Polya. Les conditions suffisantes de Polya sont un peu élargies et la famille des lois est caractérisée en elle-même par des produits de variables aléatoires indépendantes. Enfin des "distributions discontinues convexes" sont envisagées, qui permettent d'obtenir de nouvelles fonctions caractéristiques par produit de composition.

*

Je tiens à témoigner ma reconnaissance toute particulière à mon Maître M. Georges Darmon qui m'a guidé dans tous ces travaux. Par les nombreuses conversations que nous avons eues ensemble, j'ai pu profiter de sa grande expérience dans de nombreux domaines. M. D. Dugué a suivi le développement de ce travail ; je lui dois des conseils, des suggestions et des encouragements précieux ; qu'il reçoive ici le témoignage de ma gratitude. Je remercie aussi M. Lechnerowicz qui a bien voulu guider mon étude sur les questions qui ont fait l'objet de la thèse secondaire.

Pour les fonctions caractéristiques, les fonctions additives sont traitées dans le chapitre I et II. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre III. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre IV. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre V. Les fonctions complètement additives et complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre VI. Les fonctions complètement additives et complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre VII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre VIII. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre IX. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre X. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XI. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XII. Les fonctions complètement additives et complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XIII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre XIV. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre XV. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre XVI. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XVII. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XVIII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre XIX. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre XX. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXI. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XXII. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXIII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre XXIV. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre XXV. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXVI. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XXVII. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXVIII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre XXIX. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre XXX. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXXI. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XXXII. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXXIII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre XXXIV. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre XXXV. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXXVI. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XXXVII. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XXXVIII.

Les fonctions caractéristiques sont traitées dans le chapitre XXXIX. Les fonctions additives sont traitées dans le chapitre XL. Les fonctions multiplicatives sont traitées dans le chapitre XLI. Les fonctions complètement additives sont traitées dans le chapitre XLII. Les fonctions complètement multiplicatives sont traitées dans le chapitre XLIII.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

1. - DÉFINITION D'UNE LOI DE PROBABILITÉ D'UNE SEULE VARIABLE

Une loi de probabilité est définie par sa fonction de répartition (f. r.)

$$F(x) = \text{Prob} \left\{ X < x \right\}$$

C'est une fonction monotone non décroissante variant de 0 à 1. Il résulte des travaux de Lebesgue (1) sur la dérivation et l'intégration des fonctions monotones, qu'une telle fonction est décomposable en trois éléments :

1° - Une fonction de sauts, qui groupe l'ensemble des discontinuités de la fonction F. L'ensemble de ces discontinuités est au plus dénombrable.

2° - Une fonction absolument continue qui admet une dérivée $f(x)$ presque partout et qui est l'intégrale indéfinie de cette dérivée. $f(x)$ définit une "densité" de probabilité : c'est une fonction sommable jamais négative.

3° - Une fonction continue admettant une dérivée nulle presque partout ; cette densité devient infinie sur un ensemble de mesure nulle ayant la puissance du continu.

On peut donc écrire :

$$F(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$$

où p_1, p_2, p_3 sont positifs et de somme unité ; les fonctions $F(x)$ sont des trois types précédents, elles correspondent à trois types de répartition :

$F_1(x)$ est une "fonction de sauts" ou fonction en escalier ; elle caractérise une distribution complètement discontinue ou du type I.

$F_2(x)$ fonction absolument continue définit une distribution absolument continue" ou du type II.

$F_3(x)$ et la distribution correspondante seront dites "singulières" ou de type III.

(1) Voir H. Lebesgue : Leçons sur l'intégration (1928) pp. 158-183-188.

2. - VALEUR PROBABLE D'UNE FONCTION DE VARIABLE ALÉATOIRE

Soit une variable aléatoire de f. r. $F(x)$ et soit $y = g(x)$ une fonction continue bornée de X . On peut considérer $Y = g(x)$ comme une variable aléatoire ayant une fonction de répartition bien définie $G(y)$ et la valeur probable de Y sera par définition :

$$\pi(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, dG(y) \quad (1)$$

Si $g(x)$ est une fonction monotone, cette expression équivaut à l'intégrale de Stieltjes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, dF(x) \quad (2)$$

M. de Finetti a montré que ces deux définitions sont équivalentes lorsque l'intégrale (2) est absolument convergente et l'on note $E[g(x)]$ le résultat de l'une ou l'autre de ces opérations.

(Consulter Fréchet, Recherches modernes sur le Calcul des Probabilités, volume I, p. 47).

3. DÉFINITION D'UNE FONCTION CARACTÉRISTIQUE

La fonction caractéristique associée à une variable aléatoire de f. r. $F(x)$ est :

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \int e^{itx} \, dF(x) \quad (1)$$

intégrale de Lebesgue-Stieltjes, absolument convergente quel que soit t et uniformément convergente par rapport à t : c'est une fonction continue de t , de module inférieur ou égal à 1.

Si t est une variable réelle, la fonction φ est en général complexe :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int \cos tx \, dF(x) + i \int \sin tx \, dF(x) \\ &= A(t) + i B(t) \end{aligned}$$

$A(t)$ est une fonction paire de t

$B(t)$ est une fonction impaire de t .

On résume ces propriétés en disant que $\varphi(t)$ est "hermitienne" :

$$\varphi(-t) = \bar{\varphi}(t)$$

3.a. Signification de $A(t)$ et de $B(t)$

Il est parfois plus commode, et ce sera le cas ici, de choisir pour f. r.

non pas $F(x) = \text{Prob} \{ X < x \}$ mais cette fonction augmentée de $\frac{1}{2} P(x) = \frac{1}{2} \text{Prob} \{ X = x \}$ soit :

$$F_1(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

C'est encore une fonction monotone non décroissante mais ses discontinuités sont de première espèce.

$F(x)$ et $F_1(x)$ diffèrent sur un ensemble de mesure nulle, et par suite les deux intégrales : (1)

$$\int e^{itx} dF(x) \text{ et } \int e^{itx} dF_1(x) \text{ sont égales}$$

1 - $F_1(-x)$ est une f. r. du même type, ainsi que :

$$G(x) = \frac{1}{2} [F_1(x) + 1 - F_1(-x)]$$

et

$$G(-x) = 1 - G(x)$$

$$dG(-x) = dG(x)$$

Posons de plus :

$$H(x) = \frac{1}{2} [F_1(x) + F_1(-x) - 1]$$

$$H(-x) = H(x) \text{ donc } dH(-x) = -dH(x)$$

et

$$F_1(x) = G(x) + H(x)$$

d'où :

$$\begin{cases} A(t) = \int \cos tx dG(x) + \int \cos tx \underset{=0}{dH(x)} = \int \cos tx dG(x) \\ B(t) = \int \sin tx \underset{=0}{dG(x)} + \int \sin tx dH(x) = \int \sin tx dH(x) \end{cases} \quad (2)$$

Or $G(x)$ est la f. r. de la répartition "symétrique moyenne" et $H(x)$ est la "pseudo f. r." qu'il faut ajouter à $G(x)$ pour obtenir F_1 .

$A(t)$ est donc une fonction caractéristique : celle de la distribution "symétrique moyenne" de la distribution donnée.

$iB(t)$ n'est pas une fonction caractéristique mais la transformée de Laplace de la pseudo répartition $H(x)$.

Dans le cas particulier d'une distribution admettant partout une densité continue $f(x)$ les notations précédentes se simplifient ainsi que la signification des calculs :

(1) Pour simplifier les notations \int indiquera dans ce qui suit l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$.

La densité "symétrique moyenne" est $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ fonction paire

La densité complémentaire est : $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ fonction impaire

$A(t)$ est la f. c. de la distribution de densité $g(x)$,

$iB(t)$ est la p. f. c. de la pseudo distribution de densité $h(x)$.

4. - FORMULES DE RÉCIPROCITÉ

On sait que $\varphi(t)$ est bien caractéristique de la répartition à laquelle elle est associée. Cet énoncé résulte de la formule générale (1) maintenant classique :

$$F_1(b) - F_1(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} dt \quad (1)$$

en particulier :

$$F_1(a) - F_1(o) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{1 - e^{-iat}}{it} \varphi(t) dt \quad (2)$$

Pour n'introduire que des fonctions réelles, on peut écrire ces formules sous la forme suivante :

$$F_1(a) - F_1(o) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \left[\frac{\sin at}{t} \frac{\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)}{2} + \frac{1 - \cos at}{t} \frac{\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)}{2i} \right] dt$$

Les remarques précédentes précisent la signification des deux termes de l'intégrale : le premier se rapporte à $G(x)$ et le second à $H(x)$.

Dans le cas particulier d'une répartition absolument continue et pourvue d'une densité $f(x)$ celle-ci est définie par :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) e^{-itx} dt \quad (3)$$

Au contraire dans le cas d'une répartition absolument discontinue, la formule suivante sera plus utile :

$$p(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) e^{-itx} dt \quad (4)$$

(1) P. Levy : Calcul des Probabilités, Paris (1925) p. 166.

5. - ADDITION DE VARIABLES ALÉATOIRES

Les résultats relatifs à l'addition de variables aléatoires indépendantes sont classiques et justifient l'emploi systématique des f.c. dans les problèmes de composition ou d'analyse de lois de probabilité. En général, on rattache la f.c. d'une somme de variables à l'espérance mathématique d'un produit (e^{itx} par e^{ity} après avoir montré que ces fonctions sont indépendantes en même temps que X et Y). Il nous semble plus intéressant de rattacher ici cette question au produit de composition qu'on utilisera plus loin d'une manière systématique.

Soit donc :

$$X \text{ de f.r. } F(x) \text{ et de f.c. } \varphi_1(t) = e^{itx} dF(x)$$

$$Y \text{ de f.r. } G(x) \text{ et de f.c. } \varphi_2(t) = e^{ity} dG(x)$$

$$Z = X + Y \text{ de f.r. } H(x) \text{ et de f.c. } \varphi(t)$$

$$H(x) = F(x) * G(x) \text{ c'est-à-dire } H(x) = \int F(x-y) dG(x) \quad (1)$$

Cette relation est équivalente à :

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \quad (2)$$

Démonstration

Supposons (1) réalisée et formons :

$$\varphi_1 \varphi_2 = \iint e^{it(x+y)} dF(x) dG(y)$$

intégrale absolument convergente quel que soit t.

Si $x + y = u$

$$\varphi_1(t) \varphi_2(t) = \iint e^{itu} dF_u(u-y) dG(y)$$

où dF_u désigne la différentielle de F par rapport à la variable u

En intégrant en y il vient :

$$\varphi_1(t) \varphi_2(t) = \int e^{itu} d_u \left\{ \int F(u-y) dG(y) \right\}$$

soit en tenant compte de (1) :

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi(t)$$

Réciproquement :

soit :

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$$

où :

$$\varphi(t) = \int e^{itu} dH(u)$$

$$\int e^{itu} dH(u) = \iint e^{itx} dF(x) e^{ity} dG(y)$$

$$\int e^{itu} dH(u) = \iint e^{itu} dF_u(u-y) dG(y)$$

$$= \int e^{itu} d_u \left\{ \int F(u-y) dG(y) \right\} \quad (1)$$

et en vertu des propriétés de détermination des f. r. par la f. c. :

$$H(u) = \int F(u-y) dG(y)$$

Conclusion relative aux variables indépendantes.

Si X et Y sont indépendantes leur somme a pour f. c. le produit des f. c. des variables X et Y.

6. - RÉPARTITION A PLUSIEURS DIMENSIONS

Soit un ensemble de deux variables aléatoires X et Y. La répartition est définie par la donnée $F(x, y) = \text{Prob} \begin{cases} X < x \\ Y < y \end{cases}$ fonction non décroissante de x et de y et de variation totale 1.

Les f. r. marginales sont : $F(x, \infty) = F(x, .)$
 $F(\infty, y) = F(. , y)$

6.a. Loix liées

Soit x appartenant à un domaine D : $x_0 < x < x_0 + h$ tel que : $\Delta_h F(x_0, .) = F(x_0 + h, .) - F(x_0, .)$ soit strictement positif.

La fonction de y $\frac{\Delta_h F(x_0, y)}{\Delta_h F(x_0, .)}$ est une f. r. : c'est la f. r. de Y lié par $X \in D$.

6.b. Fonction caractéristique d'un ensemble aléatoire à plusieurs dimensions

Au couple XY on associe les variables auxiliaires r, s et l'on forme :

$$\Phi(r, s) = E \left[e^{i(rX + sY)} \right] = \iint e^{i(rX + sY)} d_x d_y F(xy)$$

6.c. Somme de v.a. liées

En particulier la variable $U = X + Y$ a pour f. r. $H(u) = \iint d_x d_y F(x, y)$ intégrale étendue au domaine $x + y < u$ et $\varphi = \varphi_u(t)$ n'est plus, en général, égal au produit $\varphi_1 = \varphi_x(t)$ par $\varphi_2 = \varphi_y(t)$. Les f. r. marginales sont $F(x.)$ et $F(.y)$.

Il peut arriver pourtant que :

$$H(u) = F(x.) * F(.y) \text{ et } \varphi = \varphi_1 \varphi_2$$

bien que les variables composantes soient liées.

Analysons comment peut se présenter cette éventualité :

Soit une répartition en (x, y) de variables aléatoires indépendantes admettant $F(x)$ et $G(y)$ pour fonctions de répartition marginales et soit $H(u)$ la f. r. de $u = x + y$.

Ajoutons une "pseudo-répartition" de masses positives et négatives avec les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masse nulle sur tout intervalle } \Delta x \\ \text{masse nulle sur tout intervalle } \Delta y \\ \text{masse nulle sur tout intervalle } \Delta (x+y) \end{array} \right. \quad (1)$$

La nouvelle répartition admet encore F, G, H pour f. r. de x, y et de u et :

$$H = F * G$$

donc $\varphi_u(t) = \varphi_x(t) \cdot \varphi_y(t)$ bien que X et Y soient liés en probabilité.

(On imposera évidemment à la nouvelle répartition d'avoir des masses partout positives).

Réciproquement :

Soit les f. c. $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ de U, X, Y avec $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, où $U = X + Y$ et X, Y non indépendantes.

On a donc :

$$H = F * G$$

où F et G sont les f. r. marginales de X et de Y .

Formons la combinaison indépendante de ces deux répartitions : on obtient une nouvelle répartition en (x, y) qui a les mêmes fonctions de répartition que la distribution donnée : en X seul
 en Y seul
 en $X + Y$

La différence des deux distributions réalise donc les conditions (1).

Remarque

Si $\Phi(r, s)$ est la f. c. du couple (X, Y) ; on sait qu'il est nécessaire et suffisant d'avoir :

$$\Phi(r, s) = \Phi(r, 0) \cdot \Phi(0, s)$$

pour que X et Y soient indépendants.

Il suffit pour ce qui nous intéresse ici que cette relation soit satisfaite sur la droite $r = s$.

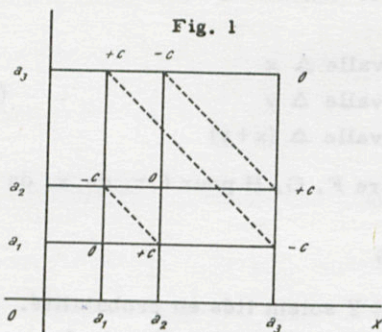
Des exemples ont été donnés par H. Cramer (1) et H. Robbins (2), dans lesquels les conditions (1) sont réalisées de manières très simples.

Ajoutons que les relations (5.1) ou (5.2) appliquées à des variables composantes soumises séparément à une même loi (donc $F = G$) impliquent l'indépendance dans le seul cas d'une loi discontinue à deux possibilités.

Dans ce cas en effet il est impossible d'associer des masses non toutes nulles réalisant :

$$\begin{array}{rcl} b + d = 0 & a + b = 0 & b = 0 \\ a + c = 0 & c + d = 0 & a + d = 0 \\ & & c = 0 \end{array}$$

Par contre, dès qu'il y a au moins trois valeurs possibles pour les variables composantes on peut associer une pseudo-répartition non identiquement nulle.



Exemple : Cas de trois valeurs possibles. Aux probabilités de chacun des neuf points on ajoute les quantités indiquées sur la figure.

Dans le cas de plus de trois valeurs possibles, on extrait pour X et pour Y trois valeurs particulières :

$$x = y = a_1, \quad x = y = a_2, \quad x = y = a_3$$

et à cet ensemble partiel on applique la transformation de la figure 1.

Pour des distributions continues, les neuf points sont remplacés par des domaines élémentaires.

Si les lois marginales de X et de Y sont différentes et complètement discontinues, il faut qu'il existe trois valeurs possibles de X et trois de Y admettant deux à deux les mêmes différences. Dans ces conditions et là seulement, on retrouve la figure (1) et l'on peut avoir une répartition en x, y non indépendante pour laquelle :

$$\varphi_{(x+y)}(t) = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$$

(1) H. Cramer Mathematical Methods of Statistics, 1946, Exercice p. 317, n°2.

(2) H. Robbins, Annals of Math. Stat. sept. 1948.

CHAPITRE II

LES TROIS TYPES DE FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

7. - INTRODUCTION - PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Les fonctions caractéristiques transformées de Laplace de fonctions de répartition ne sont pas des fonctions arbitraires. D'après leur définition on voit immédiatement qu'elles réalisent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi(t) & \text{ continue} \\ |\varphi(t)| & \leq 1 \\ \varphi(-t) & = \bar{\varphi}(t)\end{aligned}$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes et avant d'aller plus loin nous nous proposons de préciser les caractères qui différencient les fonctions associées aux trois types de répartition.

A. - FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE RÉPARTITION DISCONTINUE

8. - FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE TYPE I OU PRESQUE PÉRIODIQUES

Soit une distribution dont la fonction de répartition se réduit à une "fonction de sauts", on peut la définir par l'ensemble des sauts p_x aux points x d'un ensemble au plus infini dénombrable.

Dans ce cas la fonction caractéristique se présente comme une série de termes en $p_j e^{itaj}$: c'est une fonction presque périodique (f.p.p.).

Rappelons la définition donnée par H. Bohr⁽¹⁾

Soit une fonction $f(x)$ continue. On dit que l est une pseudo-période à ε près si :

$$|f(x+l) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{quel que soit } x$$

(1) Harald Bohr - Almost Periodic Functions, Chelsea Publishing Company, New-York, 1951, p.31.

La fonction $f(x)$ est dite "presque périodique" si quel que soit ε , il existe une amplitude A telle que tout intervalle $(y, y + A)$ contient au moins une pseudo-période

$$y < \ell < y + A$$

C'est dire en particulier qu'il existe des pseudo-périodes aussi grandes qu'on le veut.

Bohr démontre que la somme d'un nombre fini de f. p. p. est une f. p. p. (p. 36 à 38).

Or $p_j e^{itaj}$ fonction périodique est aussi presque périodique, donc également :

$$\sum_{j=1}^n p_j e^{itaj}$$

Cette propriété s'étend au cas d'une infinité de points a_j à masse positive.

On peut choisir n assez grand pour que $\sum_{j=1}^n p_j > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$

La fonction $F(t) = \sum_{j=1}^n p_j e^{itaj}$ est une f. p. p. Soit d une pseudo-période à $\varepsilon/2$ près ; elle est pour φ une pseudo-période à ε près.

En effet :

$$|\varphi(t + \delta) - \varphi(t)| < |F(t + \delta) - F(t)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

8. a. Conséquences de cette propriété fondamentale

1° - $\varphi(t)$ a pour plus grande limite 1.

Soit T arbitrairement grand et ε arbitrairement petit. Il existe une pseudo-période $> T$ à ε près : soit ℓ :

et

$$|\varphi(\ell) - \varphi_0| < \varepsilon$$

soit :

$$|\varphi(\ell)| > 1 - \varepsilon$$

C'est dire que le maximum de $|\varphi(t)|$ pour $t > T$ est $+1$.

2° - Formule de réciprocité - expression des p_j -

D'une manière générale :

$$p_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) e^{-itaj} dt$$

Or ici φ est presque périodique, de même que $\varphi(t) e^{-itaj}$ et d'après le théorème de la valeur moyenne forte (cf. Bohr p. 44) cette limite est obtenue d'une manière plus générale par :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{s-T}^{s+T} \varphi(t) e^{-itaj} dt$$

elle est atteinte uniformément par rapport à s . On peut donc écrire la formule de réciprocity sous la forme suivante :

$$p_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{s-T}^{s+T} \varphi(t) e^{-itaj} dt \quad (1)$$

3° - Comportement de $\varphi(t)$ pour les grandes valeurs de t .

Soit une loi discontinue pouvant prendre la valeur 0 avec la probabilité p_0 .

$$p_0 = \limite_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \varphi(t) dt$$

et ceci est réalisé si grand que soit a .

Remarque

La valeur p_0 a une influence très particulière sur $\varphi(t)$ et différente des autres valeurs p_j . La f.c. a en effet pour valeur moyenne p_0 et les valeurs qu'elle peut prendre sont dans un intervalle symétrique autour de p_0 , c'est-à-dire comprises entre $2 p_0 - 1$ et 1 . Cette borne inférieure possible n'est pas toujours atteinte. Exemple :

Loi de Poisson pour $m = 1$

$$\varphi = e^{(e^{it}-1)} \quad \text{de module } P = e^{\cos t - 1}$$

$$\text{d'argument} = \sin t$$

Le maximum du module obtenu pour $t = 2 K \pi$ vaut 1 } Ce sont les
 Le minimum du module obtenu pour $t = \pi + 2 K \pi = \frac{1}{e^2}$ } seules valeurs
 réelles de φ .

Enfin P_0 vaut $\frac{1}{e}$.

Ici la valeur moyenne de la fonction est moyenne géométrique des valeurs réelles extrêmes prises par φ .

9. - FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PÉRIODIQUES

On considère les fonctions Φ de la variable réelle t .

D'autre part un ensemble de points d'abscisses $x = a + kl$ où $\frac{l}{a}$ est irrationnel et k prend toutes les valeurs entières (positif, négatif, ou nul) est représenté par $T(a, l)$.

Une distribution de probabilité où les seules valeurs possibles appartiennent à T est dite "distribution de treillis" $T(a, l)$.

Un cas particulier important est celui où $a = 0$; on le désignera par $T(l)$. Si $\frac{l}{a}$ est rationnel, l et a admettant pour commun diviseur d , $T(a, l)$ est un sous-ensemble de $T(d)$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une f.c. admette la période réelle θ est qu'elle soit la f.c. d'une distribution de treillis contenant l'origine.

C'est-à-dire que les valeurs possibles de x sont de la forme :

$$x \in T \left(\frac{2\pi}{\theta} \right)$$

Condition nécessaire :

$\varphi(\theta) = \varphi(0) = 0$ et la masse (+ 1) est sur l'ensemble des valeurs x telles que :

$$\theta x = 2 h \pi \quad h \text{ entier} > 0$$

$$= 0$$

$$< 0$$

$$x = h \cdot \frac{2\pi}{\theta}$$

Condition suffisante

Si : $x \in T \left(\frac{2\pi}{\theta} \right)$

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P_k e^{itk} \cdot \frac{2\pi}{\theta}$$

$$\varphi(t + \theta) = \sum P_k e^{i(t+\theta)k} \frac{2\pi}{\theta} = \left(\sum P_k \right) \sum P_k e^{itk} = \varphi(t)$$

Remarque : Il suffit, pour que les conditions précédentes soient réalisées que $\varphi(t) = 1$ pour une valeur de t différente de zéro.

Formule de réciprocity

Si $\varphi(t)$ admet la période θ ; la formule (4.4) se simplifie sous la forme suivante :

$$P(x) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} \varphi(u) du \quad (1)$$

où t est une valeur arbitraire.

Développement de Fourier de la f.c.

La f.c. d'une distribution de treillis $T(\ell)$ est de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= p_0 + p_1 e^{it\ell} + \dots + p_k e^{itk\ell} + \dots \\ &\quad + p'_1 e^{-it\ell} + \dots + p'_k e^{-itk\ell} + \dots \\ &= p_0 + (p_1 + p'_1) \cos t\ell + \dots + (p_k + p'_k) \cos tk\ell + \dots \\ &\quad + i(p_1 - p'_1) \sin t\ell + \dots + i(p_k - p'_k) \sin tk\ell + \dots \end{aligned}$$

Réciproquement, en vertu du théorème de Cantor sur l'unicité du développement en série de Fourier, on déduit immédiatement des coefficients (a_k, b_k) du développement, les valeurs p_k et p'_k :

$$p_k = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b_k}{i} \right)$$

$$p'_k = \frac{1}{2} \left(a_k - \frac{b_k}{i} \right)$$

Théorème

Si $|\varphi(t_0)| = 1$ pour $t_0 \neq 0$

La distribution est une distribution de treillis $T(a, \ell)$. En effet :

$$t_0 x = 2 h \pi + \alpha \quad \text{si } \varphi(t_0) = e^{i\alpha}$$

$$x = \frac{2 \pi}{t_0} + \frac{\alpha}{t_0}$$

si : $a = \frac{\alpha}{t_0} \quad \ell = \frac{2 \pi}{t_0}$ on voit que $x \in T(a, \ell)$

et dans ce cas :

$$\varphi(2 t_0) = e^{2i\alpha} = \varphi^2(t_0)$$

$$\varphi(n t_0) = e^{n i \alpha} = \varphi^n(t_0)$$

La fonction est presque périodique, mais les valeurs qui donnent à $\varphi(t)$ le module 1 ont exactement la période t_0 .

10. - PÉRIODICITÉ DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Nous allons montrer qu'une f.c. ne peut avoir de période complexe ni imaginaire pure. La propriété de convexité des f.c. suffit pour établir ce résultat.

Théorème I de convexité

Etudions $\varphi(t)$ pour $t = iz$ où z est réel

$$\varphi(iz) = \int e^{-zx} dF(x)$$

Quand cette intégrale est convergente, elle définit une fonction réelle et positive de z .

Donnons à z trois valeurs en progression arithmétique :

pour $z - h$ on a : $\varphi_1 = \int e^{-zx} e^{hx} dF(x)$

pour z on a : $\varphi_2 = \int e^{-zx} dF(x)$

pour $z + h$ on a : $\varphi_3 = \int e^{-zx} e^{-hx} dF(x)$

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} = \int e^{-zx} \text{ch.}(hx) dF(x) > \int e^{-zx} dF(x) = \varphi_2$$

d'où : $\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} > \varphi_2$

Il n'y a égalité que si $dF = 1$ pour $x = 0$ auquel cas $\varphi \equiv 1$.

Théorème II : Une f. c. ne peut avoir de période imaginaire pure.

Si $\varphi(t)$ avait pour période ih on aurait :

$$\varphi(ih) = \varphi(-ih) = \varphi_0 = 1$$

Ceci, en vertu du théorème I est impossible, sauf si $\varphi = 1$.

Théorème III : Une f. c. ne peut avoir de période complexe⁽¹⁾.

Supposons que $a + ib$ soit une période de $\varphi(t)$.

On aura alors :

$$\varphi(-a) = \varphi(ib)$$

$$\varphi(+a) = \varphi(-ib)$$

or $\varphi(ib)$ et $\varphi(-ib)$ sont réels ; $\varphi(a)$ et $\varphi(-a)$ le seraient aussi, mais alors ils seraient égaux d'où les inégalités :

$$0 < \varphi(ib) = \varphi(-ib) \leq 1$$

ce qui est en contradiction avec la relation de convexité :

$$\frac{\varphi(ib) + \varphi(-ib)}{2} > 1$$

B. - FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE RÉPARTITIONS ABSOLUMENT CONTINUES

11.- La f. r. $F(x)$ est absolument continue ; il y a donc presque partout une densité $f(x)$, cette dernière étant une fonction sommable.

Théorème

Si la répartition est absolument continue, $\varphi(t)$ tend en module vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Ce théorème est l'équivalent d'un résultat classique de la théorie des séries de Fourier, connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue et qui s'énonce ainsi :

Les coefficients (a_n et b_n) des séries de Fourier tendent toujours vers zéro quand l'indice augmente indéfiniment⁽²⁾.

Voici une démonstration adaptée à notre propos :

(1) Voir E. Lukacs - On certain periodic characteristic functions - Proceedings of the International congress of Mathematicians - Amsterdam 1954. Vol. 2 - p. 296.

(2) H. Lebesgue : Sur les séries trigonométriques. Annales Ecole Normale Supérieure 3ème Série - Tome 20, année 1903 - p. 471.

a) Démonstration pour les fonctions $f(x)$ intégrables au sens de Riemann.

Pour calculer :

$$\varphi(t) = \int e^{itx} f(x) dx$$

t étant donné, décomposons le champ de variation de x en intervalles d'amplitude $\frac{2\pi}{t}$ à partir de l'origine.

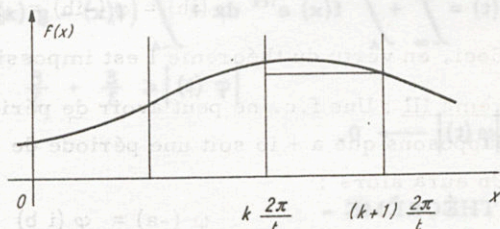


Fig. 2

Pour :

$$k \frac{2\pi}{t} < x < (k+1) \frac{2\pi}{t}$$

on pose $f(x) = m_k + \varepsilon_k(x)$ où $m_k = \min. f(x)$ dans l'intervalle.

L'intégrale des quantités $e^{itx} m_k$ est nulle ; celle des $\varepsilon_k(x)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$ par définition même de l'intégrale de Riemann : donc $|\varphi(t)| \rightarrow 0$.

Remarquons que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} e^{itx} f(x) dx$$

tend aussi vers 0 en module et pour les mêmes raisons.

b) Extension au cas de fonctions sommables (au sens de Lebesgue).

Nous nous appuyerons sur le théorème suivant :⁽¹⁾

Si $f(x)$ est une fonction sommable, on peut construire une fonction absolument continue $g(x)$ telle que, η étant préalablement donné, on ait :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \eta$$

Considérons tout d'abord l'intervalle $(-A, +A)$ tel que :

$$F(-A) + 1 - F(A) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Remplaçons alors dans $(-A, +A)$ $f(x)$ par $g(x)$ absolument continue telle que :

$$\int_{-A}^{+A} |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On peut choisir T assez grand tel que, pour $t > T$:

$$\left| \int_{-A}^A g(x) e^{itx} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(1) Voir : Titchmarsh : The theory of Functions p.376, ou Hobson I : The theory of Functions of real variables, p.632.

On aura donc :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{-A} f(x) e^{itx} dx + \int_A^{+\infty} f(x) e^{itx} dx + \int_{-A}^A (f(x) - g(x)) e^{itx} dx + \int_{-A}^A g(x) e^{itx} dx$$

$$|\varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

donc $|\varphi(t)| \rightarrow 0$.

11.a. - THÉORÈME -

Les f. c. du type II a densité finie sont des fonctions de carré sommable :

La différence u des deux échantillons X indépendants d'une même loi a pour f. c. :

$$\varphi_u(t) = |\varphi_x(t)|^2$$

La densité en u pour u = 0 est :

$$\int f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int |\varphi(t)|^2 dt$$

L'intégrale à gauche à un sens puisque f(x) est positive, finie sommable et dans ces conditions celle de droite a aussi une limite. Les f. c. de ce type appartiennent à la classe $L_2(-\infty + \infty)$ de Lebesgue.

11.b. Formules de réciprocité

La densité en un point est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) e^{-itx} dt \quad \text{limite prise pour } T \rightarrow \infty$$

et où :

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

Or $\varphi(t) e^{-itx}$ est une f. c. soit A(t) + ib(t).

$$g(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} A(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{+T} B(t) dt$$

Ces intégrales ont un sens dans la mesure où $\int_0^{\infty} A(t) dt$ est convergent.

En effet $\int_0^{\infty} B(t) dt$ qui représente $\pi h(0)$ est en module inférieur à $\int_0^{\infty} A(t) dt$

Dans le cas contraire f(x) devient infini.

On peut donc écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt$$

Si l'on pose $f(x) = g(x) + h(x)$

avec : $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = 2 \int_0^{\infty} g(x) \cos tx \, dx \\ B(t) = 2 \int_0^{\infty} g(x) \sin tx \, dx \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(t) \cos tx \, dt \\ h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(t) \sin tx \, dt \end{array} \right.$$

12. - CLASSE (A) DES F. C. ABSOLUMENT SOMMABLES

Parmi les f.c. de distributions absolument continues, celles qui sont absolument sommables jouent un rôle important dans de nombreuses démonstrations ou leurs propriétés simples les font utiliser comme instruments de calcul. Ajoutons que les f.c. de cette classe sont les plus utilisées en pratique.

Nous désignerons donc par (A) la classe des fonctions $\mu(t)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\mu(t) = \int e^{itx} m(x) \, dx \quad \text{où } m(x) > 0$$

$$\int m(x) \, dx = 1$$

et :

$$\int |\mu(t)| \, dt \text{ fini}$$

$m(x)$ est une densité de probabilité, fonction sommable sur $(-\infty, +\infty)$ et $\mu(t)$ la f.c. correspondante, supposée absolument intégrable.

Réciproquement :

$$m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \mu(t) \, dt$$

mais cette dernière intégrale est absolument convergente quel que soit x et uniformément convergente par rapport à x : c'est donc une fonction continue, bornée de x .

Exemples de telles fonctions :

$$\mu(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \mu(t) = e^{-|t|}$$

La plus intéressante est :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{t}{a} \right| & \text{pour } |t| < a \\ 0 & \text{pour } |t| > a \end{cases} \quad \left. \vphantom{\varphi(t)} \right\} \text{ nous la noterons } k\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\int e^{-itx} k\left(\frac{t}{a}\right) dt = a \left(\frac{\sin \frac{at}{2}}{\frac{at}{2}} \right)^2$$

Par extension, nous désignerons également par (A) les lois de probabilité admettant pour f.c. une fonction de la classe (A).

Théorème : Pour que la somme de deux valeurs aléatoires indépendantes ait une loi du type A il suffit que l'une des variables soit de ce type.

En effet, si $\varphi(t)$ est f.c. quelconque

$\varphi(t) \mu(t)$ est en module inférieur à $|\mu(t)|$ et par suite de la classe (A).

Application à l'étude de la convergence en loi

Toute loi ℓ peut être limite d'une famille des lois du type A. On sait que l'ensemble des f.r. est compact. On peut définir une loi quelconque ℓ comme limite des lois ℓ_n et $\Phi(t)$ est limite de $\Phi_n(t)$ (limite atteinte uniformément dans tout intervalle fini de t).

Soit $\mu(t)$ une f.c. de la classe (A).

Formons les suites de f.c.

$$g_n(t) = \Phi_n(t) \mu\left(\frac{t}{n}\right)$$

elles appartiennent à (A) et définissent des lois ℓ'_n du type A.

Si $n \rightarrow \infty$ $g_n \rightarrow \Phi$ et cette limite est atteinte uniformément dans tout intervalle fini de t donc $\ell_n \rightarrow \ell$.

C. - FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE DISTRIBUTIONS SINGULIÈRES

13. - Les distributions singulières ont une structure plus compliquée que les autres types de distributions dont elles sont un intermédiaire. Leurs f.c. ont également des propriétés intermédiaires entre celles indiquées aux deux chapitres précédents, leurs caractères sont donc plus "instables" et ne peuvent se formuler d'une manière aussi précise que ceux des f.c. déjà étudiées.

Nous nous bornerons à étudier quelques cas concrets de distributions sur l'ensemble triadique de Cantor et d'autres ensembles généralisés; nous verrons que le comportement à l'infini peut être variable.

13.a. Premier exemple

On considère une suite de variables aléatoires :

$$X_1 = \begin{cases} 2 \cdot 1/3 & \text{proba } 1/2 \\ -2 \cdot 1/3 & \text{proba } 1/2 \end{cases} \quad \text{sa f.c. } \varphi_1(t) = \cos \frac{2t}{3}$$

$$X_2 = \begin{cases} 2 \cdot 1/3^2 & \text{proba } 1/2 \\ -2 \cdot 1/3^2 & \text{proba } 1/2 \end{cases} \quad \text{sa f.c. } \varphi_2(t) = \cos \frac{2t}{3^2}$$

$$X_n = \begin{cases} 2 \cdot 1/3^n & \text{proba } 1/2 \\ -2 \cdot 1/3^n & \text{proba } 1/2 \end{cases} \quad \text{sa f.c. } \varphi_n(t) = \cos \frac{2t}{3^n}$$

On étudie la limite pour n infini de $X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots$

C'est une répartition sur le segment $(-1, +1)$ qui ne contient aucune masse sur la partie $(-1/3 + 1/3)$, sauf aux bornes et la structure sur les segments extrêmes est analogue à celle sur $(-1, +1)$; c'est dire que la répartition limite est sur l'ensemble triadique de Cantor, ensemble de mesure nulle, mais ayant la puissance du continu.

La f.c. de cette distribution est obtenue par limite d'un produit infini :

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{2t}{3} \cos \frac{2t}{3^2} \dots \cos \frac{2t}{3^n} \dots$$

Relation fonctionnelle :

La f.c. précédente réalise :

$$\varphi(3t) = \cos 2t \varphi(t)$$

Etude pour les grandes valeurs de la variable.

On choisit pour cela des valeurs de t en progression géométrique de raison 3.

$$t_0 \quad t_1 = 3 t_0 \dots t_n = 3^n t_0 \dots \text{etc} \dots$$

$$\varphi(t_n) = \cos 2 t_{n-1} \varphi(t_{n-1})$$

$$= \cos(3^{n-1} \cdot 2 t_0) \varphi(t_{n-1})$$

1° - Le rapport $\frac{t_0}{\pi}$ est irrationnel. Dans la suite des $\varphi(t_n)$ lorsque n augmente, il s'introduit chaque fois un facteur tel que $\cos(3^{n-1} \cdot 2 t_0)$. Il y aura autant de facteurs compris entre $(-1 + \alpha)$ et $(1 - \alpha)$ qu'on le veut et par suite $\varphi(t_n)$ tend vers 0 avec $1/n$.

2° - Valeur initiale $t_0 = \frac{m}{p} r$ ou $\frac{m}{p}$ est une fraction réduite, le dénominateur p contenant d'autres facteurs que $3^k \cdot 2$ (k entier quelconque). Les facteurs nouveaux qui s'introduisent en tête du produit infini, pour la suite des valeurs considérées de t sont :

$$\cos 2 t_0 \quad \cos(2 \cdot 3 t_0) \dots \cos(2 \cdot 3^k t_0) \text{ etc} \dots$$

donc si $p = 3^k \cdot 2 \cdot p'$, on obtient à partir d'un certain rang :

$$\cos \frac{m}{p'} \pi \quad \text{puis} \quad \cos \frac{3m}{p'} \pi \quad \dots \quad \cos \frac{3^n m}{p'} \pi \quad \text{etc} \dots$$

toutes ces valeurs sont en module inférieures ou égales à $\cos \frac{\pi}{p'}$ et par suite $\varphi(t_n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

3° - Valeur initiale $t_0 = \frac{m}{2 \cdot 3^h} \pi$ m entier positif ainsi que h

$$\varphi(t_{h+1}) = \cos m\pi \varphi(t_h) \quad \text{avec} \quad t_h = m \frac{\pi}{2}$$

et par suite :

$$|\varphi(t_{h+n})| = |\varphi(t_{h+1})| = |\varphi(m \frac{\pi}{2})|$$

toutes ces valeurs absolues sont égales, si grand que soit n .

Etude de l'ensemble des maxima relatifs

Ce sont les valeurs $\varphi(m \frac{\pi}{2})$ ou m est un entier positif, qu'on supposera ne pas contenir de facteur 3 dans son développement en produit de nombres premiers (ces cas éliminés se ramènent à ceux étudiés après décalage des indices)

$$\varphi(m \frac{\pi}{2}) = \cos m \frac{\pi}{3} \cos m \frac{\pi}{3^2} \dots \cos m \frac{\pi}{3^n} \dots$$

Le premier facteur ne peut pas être en module supérieur à $\cos \frac{\pi}{3}$

Le second facteur ne peut pas être en module supérieur à $\cos \frac{\pi}{3^2}$

Le n ième facteur ne peut pas être en module supérieur à $\cos \frac{\pi}{3^n}$

le maximum absolu pour les grandes valeurs de t est donc :

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3^2} \dots \cos \frac{\pi}{3^n} \dots$$

valeur obtenue exactement pour $t_1 = \frac{\pi}{2}$ $t_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ \dots $t_n = 3^n \frac{\pi}{2}$ etc ...

CONCLUSION

$\varphi(t)$ a une plus grande limite lorsque $t \rightarrow \infty$ égale en module à $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3^2} \dots \cos \frac{\pi}{3^n} \dots$. Ce premier exemple montre qu'une f.c. de répartition singulière a une plus grande limite comprise entre zéro et un. Deux autres exemples vont montrer que cette plus grande limite peut être zéro et peut être aussi voisine de 1 que l'on veut.

13.b. Deuxième exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = + 3/5 \text{ proba } 1/2 \\ \quad = - 3/5 \text{ proba } 1/2 \end{array} \right\} \varphi_1(t) = \cos 3/5 t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n = + 3/5 (2/5)^{n-1} \text{ proba } 1/2 \\ \quad = - 3/5 (2/5)^{n-1} \text{ proba } 1/2 \end{array} \right\} \varphi_n(t) = \cos 3/5 (2/5)^{n-1} t$$

et l'on étudie la répartition limite de $\sum_1^{\infty} X_i$.

C'est une répartition singulière, obtenue par le procédé de Cantor en supprimant chaque fois le 1/5 de l'intervalle restant.

La f.c. de cette répartition est :

$$\varphi(t) = \cos 3/5 t \cdot \cos 3/5 \cdot 2/5 t \dots \cos 3/5 (2.5)^n t \dots$$

Elle réalise la relation fonctionnelle :

$$\varphi\left(\frac{5}{2} t\right) = \cos 3/2 t \varphi(t)$$

On fera croître t suivant les termes d'une progression géométrique de raison 5/2 à partir de t_0 .

$$\varphi(t_1) = \cos 3/2 t_0 \varphi(t_0)$$

$$\varphi(t_2) = \cos 3/2 \cdot 5/2 t_0 \varphi(t_1)$$

Les facteurs supplémentaires du développement infini qui s'introduisent lorsque n augmente sont :

$$\cos 3/2 t_0 \cos 3/2 \cdot 5/2 t_0 \dots \cos 3/2 (5.2)^n t_0 \dots$$

Le produit infini ne peut être convergent (limite pour $n \rightarrow \infty$ de $\varphi(t_n) \neq 0$) que si, à partir d'un certain rang tous les angles sont voisins de $k\pi$. Or si l'un d'eux réalise cette condition, les angles suivants sont voisins de :

$$\frac{5}{2} k\pi \text{ puis } (5/2)^2 k\pi \text{ etc } \dots$$

ce qui fait nécessairement aboutir à un multiple impair de $\pi/2$ dont le cosinus est nul. Donc dans la suite des facteurs, chaque terme voisin de 1 est suivi d'un terme voisin de zéro.

Conclusion : Quel que soit t_0 la limite pour n infini de $\varphi(t_n)$ est nulle.

13. c. - TROISIEME EXEMPLE -

La plus grande limite peut être aussi voisine de 1 qu'on le veut.

On considère la suite infinie des variables aléatoires.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = +\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{probabilité } 1/2 \\ X_1 = -\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{probabilité } 1/2 \end{array} \right\} \varphi_1(t) = \cos \frac{n-1}{n} t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{p+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^p} \quad \text{probabilité } 1/2 \\ X_{p+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^p} \quad \text{probabilité } 1/2 \end{array} \right\} \varphi_{p+1}(t) = \cos \frac{n-1}{n} \frac{1}{n^p} t$$

La répartition limite de la somme de ces variables est singulière

$$\sum_{i=2}^{\infty} |X_i| = \frac{1}{n}$$

Il n'y aura aucune masse dans l'intervalle $(-1 + \frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n})$ et dans la

partie analogue des intervalles qui subsistent. Cette répartition peut être obtenue par le procédé de Cantor en supprimant les masses sur une portion égale aux $\frac{n-2}{n}$ de chaque segment.

Cette répartition a pour f. c.

$$\varphi(t) = \cos\left(1 - \frac{1}{n}\right)t \cos\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)t \dots \cos\frac{1}{n^s}\left(1 - \frac{1}{n}\right)t \dots$$

$\varphi(t)$ réalise la relation fonctionnelle :

$$\varphi(nt) = \cos(n-1)t \varphi(t)$$

Une étude analogue à celle du premier exemple montre que le maximum absolu de $\varphi(t)$ pour les grandes valeurs de t est obtenu à partir de :

$$t_0 = \frac{\pi}{n-1}$$

$$t_s = n^s t_0 = n^s \frac{\pi}{n-1}$$

$$\varphi(t_s) = \cos n^{s-1} \pi \cos n^{s-2} \pi \dots \cos n \pi \cos \pi \varphi(t_0)$$

Toutes les valeurs $\varphi(t_s)$ pour s variable, sont égales en module et représentent la plus grande limite.

Celle-ci vaut :

$$P = \varphi(t_0) = \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n^2} \dots \cos \frac{\pi}{n^m} \dots$$

Pour n assez grand :

$$P > \left(1 - \frac{\pi^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{\pi^2}{n^4}\right) \dots \left(1 - \frac{\pi^2}{n^{2m}}\right) \dots > \left(1 - \frac{\pi^2}{n^2} - \frac{\pi^2}{n^4} - \frac{\pi^2}{n^6} \dots - \frac{\pi^2}{n^{2m}}\right)$$

$$P > 1 - \frac{\pi^2}{n^2} \frac{n^2}{n^2 - 1} \sim 1 - \frac{\pi^2}{n^2}$$

On peut donc rendre P aussi voisin de 1 qu'on le veut.

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Si les fonctions que nous étudions sont "caractéristiques de distributions de probabilité", elles sont par contre difficiles à caractériser pour elles-mêmes, comme nous le verrons au chapitre V. C'est pourquoi il est particulièrement intéressant de connaître des opérations qui transforment certaines classes de fonctions en fonctions caractéristiques.

Nous nous intéressons ici à des opérations fermées sur la classe des fonctions caractéristiques. Tel est le cas de la moyenne pondérée :

Si φ_1 et φ_2 sont f.c. il en est de même de $p\varphi_1 + q\varphi_2$ où $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$ et du produit de f.c.

Nous développerons deux exemples moins classiques :

La transformation H qui à $f(x)$ fait correspondre :

$$H. f. (t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx$$

et le produit de composition.

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Si les fonctions que nous étudions sont "caractéristiques de distributions de probabilité", elles sont par contre difficiles à caractériser pour elles-mêmes, comme nous le verrons au chapitre V. C'est pourquoi il est particulièrement intéressant de connaître des opérations qui transforment certaines classes de fonctions en fonctions caractéristiques.

Tous nous intéressons ici à des opérations fermées sur la classe des fonctions caractéristiques. Tel est le cas de la moyenne pondérée :

Si H et F sont l.c. il en est de même de $pF + (1-p)H$ où $0 < p < 1$ et du produit de l.c.

Nous développerons deux exemples moins classiques :

La transformation H qui à $f(x)$ fait correspondre :

$$H.f(x) = \int_0^x f(x) dx$$

et le produit de composition.

CHAPITRE III

TRANSFORMATION H ET DISTRIBUTIONS UNIMODALES

14. - La première de ces transformations est souvent utilisée dans des développements mathématiques du Calcul des Probabilités : M. Loève (1) par exemple est amené à introduire la f.c. intégrale d'une répartition :

$$\hat{f}(u) = \int_0^u \varphi(t) dt$$

Khintchine à même utilisé plus explicitement cette transformation en étudiant les distributions unimodales (2) (Exactement celles pour lesquelles la courbe représentant la f.r. de X est convexe pour $X < 0$ et concave pour $X > 0$). Khintchine énonce que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(t)$ soit f.c. de distribution unimodale est que :

$$f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t v(u) du \quad \text{où } v(u) \text{ est aussi f.c.}$$

Mais nous allons voir que quelle que soit la f.c. $v(u)$ la fonction $f(u)$ est elle aussi caractéristique.

Enfin on a déjà signalé dans la théorie des intégrales de Fourier la proposition suivante (3) :

Si $f(x)$ et $F(x)$ appartiennent à la classe ℓ^2 et sont des transformées de Laplace il en est de même de :

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_x^{\infty} \frac{F(t)}{t} dt$$

Cette transformation (H) est particulièrement intéressante en Calcul des Probabilités, comme il résulte du théorème 15.

(1) Michel Loeve. Probability theory - D. Van Nostrand Company. New-York. 1955 - p. 189.

(2) Khintchine. On unimodal distributions - Izv. Nauchno Issled. Inst. Math. Meh. Tomsk, Gos. Univ. 2, n° 2 - 1,7 (1938).

(3) Par exemple E.C. Titchmarsh. Introduction to the theory of Fourier Integrals 2ème édition - p. 93.

15. - THÉORÈME FONDAMENTAL

Si $\varphi(t)$ est f.c. il en est de même de :

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du \quad (1)$$

Démonstration

Soit une f.r. quelconque $F(x)$ de la variable aléatoire X . On forme à partir d'elle une répartition dans le plan xoy telle que la f.r. $K(x,y)$ du couple aléatoire (X, Y) soit définie par :

$$\begin{aligned} dK(xy) &= dF(x) \frac{dy}{|x|} \quad \text{pour } 0 < y < x \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

La f.c. de cette répartition est :

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(r, s) &= \iint e^{irx} e^{isy} dF(x) \frac{dy}{|x|} \\ &= \int e^{irx} \frac{dF(x)}{|x|} \int_0^{|x|} e^{isy} dy \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale vaut :

$$\begin{aligned} \text{pour } x > 0 & \quad \frac{e^{isx} - 1}{is} \\ \text{pour } x < 0 & \quad \frac{1 - e^{isx}}{is} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(r, s) &= \int_{x=-\infty}^0 e^{irx} \frac{e^{isx} - 1}{is} \frac{dF(x)}{x} + \int_0^{+\infty} e^{irx} \frac{e^{isx} - 1}{is} \frac{dF(x)}{x} \\ \varphi_{xy}(r, s) &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{irx} \frac{e^{isx} - 1}{ix} dF(x) \end{aligned}$$

et la f.c. de y seul est :

$$\varphi_y(s) = \varphi_{xy}(0, s) = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isx} - 1}{ix} dF(x)$$

or la variable X a pour f.c. :

$$\varphi_x(t) = \int e^{itx} dF(x)$$

et :

$$\frac{1}{t} \int_0^t \varphi_x(u) = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{ix} dF(x) = \varphi_y(t)$$

C.Q.F.D.

15.a.

Notons quelques propriétés des distributions ainsi obtenues pour Y à partir d'une distribution des X :

Y admet partout, sauf peut être à l'origine, une densité finie $g(y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(y) = \int_y^{\infty} \frac{dF(x)}{x} \quad \text{pour } y > 0 \\ y(y) = \int_{-\infty}^y \frac{dF(x)}{-x} \quad \text{pour } y < 0 \end{array} \right. \quad (15-1)$$

La fonction de répartition $G(y)$ est :

$$\text{pour } y > 0 \quad 1 - G(y) = \int_y^{\infty} \frac{x - y}{x} dF(x) \quad \text{soit} \quad G(y) = y \int_y^{\infty} \frac{F(x) dx}{x^2}$$

$$\text{et pour } y < 0 \quad G(y) = \int_{-\infty}^y \frac{x - y}{x} dF(x) \quad \text{soit} \quad = -y \int_{-\infty}^y \frac{F(x)}{x^2} dx$$

Si la distribution initiale contient une masse finie à l'origine, celle-ci est conservée.

Relation fonctionnelle entre $\Phi(t)$ et $\varphi(t)$.

$$\Phi = H. \quad \varphi = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du \quad \text{soit, en posant} \quad \int_0^t \varphi(u) du = S(t)$$

$$\Phi'_t = \frac{t \varphi(t) - S(t)}{t^2}$$

d'où finalement : $\varphi(t) = t \Phi'_t + \Phi(t)$

et pour les fonctions de répartition :

$$x G'_{+x} + F(x+0) = G(x) \quad \text{pour } x > 0$$

$$x G'_{-x} + G(x) = F(x-0) \quad \text{pour } x < 0$$

15.b. Première extension

Si h et k sont deux nombres positifs et φ une f.c. la fonction Φ est aussi caractéristique, avec :

$$\Phi(t) = \frac{1}{(h+k)t} \int_{-ht}^{kt} \varphi(u) du \quad (15-4)$$

Il suffit pour le justifier de faire une somme pondérée de deux f. c. obtenues précédemment.

En particulier pour $h = k = 1$, on obtient :

$$\Phi = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{+t} \varphi(u) c \, du$$

f. c. d'une distribution symétrique, celle de variables Y par exemple, obtenue en étalant de $-|x|$ à $+|x|$ la distribution de X . Les masses finies à l'origine sont encore conservées, ailleurs la densité est finie donnée par :

$$g(y) = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{-y} + \int_y^{\infty} \frac{dF(x)}{x} \right]$$

15. c. Itération

Si l'on applique indéfiniment cette transformation à une f. c. on tend vers la fonction $\varphi = 1$ d'une distribution condensée à l'origine.

Soit, en effet F_0 la f. r. initiale et l'intervalle $(-A+A)$ tel que :

$$F_0(A) - F_0(-A) \geq 1 - \varepsilon$$

Cette portion $(1 - \varepsilon)$ de la distribution initiale entre $-A$ et $+A$ par les transformations successives donne des distributions toutes limitées à cet intervalle. Soit $F_0, F_1, \dots, F_n(x)$ les pseudo f. r. successives obtenues pour $x > 0$ par exemple :

$$F_1(A) - F_1(x) \leq \frac{A-x}{A} [F_0(A) - F_0(x)]$$

$$F_n(A) - F_n(x) \leq \left(\frac{A-x}{A}\right)^n [F_0(A) - F_0(x)]$$

qui tend vers zéro quel que soit x et $F_n(A) > F_0(A) \geq 1 - \varepsilon$ peut être rendu arbitrairement voisin de 1. La relation fonctionnelle (15-3) montre bien que $\varphi = 1$ est la seule fonction limite possible.

15. d. Formules de réciprocité

La formule de réciprocité (4-4) donnant les probabilités finies p est une conséquence des propriétés précédentes.

Soit $\varphi(t)$ la f. c. initiale d'une distribution admettant en x la probabilité positive p_x .

$\varphi_1(t) = \varphi(t) e^{-itx}$ est la f. c. de cette distribution après changement d'origine, celle-ci étant amenée en x .

$$\varphi_2(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_1(t) \, dt$$

est la f. c. d'une distribution comprenant comme seule masse finie p_x à l'origine, donc sa limite pour T infini est p_x .

$$p_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) e^{-itx} \, dt$$

16. - CARACTÉRISATION D'UNE DISTRIBUTION PAR LA FONCTION Φ ⁽¹⁾

Etant donnée une loi de probabilité définie par la f.r. $F(x)$ on peut lui faire correspondre la f.c.

$$\Phi(t) = H. \varphi = \int \frac{e^{itx} - 1}{itx} dF(x) \quad (1)$$

Cette fonction est bien caractéristique de la distribution puisque, réciproquement :

$$\begin{aligned} F_1(a) - F_1(b) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) \frac{e^{-ita} - 1}{it} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ita} - 1}{it} d[t\Phi] \end{aligned}$$

Si la variable aléatoire X admet des moments à tous les ordres, Φ est développable en série :

d'après (16-1) :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int \frac{e^{itx} - 1}{itx} dF(x) \\ \Phi(t) &= \int \left[1 + \frac{(itx)}{2} + \frac{(itx)^2}{3!} + \dots + \frac{(itx)^{n-1}}{n!} + \dots \right] dF(x) \\ &= 1 + it \frac{M_1}{2} + \frac{(it)^2}{2!} \frac{M_2}{3} + \dots + \frac{(it)^n}{n!} \frac{M_n}{n+1} + \dots \end{aligned}$$

où M_p est le moment d'ordre p de X .

$$\text{On remarque que } M_p(Y) = \frac{M_p(X)}{p+1}.$$

La fonction Φ est plus simple que φ puisque c'est à une constante près une f.c. du type II.

17. - CLASSE \mathcal{C}^u DES F.C. ET DISTRIBUTIONS UNIMODALES

Soit \mathcal{C}^u la classe des f.c. Φ obtenues à partir d'une f.c. quelconque par l'opération H. Il résulte de la relation (15-1) que les distributions associées à Φ ont une densité finie en dehors de l'origine et, de plus, sont régulièrement décroissantes à partir de l'origine : les f.r. sont continues pour $x = 0$; sont convexes pour $x > 0$; concaves pour $x < 0$. Disons avec Khintchine qu'elles sont unimodales (en adoptant cette définition restreinte).

Réciproquement : Toute distribution unimodale à une f.c. de la classe \mathcal{C}^u . Soit $G(y)$ la f.r. d'une variable aléatoire Y de distribution unimodale $G(y)$ est continue pour $Y = 0$ et admet en chaque point une dérivée à droite, une dérivée à gauche :

(1) Voir en liaison avec cette étude la note de Hans Loeffel : Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre - C.R.A.C. Sc 16-5-55.

On définit comme suit la distribution en X dont elle provient (suivant la transformation du théorème 15).

Si en $y = x$ la dérivée $g(y)$ a une discontinuité $\Delta g(y)$ on aura :

$$\Delta F(x) = -x \Delta g(x)$$

au contraire si g est continue, la différentielle de F sera :

$$dF(x) = -x dg(x)$$

La distribution de (Y) en dehors de sa masse finie à l'origine est donc du type II.

Une masse finie de (X) en x entraîne pour Y une discontinuité en $y = x$ de la densité. Une densité infinie de (X) entraîne pour Y une dérivée infinie de sa densité.

17.a. Caractérisation des lois de probabilité de type unimodal

Soit X la variable aléatoire initiale de f.c. φ et Z une variable aléatoire indépendante de X uniformément répartie de 0 à 1. La variable Y introduite en (15) n'est autre que $Y = XZ$ dont la f.c. est :

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du$$

donc les lois de probabilité de type unimodal sont les lois du produit d'une variable aléatoire quelconque par une autre variable, indépendante de la première et uniformément répartie entre 0 et 1.

18. - NOUVELLE EXTENSION

La relation (15-1) s'étend au cas où $-h$ et k sont de même signe et définit encore une f.c.

Le théorème de base et sa démonstration peuvent être étendus comme suit :

Soit $A(x)$ une f.r. arbitraire de la variable X. Considérons dans le domaine $[R]$ limité aux droites : $y_1 = ax$ et $y_2 = bx$.

la répartition de la loi élémentaire :

$$dF(x, y) = \frac{dy}{(b-a)|x|} dA(x)$$

Cette répartition en (X, Y) a pour f.c. :

$$\varphi_{xy}(r, s) = \int e^{irx} e^{isy} \frac{dA(x) dy}{(b-a)|x|} = \int e^{irx} \frac{dA(x)}{(b-a)|x|} \int_{y_1}^{y_2} e^{isy} dy$$

pour $x > 0$

$$\int_{y_1}^{y_2} e^{isy} dy = \frac{e^{isbx} - e^{isax}}{is}$$

et pour $x < 0$

$$\int_{y_2}^{y_1} e^{isy} dy = \frac{e^{isax} - e^{isbx}}{is}$$

$$\varphi_{xy}(r, s) \int_{-\infty}^0 e^{irx} \frac{e^{isax} - e^{isbx}}{is(b-a)} \frac{dA(x)}{-x}$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{irx} \frac{e^{isbx} - e^{isax}}{is(b-a)} \frac{dA(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{s(b-a)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{irx} \frac{e^{isbx} - e^{isax}}{ix} dA(x)$$

La f.c. de y seul :

$$\Phi_y(s) = \frac{1}{s(b-a)} \frac{e^{isbx} - e^{isax}}{ix} dA(x)$$

or celle de x seul est :

$$\varphi_x(t) = \int e^{itx} dA(x)$$

donc :

$$\int_{as}^{bx} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isbx} - e^{isax}}{ix} dA(x)$$

d'où :

$$\Phi_y(s) = \frac{1}{s(b-a)} \int_{as}^{bs} \varphi(t) dt \tag{18-1}$$

où a et b sont deux constantes arbitraires, d'où le théorème :

Théorème : Si $\varphi(t)$ est une f.c. la fonction Φ définie par la relation (18-1) est aussi une f.c.

La variable aléatoire Y est de la forme $Y = aX + (b-a)XZ$ où X est la variable aléatoire initiale de Z uniformément répartie entre 0 et 1.

Relation entre les densités : Si $\varphi(t)$ est du type II et correspond à une densité $f(x)$; à $\Phi_y(s)$ correspond la densité $g(y)$ définie par :

$$g(y) = \int_{x=y/b}^{y/a} \frac{f(x)}{(b-a)x} dx$$

pour $x > 0$.

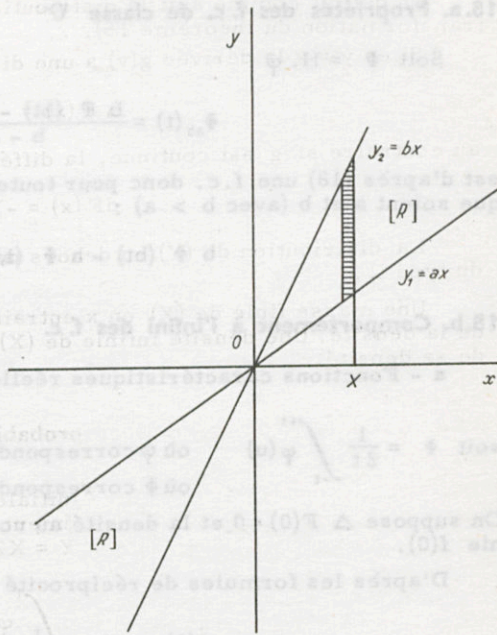


Fig. 3

18.a. Propriétés des f. c. de classe \mathcal{C}^u

Soit $\Phi = H. \varphi$

$$\Phi_{ab}(t) = \frac{b \Phi(bt) - a \Phi(at)}{b - a}$$

est d'après (18) une f. c. donc pour toute fonction Φ de classe \mathcal{C}^u et quels que soient a et b (avec $b > a$) :

$$b \Phi(bt) - a \Phi(at) \text{ est f. d. p.}$$

18.b. Comportement à l'infini des f. c.

a - Fonctions caractéristiques réelles de classe \mathcal{C}^u

$$\text{soit } \Phi = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{+t} \varphi(u) \quad \begin{array}{l} \text{où } \varphi \text{ correspond à la f. r. } F(x) \text{ densité } f(x) \\ \text{où } \Phi \text{ correspond à la f. r. } G(y) \text{ densité } g(x) \end{array}$$

On suppose $\Delta F(0) = 0$ et la densité au voisinage de l'origine continue et finie $f(0)$.

D'après les formules de réciprocité :

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\pi} \Phi(t)$$

c'est dire que $\Phi(t)$ est pour $t \rightarrow \infty$ un infiniment petit équivalent à $\frac{\pi}{t} f(0)$ (donc en particulier régulièrement décroissante à partir d'une certaine valeur).

Or $f(x) = -xg'(x)$ est continue.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} [-xg'(x)]$ est la valeur de la sous-tangente à la courbe $y = g(x)$ comptée sur l'axe Oy .

Si xg'_x a une limite, c'est dire que :

$$g(x) \sim f(0) \text{ Log } \frac{1}{x} = -f(0) \text{ Log } (x)$$

et par suite :

$$\Phi(t) \sim \frac{\pi}{t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\text{Log } x}$$

b - Fonctions caractéristiques réelles du type II ; c'est-à-dire admettant partout une densité $f(x)$, celle-ci étant de plus à variation bornée en dehors de tout intervalle contenant l'origine.

Une telle distribution est la différence de deux distributions du type précédent ; on a donc encore, pour $t \rightarrow \infty$

$$\Phi(t) \sim \frac{\pi}{t} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{g(x)}{\text{Log } x} \right)$$

CHAPITRE IV

L'APPLICATION DU PRODUIT DE COMPOSITION AUX FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

19. -

Les fonctions caractéristiques constituent une catégorie particulière de fonctions qu'on a souvent intérêt à élargir. Elles ne sont ici qu'un instrument servant à étudier des fonctions de répartition dont elles sont les transformées de Laplace. Or la transformation de Laplace est linéaire : Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont des f.r. admettant $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ pour f.c.

$$a F_1(x) + b F_2(x) \text{ a pour transformée } a \varphi_1 + b \varphi_2$$

Nous dirons qu'une forme linéaire de f.r. est une pseudo-fonction de répartition (p.f.r.).

Exemple :

$$F(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \dots + a_n F_n(x)$$

et la transformée sera dite pseudo-fonction caractéristique p.f.c.)

$$\Phi(t) = a_1 \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(t) + \dots + a_n \varphi_n(t)$$

Si tous les coefficients a_i sont positifs, la fonction Φ est dite de la classe \mathcal{C} . C'est une fonction caractéristique multipliée par une constante positive et toute p.f.c. est la différence de deux fonctions de la classe (\mathcal{C}) .

Le produit de composition de deux fonctions est transmué en un produit ordinaire par la transformation de Laplace. Nous allons préciser les résultats qu'on obtient par produit de composition de fonctions caractéristiques.

A. - LOIS PUREMENT DISCONTINUES

20. - THÉORÈME

Si deux lois sont définies par les probabilités finies $p_1(x)$ et $p_2(x)$ et admettent pour f.c. $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ l'expression (1) :

$$\varphi_3(t) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_2(u) du \quad (20-1)$$

est la p.f.c. qui correspond à la "répartition" discontinue de probabilités finies

$$p_3(x) = p_1(x) p_2(x)$$

Démonstration

Soit une valeur x à probabilité positive à la fois pour les 2 lois données.

Formons :

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-itx} \varphi_3(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2U} \int_{-T}^{+T} \int_{-U}^{+U} e^{-i(t+u)x} \varphi_1(t+u) e^{iux} \varphi_2(-u) dt du \end{aligned}$$

Ces intégrales ont un sens quels que soient T et U et, en remarquant que ;

$$\int_{-T}^{+T} e^{iux} \varphi(-u) du = \int_{-T}^{+T} e^{-iux} \varphi(u) du$$

il vient :

$$\frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} e^{-iux} \varphi_2(u) du \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-i(t+u)x} \varphi_1(t+u) d(t+u)$$

La seconde intégrale a pour toute valeur donnée de u une limite lorsque $T \rightarrow \infty$, c'est en effet :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+u}^{+T+u} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

et $\varphi_1(t)$ étant presque périodique, nous avons vu que cette expression converge vers $p_1(x)$.

Faisant tendre ensuite U vers l'infini, la première intégrale tend vers $p_2(x)$ d'où :

$$p_3(x) = p_2(x) p_1(x)$$

On peut remarquer que $\varphi_3(t)$ est une f.p.p. (Bohr, p.45-46 avec extension immédiate au cas de fonctions φ_1 et φ_2 différentes) et $p_3(x)$ = valeur moyenne $\left\{ \varphi_3(t) e^{-itx} \right\}$. Si cette quantité est nulle quel que soit x , la fonction

$\varphi_3(t)$ est identiquement nulle (Bohr p.60). Donc si les ensembles de valeurs de x à probabilités positives pour les deux lois initiales, sont des ensembles disjoints $\varphi_3 \equiv 0$.

Ce résultat pourrait être établi aussi facilement par décomposition des fonctions caractéristiques

$$\varphi = \sum p_j e^{it a_j}$$

20 b - Conséquences

1° - Si φ_1 et φ_2 sont des f.c. du type I, le quotient :

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^{+T} \varphi_1(t+u) \overline{\varphi_2(u)} du}{\int_{-T}^{+T} \varphi_1(u) \overline{\varphi_2(u)} du}$$

est une fonction caractéristique.

2° - Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(t)$ soit f.c. d'une loi complètement discontinue est que :

$$\varphi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} h(t+u) \overline{h(u)} du \quad (20-2)$$

où h est une fonction presque périodique au sens de Besicovitch de classe B^2 (1) réalisant :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |h(t)|^2 dt = 1$$

Démonstration

Il s'introduit ici une fonction $h(t)$ qui peut ne pas être continue, c'est pourquoi il faut introduire la notion plus large de fonction presque périodique donnée par Besicovitch.

a - Condition nécessaire : la "répartition" $\sqrt{p_k} = A_k$ en x_k est telle que $\sum |A_k|^2 < \infty$ donc (théorème de Riesz-Fischer-Besicovitch).

$\sum A_k e^{itx_k}$ définit une fonction presque périodique de classe B^2 , soit

$h(t)$ et à $\varphi(t)$ (20-2) correspond la répartition (p_k) en (x_k) .

b - Condition suffisante :

Soit $h(t) \in B^2$ elle est décomposable en série de Fourier :

$$\sum_k A_k e^{itx_k} \quad \text{avec}$$

$$M \left\{ |h(t)|^2 \right\} = \sum |A_k|^2 \quad (\text{théorème de Parseval-Besicovitch})$$

" " " " " " " " = 1 (par hypothèse)

donc $\varphi(t)$ est la f.c. de la répartition $(|A_k|^2)$ en (x_k) .

3° - Si à $p(x)$ correspond $\varphi(t)$:

à $p^2(x)$ correspond la p.f.c. $\varphi_1(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t+\theta) \overline{\varphi(\theta)} d\theta$ et :

$\varphi_1(0) = \sum_x p^2(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |\varphi(t)|^2 dt$ on retrouve l'indice de concentration.

(1) A.S. Besicovitch - Almost periodic functions - p. 109-110.

B. - LOIS ABSOLUMENT CONTINUES

21. - QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE LA CLASSE $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$

Soit \mathcal{L}^2 la classe des fonctions $f(x)$ mesurables et telles que :

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty$$

Théorème : Si $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à \mathcal{L}^2 le produit fg est absolument sommable.

Soit $|f(x)| = f_1$ et supposons par exemple $f_1 \leq g_1 = f_1 + h$
 $|g(x)| = g_1$ pour une valeur arbitraire de x .

$$2|fg| = 2f_1 g_1 = 2f_1^2 + 2f_1 h$$

$$f_1^2 + g_1^2 = 2f_1^2 + 2f_1 h + h^2$$

d'où : $2|fg| dx \leq (f_1^2 + g_1^2) dx$ donc $\int 2|fg| dx \leq \int f_1^2 dx + \int g_1^2 dx < \infty$

On a de plus l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \int f(x) g(x) dx \right| \leq \left\{ \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Corollaire.

Si $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à la classe \mathcal{L}^2 , la quantité $f(x) g(u-x)$ est absolument intégrable en x sur $(-\infty, +\infty)$ quel que soit u .

21.a. Transformation de Laplace des fonctions de classe \mathcal{L}^2

La théorie a été faite par Plancherel dont voici le principal théorème :

Théorème de Plancherel (1)

Soit $f(x)$ une fonction réelle ou complexe de classe \mathcal{L}^2 et soit

$$\Phi(t, a) = \int_{-a}^{+a} f(x) e^{itx} dx$$

lorsque a tend vers l'infini, $\Phi(t, a)$ converge en moyenne sur $(-\infty, +\infty)$ vers une fonction $\varphi(t)$ de classe \mathcal{L}^2 . Cela signifie que :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int |\varphi(t) - \Phi(t, a)| dt = 0$$

Réciproquement :

$$f(x, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \varphi(t) e^{-itx} dt$$

converge en moyenne vers $f(x)$ quand $a \rightarrow \infty$.

(1) Voir par exemple : E. C. Titchmarsh : Introduction to the theory of Fourier Integrals, p. 69.

22. - THÉORÈME

Soient deux lois de densités $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de classe \mathcal{L}^2 et de f.c. $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ et :

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi_1(t+u) \overline{\varphi_2(u)} du$$

La fonction φ_3 est la p.f.c. qui correspond à la "densité" $f_3(x) = f_1(x) f_2(x)$

Démonstration
Formons

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi_3(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \frac{dt}{2\pi} \int \varphi_1(t+u) \overline{\varphi_2(u)} du \end{aligned}$$

Cette intégrale est absolument convergente, d'après les remarques précédentes, car φ_1 et φ_2 sont de carré sommable, on peut intervertir l'ordre d'intégration et écrire :

$$f_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \varphi_2(-u) du \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t+u)x} \varphi_1(t+u) dt$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} \varphi_2(u) du \cdot \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(t+u)x} \varphi_1(t+u) d(t+u)$$

on intègre pour $u = C^{te}$ par rapport à t puis en u . Il vient :

$$f_3(x) = f_2(x) f_1(x)$$

22 a - CONSEQUENCES -

Si φ_1 et φ_2 sont des f.c. de classe \mathcal{L}^2 ; le quotient :

$$\frac{\varphi_3(t)}{\varphi_3(0)} = \frac{\int \varphi_1(t+u) \overline{\varphi_2(u)} du}{\int \varphi_1(u) \overline{\varphi_2(u)} du}$$

est la f.c. d'une loi absolument continue.

2° - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi(t)$ soit la caractéristique d'une répartition absolument continue est qu'on puisse mettre φ sous la forme :

$$\varphi(t) = \int g(t+u) \overline{g(u)} du$$

où $g(t)$ est une fonction de la variable réelle t réalisant :

DEMONSTRATION

a - Condition nécessaire : Soit $\varphi(t)$ correspondant à la densité $f(x)$. La "densité" $\sqrt{f(x)}$ est une fonction de classe \mathcal{L}^2 à laquelle on peut associer une transformée de Laplace.

$$h(t) = \sqrt{2\pi} g(t) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} \sqrt{f(x)} e^{itx} \cdot dx$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int h(t+u) \overline{h(u)} du = \int g(t+u) \overline{g(u)} du$$

$$\text{avec } \varphi(0) = \int |g|^2 dt = 1.$$

b - Condition suffisante : Soit $g(t)$ réalisant $\int |g(t)|^2 dt = 1$ c'est donc une fonction de carré sommable ; elle admet une transformée de Laplace :

$$a(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} g(t) e^{-itx} dt$$

$$\text{et si } h(t) = \sqrt{2\pi} g(t), \text{ on a : } a(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} e^{-itx} h(t) dt$$

et :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int h(t+u) \overline{h(u)} du$$

$\varphi(t)$ est la f. c. qui correspond à la "densité" $a^2(x)$ toujours positive, et de plus :

$$\varphi(0) = \int |g(t)|^2 dt = 1$$

C'est donc bien une véritable fonction caractéristique.

C. - LOIS MIXTES

23. - LOI DU TYPE I ET LOI DU TYPE II

Soit φ_1 f. c. du type I correspondant aux masses p_i en (x_i)

φ_2 f. c. du type II correspondant à la densité $f(x)$ bornée

[la densité doit être bornée au moins sur l'ensemble (x_i)]

et formons :

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+U} \varphi_3(t+u) \overline{\varphi_2(u)} du$$

Théorème : φ_3 est la p.f.c. qui correspond à la "répartition" discontinue de masses p_3 en x_i ,

avec :

$$p_3(x_i) = p_i f(x_i)$$

En effet :

$$\begin{aligned} p_3(x_i) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-itx_i} \frac{dt}{2\pi} \int_{-u}^{+u} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_2(u) du \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^{+u} e^{-iux_i} \varphi_2(u) du \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-i(t+u)x_i} \varphi_1(t+u) dt \\ &= p_1 f(x_i) \end{aligned}$$

24. - LOI MIXTE ET LOI CONTINUE

Soit $\Phi(t) = p\varphi_1(t) + q\varphi_2(t)$ avec $\begin{cases} \varphi_1 \text{ du type I masses } p_i \text{ en } (x_i) \\ \varphi_2 \text{ du type II densité } f_2(x) \end{cases}$

$$p > 0 \quad q > 0 \quad p + q = 1$$

$\varphi_3(t)$ du type II - densité $f_3(x)$

On forme :

$$\varphi_4(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-u}^{+u} \Phi(t+u) \bar{\varphi}_3(u) du$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{U \rightarrow \infty} p \cdot \int_{-u}^{+u} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_3(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} q \cdot \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-u}^{+u} \varphi_2(t+u) \bar{\varphi}_3(u) du \\ &= p \Phi_1 + q \Phi_2 \end{aligned}$$

φ_4 est la p.f.c. d'une distribution mixte comprenant d'une part les masses finies $p_i f_3(x_i)$ en x_i et d'autre part la densité $f_2(x) f_3(x)$.

24. a. Loi mixte et loi discontinue

A la fonction $\Phi(t)$ précédente, (masses $p_i +$ densité $f_1(x)$), associons $\varphi_3(t)$ du type I (masses p_i^1 en x_i).

$$\text{Soit : } \varphi_4(t) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-u}^{+u} \Phi(t+u) \bar{\varphi}_3(u) du$$

$$= p \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-u}^{+u} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_3(u) du + q \cdot \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-u}^{+u} \varphi_2(t+u) \bar{\varphi}_3(u) du$$

La seconde intégrale, inférieure à $\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-u}^{+u} \varphi_3(u) du = 0$ est nulle.

La première donne une p.f.c. correspondant aux masses $p_i^1 p_i$ sur l'ensemble (x_i) .

24. b. Deux lois mixtes

L'opération précédente appliquée à deux lois mixtes élimine ce qui n'est pas la masse finie.

Si Φ_1 correspond à $(p_1 \cdot p_1') + q_1 f_1(x)$

et Φ_2 correspond à $(p_2 \cdot p_2') + q_2 f_2(x)$

$$\varphi_3(t) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} \Phi_1(t+u) \bar{\Phi}_2(u) du$$

$\varphi_3(t)$ correspond à $p_1 p_2$ $p_1^{(i)} p_2^{(i)}$ sur l'ensemble à probabilité strictement positive à la fois pour la loi (1) et la loi (2).

24. c. Conclusion

Deux formes du produit de composition sont intéressantes :

$$\text{D'une part : } \varphi_1 \cup \varphi_2 = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_2(u) du$$

Le résultat est une p.f.c. du type I si φ_1 et φ_2 sont toutes deux de ce type, la limite est nulle dans le cas contraire.

$$\text{D'autre part : } \varphi_1 \pi \varphi_2 = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{+U} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_2(u) du$$

applicable si l'une au moins des f.c. initiales est du type II (φ_2 par exemple) et le résultat est du même type que φ_1 .

D. - FILTRAGE DE DISTRIBUTION OU LOIS CONDITIONNELLES

Soit une variable aléatoire X définie sur $(-\infty, +\infty)$ et supposons qu'un phénomène extérieur empêche d'observer les valeurs de X extérieures à un certain ensemble E . Deux cas sont à distinguer selon que E est discret ou continu. Nous supposons d'abord E fini (nombre fini de points ou ensemble continu de mesure finie).

25. - ENSEMBLES DE TYPE II - FILTRAGE PAR BANDES

E est caractérisé par sa "fonction de distribution" $M(x)$

$$M(x) = \text{mesure de } (X) \text{ avec } \begin{cases} X < x \\ X \in E \end{cases}$$

et formons :

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dM(x)$$

C'est une fonction définie positive (une f.c. de type II multipliée par la mesure de E) elle sera dite "noyau de E".

$$\gamma(0) = \text{mesure de } (E)$$

La donnée de $\gamma(t)$ détermine (E) à un ensemble de mesure nulle près.

25.a. Filtrage par (E) d'une répartition mixte (ou type I ou type II)

La répartition de f.c. $\varphi_1(t)$ filtrée par E a pour p.f.c.

$$\varphi_2(t) = \varphi_1 * \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^{+u} \varphi_1(t+u) \bar{\gamma}(u) du$$

En particulier : la somme des masses de la loi (1) intérieures à (E) est :

$$\varphi_2(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+U} \varphi_1(u) \bar{\gamma}(u) du$$

25.b. Application

Loi tronquée : Si E est l'intervalle (a, b), son noyau est :

$$\gamma = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}, \text{ soit } \varphi(t) \text{ la f.c. de } X$$

La loi tronquée de $X \in E$ a pour f.c.

$$\Phi(t) = \frac{\lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+U} \varphi(t+u)(e^{-iub} - e^{-iua}) \frac{du}{iu}}{\lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+U} \varphi(u)(e^{-iub} - e^{-iua}) \frac{du}{iu}}$$

La masse intérieure à E est :

$$F_1(b) - F_1(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \varphi(t) \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it} dt$$

26. - ENSEMBLE DE TYPE I - FILTRAGE PAR RAIES

E comprend un nombre fini de points x_i et est caractérisé par sa "fonction de distribution" $M(x)$

$$M(x) = \text{nombre de } x_i \text{ tels que } \begin{cases} x_i \in E \\ x_i < x \end{cases}$$

Son noyau est :

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^n e^{itx_i} \cdot i$$

C'est une fonction définie positive (f.c. de type I multipliée par $\gamma(0) = n$).

Filtrage d'une loi mixte (\mathcal{L}_1 , φ_1) par E.

Seules les masses finies de \mathcal{L}_1 sur E sont conservées.

La p.f.c. de la répartition filtrée est :

$$\varphi_2(t) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} \varphi_1(t+u) \bar{\gamma}(u) du$$

La "mesure de distribution de probabilité \mathcal{L}_1 , par E" (somme des masses de \mathcal{L}_1 appartenant à E) est :

$$\varphi_2(0) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} \varphi_1(u) \bar{\gamma}(u) du$$

27. - EXTENSION A DES DOMAINES INFINIS

Le filtrage peut s'étendre à des domaines infinis par passage à la limite.

Par exemple, pour obtenir la loi des valeurs positives de X, on prend le noyau de l'intervalle (0 - N) soit :

$$\gamma_n(t) = \frac{e^{itN} - 1}{it} = \frac{\cos Nt - 1}{it} + \frac{\sin tN}{t}$$

la f.c. de $X > 0$ est (à un coefficient près) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_x^\pi \gamma_N$$

D'une manière analogue on peut obtenir la loi des valeurs absolues de X sachant que $\Phi_{|x|}(t) = A(t) + iB(t)$. On applique la noyau $2\gamma_N$ à A(t), d'où :

$$\begin{aligned} \Phi_x(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+U} A(t+u) \frac{\sin uN}{u} du + \frac{i}{\pi} \int_{-U}^{+U} A(t+u) \frac{\cos Nu - 1}{u} du \right] \\ &= A(t) + \frac{i}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\lim_{U \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+U} A(t+u) \frac{\cos Nu - 1}{u} du \right] \end{aligned}$$

CHAPITRE V

LA CLASSE DES FONCTIONS DÉFINIES POSITIVES

A. - CLASSE (\mathcal{C}) DE FONCTIONS

28. - DÉFINITION

On désigne par \mathcal{C} la classe des fonctions $\varphi(u)$ définies par :

$$\varphi(u) = \int e^{iux} dF(x)$$

où $F(x)$ est une fonction monotone croissante, à variation totale finie : $\varphi(0) = 1$.
Ce sont des f. c. multipliées par un coefficient constant positif. Si $\varphi(0) = 1$ on dira que la fonction est réduite.

Il existe une correspondance biunivoque, entre les fonctions $\varphi \in \mathcal{C}$ et les fonctions de répartition $F(x)$. Rappelons les propriétés topologiques de ces deux familles de fonctions. (On supposera les fonctions φ réduites et $F(x)$ variant de 0 à 1).

Théorème de Helly-Montel

Les fonctions de répartition forment un ensemble compact ; mais la limite d'une suite infinie de f. r. peut ne pas être elle-même une f. r. Nous dirons qu'il y a convergence stricte d'une suite $F_n(x)$ si

$$F_n \longrightarrow F \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) = 1 \end{cases}$$

Si une suite F_n converge strictement, la suite associée $\varphi_n(u)$ a une limite $\varphi(u)$ atteinte uniformément dans tout intervalle fini de u et cette limite est la fonction de \mathcal{C} associée à la limite $F(x)$ des $F_n(x)$.

Théorème réciproque

Si une suite infinie $\varphi_n(u)$ de fonctions de la classe \mathcal{C} tend vers une

limite $g(u)$ atteinte uniformément dans un intervalle arbitrairement petit autour de l'origine ; $g(u)$ est la fonction \mathcal{C} de la répartition $F(x)$ limite des $F_n(x)$

29. -

Pour définir et étudier les fonctions \mathcal{C} on peut se limiter à une sous-classe de \mathcal{C} dense dans \mathcal{C} . Deux sous-classes sont particulièrement intéressantes :

1° - La classe \mathcal{C}_1 des f.c. de répartitions complètement discontinues (et ces fonctions multipliées par une constante positive)

$$\varphi_1(u) = \sum_k p_k e^{iux} \quad p_k > 0 \quad \sum p_k \text{ borné}$$

2° - La classe \mathcal{C}_2 des f.c. de répartitions absolument continues (et ces fonctions multipliées par une constante positive)

$$\varphi_2(u) = \int e^{iux} f(x) dx \quad f(x) \geq 0 \text{ sommable sur } (-\infty, +\infty)$$

Deux opérations sont fermées sur la classe \mathcal{C} : le produit multiplicatif et le produit de composition (ce dernier pouvant prendre deux formes différentes comme nous l'avons vu; elles se ramènent à l'expression :

$$\varphi_3(t) = \lim_{u \rightarrow \infty} u \frac{\int_{-u}^{+u} \varphi_1(t+u) \bar{\varphi}_2(u) du}{\int_{-u}^{+u} \varphi_1(u) \bar{\varphi}_2(u) du} \quad \text{où } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \in \mathcal{C}$$

Il est intéressant de donner des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à \mathcal{C} , exprimées par ces opérations.

30. - CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE PAR PRODUIT

Soit $\varphi(u) \in \mathcal{C}$

Il est nécessaire et suffisant, pour que $f(u) \in \mathcal{C}$ que :

$$f(u) \varphi(\varepsilon u) \in \mathcal{C} \quad \text{pour } 0 < \varepsilon < \eta$$

positif arbitrairement petit(1).

Il est évident que la condition est nécessaire.

Réciproquement, si cette condition est remplie $f(u)$ est une fonction continue

et soit

$$\varphi_\varepsilon(u) = f(u) \varphi(\varepsilon u)$$

Pour une suite infinie de ε tendant vers 0, la suite φ_ε tend vers une

(1) Cet énoncé généralise un th. donné par H. Cramer : Transactions of the American Math. Society, vol 46 - 1939, p 91.

limite $f(u)$ atteinte uniformément au voisinage de l'origine : cette limite est donc elle-même une fonction \mathcal{C} .

31. - PRODUIT DE COMPOSITION ET CARRÉ DE COMPOSITION

Nous avons vu au chapitre IV des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à \mathcal{C}_1 (n° 20.b) ou à \mathcal{C}_2 (n° 22.a). On peut faire la synthèse de ces énoncés de la manière suivante :

Une loi quelconque L peut toujours être définie comme limite d'une famille L_n de lois absolument continues ; donc φ , f.c. de L est limite de $\varphi_n \in \mathcal{C}_2$ et cette limite est atteinte uniformément dans tout intervalle fini.

Or :
$$\varphi_n = \int g(t+s) \overline{g(s)} ds \quad \text{avec} \quad \int |g(t)|^2 dt = 1$$

d'où l'énoncé suivant :

31.a. Théorème de Khintchine

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi(t)$ soit f.c. est qu'elle soit limite atteinte uniformément dans tout intervalle fini d'expressions :

$$\int g(t+s) \overline{g(s)} ds \quad \text{avec} \quad \int |g(t)|^2 dt = 1$$

En d'autres termes on peut atteindre les fonctions de la classe \mathcal{C} à partir de fonctions de carré sommable : $R(t) \in L^2$. On forme les carrés de composition des fonctions $R(t)$ et on complète cet ensemble par sa fermeture par rapport à la convergence uniforme dans tout intervalle fini de t .

Autre condition par produit de composition

$$\left. \begin{array}{l} \text{Soit } g(u) \in \mathcal{C} \\ \varphi(u) \in \mathcal{C}_2 \end{array} \right\} \text{et } \Phi = g * \varphi \implies \Phi \in \mathcal{C}$$

donc en particulier $\Phi(0) = \int \varphi(u) \overline{g(u)} du$ est réel positif.

Réciproquement : Soit $\varphi(u)$ fonction continue de carré sommable telle que, quel que soit $g(u) \in \mathcal{C}$ on ait :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \varphi(u) \overline{g(u)} du \text{ réel positif}$$

dans ces conditions

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \varphi(u) e^{-iux} du$$

converge en moyenne vers une fonction $f(x)$. Cette limite ne saurait être être négative d'après l'hypothèse pour $g(u) = e^{-iux}$.

Réciproquement :

$$\varphi(u) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} e^{iux} f(x) dx \quad \text{avec } f(x) \geq 0$$

$$\varphi(0) = \int f(x) dx \quad \text{est borné}$$

d'où l'énoncé :

31.b. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue de carré sommable appartienne à \mathcal{C} (donc à \mathcal{C}_2) est que pour toute fonction $g(u) \in \mathcal{C}$ on ait :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^{+u} \varphi(u) \bar{g}(u) du \text{ du réel positif}$$

B. - DISTRIBUTIONS FINIES

32. -

Une distribution sur la droite $d(-\infty, +\infty)$ sera caractérisée par sa mesure sur tout ensemble appartenant à d . Cette "mesure de la distribution sur E " ou $D(E)$ sera une fonction réelle ou complexe, complètement additive. Enfin la distribution sera finie si $|D(E)| < \infty$ pour tout E .

Il nous sera suffisant de connaître la mesure d'une distribution dans l'ensemble des intervalles (a, b) : $a \leq x < b$ et pour cela de se donner la "fonction marginale de distribution" :

$$G(u) = D(x < u)$$

Si la distribution est finie, la fonction $G(u)$ est à variation bornée sur tout l'intervalle de variation ; on peut donc poser :

$$G(-\infty) = 0$$

32.a. Transformée de Laplace d'une distribution

A toute distribution finie, donnée par $G(u)$ on peut associer la fonction :

$$g(x) = \int e^{iux} dG(u)$$

intégrale absolument convergente quel que soit x , qui définit une fonction $g(x)$ continue et bornée. On note $g = L(G)$ et g est dit noyau de distribution.

32.b. Produit de composition de deux distributions

Soit deux distributions de fonctions marginales : $G_1(u)$ et $G_2(u)$. On

appelle produit de composition $H = G_1 * G_2$ la distribution de fonction marginale $H(u)$ avec :

$$H(u) = \int G_1(u+t) d\bar{G}_2(t)$$

soit :

$$dH(u) = \int dG_1(u+t) d\bar{G}_2(t)$$

avec

$$dG_1(u+t) = D \left[t+u \leq x < t+u+du \right]$$

Ce produit n'est pas, en général, commutatif, ni associatif.

Noyau d'un produit

Soit $H(u) = G_1 * G_2$ son noyau est :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int e^{iux} dH(u) \\ &= \int e^{iux} \int dG_1(u+t) \cdot \int e^{-itx} d\bar{G}_2(t) \\ &= g_1(x) \bar{g}_2(x) \end{aligned}$$

Carré de composition : si $H = G * G$ $h(x) = |g(x)|^2$

33. - DISTRIBUTIONS ABSOLUMENT CONTINUES

On entend par là le cas où la fonction marginale $G(u)$ est absolument continue ; elle admet alors une densité $G'(u)$. Le carré d'une telle distribution est de même nature, sa fonction de distribution est dérivable :

$$H'(u) = \int G'(u+t) \bar{G}'(t) dt$$

son noyau est :

$$|g(x)|^2 = \int e^{iux} H'_u du$$

donc réciproquement :

$$H'_u = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} |g(x)|^2 dx$$

et H'_u est une fonction de la classe \mathcal{C} .

34. - DISTRIBUTIONS COMPLÈTEMENT DISCONTINUES

C'est le cas où $G(u)$ se réduit à une fonction de sauts. La mesure de distribution est nulle en dehors d'un ensemble dénombrable (\mathcal{X}) de points x_n . On dit que \mathcal{X} est le support de la distribution.

Pour $x = x_n$

$$\Delta G(x_n) = D(x_n) = a_n$$

Soit A une telle distribution. Son carré de composition $P = A * A$ est une distribution de même nature définie par :

$$\Delta P(u) = \sum_{x_h - x_k = u} \Delta A(x_h) \Delta \bar{A}(x_k)$$

soit :

$$\begin{cases} \Delta P(x_h - x_k) = a_h \bar{a}_k & \text{si la différence } x_h - x_k \text{ n'est obtenue} \\ \Delta P(x_k - x_h) = a_k \bar{a}_h & \text{que d'une seule manière dans } (\xi). \end{cases}$$

et
$$\Delta P(0) = \sum_h |a_h|^2$$

Le support E de P ne dépend de ξ qu'à une translation près. On peut ramener l'origine à la plus petite valeur de ξ et dans ce cas :

$$\xi \subset E$$

$\Delta P(u) = P(u+0) - P(u-0)$ définit une fonction discrète hermitienne, nulle presque partout ; les valeurs non nulles sont prises pour :

$$u = \pm |x_h - x_k| \quad \text{où } x_h, x_k \in \xi$$

Nous dirons que la fonction discrète ΔP "dérive de la distribution carrée" $A * A = A^{(2)}$.

Exemples

1° - Soit A défini sur l'ensemble $0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$ où les sauts sont égaux à 1.

Le carré de composition est défini sur l'ensemble $0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm n$ avec $\Delta P(\pm k) = n - k$.

Nous désignerons par T_n cette fonction caractérisant une "distribution discontinue triangulaire".

2° - Soit A défini sur $0 \quad 1$

où
$$\Delta A = 1 \quad 1$$

$$\Delta A^{(2)} = A * A \text{ réalise :}$$

pour :
$$u = -1 \quad 0 \quad 1$$

$$\Delta A^{(2)} = 1 \quad 2 \quad 1$$

Si l'on forme les puissances successives à gauche : $A^{(n)} = A * A^{(n-1)}$, on vérifie facilement que les différences finies $\Delta [A^{(n)}]$ sont les $(n+1)$ coefficients C_n^p pour $n+1$ valeurs entières consécutives de u. En particulier pour un degré pair :

$$A^{(2p)} = A^{(p)} * A^{(p)}$$

on a :

$$\Delta [A^{(2p)}]_u = C_{2p}^{p+u}$$

pour u entier de $-p$ à $+p$.

Nous désignerons par C_{2p} cette fonction.

35. - MESURE D'UNE DISTRIBUTION PAR UNE FONCTION DE LA CLASSE \mathcal{C}

Soit une distribution $H(t)$ de noyau $h(x)$

$$h(x) = \int e^{itx} dH(t)$$

et soit d'autre part $\varphi(t) \int e^{itx} dF(x)$ une fonction de la classe \mathcal{C} .

On appelle mesure de H par φ la quantité :

$$S = \int \varphi(t) dH(t)$$

On peut exprimer autrement cette mesure :

$$\text{Formons : } \Phi(u) = \int \varphi(u+t) dH(t)$$

$$= \iint e^{i(u+t)x} dF(x) dH(t)$$

$$= \int e^{iux} dF(x) \int e^{itx} dH(t)$$

$$\Phi(u) = \int e^{iux} h(x) dF(x) \quad (35-1)$$

Cette relation entraîne les deux énoncés suivants :

Théorème

Soit $\varphi \in \mathcal{C}$ et H une distribution finie à noyau réel positif

$$\Phi(u) = \int \varphi(u+t) dH(t) \text{ appartient à } \mathcal{C}.$$

Théorème de Parseval généralisé

Si $u = 0$, on obtient :

$$S = \int \varphi(t) dH(t) = \int h(x) dF(x)$$

Cette mesure est aussi la mesure de la distribution de probabilité F par le noyau de H .

35.a. Application : transformation de fonctions de la classe \mathcal{C}

Soit $\varphi(t) \in \mathcal{C}$ et $H(t)$ la fonction marginale d'une distribution carrée $H(t) = G^*G$. On forme $\Phi = \varphi^*H$. Φ appartient à \mathcal{C} .

En effet :

$$\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$$

et si $g(x)$ est le noyau de G ; on a :

$$|g(x)|^2 = \int e^{iux} dH(u)$$

dans ce cas (35-1) devient :

$$\Phi(u) = \int \varphi(u+t) dH(t) = \int e^{iux} |g(x)|^2 dF(x)$$

ce qui démontre le théorème.

35. b. Exemples

Si H est l'une des distributions carrées discontinues indiquées plus haut (n° 34) et $\varphi(u)$ une f.c., les expressions suivantes appartiennent à \mathcal{C}

$$\Phi_1 = n \varphi(u) + \sum_{p=1}^{n-1} (n-p) [\varphi(u+p) + \varphi(u-p)]$$

$$\Phi_2 = \sum_{p=-n}^{+n} C_{2n}^{n+p} \varphi(u+p)$$

CHAPITRE VI

FONCTIONS DE TYPE NON NÉGATIF A UNE OU PLUSIEURS VARIABLES

A. - FONCTIONS D'UNE VARIABLE

36. - DÉFINITION

Une fonction complexe bornée $f(u)$ est dite de "type non négatif" si, quelle que soit la distribution carrée $H(u)$ la mesure S de H par f est réelle non négative.

$$S = \mathcal{M}_H(f) = \int f(u) dH(u) \quad \text{réel} \geq 0 \quad (36-1)$$

avec :
$$dH(u) = \int_t dG(u+t) d\bar{G}(t)$$

Si H est le carré d'une distribution A complètement discontinue et définie par les valeurs (a_h) sur l'ensemble (u_h) avec $h = 1, 2, \dots, n$; on a :

$$S = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_h - x_k) a_h \bar{a}_k \quad (36-2)$$

Si, au contraire A est continue, définie pour $0 < u < U$ et admet la densité $g(u)$

$$S = \iint_0^U f(r-s) g(r) \bar{g}(s) dr ds \quad (36-3)$$

36. a. Exemples de fonction de type non négatif

1° - Toute fonction $\varphi(t) \in \mathcal{B}$ est du type non négatif. En effet d'après le théorème de Parseval généralisé (35) :

$$S = \int \varphi(t) dH(t) = \int h(x) dF(x)$$

avec :

$$h(x) = |g(x)|^2$$

$$S = \int |g(x)|^2 dF(x) \quad \text{est bien réel } \geq 0$$

2° - Tout carré de composition de fonction bornée de la classe \mathcal{L}^2 est de type non négatif -

$$\text{Soit } f(t) \in \mathcal{L}^2 \quad \text{et } \Phi(u) = \int f(u+t) \bar{f}(t) dt$$

et d'autre part :

$$H(u) = \int G(u+\theta) d\bar{G}(\theta)$$

$$S = \int \Phi(u) dH(u) = \iiint f(u+t) \bar{f}(t) dt dG(u+\theta) d\bar{G}(\theta)$$

$$S = \int dt \int \bar{f}(t) d\bar{G}(\theta) \int f(u+t) dG(u+\theta)$$

$$\text{si l'on pose } t = \theta + s \quad S = \int ds \int \bar{f}(\theta+s) d\bar{G}(\theta) \int f(u+\theta+s) dG(u+\theta)$$

$$S = \int | \int f(s+u) dG(u) |^2 ds \quad \text{réel } \geq 0$$

3° - S étant linéaire par rapport à H : les formes linéaires à coefficients positifs de fonctions de type non négatif sont aussi de type non négatif.

36.b. Théorème de Bochner

La classe des fonctions de type non négatif continues au voisinage de l'origine, coïncide avec la classe \mathcal{C} .

C'est là un théorème classique dont on peut en utilisant les résultats du chapitre V simplifier la démonstration :

Nous savons (36.a) que toute fonction de classe \mathcal{C} est de type non négatif.

Soit $f(t)$ de type non négatif, elle réalise en particulier :

$$f(0) (a \bar{a} + \bar{b} b) + f(t) a \bar{b} + f(-t) \bar{a} b \quad \text{réel } \geq 0$$

d'où :

$$f(-t) = \bar{f}(t) \quad |f(t)| \leq f(0)$$

Si l'on applique la relation de définition à une distribution discontinue réduite à trois sauts en t , $t+h$, $t+2h$ et si $f(0) = 1$, on obtient une

forme quadratique définie non négative de discriminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & f(h) & f(t+h) \\ \bar{f}(h) & 1 & f(t) \\ \bar{f}(t+h) & \bar{f} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{réel} \geq 0$$

d'où après développement :

$$|f(t+h) - f(t)|^2 \leq 1 - |f(h)|^2 + (\bar{f}(h) - 1) \bar{f}(t) f(t+h)$$

Si $h \rightarrow 0$ l'hypothèse de continuité à l'origine entraîne $(f_h - 1) \rightarrow 0$ il y a donc continuité partout.

D'autre part, soit $g(t) \in \mathcal{C}$ et $\mu(t)$ une fonction de \mathcal{C} absolument sommable. On peut choisir :

$$dH(t) = \mu(\varepsilon t) g(t) dt$$

et on doit avoir, quels que soient ε et g :

$$\int f(t) \mu(\varepsilon t) g(t) dt \text{ réel positif}$$

ce qui implique (31.b) que :

$\Phi_\varepsilon(t) = f(t) \mu(\varepsilon t)$ appartient à \mathcal{C} et cela quel que soit ε . Si $\varepsilon \rightarrow 0$ la limite $f(t)$ atteinte uniformément au voisinage de l'origine est aussi fonction de classe \mathcal{C} .

B. - DISTRIBUTIONS DE TYPE NON NÉGATIF

37. - DÉFINITION

Soit $H(u)$ la fonction marginale d'une distribution et $g(u)$ une fonction continue (réelle ou complexe) absolument sommable. On dit que la distribution (H) est de type non négatif si, quel que soit g , on a :

$$S = \iint_r^s g(r) \bar{g}(s) dH(r-s) dr \quad \text{réel positif ou nul}$$

S est la mesure de la distribution H par la distribution continue carrée de densité :

$$f(u) = \int g(u+v) \bar{g}(v) dv$$

37.a. Propriétés

Les distributions finies de type non négatif ont un noyau réel non négatif.

Si, dans la définition (37), on fait $g(u) = e^{iux}$

$$S = \int_{r=0}^u \int_{s=0}^u e^{irx} \bar{e}^{isx} dH(r-s) dr \quad \text{réel} \geq 0$$

posons $r - s = u$

$$\frac{1}{U} \int_{r=0}^u dr \int_{-u}^{+u} e^{iux} dH(u)$$

est aussi réel jamais négatif ainsi que sa limite pour $U \rightarrow \infty$ qui est le noyau de (H).

Conséquence

Soit (H) une distribution finie de type non négatif, de fonction marginale H(u) et une fonction φ de classe \mathcal{C} ; il résulte des propriétés précédentes et de (35) que $\Phi = \varphi * H$ est de classe \mathcal{C} .

38. - EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS DE TYPE NON NÉGATIF

1° - Tout carré de composition d'une distribution finie (A) est de type non négatif.

Soit $H = A * A$

$$\begin{aligned} S &= \iint_r \int_s g(r) \bar{g}(s) dA(r) d\bar{A}(s) \\ &= \int g(r) dA(r) \int \bar{g}(s) d\bar{A}(s) \\ &= \left| \int g(r) dA(r) \right|^2 \text{ donc réel } \geq 0 \end{aligned}$$

2° - Les distributions finies à noyau réel ≥ 0 sont de type non négatif. Soit (H) une telle distribution de noyau h(x) et soit :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} g(u) du \\ S &= \int dH(u) \int g(u+s) \bar{g}(s) ds \\ &= \int h(x) |\gamma(x)|^2 dx \end{aligned}$$

(en vertu du théorème de Parseval généralisé : 35).

Cette quantité est toujours réelle non négative.

Conclusion

Il y a identité entre trois classes de distributions finies : les carrés de composition de distributions finies ; celles à noyau réel ≥ 0 et les distributions de type non négatif.

39. - TRANSFORMATIONS DE DISTRIBUTIONS DE TYPE NON NÉGATIF

1° - Le produit de composition de deux distributions finies de type non négatif est une distribution de même type.

Une distribution finie est une forme linéaire de distributions de probabilités ; on déduit très facilement de là que le produit de composition est encore une distribution finie, celle-ci est à noyau réel non négatif : c'est donc une distribution de ce type.

2° - La relation de définition étant linéaire en H les transformations linéaires à coefficients positifs conservent le type fini non négatif.

39.a. Les transformations H et \mathcal{H}

La transformation H fait correspondre à f(u) continue la fonction g(u)

$$H.f(u) = g(u) = \frac{1}{u} \int_0^u f(s) ds \quad (\text{chap. III})$$

La transformation \mathcal{H} fait correspondre à la distribution finie (A) la distribution continue (sauf peut-être à l'origine) et de densité :

$$\left\{ \begin{array}{l} k(u) = \int_u^\infty \frac{dH(x)}{x} \quad \text{pour } u > 0 \\ k(u) = \int_{-\infty}^u \frac{dH(x)}{-x} \quad \text{pour } u < 0 \end{array} \right.$$

1 - Théorème fondamental -

La mesure de (A) par Hf est la mesure de $\mathcal{H} A$ par f.

$$\begin{aligned} \text{Soit : } S &= \mathfrak{M}_A (Hf) = \int \frac{dA(u)}{u} \int_0^u f(x) dx \\ &= \iint \frac{dA(u)}{|u|} f(x) dx \quad \text{étendue au domaine } 0 < x < u \text{ et } u < x < 0 \end{aligned}$$

en intégrant en u pour x constant :

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^\infty f(x) dx \int_x^\infty \frac{dA(u)}{u} + \int_{-\infty}^0 f(x) dx \int_{-\infty}^x \frac{dA(u)}{-u} \\ S &= \int f(x) k(x) dx = \mathfrak{M}_{\mathcal{H}A} (f) \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

2° - Si (A) est une distribution finie de type non négatif il en est de même de la distribution ($\mathcal{H} . A$).

Il est évident que ($\mathcal{H} . A$) est finie en même temps que (A) (mêmes masses réparties d'une autre manière).

Si $\gamma(x)$ est le noyau de A ; $(\mathcal{H}.A)$ a pour noyau $\frac{1}{x} \int_0^x \gamma(s) ds$ réel positif.

3° - Si $f(u)$ est une fonction absolument intégrable de type non négatif (une f.c. absolument intégrable par exemple) l'opération \mathcal{H} la transforme en fonction de type non négatif.

$f(u)$ est la densité d'une distribution (A) finie de type non négatif à laquelle on applique la transformation \mathcal{H} .

4° - Si $f(u)$ est une fonction intégrable de type non négatif ; la fonction $H.f(u)$ est aussi de ce type.

Soit une distribution carrée quelconque $A(u)$ on doit avoir :

$$S = \int H.f(u) dA(u) \quad \text{réel} \geq 0$$

or : $S = \int f(u) d(\mathcal{H}.A)_u$ qui est bien réel ≥ 0 d'après les hypothèses.

40. - DISTRIBUTIONS DISCONTINUES DE TYPE NON NÉGATIF

Le cas des distributions complètement discontinues mérite d'être explicité. La fonction de sauts $C(u)$ qui en dérive est définie par un ensemble discontinu ξ . Cette distribution est de type non négatif si quel que soit l'ensemble des valeurs a_i en x_i $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\sum_i \sum_j C(x_i - x_j) a_i \bar{a}_j \text{ est réel } \geq 0$$

cette définition équivaut à la définition (37).

On montre facilement que l'ensemble ξ est symétrique et comprend l'origine ; la fonction $C(u)$ réalise :

$$C(-u_i) = \overline{C(u_i)}$$

$$C(u_i) \leq C(0) \quad \text{réel positif}$$

40.a.

Les fonctions discrètes telles que T_n et C_{2p} dérivant de carrés de distributions et les formes linéaires à coefficients positifs de ces fonctions sont de type non négatif.

En particulier : soit R_h une distribution de deux masses positives égales et symétriques :

$$\Delta R(u_h) = \Delta R(-u_h) = p_h$$

On considère un ensemble R réunion de distributions (R_h) avec $\sum_h 2p_h = r$ et soit I la distribution de masse 1 à l'origine.

La distribution $R + rI$ est de type non négatif. En effet :

$$R + rI = \sum_h (R_h + 2 p_h I)$$

où $R_h + 2 p_h I$ est triangulaire donc de type non négatif.

Par suite : si $\varphi(t)$ est f.c. $\Phi(t)$ est fonction de classe \mathcal{C} .

avec :
$$\Phi(t) = \varphi(t) + \sum_n p_n [\varphi(t + t_n) + \varphi(t - t_n)]$$

avec $p_n > 0$ $p_n \leq \frac{1}{2}$

41. - EXTENSION A DES DISTRIBUTIONS INFINIES

On peut étendre les résultats précédents et transformer des f.c. par des distributions infinies, mais restant finies sur tout domaine fini.

Soit $A(u)$ la fonction marginale (on lui donne une valeur finie pour $u=0$) et $A_n(u)$ telle que :

$$dA_n(u) = f_n(u) dA(u)$$

où $f_n(u)$ appartient à la famille des fonctions f absolument continues inférieures ou égales à 1 en module et qui tendent vers 0 à l'infini. On peut extraire de la famille des fonctions f une suite f_n tendant vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$ et telle que les distributions A_n restent finies.

Soit alors φ une f.c.

$$\Phi_n(t) = \int \varphi(t+u) dA_n(u) \text{ est de classe } \mathcal{C}.$$

Si Φ_n converge vers une limite atteinte uniformément au voisinage de l'origine, cette limite est elle aussi une fonction de classe \mathcal{C} .

41.a. - EXEMPLE -

Soit une distribution (J) telle que :

$$\Delta J(u) = 1 \text{ pour } x \text{ entier, positif, négatif ou nul}$$

$$\Delta J(u) = 0 \text{ ailleurs}$$

Nous appellerons noyau de (J) la fonction :

$$\gamma(x) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{+U} e^{iux} dJ(u)$$

$\gamma(x)$ s'identifie à la fonction de saut ΔJ mais répartie sur le treillis $(0, 2\pi)$ au lieu de $(0, 1)$.

Soit $\varphi(t)$ une f.c. décroissant plus vite que $\frac{1}{t}$ (donc d'une répartition absolument continue de densité $f(x)$).

$$\Phi(t) = \varphi * J = \varphi(t) + \varphi(t+1) + \varphi(t-1) + \dots + \varphi(t+n) + \varphi(t-n) + \dots$$

est une fonction de la classe \mathcal{C} et $\frac{\Phi(t)}{\Phi(0)}$ est la f.c. d'une distribution complètement discontinue comprenant les masses proportionnelles à $f(x)$ en

$$x = 2\pi h \quad h \text{ entier } \geq 0.$$

C. - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

L'extension des définitions et propriétés précédentes peut s'étendre de deux manières différentes. Avant la généralisation proprement dite (qui se rattache aux f.c. d'éléments aléatoires d'un espace E_n) voyons une extension très importante dans la pratique et qui s'applique à des fonctions Γ d'un espace carré $E \times E$ donc à 2 (ou à $2n$) dimensions.

42. - MATRICES DE TYPE NON NÉGATIF

Si l'ensemble E est discret, réduit à n valeurs et dans le cas de deux variables, le tableau des valeurs de Γ est une matrice carrée de rang N .

La matrice de terme général $A_h^k = a_h \bar{a}_k \quad h = 1, 2, \dots, n$ est dite: "matrice produit élémentaire". Une telle surface est carrée, hermitienne.

On peut définir la mesure d'une matrice A par une matrice de même rang B comme suit :

Si :

$$A = \left\{ A_h^k \right\} \quad B = \left\{ B_l^j \right\}$$

$$\text{mesure } S = [A \cdot B] = \sum_h \sum_k A_h^k B_h^k$$

Définition

Une matrice Λ de rang n est dite de "type non négatif" si, quelle que soit la matrice produit élémentaire Λ_n .

$$S = [\Lambda \Lambda_n] \quad \text{est réel } \geq 0$$

Exemples

1° - Toute matrice produit élémentaire est de type non négatif

Si

$$\Lambda = \left\{ b_h \bar{b}_k \right\} \quad \text{et} \quad \Lambda_n = a_h \bar{a}_k$$

$$S = \sum_h \sum_k b_h \bar{b}_k a_h \bar{a}_k = \left| \sum_h a_h b_h \right|^2$$

2° - Les formes linéaires à coefficients positifs de matrices de type non négatif sont du même type.

3° - Les matrices de moments liés de variables aléatoires définies sur une même catégorie d'épreuves sont de type non négatif :

$$\text{Soit :} \quad A = \left\{ \mu_{hk} \right\} = \left\{ E(X_h X_k) \right\}$$

$$\text{et} \quad \Lambda_n = \left\{ a_h \bar{a}_k \right\}$$

$$S = \sum_h \sum_k \mu_{hk} a_h \bar{a}_k = E \left| \sum_h a_h X_h \right|^2$$

Si A est une matrice de type non négatif, la fonction discrète :

$$f(u) = \sum_{h-k=u} A_h^k \quad \text{est de type non négatif.}$$

42.a. Fonctions définies sur un ensemble continu

Soit $\Gamma(t, t')$ définie sur un ensemble carré continu : $t_0 < t < t_1$, elle est dite de type non négatif si, quelle que soit la distribution H on a :

$$\int \int \Gamma(r, s) dH(r) d\bar{H}(s) \text{ réel } \geq 0$$

Exemples

- 1° - $\Gamma(r, s) = f(r) \bar{f}(s)$ est de type non négatif où $f(t)$ est une fonction continue pour : $t_0 < t < t_1$.
- 2° - Les formes linéaires à coefficients positifs de telles fonctions sont du même type.
- 3° - Le moment mutuel d'une famille continue de variables aléatoires et par suite la covariance d'une fonction aléatoire est de ce type. Réciproquement toute fonction de type non négatif est la covariance d'une fonction aléatoire du 2ème ordre.

42.b. Transformations

Le produit multiplicatif et le produit de composition (convenablement étendu dans sa définition) sont fermés sur la classe des fonctions de type non négatif au sens de (42.a).

- 1° - On sait que le produit de deux covariances est une covariance.
- 2° - Soit $\Gamma(t, t')$ continue, définie sur $(-\infty, +\infty)$ et $A(\theta)$ la fonction marginale d'une distribution finie où $0 < \theta < T$.

On forme :

$$G(t, t') = \int_{\theta=0}^T \int_{\theta'=0}^T \Gamma(t + \theta, t' + \theta') dA(\theta) d\bar{A}(\theta')$$

c'est encore une fonction de type non négatif.

En effet Γ s'identifie à la covariance d'une fonction $X(t)$ et

$$Y(t) = \int_{\theta=0}^T X(t + \theta) dA(\theta)$$

est une fonction aléatoire qui admet précisément pour covariance $G(t, t')$.

Si Γ n'est pas continue, elle peut être approchée autant qu'on le veut par des covariances et le résultat des opérations est encore une fonction de type non négatif.

43. - FONCTIONS DE TYPE NON NÉGATIF DE PLUSIEURS VARIABLES

La généralisation a un nombre quelconque de variables se fait d'une autre manière.

Une distribution finie dans un espace à n dimensions est définie par sa fonction marginale $H(u^1, u^2, \dots, u^n)$ à variations bornées.

Son noyau est : $h(v_1, v_2, \dots, v_n) = \iint_n e^{u^1 v_1 + \dots + u^n v_n} d^n H(u^1 \dots u^n)$

Le produit de composition de $F(u^1 \dots u^n)$ par $G(u^1 \dots u^n)$ est $H(u^1 \dots u^n)$ avec :

$$H(u^1 \dots u^n) = \iint_n F(u^1 + r^1 \dots u^n + r^n) d^n G(r^1 \dots r^n)$$

soit : $d^n H(u^1 \dots u^n) = \int_n d^n F(u^1 + r^1 \dots u^n + r^n) d^n G(r^1 \dots r^n)$

dont le noyau est le produit du noyau de F par le conjugué du noyau de G .

Pour $F = G$ se trouve définie une "distribution carrée" avec un noyau réel positif.

La mesure d'une distribution $H(u^1 \dots u^n)$ par une fonction $f(u^1 \dots u^n)$

$$\mathcal{M}_H(f) = \iint_n f(u^1 \dots u^n) d^n H(u^1 \dots u^n)$$

ce qui entraîne les définitions de fonctions et distributions de type non négatif.

Enfin la relation de Parseval (35) s'étend sans difficulté :

Soit $F(x_1 \dots x_n)$ et $H(u^1 \dots u^n)$ deux distributions finies de noyaux respectifs $\varphi(u^1 \dots u^n)$ et $h(x_1 \dots x_n)$.

$$\Phi(v^1 \dots v^n) = \iint_n \varphi(v^1 + u^1 \dots v^n + u^n) d^n H(u^1 \dots u^n)$$

$$(1) \quad = \iint_n e^{i(v^1 x_1 + \dots + v^n x_n)} d^n F(x_1 \dots x_n) h(x_1 \dots x_n)$$

soit, si tous les $v^i = 0$

$$(2) \quad \iint_n \varphi(u^1 \dots u^n) d^n H(u^1 \dots u^n) = \iint_n h(x_1 \dots x_n) d^n F(x_1 \dots x_n)$$

Les théorèmes de convergence des suites de fonctions de répartitions et de fonctions caractéristiques s'appliquent sans aucune modification aux fonctions de répartitions marginales et aux valeurs de φ sur les axes ; et également aux répartitions marginales des formes linéaires homogènes des variables dont les f.c. sont les valeurs de φ sur des droites issues de l'origine. La condition de convergence uniforme de $\varphi(t)$ dans un petit intervalle entourant l'origine subsiste pour $\varphi(u^1 \dots u^n)$ en remplaçant "intervalle" par "domaine".

Ainsi le théorème de M. P. Lévy qui déduit de la convergence de $\varphi_n \rightarrow \varphi$ celle de $F_n \rightarrow F$ s'applique immédiatement aux valeurs de φ sur toute droite issue de l'origine donc partout. On voit ainsi que tous les développements précédents s'étendent.

Signalons en particulier l'extension du théorème de Khintchine. Il est nécessaire et suffisant pour que $\varphi(u^1 \dots u^n)$ soit f.c. d'un ensemble aléatoire à n dimensions qu'elle soit limite, atteinte uniformément dans tout

domaine fini d'expressions de la forme :

avec :

$$\iint_n g(u^1 + r^1 \dots u^n + r^n) \bar{g}(r^1 \dots r^n) dr^1 \dots dr^n$$

$$\iint_n |g(u^1 \dots u^n)|^2 du^1 \dots du^n = 1$$

De même les transformations H et \mathcal{H} peuvent s'appliquer successivement par rapport à chacune des variables et les résultats du chapitre III subsistent.

Voici à titre d'exemple la généralisation du théorème (15) pour deux variables (deux seulement afin de ne pas compliquer inutilement les notations).

Soit une distribution de probabilité en (xy) de f. r. F(x, y) et $\varphi(u, v)$ sa f. c. On forme la répartition à trois dimensions de loi élémentaire :

$$d^2 F(xy) \frac{dz}{|x|} \quad \text{pour } |z| < |x| \text{ et nulle ailleurs}$$

C'est en (zy) la transformée par \mathcal{H}_x , de la distribution en (xy). $\varphi(x, v, w)$ est après réduction :

$$\frac{1}{w} \iint e^{i(ux + vy)} \frac{e^{iux} - 1}{ix} d^2 F(xy)$$

d'où l'on déduit que :

$$\frac{1}{w} \int \varphi_{xy}(uv) du = \varphi_{zy}(w, v) = H_u \cdot \varphi(u, v)$$

Donc si $\varphi(u^1 \dots u^k \dots u^n)$ est f. c.

$$\Phi = H_{u^k} \varphi = \frac{1}{u^k} \int_0^{u^k} \varphi(u^1 \dots u^k \dots u^n) du^k$$

est aussi f. c. et la transformation peut se faire successivement pour chacune des variables.

CHAPITRE VII

LOIS CONVEXES

44. - FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES CONVEXES

Polya(1) a mis en évidence une condition suffisante simple pour qu'une fonction soit la caractéristique d'une loi de probabilité. Les fonctions caractéristiques sont dites "convexes"; et, par extension nous dirons que les lois qu'elles représentent sont aussi des "lois convexes".

La définition des f.c. convexes résulte du théorème suivant.

Théorème de Polya

Une fonction $\varphi(t)$ définie pour toutes les valeurs réelles de la variable t et réalisant les propriétés suivantes :

Conditions I

- a) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) \text{ est réelle continue} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} \end{array} \right.$
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$

c) $\varphi(t)$ est convexe pour $t > 0$ (c'est-à-dire $\Delta\varphi \leq 0$ et $\Delta^2\varphi \geq 0$ est une f.c. qui correspond à une fonction de répartition $F(x)$ admettant une dérivée F'_x régulière et continue sauf peut-être en $x = 0$ et admettant une densité $f(x)$. On s'assure facilement grâce à la condition (C) que $f(x) \geq 0$. Nous avons donné (2) une démonstration plus intuitive que celle de Polya, basée sur des considérations géométriques et qui montre le lien entre le caractère de convexité de φ et le signe de $f(x)$.

44.a. Extension

On peut donner des conditions suffisantes aussi simples et un peu plus

(1) Polya - Remarks on characteristic functions - Proceedings of the Berkeley Symposium - Université of Californie Press.

(2) D. Dugué et M. Girault : Fonctions convexes de Polya - I.S.U.P. vol IV. fasc. 1, 1955.

larges en modifiant la condition (b) comme suit :

Conditions II

Si $\varphi(t)$ réalise les conditions (a) (c) et (b')

(b') : $\varphi(t)$ jamais négatif : c'est une f.c.

En effet, soit $\varphi(t)$ convexe du type Polya (condition I) et $\varphi_1 = 1$

On forme :

$$\Phi(t) = p\varphi + q\varphi_1 \text{ avec } p \geq 0 \quad q \geq 0 \quad p + q = 1$$

C'est une f.c. et elle satisfait aux conditions II.

Réciproquement : Soit Φ satisfaisant aux conditions II. Sa limite pour $t \rightarrow \infty$ est positive ou nulle : soit q .

$$\Phi = p\varphi + q\varphi_1$$

où φ est une caractéristique de Polya et Φ est bien une f.c.

44.b. Exemple

Un exemple important est la fonction :

$$k\left(\frac{t}{a}\right) = 1 - \left|\frac{t}{a}\right| \quad \text{pour } |t| < a \quad a > 0$$

$$k\left(\frac{t}{a}\right) = 0 \quad \text{pour } |t| > a$$

La répartition correspondante a pour densité : $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos ax}{ax^2}$

Nous noterons $K(a)$ cette loi, dite "loi de Khintchine".

45. - PROPRIÉTÉS DE LA CLASSE DES LOIS CONVEXES

1° - La classe des f.c. convexes est fermée sur l'ensemble des transformations linéaires à coefficients positifs.

a - Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont convexes et $p_i \geq 0$ avec $\sum_1^n p_i = 1$
 $\Phi = p_1\varphi_1 + \dots + p_n\varphi_n$ est aussi une f.c. convexe.

b - Par passage à la limite, à partir d'une famille de f.c. convexes $\varphi(t, c)$ on aura de même :

$$\Phi(t) = \int \varphi(t, c) dF(c)$$

où $F(c)$ est monotone non décroissante et à variation totale unité.

2° - La classe des f.c. convexes est fermée sur la multiplication.

En effet : si $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont convexes, il en est de même de :

$$\varphi_3(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$$

On voit facilement que $\Delta \varphi_3 \leq 0$ et $\Delta^2 \varphi_3 \geq 0$.

3° - La transformation de B. de Finetti peut s'appliquer :

Si $\varphi(t)$ est caractéristique convexe :

$$\varphi_1 = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p}{n} \varphi(t) \text{ est du même type,}$$

et φ_1^n ainsi que sa limite pour n infini, soit $e^{p(\varphi(t)-1)}$

Conséquences relatives aux lois convexes

1° - Tout mélange de lois convexes est une loi convexe.

2° - La somme de deux v. a. convexes est une variable convexe.

On peut préciser un théorème central limite pour les lois convexes :

Théorème : Soit X une variable aléatoire convexe (qui ne soit pas presque certainement nulle) : la moyenne d'un échantillon de n variables converge en loi vers la loi de Cauchy.

Soit $\varphi(t)$ la f.c. de X ; la moyenne de n échantillons indépendants a pour f.c. $\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$. Or $\varphi(t)$ a une dérivée à droite pour $t > 0$, égale et de signe contraire à sa dérivée à gauche pour $t < 0$ et définie pour $t = 0$:

Soit $\varphi'(0) = \lim \varphi'(t)$ pour $t > 0$ tendant vers zéro.

Dans un intervalle assez petit autour de l'origine :

$$\varphi(t) = 1 + |t| (\varphi' + \varepsilon)$$

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{|t|}{n} (\varphi'_0 + \varepsilon)\right]^n$$

dont la limite pour $n \rightarrow \infty$ est $e^{|t|\varphi'_0}$, limite atteinte uniformément dans un intervalle assez petit entourant l'origine.

Extension : Le théorème peut s'étendre au cas où les variables tout en restant indépendantes et convexes ne suivent pas nécessairement la même loi. Si les dérivées à droite à l'origine : φ'_{i0} ont une moyenne qui converge vers une limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi'_{i0}}{n} = c$$

la moyenne des variables aléatoires a pour f.c. limite : $e^{-|t|c}$

3° - Le produit d'une variable convexe pour une variable aléatoire quelconque (indépendante de la première) est une variable convexe.

En effet : Soit X variable aléatoire convexe de f.c. $\varphi(t)$

Y variable aléatoire quelconque de f.r. $F(\gamma)$

le produit $XY = Z$ a pour fonction caractéristique :

$$\Phi_z(t) = \int \varphi(ty) dF(y)$$

c'est donc aussi une f.c. convexe.

En particulier (pour Y ayant une répartition uniforme de 0 à 1) on en

déduit que si :

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du$$

et $\Phi(t)$ est convexe lorsque φ l'est aussi.

4° - Le quotient d'une variable convexe par une loi quelconque (presque certainement non nulle) est une variable convexe,

Avec les notations précédentes : $\frac{X}{Y} = Z$ a pour f. c.

$$\Phi_z(t) = \int \varphi\left(\frac{t}{y}\right) dF(y)$$

46. - LOI CONVEXE ÉLÉMENTAIRE

La loi de Khintchine $K(a)$ joue le rôle de loi convexe élémentaire, car, à partir d'elle on peut obtenir toute autre loi convexe par produit (ou quotient) d'une variable aléatoire soumise à cette loi par une variable aléatoire indépendante d'elle. Ce résultat a été donné par D. Dugué (1) avec l'énoncé suivant :

Si $\varphi(t)$ est une f. c. convexe : c'est la f. c. du quotient de deux variables aléatoires indépendantes, la variable numérateur étant une variable de Khintchine. C'est donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable ait une loi convexe.

La loi de Khintchine est la seule qui jouisse de cette propriété.

Soit en effet : X de f. c. $\varphi(t)$ avec $\varphi' > 0$ non identiquement nul
et Y de f. r. $F(y)$

$Z = XY$ aura une f. c. Φ avec $\Phi_z''(t) = \int \varphi''(ty) y^2 dF(y)$ strictement positif, donc $k(t)$ en particulier ne peut pas être obtenu par cette méthode.

47. - DISTRIBUTIONS DISCONTINUES CONVEXES

Soit une distribution finie, complètement discontinue V ; la fonction de sauts $\Delta V(t)$ étant définie pour les valeurs entières symétriques :

$$t = 0 \quad t = \pm 1 \dots t = \pm n \dots$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta V(0) &> \Delta V(n) \geq 0 \\ \Delta V(-n) &= \Delta V(n) \\ \Delta V(n-2) - \Delta V(n-1) &\geq \Delta V(n-1) - \Delta V(n) \end{aligned}$$

une telle distribution sera dite "convexe".

(1) D. Dugué et M. Girault : Fonctions convexes de Polya, I.S.U.P. vol IV, fasc. 1 1955.

Théorème : Toute distribution convexe est de type non négatif.

Soit tout d'abord une distribution de support fini $(-n+1) a$ à $(+n-1) a$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= 0 \\ \Delta V(n-1) &= a_1 \\ \Delta V(n-2) &= 2 a_1 + a_2 \\ &\dots\dots \\ \Delta V(0) &= n a_1 + (n-1) a_2 + \dots + 2 a_{n-1} + a_n \quad a_i \geq 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des a_1 forme la distribution triangulaire $a_1 T_n$

L'ensemble des a_2 forme la distribution triangulaire $a_2 T_{n-1}$ etc...

V est une somme finie de distributions triangulaires : c'est une distribution de type non négatif.

On étend le résultat au cas de distributions à supports infinis par limite de distributions précédentes.

48. - EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS DE F.C. CONVEXES

1° - Soit une f.c. convexe nulle en dehors d'un intervalle $(-a, +a)$ telle que $k(\frac{t}{a})$ par exemple et la distribution J du (n° 41.a) avec la raison du support égale à $2 a$.

$k(\frac{t}{a}) * J$ est une fonction définie pour toutes les valeurs de t : c'est une f.c. périodique représentée par $k(\frac{t}{a})$ dans l'intervalle $(-a, +a)$. Elle caractérise la distribution complètement discontinue de treillis $(0, \frac{\pi}{a})$, où la masse en $x = k \frac{\pi}{a}$ est :

$$p_k = \frac{2}{k^2 \pi^2} \text{ pour } k \text{ impair positif ou négatif}$$

$$p_0 = \frac{1}{2}$$

Cette distribution est elle-même de type non négatif puisque sa f.c. est ≥ 0 .

2° - De même $e^{-|t|} * J$ définit la f.c. d'une distribution de treillis quel que soit la raison donnée au support de (J) .

3° - Le produit $k(t) * C_{2p}$ (voir n° 34) une fois réduit est une fonction caractéristique : c'est un contour polygonal dont les sommets ont des abscisses entières et des ordonnées proportionnelles aux coefficients du binôme $(a+b)^{2p}$. La limite pour $p \rightarrow \infty$ est la f.c. des lois de Laplace-Gauss.

BIBLIOGRAPHIE

Indiquons l'ordre de distribution des types non égaux.
Soit tout d'abord une distribution de support fini $(-n-1) \leq k \leq n$

avec : $\Delta V(n) = 0$
 $\Delta V(n-1) = a$

A. S. BESICOVITCH
A. S. Besicovitch, *Convex Functions*
Lover Publications 1954

H. BOHR $\Delta V(n) = a + (n-1)a + \dots + 2a + a$

L'ensemble des $\Delta V(n)$ est une distribution triangulaire Δ , T ,
l'ensemble des $\Delta V(n)$ est une distribution triangulaire Δ , T , etc.

31 BOHRNE comme liste de distributions triangulaires ; c'est une distribu-
tion de type non égaux.
32 Voir l'ouvrage de l'auteur.
On étend le résultat au cas de distributions à supports infinis par li-
mite de distributions précédentes.

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS DE F.C. CONVEXES

1. Soit une f.c. convexe définie en dehors d'un intervalle $(-a, a)$ telle
que $f(x) = 0$ pour $x > a$ et $f(x) = 0$ pour $x < -a$. Soit la transformée
de Fourier $\Delta V(x)$ de $f(x)$. On a $\Delta V(x) = 0$ pour $x > a$ et $\Delta V(x) = 0$
pour $x < -a$. On a aussi $\Delta V(x) = 0$ pour $x \in (-a, a)$. Elle caracté-
rise la distribution complètement discontinue de densité $(\frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x+a))$, ce la

car $\Delta V(x) = \frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x+a)$ est la transformée de Fourier de $f(x)$.

2. Soit l'indétermination de la transformée de Fourier de $f(x) = 1$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$. Cette distribution est de type non égaux puisque sa f.c.

est $\Delta V(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-a)$. Sur les relations linéaires
entre les distributions $\Delta V(x)$ et $\Delta V(x-a)$ voir l'ouvrage de l'auteur.

3. Soit la transformée de Fourier de $f(x) = 1$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$. Cette distribution est de type non égaux puisque sa f.c.

est $\Delta V(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-a)$. Sur les propriétés caracté-
ristiques de ces distributions voir l'ouvrage de l'auteur.

4. Soit la transformée de Fourier de $f(x) = 1$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x < 0$. Cette distribution est de type non égaux puisque sa f.c.

est $\Delta V(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-a)$. Sur quelques propriétés
de ces distributions voir l'ouvrage de l'auteur.

BIBLIOGRAPHIE

A.S. BESICOVITCH

1. Almost periodic functions
Dover Publications 1954

H. BOHR

1. Almost periodic functions
Trad. H. Cohn - New-Tork - 1951

S. BOCHNER

1. Vorlesungen über Fouriersche integrale
Leipzig - 1932

A. CAUCHY

1. Oeuvres - tome XII

H. CRAMER

1. Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungs funktion
Math. Zeitschrift - 41 - 1936, P.405-414
2. On the representation of a functions by certain Fourier Integrals
Trans. Amer. Math. Soc. 46, 1939
3. Mathematical Methods of Statistics - 1946

G.DARMOIS

1. Sur la théorie des deux facteurs
C.R. Ac.Sc. Paris, 1934 - p.1176 et 1358
2. Sur l'indétermination du facteur général dans la théorie de Spearman
Mathematica - Vol. XII - 1936
3. Sur les régressions linéaires et paraboliques
Conférence au Congrès de la Victoire - Oct. 1945
Intermédiaire des Recherches Math. - Janvier 1947
4. Analyse des liaisons de probabilité
Intern. Stat. Inst. Vol. III-1947, p.231-240
5. Sur certaines formes de liaisons de probabilité
Colloque Lyon 1948
6. Sur une propriété caractéristique de la Loi de Laplace-Gauss
C.R. Ac.Sc. 28 Mai 1951
7. Analyse générale des liaisons stochastiques. Etude particulière de l'analyse factorielle linéaire
Conf. Calcutta 1952
8. Sur quelques propriétés de la loi de Laplace-Gauss
Conf. New-Delhi - 1952

D. DUGUE

1. Sur quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques
C.R. Ac.Sc. 5 Juin 1939
2. Sur certaines composantes des lois de Cauchy
C.R. Ac.Sc. 24 Novembre 1941
3. Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité (en collaboration avec R.A. Fisher)
C.R. Ac.Sc. 8 Décembre 1948
4. Sur certaines propriétés des lois indéfiniment divisibles
C.R. Ac.Sc. 9 Janvier 1950
5. Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité
Annales Inst. Poincaré, T.XII - 1951
6. Analyticit  et convexité des fonctions caractéristiques
Annales Inst. Poincaré, T.XIII - 1951

KY FAN

1. Les fonctions définies positives et les fonctions complètement monotones
Mémorial Sc. Math. Fasc. CXIV - 1950

M. FRECHET

1. Recherches modernes sur le calcul des probabilités

GNEDENKO et KOLMOGOROV

1. Limit distributions for sums of independent random variables
Trad. K.L. Chung, Cambridge

HOBSON

1. The theory of functions of real variables

A. KHINTCHINE

1. On unimodal distributions
Inst. Math. Meh. Toms - 1938

G. KUNETZ

1. Sur quelques propriétés des fonctions caractéristiques
Thèse - Paris - 1937

P.S. LAPLACE

1. Théorie analytique des probabilités

LAGRANGE

1. Oeuvres
Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations
Paris - 1868 - Tome II, p.171   234

LEBESGUE

1. Leçons sur l'intégration
2. Sur les séries trigonométriques
Annales Ec. Norm. Sup. Tome 20 - 1903

P. LEVY

1. Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques
C.R. Ac.Sc. 1922 - p.854
2. Calcul des Probabilités
Paris - 1925

H. LOEFFEL

1. Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre
C.R. Ac.Sc. 16 Mai 1955

M. LOEVE

1. Probability Theory
New-York - 1955

E. LUKACS

1. On certain periodic characteristics functions
Proceedings Int. Congress Amsterdam -
1954 - p. 296

M. MATHIAS

1. Ueber positive Fourier Integrale
Math. Zeits., 16 - 1923

H. POINCARÉ

1. Calcul des Probabilités
(2ème Edition)

POISSON

1. Recherche sur la probabilité des jugements

G. POLYA

1. Remarks on characteristic functions
Proc. Berkeley Symposium

M. RUBBINS

1. Mixture of distributions
Annals of Math. Stat.
Vol. XIX - n° 3, Sept. 1948

E. C. TITCHMARSH

1. The theory of functions
2ème éd. Oxford - 1948
2. Introduction to the theory of Fourier Integrals - 2
2ème éd. Oxford - 1948

D. V. WIDDER

1. The Laplace transform
Princeton - 1941



TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	223
CHAPITRE PREMIER. - Définition et propriétés des fonctions caractéristiques	227
CHAPITRE II. - Les trois types de fonctions caractéristiques	235
CHAPITRE III. - Transformation H et distributions unimodales ..	251
CHAPITRE IV. - L'application du produit de composition aux fonctions caractéristiques	259
CHAPITRE V. - La classe des fonctions définies positives	269
CHAPITRE VI. - Fonctions de type non négatif à une ou plusieurs variables	277
CHAPITRE VII. - Lois convexes	289
BIBLIOGRAPHIE	295

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

Année 1952

INTRODUCTION 223

FASCICULE

CHAPITRE PREMIER. - Définition et propriétés des fonctions
 D. BOUQUÉ - M. GIRAULT - Définition 227

CHAPITRE II. - Les bases types de fonctions caractéristiques 232

CHAPITRE III. - Les fonctions caractéristiques des distributions animales 231

CHAPITRE IV. - Les applications des résultats de composition aux
 fonctions caractéristiques 237

CHAPITRE V. - Les moments des fonctions caractéristiques positives 243

CHAPITRE VI. - Fonctions de type non négatif à une ou plusieurs
 variables 277

CHAPITRE VII. - Lois FURUKAWA & 280

BIBLIOPHILIE 288

FASCIC

M. GIRAULT - Les fonctions caractéristiques

TABLE DES MATIÈRES

Volume IV

Année 1955

FASCICULE 1

	Pages
D. DUGUE et M. GIRAULT. - Fonctions convexes de Polya	1-10
M. FRECHET. - Courbes aléatoires	11-20
E. HALPHEN. - Les fonctions factorielles	21-39
E. HALPHEN. - La notion de vraisemblance	41-71
J.L. SOULE. - Energie cinétique moyenne d'une particule en mouvement brownien dans un fluide réel	93-104

FASCICULES 2 et 3 REUNIS

J. VILLE	105-220
--------------------	---------

FASCICULE 4

M. GIRAULT. - Les fonctions caractéristiques et leurs transformations	221
--	-----

